

Классические интегрируемые модели

В.Э. Адлер · 05.02–23.04.2018 · Черновая версия

Содержание

1	Нелинейные волны	3
1.1	Опрокидывание, дисперсия и диссипация	3
1.2	Решения в виде бегущей волны	4
1.3	Про лошадь	7
1.4	Численные эксперименты	7
1.5	Задачи. Графики и численный счёт	10
2	Законы сохранения	14
2.1	Сохраняющиеся величины	14
2.2	Преобразование Миуры	15
2.3	Дифференциальная алгебра	17
2.4	Уравнение Бюргерса	19
2.5	Задачи. Символьные вычисления	21
3	Спектральная задача	24
3.1	Линеаризация преобразования Миуры	24
3.2	Представление нулевой кривизны и представление Лакса	25
3.3	Иерархия КдФ	27
3.4	Локальность потоков	28
3.5	Примеры	30
3.6	Задачи. Представления нулевой кривизны	32
4	Высшие симметрии	35
4.1	Высшие, или обобщённые симметрии	35
4.2	Коммутативность потоков КдФ	37
4.3	Уравнения Дубровина	39
4.4	Однородные многочлены	42
4.5	Задачи. Метод неопределённых коэффициентов	45
5	Многосолитонные решения	47
5.1	Потенциалы Баргманна	47
5.2	Вронскианские формулы	49
5.3	Свойства n -солитонного решения	51
5.4	Так как же всё-таки взаимодействуют солитоны?	55
5.5	Задачи	58

6	Преобразование Дарбу–Бэклунда	59
6.1	Преобразование Бэклунда для уравнения КдФ	59
6.2	Коммутативность преобразований Бэклунда	62
6.3	Преобразование Дарбу для оператора Шрёдингера	66
6.4	Вронскианы	68
6.5	Задачи. Опять солитоны...	70
7	Линеаризуемые уравнения	73
7.1	Иерархия Бюргерса	73
7.2	Многочлены Белла и разбиения множеств	75
7.3	Уравнение Лиувилля	78
7.4	Двумерная цепочка Тоды с закреплёнными концами	80
7.5	Задачи	83
8	Классические симметрии	85
8.1	Непрерывные группы преобразований	85
8.2	Преобразования для ОДУ	89
8.3	Преобразования для уравнения в частных производных	91
8.4	Продолжение генератора для однопараметрической группы	94
8.5	Задачи. Замены переменных	97
9	Групповой анализ	99
9.1	Вычисление алгебры симметрий для ОДУ	99
9.2	Вычисления для уравнений в частных производных	103
9.3	Дифференциальные инварианты	106
9.4	Инвариантные решения	111
9.5	Задачи	114
10	Уравнения Пенлеве	115
10.1	Свойство Пенлеве	115
10.2	Приложения к уравнениям в частных производных	118
10.3	Уравнения Пенлеве и цепочки	120
10.4	Некоторые свойства уравнений Пенлеве	124
10.5	Задачи	125
11	Гамильтонова структура	127
11.1	Вариационные уравнения	127
11.2	Гамильтоновость в конечномерном случае	131
11.3	Гамильтоновость для эволюционных уравнений	134
11.4	Бигамильтоновость	136
11.5	Задачи	137

1 Нелинейные волны

Дисперсия и диссипация · Решения в виде бегущей волны · Солитон Расселла · Цепочка Ферми–Паста–Улама · Разностная схема Забуски–Краскала · Непрерывный предел к уравнениям Буссинеска и КдФ · Упругое взаимодействие солитонов

1.1 Опрокидывание, дисперсия и диссипация

Простейшие линейные волновые уравнения

$$u_t = \omega u_x, \quad u_{tt} = \omega^2 u_{xx}$$

описывают волны произвольной формы, распространяющиеся с постоянной скоростью. Простейший нелинейный пример — уравнение Хопфа

$$u_t = uu_x. \quad (1.1)$$

Его решение с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ определяется неявной формулой

$$u(x, t) = f(x + u(x, t)t),$$

или, в параметрическом виде,

$$u(s, t) = f(s), \quad x(s, t) = s - f(s)t.$$

Нелинейность приводит к тому, что участки волны разной амплитуды движутся с разной скоростью, что приводит к её *опрокидыванию*. В некоторый момент профиль решения становится многозначным, как показано на рис. 1.

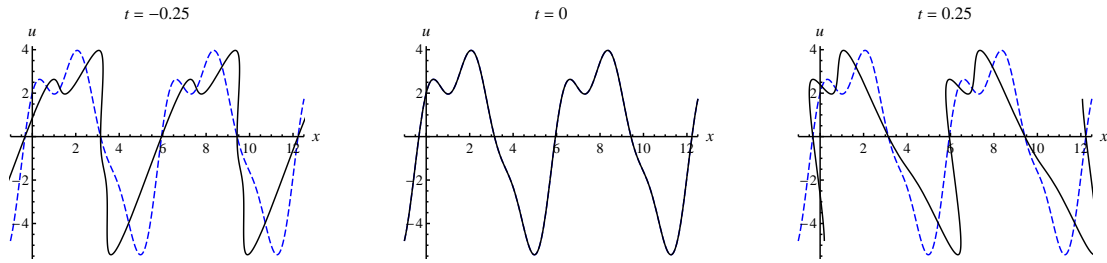


Рис. 1. Опрокидывание решения уравнения Хопфа $u_t = uu_x$.

В других моделях можно наблюдать еще два явления, приводящих к разрушению волн. *Дисперсией* называется расползание волнового пакета вследствие того, что скорость распространения волны зависит от волнового вектора. *Диссипацией* называется затухание амплитуды волны при $t \rightarrow \infty$. Оба эффекта объясняются в рамках линейной теории. Именно, любое линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами $L[u(t, x)] = 0$ обладает решениями в виде плоских гармонических волн $u(t, x) = \exp(i(\langle k, x \rangle - \omega t))$. При этом, частота ω и волновой вектор k связаны вполне определённым алгебраическим уравнением $\Lambda(\omega, k) = 0$, которое называется *дисперсионным соотношением*. Например, для уравнений с одной

пространственной переменной прямой подстановкой $u = e^{i(kx - \omega t)}$ находим:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} &\mapsto \omega = -ik^2, \\ u_t = u_{xxx} &\mapsto \omega = k^3, \\ u_{tt} = u_{xx} &\mapsto \omega^2 = k^2; \end{aligned}$$

в случае нескольких пространственных переменных имеем:

волновое уравнение	$u_{tt} = \Delta u$	\mapsto	$\omega^2 = \langle k, k \rangle,$
уравнение Клейна-Гордона	$u_{tt} = \Delta u - cu$	\mapsto	$\omega^2 = \langle k, k \rangle + c,$
уравнение теплопроводности	$u_t = \Delta u$	\mapsto	$\omega = -i\langle k, k \rangle,$
уравнение Шрёдингера	$iu_t = \Delta u$	\mapsto	$\omega = -\langle k, k \rangle.$

Гиперплоскость $\langle k, x \rangle = \omega t + \text{const}$ называется поверхностью постоянной фазы, её смещение вдоль единичного вектора нормали $k/|k|$ происходит с *фазовой скоростью* $v_p = \omega/|k|$. Зависимость частоты от волнового вектора характеризует *групповая скорость* $v_g = \nabla_k(\omega)$. Если $v_g \neq \text{const}$, то разные моды распространяются с разной скоростью, что и приводит к явлению дисперсии. А диссипация имеет место, если частота имеет отрицательную мнимую часть: $\omega = \omega_R + i\omega_I$, $\omega_I < 0$, при этом волны экспоненциально затухают. Наоборот, закон дисперсии с $\omega_I > 0$ приводит к экспоненциальному росту и неустойчивости волн. Несмотря на то, что дисперсия и диссипация имеют линейное происхождение, они играют огромное значение и в нелинейных уравнениях. Если ограничиться, для простоты, скалярными эволюционными уравнениями с одной пространственной переменной

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^n u),$$

то, как мы видели, член u_{xx} является диссипативным, u_{xxx} дисперсионным, uu_x опрокидывающим. По отдельности, эти слагаемые разрушают любое решение, но оказывается, что в некоторых нелинейных уравнениях бегущие волны все же возможны: происходит компенсация линейных членов нелинейными. Правда, это срабатывает не для всех решений, а лишь для волн определенной формы.

1.2 Решения в виде бегущей волны

Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x. \quad (1.2)$$

Найдём его простейшие решения в виде бегущей волны $u = y(x - ct)$. Подстановка в уравнение и двукратное интегрирование дают

$$y''' = 6yy' - cy' \Rightarrow (y')^2 = 2y^3 - cy^2 + c_1y + c_2 = 2R(y).$$

Отсюда функция $y(X)$ находится в неявном виде при помощи квадратуры:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2R(y)}} = X = x - ct.$$

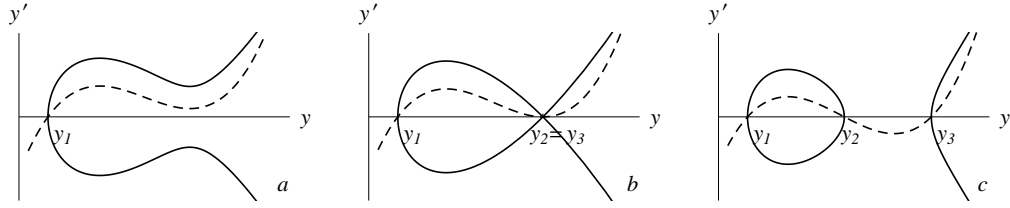


Рис. 2. Кривая $(y')^2 = 2R(y)$ (сплошная линия) и многочлен $R(y)$ (пунктир).

Выясним, как нужно выбирать многочлен R и начальное условие, чтобы решение было ограниченным на вещественной оси.

Фазовой траекторией системы в переменных (y, y') служит кубическая кривая $(y')^2 = 2R(y)$, показанная на рис. 2. Удобно перейти от коэффициентов к корням многочлена $R = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$. Если R имеет один вещественный нуль, то все решения неограничены и получаются друг из друга сдвигом $x \rightarrow x + x_0$. Если имеется три различных вещественных корня, $y_1 < y_2 < y_3$, то есть два решения, с точностью до сдвигов. Одно из них по-прежнему неограничено, а второе является периодической функцией, меняющейся в интервале $[y_1, y_2]$. Эту функцию можно выразить через эллиптическую функцию Якоби $\text{sn}(X, k)$ (см. задачу 1.2), и мы приходим к решению уравнения КдФ в виде *кноидальной волны*:

$$u(x, t) = a - 2bk^2 \text{sn}^2(b(x - x_0 - ct); k), \quad 6a = c - 4b(1 - 2k^2). \quad (1.3)$$

При этом, нули многочлена равны

$$y_1 = a - 2bk^2, \quad y_2 = a, \quad y_3 = a + 2b(1 - k^2). \quad (1.4)$$

Профиль кноидальной волны показан на рис. 3. Обратим внимание, что выбирая подходящее значение c , мы всегда можем положить $y_2 = 0$, так что решение будет лежать в интервале $-2bk^2 \leq u \leq 0$. Это является отражением следующего, легко проверяемого, свойства.

Утверждение 1.1 (Галилеевская инвариантность уравнения КдФ). *Если функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1.2), то это же верно и для функции $\tilde{u}(x, t) = u(x - 6at, t) + a$, для произвольного параметра a .*

В пределе $k \rightarrow 1$ период кноидальной волны, равный $2 \int_{y_1}^{y_2} (2R(y))^{-1/2} dy$, стремится к бесконечности, и решение превращается в последовательность далеко разнесённых колоколообразных пиков. При $k = 1$ остается лишь один пик, это и

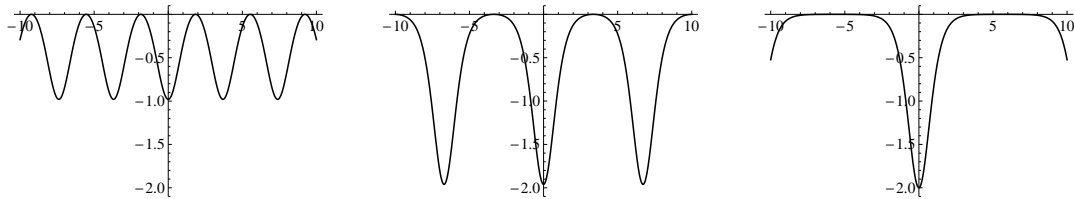


Рис. 3. Профиль решения (1.3) при $b = 1$, $a = 0$ и $k = 0.7$; 0.99 ; 0.9999 .

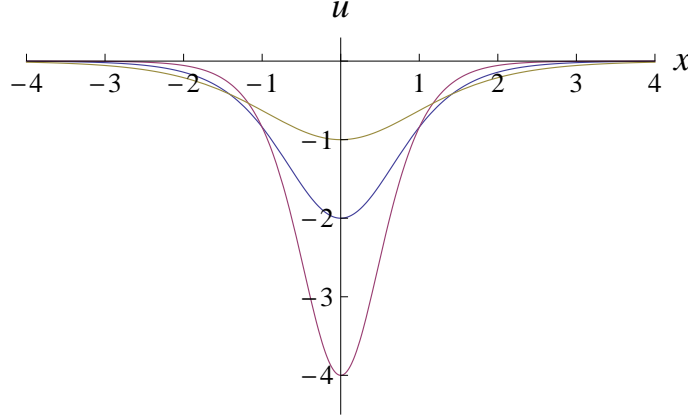


Рис. 4. Профиль солитона КдФ при $a^2 = 0.5; 1; 2$.

есть так называемый *солитон*, быстроубывающее решение уравнения КдФ, изображенное на рис. 3. Оно выражается через элементарные функции. Действительно, при $k = 1$ нули y_3 и y_2 сливаются и мы получаем *сепаратрису*, фазовую кривую, проходящую через седловую точку и разделяющую фазовые кривые разных типов (см. рис. 2b):

$$(y')^2 = 2y^2(y - y_1).$$

Решая это уравнение, получаем формулу для солитона

$$u = -\frac{2a^2}{\cosh^2(ax - 4a^3t + \delta)}. \quad (1.5)$$

Солитон часто изображают в виде горба, а не ямы, что, конечно, отвечает просто смене знака при нелинейном члене при замене $u \rightarrow -u$. Вообще, в уравнении КдФ все коэффициенты можно сделать любыми числами, при помощи растяжений переменных.

Для полноты, отметим, что при заменах $\delta \rightarrow \delta + i\pi$ и $a \rightarrow ia$, $\delta \rightarrow i\delta$ решение (1.5) остаётся вещественным, но теряет регулярность. В первом случае \cosh заменяется на \sinh , и мы получаем решение, отвечающее неограниченной ветви сепаратрисы на рис. 2b. Во втором случае \cosh заменяется на \cos , это решение отвечает тому предельному случаю, когда сливаются корни y_1 и y_2 . Наконец, при совпадении всех трёх корней фазовая кривая превращается в полукубическую параболу

$$(y')^2 = 2y^3$$

и мы получаем полюсное решение $u = 2/(x + \delta)^2$ (в выбранной галилеевской системе отсчета имеем $s = 0$, то есть, решение стационарно). Перечисленные решения покрывают все возможные типы фазовых кривых в нашей задаче.

Итак, для солитона амплитуда, скорость и длина волны (в данном случае так естественно назвать характерный размер, на котором решение заметно отличается от нуля) оказываются связанными: они выражаются через единственный параметр a . Решения с такими свойствами существуют для многих нелинейных уравнений, при этом форма солитона и зависимость от параметров могут быть, конечно, другими.

1.3 Про лошадь

Солитоны наблюдаются во многих физических явлениях. Впервые на них обратил внимание Джон Скотт Расселл в 1834 г.. Наблюдавшиеся им волны на воде в канале имели вид горба с характерными размерами: ширина 30 ф., высота 1.5 ф.. Расселл назвал свою волну уединённой волной переноса (solitary wave of translation). Позже, исследованием уединённых волн занимались Эйри, Стокс, Буссинеск, Рэлей и другие британские учёные.

Хотя точная форма волны была Расселлу неизвестна, он установил эмпирическую формулу связи её скорости V и амплитуды A , в канале глубины h :

$$V^2 = g(h + A).$$

Отметим, что это не совпадает с соотношением для солитона (1.5). Дело в том, что волны на воде описываются различными уравнениями, в зависимости от физических условий и рассматриваемых режимов. Многие из этих уравнений также имеют солитонные решения, к ним, в частности, относится уравнение Буссинеска (1871 г.)

$$u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx}. \quad (1.6)$$

Для него солитон имеет вид

$$u = -\frac{2a^2}{\cosh^2(ax \pm 2a^2t + \delta)}. \quad (1.7)$$

В отличие от солитона КдФ, он может распространяться в любом направлении, в зависимости от выбора знака, а его амплитуда пропорциональна квадрату скорости.

Само уравнение КдФ было получено позже, в 1895 г.. Как и уравнение Буссинеска, оно выводится из уравнений гидродинамики при следующих предположениях: мелкая вода (глубины h); отсутствие вязкости; длинные волны малой амплитуды ($kh = \mu \ll 1$, где k волновое число и $u/h = \varepsilon \ll 1$, причём $kh = O(\varepsilon)$). Мы не будем повторять этот вывод, а вместо этого покажем, как уравнения (1.2) и (1.6) возникают в другой задаче.

1.4 Численные эксперименты

Решения в виде бегущей волны являются весьма частными. Конечно, мы хотели бы научиться находить решение с заданными начальными и краевыми условиями. Однако, это не так просто. В этом отношении, для уравнения КдФ долгое время ничего не было известно. Лишь в середине XX в. были проведены некоторые численные эксперименты, приведшие к пониманию того, как эволюционирует достаточно общее начальное условие и происходит взаимодействие солитонов. В 1953 г. Ферми, Паста, Улам и Тсингоу предприняли численное исследование системы

$$\frac{m}{k} u_{n,tt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + a(u_{n+1} - u_n)^2 - a(u_n - u_{n-1})^2, \quad (1.8)$$

описывающей одномерную цепочку шариков массы m на пружинках с нелинейной силой упругости $F = k\Delta l(1 + a\Delta l)$. Их целью было подтвердить гипотезу Дебая

1914 г., о том, что конечная теплопроводность твердых тел связана с ангармоничностью кристаллической решётки. В качестве начального условия была принята синусоидальная волна. Предполагалось, что нелинейность взаимодействия приведёт к быстрой перекачке энергии в младшие моды, в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии. Однако, численный эксперимент показал, что возбуждаются лишь несколько низших мод, причём наблюдается явление возвращения системы в исходное состояние. Возможности первого в мире компьютера MANIAC-I, на котором проводился этот *первый в математической физике компьютерный эксперимент* (см. историю в [17, 18]), позволяли рассматривать периодические граничные условия $u_n = u_{n+N}$ при $N = 64$. Это число достаточно велико, и квазипериодичность по t нельзя объяснить возвращением по Пуанкаре.

Качественное объяснение явления возвращения было дано Забуски и Краскалом в 1965 г., также на основе численного счёта (именно в этой работе появилось слово «солитон»). Они рассматривали не саму цепочку (1.8), а уравнение КдФ, которое возникает в непрерывном пределе. В свою очередь, уравнение КдФ заменялось, при численном исследовании, разностной схемой

$$u_n^{j+1} = u_n^{j-1} - \frac{k}{3h}(u_{n+1}^j + u_n^j + u_{n-1}^j)(u_{n+1}^j - u_{n-1}^j) - \frac{\delta^2 k}{h^3}(u_{n+2}^j - 2u_{n+1}^j + 2u_{n-1}^j - u_{n-2}^j) \quad (1.9)$$

с условием периодичности $u_n^j = u_{n+2N}^j$.

Опишем предельный переход от цепочки (1.8) к уравнению КдФ. Положим $u_n(t) = u(x, \tau)$, $x = nh$, $\tau = \omega ht$, тогда разложение $u_{n\pm 1}$ в ряд Тейлора имеет вид

$$u_{n\pm 1} = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + o(h^5), \quad h \rightarrow 0,$$

и подстановка в (1.8) приводит к приближённому уравнению типа Буссинеска

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} + 2ahu_x u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx} + o(h^3),$$

описывающие распространение волн в обоих направлениях. Далее, будем считать, что параметр a также мал, $a = \kappa h$, тогда замена $u(x, \tau) = v(X, T)$, $X = x + \tau$, $T = \kappa h^2 \tau$, $24\kappa = \delta^{-1}$ приводит к уравнению КдФ для V_X :

$$V_{XT} = V_X V_{XX} + \delta V_{XXXX} + o(h).$$

Вернёмся к описанию результатов Забуски и Краскала. Численный счёт показал, что решение представляется в виде суперпозиции нескольких уединённых волн различной амплитуды и, соответственно, скорости. В силу периодических граничных условий возникает движение по окружности с различными угловыми скоростями, что и даёт квазипериодическую картину. Но, как такое может быть? Ведь уравнение нелинейно и его решения нельзя просто складывать. Естественнo ожидать, что бегущие волны разрушатся при прохождении друг через друга. Оказывается, в рассматриваемой модели этого не происходит, и взаимодействие солитонов *упруго*:

оно сводится к сдвигам фаз, а скорости и амплитуды не меняются. В одной из следующих лекций мы докажем это свойство для уравнения КдФ уже не численно, а аналитически.

Следует отметить, что локализованные решения допускают многие нелинейные уравнения. Более того, многие уравнения обладают решениями, описывающими упругое взаимодействие *двух* уединённых волн. Однако, лишь исключительные уравнения обладают решениями, описывающими суперпозицию трёх и более солитонов, не разрушающихся при взаимодействии.

Упругое взаимодействие солитонов (или иных локализованных решений) это одно из ключевых свойств, отделяющих интегрируемые уравнения от неинтегрируемых.

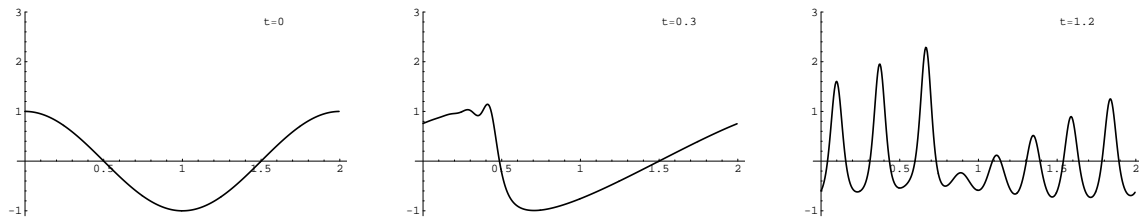


Рис. 5. Эволюция синусоидальной волны.

На самом деле, решения, наблюдаемые в обоих вычислительных экспериментах, и для цепочки (1.8), и для разностной схемы (1.9), с течением времени всё же разрушаются. Это вызвано тем, что сами по себе эти системы не интегрируемы и демонстрируют, строго говоря, лишь солитоноподобное поведение, при достаточно малом шаге решётки. Однако, качественно картина выглядит вполне удовлетворительно и приводит к правильным выводам.

Упомянем ещё пару цепочек. Модель Конторовой–Френкеля, введённая в 1938 г., в теории дислокаций в кристаллической решётке, имеет вид

$$u_{n,tt} = \gamma(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \sin u_n.$$

Как и в случае цепочки (1.8), её решения демонстрируют почти-упругое взаимодействие. В отличие от них, солитоны цепочки Тоды (1967)

$$u_{n,tt} = \exp(u_{n+1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n-1}) \quad (1.10)$$

действительно взаимодействуют упруго, это интегрируемое уравнение.

Ещё одна оговорка, которую следует сделать, связана с периодичностью по n , которая закладывалась в экспериментах. Для КдФ это означает, что на самом деле рассматриваются не быстроубывающие солитонные решения, а периодические по x . Однако, это не очень существенно. Выше мы видели, что при определённом подборе параметров периодическую бегущую волну можно представлять как решётку из далеко разнесённых солитонов. Два таких решения взаимодействуют практически так же, как и изолированные солитоны. Более общие периодические решения мы будем разбирать на одной из следующих лекций.

1.5 Задачи. Графики и численный счёт

Эллиптические функции Якоби · Исследование закона дисперсии · Солитоны уравнений Бюргера и Буссинеска · Счёт по схеме Забуски–Краскала · Распад ступеньки

Замечания о задачах. Для получения зачета достаточно набрать N баллов¹ по всем домашним заданиям курса. Некоторые задачи удобно решать при помощи компьютера, но это не является обязательным. Приветствуется использование (или неиспользование) любых языков и программ, лишь бы решение было полным и понятным. В тексте, в качестве примера, используется язык *Mathematica*, который позволяет с одинаковой лёгкостью проводить и численный счёт, и символьные вычисления. Его синтаксис обсуждается лишь по мере необходимости, но некоторые упражнения (без баллов) приведены с решениями. Детали языка легко уточнить по руководству [3] и встроенной справке (клавиша [F1] вызывает справку по имени команды под курсором). Ряд полезных примеров и задач, близких к нашему курсу, можно найти в книге [4].

Задача 1.1. Проверить прямым вычислением, что формула (1.5) действительно определяет решение уравнения КдФ (1.2), построить график.

Решение. Для первого знакомства с *Mathematica*, создадим новый файл (notebook) и наберём, в одной ячейке:

```
u= -2a^2 Sech[a x+4a^3t]^2
D[u,t]-D[u,x,x,x]+6u D[u,x]
Simplify[%]
Plot[u/{a->1,t->0},{x,-3,3}]
```

Здесь D это обычная частная производная. Знак умножения $*$ можно заменять пробелом. Ячейка запускается на выполнение нажатием клавиш [Shift+Enter]. Следующие ячейки этого же файла могут содержать другие, независимые вычисления, но следует помнить, что фигурирующие здесь переменные u, x, t, a считаются глобальными, то есть, их значения не ограничиваются одной ячейкой.

Задача 1.2. (1 балл) Эллиптические функции Якоби определяются следующей системой ОДУ, зависящей от параметра k , $0 \leq k \leq 1$:

$$(\operatorname{sn} x)' = \operatorname{dn} x \operatorname{cn} x, \quad (\operatorname{cn} x)' = -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, \quad (\operatorname{dn} x)' = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x,$$

с начальными условиями $\operatorname{sn} 0 = 0$, $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$. Вывести соотношения

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1$$

и показать, что формула $y = y_2 - \alpha \operatorname{cn}^2(\beta x)$ даёт решение уравнения

$$(y')^2 = 2(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$$

(с точностью до линейной замены, оно совпадает с уравнением для эллиптической функции Вейерштрасса $\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$). Найти связь параметров с нулями y_j и вывести формулу (1.3).

¹Число N будет определено позже...

Задача 1.3. (1 балл) Исследовать закон дисперсии для уравнения Буссинеска

$$\sigma u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Показать, что в случае $\sigma = 1$ формула (1.7) даёт все быстроубывающие решения в виде бегущей волны, а в случае $\sigma = -1$ таких решений не существует. (Замечание: константы интегрирования, возникающие при понижении порядка, удобно фиксировать, используя условие убывания).

Задача 1.4. (2 балла) Рассмотреть бегущие волны для модифицированного уравнения КдФ (мКдФ $^\pm$)

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2 u_x,$$

и проанализировать различные типы сепаратрисных решений. В частности, доказать следующие утверждения.

1) В случае мКдФ $^+$ все быстроубывающие решения в виде бегущей волны имеют вид

$$u = a \operatorname{sech}(ax + a^3 t + d),$$

а в случае мКдФ $^-$ таких решений не существует.

2) В отличие от уравнения КдФ, сдвиг $u \rightarrow u + \text{const}$ не компенсируется преобразованием Галилея, поэтому имеет смысл рассматривать и солитоны с ненулевой асимптотикой. Показать, что такие решения имеются при любом знаке нелинейного члена.

3) Для мКдФ $^-$ имеется решение

$$u = \pm a \tanh(ax - 2a^3 t + d),$$

с разной асимптотикой при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$. Решения такого типа называются *кинками*.

Задача 1.5. (2 балла) Нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ $^\pm$)

$$iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2 u,$$

где $u = p + iq$, эквивалентно системе из двух уравнений для вещественных функций $p(x, t)$, $q(x, t)$. Как и в двух предыдущих примерах, знак имеет значение. Проверить подстановкой перечисленные ниже решения, построить графики для p , q , $|u|$.

Решение постоянной амплитуды (Бозе-конденсат, в одной из физических интерпретаций НШ):

$$u = b e^{i(ax + (a^2 \mp 2b^2)t + c)},$$

солитон огибающей (для НШ $^+$):

$$u = \frac{a e^{i(bx + (b^2 - a^2)t + c)}}{\cosh(a(x + 2bt) + d)};$$

солитон Перегринна (для НШ $^+$):

$$u = e^{2it} \left(1 - \frac{4(1 + 4it)}{1 + 4x^2 + 16t^2} \right).$$

Задача 1.6. (1 балл) Проверить прямым вычислением, что функция

$$u_n(t) = \frac{(1 + a^{n+1}f)(1 + a^{n-2}f)}{(1 + a^n f)(1 + a^{n-1}f)}, \quad f = c \exp((a - a^{-1})t)$$

удовлетворяет цепочке Вольтерра

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}),$$

построить график (для построения профиля можно использовать функцию `ListPlot`, для 3-мерной картинки — `ParametricPlot3D`).

Задача 1.7. Вывести формулу $u(x, t) = f(x + u(x, t)t)$ для решения уравнения Хопфа $u_t = uu_x$ (1.1). Построить профили решения для разных моментов t .

Решение. Напомним метод характеристик для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + \dots + a_n u_{x_n} = b,$$

где a_j, b функции от (x_1, \dots, x_n, u) . Выписывается ассоциированная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}.$$

Если у нее удастся найти n функционально независимых первых интегралов, то есть, функций $C_j(x_1, \dots, x_n, u)$ таких, что $dC_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, то общее решение записывается в неявном виде

$$F(C_1, \dots, C_n) = 0,$$

где F произвольная функция от n переменных. В нашем примере имеем

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{u} = \frac{du}{0} \Rightarrow u = C_1, \quad C_1 dt + dx = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 t + x$$

и общее решение имеет вид $F(u, x + ut) = 0$, что эквивалентно $u = f(x + ut)$.

В *Mathematica* график можно построить при помощи функции `ParametricPlot`. Сначала задаём начальный профиль $u(x, 0) = f(x)$ и отрезок $[a, b]$. Далее, определяем функцию `g[t]`, которая строит, для заданного момента t , совместный график начального условия и решения в параметрическом представлении $x(s, t) = s - f(s)t$, $u(s, t) = f(s)$. Функция `Manipulate` позволяет менять значение t интерактивно, при помощи специальной панели с ползунком (эта функция доступна начиная с 6-й версии *Mathematica*).

```
f[x_] := 4Sin[x]+Cos[2x]+Cos[3x]
a=-1;
b=12.5;
g[t_] := ParametricPlot[{{s, f[s]}, {s-f[s]t, f[s]}}, {s, a, b},
  PlotStyle->{Blue, Black},
  PlotRange->{{a, b}, Automatic},
  AspectRatio->Automatic]
Manipulate[g[t], {{t, 0}, -1, 1, Appearance -> "Labeled"}]
```

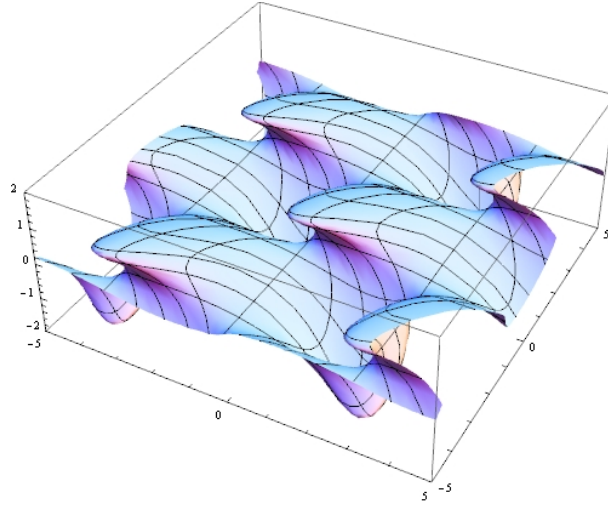


Рис. 6. Решение 2D уравнение Хопфа.

Задача 1.8. (1 балл) Решить аналогично уравнение $u_t = uu_x + u^2u_y$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Выбрать начальное значение $f = \sin x \cos y$ или самостоятельно, построить графики решения для разных моментов t (см. рис 6).

Задача 1.9. (4 балла) Воспроизвести результаты численного эксперимента Забуски–Краскала для разностной схемы (1.9), построить графики решения для разных моментов времени (как на рис. 5). В статье [16] в качестве начального условия было принято

$$u_n^0 = u_n^1 = \cos \frac{\pi n}{N}, \quad n = 0, \dots, 2N - 1, \quad (1.11)$$

и рассматривалось значение $\delta = 0.022$. Пространственный шаг решетки равен $h = 1/N$, но значения N и k (шаг по времени) не указаны. Их следует подобрать так, чтобы решение выглядело достаточно гладким, а схема была устойчивой. Поэкспериментируйте и с другими начальными данными или значениями δ . Изменение δ равносильно масштабированию начального условия; зависит ли число солитонов в решении от этого параметра?

2 Законы сохранения

Плотности и токи · Модифицированное уравнение КдФ · Дифференциальные подстановки · Формальное решение уравнения Риккати (обращение преобразования Миуры) · Производящая функция для законов сохранения · Полная производная · Эволюционная производная · Вариационная производная (оператор Эйлера) · Производная Фреше (оператор линеаризации) · Интегрирование по частям

2.1 Сохраняющиеся величины

Из уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

можно получить ряд следствий, имеющих вид

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma),$$

где ρ и σ функции от u и частных производных u по x , а D_t, D_x обозначают полные производные по t и по x . Соотношения такого вида называются *законами сохранения*, функция ρ называется *плотностью*, а σ *током* закона сохранения.

Если сама функция ρ имеет вид $\rho = D_x(\phi)$, для некоторой функции ϕ , то в качестве σ можно взять $\sigma = D_t(\phi)$. Законы сохранения такого типа не представляют интереса и называются *тривиальными*. Плотности ρ_1, ρ_2 , отличающиеся на полную производную $D_x(\phi)$, считаются эквивалентными,

$$\rho_1 \sim \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 - \rho_2 \in \text{Im } D_x.$$

Несколько первых законов сохранения уравнения КдФ найти нетрудно. Во-первых, само уравнение имеет вид закона сохранения:

$$D_t(u) = D_x(u_{xx} - 3u^2).$$

Во-вторых, если умножить уравнение на $2u$, то в правой части опять получится полная производная и мы получим:

$$D_t(u^2) = D_x(2uu_{xx} - u_x^2 - 4u^3).$$

Далее, есть ещё и такое соотношение:

$$D_t(2u^3 + u_x^2) = D_x(2u_x u_{xxx} - u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} - 12u u_x^2 - 9u^4).$$

Что это даёт? Предположим, что мы рассматриваем периодические (или, в частном случае, быстроубывающие) решения уравнения КдФ. Тогда интеграл от $D_x(\sigma)$ по периоду (по всей оси x) обращается в 0, следовательно, интеграл от ρ оказывается сохраняющейся величиной:

$$D_t \left(\int_0^T \rho dx \right) = \int_0^T D_x(\sigma) dx = \sigma \Big|_0^T = 0.$$

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= u, \\
\rho_2 &= u^2, \\
\rho_3 &= 2u^3 + u_1^2, \\
\rho_4 &= 5u^4 + 10uu_1^2 + u_2^2, \\
\rho_5 &= 14u^5 + 70u^2u_1^2 + 14uu_2^2 + u_3^2, \\
\rho_6 &= 42u^6 + 420u^3u_1^2 - 35u_1^4 + 126u^2u_2^2 - 20u_2^3 + 18uu_3^2 + u_4^2, \\
&\dots \\
\rho_{10} &= 4862u^{10} + 291720u^7u_1^2 - \dots + u_8^2 \quad (\text{всего 32 члена}).
\end{aligned}$$

Таблица 1. Сохраняющиеся плотности для уравнения КдФ, $u_k = \partial_x^k(u)$.

Например, отсюда следует, что график решения на рис. 5 ограничивает в верхней и нижней полуплоскостях области равной площади, для любого момента t (поскольку это верно для начального условия).

Таким образом, закон сохранения можно рассматривать как обобщение понятия первого интеграла из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно из механики, конечномерные динамические системы с достаточно большим числом первых интегралов являются интегрируемыми. В частности, имеется теорема Лиувилля–Арнольда, о гамильтоновой системе с n степенями свободы и n независимыми первыми интегралами в инволюции. Эта теорема утверждает, что если поверхность уровня первых интегралов компактна, то она диффеоморфна n -мерному тору и решение представляет собой его квазипериодическую линейную обмотку. Это напоминает то, что наблюдается в описанных выше экспериментах. Конечно, уравнение КдФ не является конечномерной динамической системой, но можно предположить, что регулярное поведение решений также связано с первыми интегралами.

Действительно, вскоре после работы Забуски–Краскала было обнаружено, что у уравнения КдФ имеется бесконечно много законов сохранения, а потом была найдена и соответствующая гамильтонова структура (её мы рассмотрим на одной из следующих лекций). Первые 10 законов сохранения были найдены вручную, при помощи метода неопределённых коэффициентов. Этот результат частично воспроизведён в таблице 1, где, для краткости, введено обозначение $u_k = \partial_x^k(u)$, которое мы в дальнейшем будем часто использовать наравне с обозначениями $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$. Мы подробно разберём метод неопределённых коэффициентов на семинарских занятиях, так как он применим не только для уравнения КдФ, но и в более общей ситуации. Однако, в случае КдФ, полное описание плотностей удалось, в конце концов, получить очень просто.

2.2 Преобразование Миуры

В 1968 г. было найдено следующее замечательное преобразование, связывающее решения двух нелинейных уравнений. Замены такого типа называются дифферен-

циальными подстановками.

Утверждение 2.1 (Преобразование Миуры). Пусть функция $f(x, t)$ удовлетворяет модифицированному уравнению КдФ (мКдФ⁻)

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda)f_x, \quad (2.1)$$

тогда функция

$$u = f_x + f^2 + \lambda \quad (2.2)$$

удовлетворяет уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Доказательство. Прямое вычисление:

$$\begin{aligned} u &= f_x + f^2 + \lambda, \\ u_x &= f_{xx} + 2ff_x, \\ u_{xx} &= f_{xxx} + 2ff_{xx} + 2f_x^2, \\ u_{xxx} &= f_{xxxx} + 2ff_{xxx} + 6f_xf_{xx}, \\ u_t &= f_{xt} + 2ff_t \\ &= f_{xxxx} - 6(f^2 + \lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 + 2f(f_{xxx} - 6(f^2 + \lambda)f_x). \end{aligned}$$

Остаётся подставить в уравнение для u и раскрыть скобки. \square

Замена (2.2) определяет функцию u по заданной функции f . Для того, чтобы найти f по заданной u , необходимо решить уравнение Риккати. Его решение, естественно, содержит произвол в виде постоянной интегрирования (например, можно задавать произвольное начальное значение $f(0, t)$ при $x = 0$). Наше вычисление показывает, что зависимость этой постоянной от t можно выбрать так, чтобы решение $f(x, t)$ удовлетворяло мКдФ. Для этого нужно проверить, что уравнения (2.1) и (2.2) совместны, то есть, выполняется условие равенства смешанных производных $f_{xt} = f_{tx}$. Легко видеть, что если u удовлетворяет уравнению КдФ, то это действительно так, нужно лишь немного изменить порядок выписанных формул.

Построим *формальное* решение уравнения (2.2) в виде ряда

$$f(z) = -\frac{z}{2} + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots, \quad z^2 = -4\lambda. \quad (2.3)$$

При подстановке в (2.2) члены с z^2 сокращаются, коэффициент при z^1 даёт $F_0 = 0$, а остальные коэффициенты эквивалентны рекуррентным соотношениям

$$F_1 = -u, \quad F_{n+1} = D_x(F_n) + \sum_{s=1}^{n-1} F_s F_{n-s}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Отсюда все F_n однозначно находятся в виде многочленов от u и её производных. Несколько первых коэффициентов приведены в таблице 2 (скобки просто группируют члены одинаковой степени).

Утверждение 2.2. Рекуррентные соотношения (2.4) порождают последовательность плотностей для уравнения КдФ.

$$\begin{aligned}
F_1 &= -u, \\
F_2 &= -u_1, \\
F_3 &= -u_2 + u^2, \\
F_4 &= -u_3 + 4uu_1, \\
F_5 &= -u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) - 2u^3, \\
F_6 &= -u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) - 16u^2u_1, \\
F_7 &= -u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) - (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4.
\end{aligned}$$

Таблица 2. Коэффициенты разложения (2.3).

Доказательство. Заметим, что f является плотностью простейшего закона сохранения для уравнения мКдФ (так как правая часть (2.1) есть полная производная по x). При подстановке формального ряда (2.3) в (2.1), равенство выполняется тождественно по параметру z , следовательно все коэффициенты этого ряда являются плотностями законов сохранения, но уже для уравнения КдФ, поскольку они выражены через переменную u . \square

Обратим внимание, что вычисленные плотности не совпадают с плотностями из таблицы 1. Во-первых, оказывается, что многочлены F_n с чётными номерами являются полными производными по x (это будет доказано позже). Таким образом, все F_{2n} это тривиальные плотности, которые пока играют роль лишь вспомогательных выражений, нужных для подстановки в рекуррентную формулу. Во-вторых, плотности F_{2n+1} хотя и нетривиальны, но отличаются от выписанных ранее членами, эквивалентными по модулю D_x .

Разложение (2.3), (2.4) играет очень важную роль в теории уравнения КдФ и мы к нему ещё вернёмся. Однако, сейчас следует немного отклониться в сторону. Остаток лекции будет посвящен формализации проделанных вычислений.

2.3 Дифференциальная алгебра

Для простоты, будем предполагать, что основным объектом изучения является скалярное эволюционное уравнение относительно функции $u(x, t)$

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_j = \partial_x^j(u). \quad (2.5)$$

При различных вычислениях, часто бывает удобно трактовать функцию $u = u_0$ и её производные u_j не как функции от x, t , а как независимые, или динамические, переменные. Пусть \mathcal{F} обозначает множество гладких функций $a(x, u_0, \dots, u_k)$ от конечного числа переменных. Такие функции подчиняются определённым правилам дифференцирования, которые формализуют правила вычисления производных от сложной функции и исключения производных по t в силу уравнения.

Определение 2.1. Пусть $\partial_j = \partial/\partial u_j$. Оператором полной производной по x называется формальное векторное поле

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots + u_{j+1}\partial_j + \dots \quad (2.6)$$

Эволюционной производной в силу уравнения (2.5) называется векторное поле

$$\nabla_f = D_t = f\partial_0 + D_x(f)\partial_1 + \dots + D_x^j(f)\partial_j + \dots \quad (2.7)$$

Оператором линеаризации, или производной Фреше от функции $g(x, u_0, \dots, u_k) \in \mathcal{F}$, называется дифференциальный оператор

$$g_* = \partial_0(g) + \partial_1(g)D_x + \dots + \partial_k(g)D_x^k. \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что хотя суммы (2.6), (2.7) содержат бесконечное число слагаемых, действие этих векторных полей на функции из \mathcal{F} определено корректно и согласовано с подстановкой вместо u_j производных $\partial_x^j(U)$ от произвольного гладкого решения уравнения (2.5). Оператор линеаризации можно определить также равенством

$$g_*(f) = \frac{d}{d\varepsilon}(g[u + \varepsilon f])\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Следующие свойства введенных операторов легко доказываются (позже мы продолжим этот список тождеств).

Утверждение 2.3. *Выполняются тождества, для любых $f, g \in \mathcal{F}$:*

$$[\partial_x, D_x] = 0, \quad [\partial_0, D_x] = 0, \quad [\partial_j, D_x] = \partial_{j-1}, \quad j > 0, \quad (2.9)$$

$$[D_x, \nabla_f] = 0, \quad \nabla_f(g) = g_*(f), \quad (fg)_* = fg_* + gf_*, \quad D_x(g)_* = D_xg_*. \quad (2.10)$$

При работе с законами сохранения оказывается полезным следующий оператор. Как и в случае операторов D_x, ∇_f , он задается формальной суммой, но его действие на функции из \mathcal{F} корректно определено.

Определение 2.2. Вариационной производной, или оператором Эйлера, называется оператор

$$\frac{\delta}{\delta u} = \mathbf{E} = \partial_0 - D_x\partial_1 + D_x^2\partial_2 - \dots + (-1)^j D_x^j\partial_j + \dots \quad (2.11)$$

Для этого оператора отметим тождество

$$\mathbf{E}(f) = f_*^\dagger(1),$$

где операция сопряжения \dagger для дифференциальных операторов $\mathcal{F}[D_x]$ определяется соотношениями

$$a^\dagger = a, \quad a \in \mathcal{F}, \quad D_x^\dagger = -D_x, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger,$$

в частности, если $A = \sum a_j D_x^j$, то $A^\dagger = \sum (-1)^j D_x^j a_j$.

Основное свойство вариационной производной сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 2.4 (Образ полной производной). *Для функции $a \in \mathcal{F}$ существует функция $b \in \mathcal{F}$ такая, что $a = D_x(b)$, если и только если $\mathbf{E}(a) = 0$:*

$$\text{Im } D_x = \ker \mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Итак, чтобы выяснить, является ли ρ плотностью закона сохранения, достаточно проверить равенство $E(D_t(\rho)) = 0$. Следует отметить, что при этом самым нетривиальным этапом может оказаться не вычисление левой части, а её сравнение с нулём. Всё зависит от того, что из себя представляют рассматриваемые функции, например, уже для тригонометрических нужно помнить о некоторых тождествах. Однако, в наших примерах мы, в основном, будем работать с полиномами, где всё отлично работает.

Формула (2.12) даёт только ответ о разрешимости уравнения $a = D_x(b)$, относительно функции $b \in \mathcal{F}$. Опишем алгоритм *интегрирования по частям*, позволяющий найти такую функцию, либо доказать, что её не существует. Он основан на следующих очевидных свойствах.

Если $a = D_x(b(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}))$, то:

- 1) a зависит от x, u_0, \dots, u_n ;
- 2) a линейна по старшей переменной u_n .

Пусть дана функция a . Определим набор переменных, от которых она зависит, пусть это x, u_0, \dots, u_n , $n > 0$. Если u_n входит нелинейно, то есть $\partial_n^2(a) \neq 0$, то $a \notin \text{Im } D$ и вычисление заканчивается. В противном случае, $a = pu_n + q$, где функции $p = \partial_n(a)$ и q не зависят от u_n . Тогда $a = D_x(P) + \tilde{a}$, где $P = \int p du_{n-1}$ и \tilde{a} остаток, не зависящий от u_n .

Применяем то же самое рассуждение к \tilde{a} и так далее. Если мы так и не наткнёмся на препятствие в виде нелинейности по старшей переменной, то через конечное число шагов переменные u_j с $j > 0$ кончатся. Если остаток зависит от u_0 , то функции b не существует, если же остаток зависит только от x , то надо проинтегрировать его и всё сложить.

2.4 Уравнение Бюргерса

Рассмотрим еще один характерный пример, уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x. \quad (2.13)$$

Оказывается, что оно, как и уравнение КдФ, допускает дифференциальную подстановку.

Утверждение 2.5 (Подстановка Коула–Хопфа). Уравнение (2.13) связано с уравнением теплопроводности $\psi_t = \psi_{xx}$ заменой $u = \psi_x/\psi$.

Доказательство. Прямое вычисление:

$$u_t = \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_t = \left(\frac{\psi_t}{\psi} \right)_x = \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi} \right)_x = (u_x + u^2)_x. \quad \square$$

Как видим, здесь вместо модифицированного уравнения возникло просто линейное уравнение. Из любого решения уравнения теплопроводности можно по явной формуле получить решение уравнения Бюргерса. Уравнения такого типа называются линеаризуемыми, или C -интегрируемыми (от слова *change*, то есть, интегрируемые посредством замены переменных).

По аналогии с уравнением КдФ, можно предположить, что уравнение Бюргерса обладает бесконечной последовательностью законов сохранения. Оказывается, однако, что ситуация прямо противоположная. Нам понадобится следующее общее тождество для законов сохранения.

Утверждение 2.6. Пусть ρ есть плотность закона сохранения для эволюционного уравнения $u_t = f$. Тогда функция $r = E(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$D_t(r) + f_*^\dagger(r) = 0. \quad (2.14)$$

Доказательство. Применяя E к равенству $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$, получаем

$$E(D_t(\rho)) = E(\rho_*(f)) = (\rho_*(f))_*^\dagger(1) = 0.$$

Распишем последнее равенство. Имеем, пользуясь тождествами (2.10),

$$(\rho_*(f))_* = \left(\sum_i \partial_i(\rho) D_x^i(f) \right)_* = \sum_i \partial_i(\rho) D_x^i f_* + \sum_{i,j} D_x^i(f) \partial_i \partial_j(\rho) D_x^j.$$

Первое слагаемое равно $\rho_* f_*$, тогда получаем далее

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho_*(f))_*^\dagger(1) = f_*^\dagger \rho_*^\dagger(1) + \sum_{i,j} (-1)^j D_x^j (D_x^i(f) \partial_i \partial_j(\rho)) \\ &= f_*^\dagger(r) + \sum_j (-1)^j D_x^j \left(\sum_i D_x^i (\partial_i \partial_j(\rho)) \right) = f_*^\dagger(r) + \sum_j (-1)^j D_x^j \nabla_f(\partial_j(\rho)) \\ &= f_*^\dagger(r) + \nabla_f \left(\sum_j (-1)^j D_x^j (\partial_j(\rho)) \right) = f_*^\dagger(r) + \nabla_f(r), \end{aligned}$$

что и требуется. \square

Утверждение 2.7. Уравнение (2.13) имеет лишь один закон сохранения с плотностью $\rho = u$.

Доказательство. Рассмотрим сначала законы сохранения с плотностью вида $\rho = \rho(x, u)$. По определению, для них имеем соотношение

$$D_t(\rho) = \rho_u(u_{xx} + 2uu_x) \in \text{Im } D_x.$$

Интегрируем по частям:

$$D_t(\rho) = D_x(\rho_u u_x) - (\rho_{xu} + \rho_{uu} u_x) u_x + 2\rho_u u u_x.$$

Член с u_x^2 сокращается, только если $\rho_{uu} = 0$, то есть, $\rho = a(x)u$. Далее,

$$D_t(\rho) \sim -a'(x)u_x + 2a(x)uu_x = D_x(-a'(x)u + a(x)u^2) + a''(x)u + a'(x)u^2,$$

откуда следует $a' = 0$.

Допустим теперь, что имеется закон сохранения с плотностью $\rho(x, u, \dots, u_k)$, где $k \geq 1$. При этом, если ρ зависит от u_k линейно, то можно, проинтегрировав по частям, перейти к эквивалентной плотности, не зависящей от u_k , поэтому будем

считать, что $\rho_{kk} \neq 0$. Тогда $r = E(\rho) = (-1)^k \rho_{kk} u_{2k} + \dots$, где многоточие обозначает члены младшего порядка по производным. Подставляя это в тождество (2.14) и следя только за старшими производными, получаем

$$D_t(r) + f_*^\dagger(r) = (D_t + D_x^2)(r) + \dots = 2\partial_{2k}(r)u_{2k+2} + \dots,$$

то есть, $\rho_{kk} = 0$, вопреки предположению. \square

Подводя итог этой лекции, можно сказать, что наличие у уравнения бесконечной последовательности законов сохранения сколь угодно высокого порядка является признаком его интегрируемости. В то же время, имеются интегрируемые уравнения, у которых законов сохранения конечное число.

2.5 Задачи. Символьные вычисления

Задача 2.1. (1 балл) Используя вариационную производную или алгоритм интегрирования по частям, выясните, принадлежит ли $\text{Im } D_x$ функция

$$a = \sum_{s=0}^n u_s u_{n-s},$$

в зависимости от числа n . Если $a \in \text{Im } D_x$, то найдите функцию b такую, что $a = D_x(b)$.

Задача 2.2. (1 балл) Обобщите утверждение 2.7 и покажите, что эволюционное уравнение четного порядка $u_t = f(x, u_0, \dots, u_{2n})$ не может иметь законов сохранения с плотностями $\rho(x, u, \dots, u_k)$, где $\rho_{kk} \neq 0$ и $k > n$.

Задача 2.3. (2 балла) Рассмотрим 2-компонентные эволюционные системы

$$u_t = f(x, u_0, v_0, \dots, u_n, v_n), \quad v_t = g(x, u_0, v_0, \dots, u_n, v_n),$$

где u_j, v_j , как и раньше, обозначают производные по x . Обобщить на этот случай определения динамических переменных, операторов $D_x, D_t, *$ и E .

Упражнения на компьютере. *Mathematica* можно использовать не только для численного счёта и рисования картинок. Реализация вычислений из раздела 2.3 также не представляет труда, хотя и требует более глубокого знакомства с языком. Поэтому, на этот раз большая часть задач приводится с решениями.

Действие операторов полной производной, линеаризации и вариационной производной можно определить так:

$$\begin{aligned} \text{vars}[f_ , u_] &:= \text{Union}[\text{Cases}[f_ , u_ , \{0, \backslash[\text{Infinity}]\}]] \\ \text{dif}[f_] &:= \text{Plus}@@(D[f_ , \#]d[\#] \& / @\text{vars}[f_]) \\ \text{Dx}[f_] &:= D[f_ , x] + \text{dif}[f_] /. d[u[k_]] :> u[k+1] \\ \text{Dx}[f_ , k_] &:= \text{Nest}[\text{Dx}, f_ , k] \\ \text{star}[g_ , f_] &:= \text{dif}[g_] /. d[u[k_]] :> \text{Dx}[f_ , k] \\ \text{vard}[f_] &:= \text{Expand}[\text{Plus}@@ \\ &\quad ((-1)^\#[[1]] * \text{Dx}[D[f_ , \#], \#[[1]]] \& / @\text{vars}[f_])] \end{aligned} \tag{2.15}$$

При запуске этой ячейки ничего не вычисляется, это просто определения. Здесь $u[k]$ обозначает динамическую переменную u_k ; вспомогательная функция **vars** возвращает список динамических переменных в выражении; вторая строка служит определением дифференциала

$$df = \partial_0(f)du_0 + \partial_1(f)du_1 + \partial_2(f)du_2 + \dots$$

Далее идёт определение $D_x(f)$, $D_x^k(f)$, $g_*(f)$ и $\delta d/\delta u$.

Смысл некоторых конструкций *Mathematica*, используемых в этом фрагменте, поясним на примерах:

<code>f@@{a,b,c}</code>	даёт	<code>f[a,b,c]</code>
<code>f/@{a,b,c}</code>	даёт	<code>{f[a],f[b],f[c]}</code>
<code>g[x+#]+#^2&[y+z]</code>	даёт	<code>g[x+y+z]+(y+z)^2</code>
<code>f/.g[t_]:>t^2</code>	однозначная замена всех <code>g</code> в выражении	<code>f</code>
<code>g[30]//.g[t_]/;t>0:>t*g[t-1]</code>	итерируемая замена	

При необходимости, разберитесь с этими обозначениями при помощи контекстной справки.

Задача 2.4. Выполнить проверку преобразования Миуры (2.2).

Решение. Пусть переменная u удовлетворяет уравнению мКдФ, а результат преобразования Миуры обозначим U :

```
ut= u[3] -6(u[0]^2 +a)u[1];
U= u[1] +u[0]^2 +a;
Expand[-star[U,ut] +Dx[U,3] -6U*Dx[U]]
```

Если всё правильно, то в результате выполнения последней команды должен получиться 0.

Задача 2.5. Вычислить коэффициенты ряда (2.3) по рекуррентным формулам (2.4), вплоть до f_{15} . Проверить, применяя вариационную производную, что все f_{2n} являются полными производными по x , а f_{2n-1} являются нетривиальными плотностями законов сохранения для уравнения КдФ.

Решение. Делаем вычисления в цикле и составляем списки многочленов f_n отдельно с нечётными и чётными номерами:

```
M= 15;
f[1]= -u[0];
Do[f[n+1]= Expand[Dx[f[n]]+Sum[f[s]f[n-s],{s,1,n-1}]],{n,1,M-1}]
odd= Table[f[n],{n,1,M,2}]
even= Table[f[n],{n,2,M,2}]
```

В следующей ячейке выполним следующие команды:

```
vard/@even
vard/@odd
oddt= star[odd, u[3]-6u[0]u[1]];
vard/@oddt
```

Первая строчка выдаст список из нулей, это означает, что $f_{2n} \in \text{Im } D_x$. Наоборот, вторая строчка выдаст список с ненулевыми элементами, то есть, f_{2n-1} не лежат в образе D_x . Последняя строчка даёт нули, следовательно, $D_t(f_{2n-1}) \in \text{Im } D_x$.

Задача 2.6. Реализовать алгоритм интегрирования по частям.

Решение. Определим вспомогательную функцию **ord**, возвращающую номер старшей переменной в выражении. Отметим, что конструкция **Module** это функция с локальными переменными, возвращающая последнее вычисляемое в ней выражение (если после него стоит точка с запятой, то результатом будет **Null**). Далее, функция **int[f]** возвращает пару выражений a, b , таких что $f = D_x(a) + b$, и остаток b дальше не интегрируется. Если $b = 0$, то это значит, что $f \in \text{Im } D_x$.

```
ord[f_] := Module[{v=vars[f]},
  If[v=={ }, -1, v[[-1]][[1]]]
]

int[f_] := Module[{a=0, b=Expand[f], c, n},
  While[n=ord[b];
  And[n>0,
    c=D[b, u[n]];
    Expand[D[c, u[n]]]==0
  ],
  c=Integrate[c, u[n-1]];
  a=Expand[a+c];
  b=Expand[b-Dx[c]]
];
If[ord[b]==-1,
  {Expand[a+Integrate[b, x]], 0},
  {a, b}
]
]
```

Задача 2.7. (1 балл) Вычислить токи законов сохранения для уравнения КдФ, отвечающие плотностям f_{2n-1} из задачи 2.5 (при ручном счёте можно взять несколько первых плотностей из таблицы 1).

Задача 2.8. (1 балл) Получите несколько законов сохранения для самого уравнения мКдФ, применяя преобразование Миуры к уже найденным плотностям КдФ.

3 Спектральная задача

Условие совместности · Представление нулевой кривизны · Лаксова пара · Примеры: система АКНС, уравнения sin–Гордона и Цицейки, цепочка Вольтерра · Высшие уравнения КдФ · Оператор рекурсии · Локальность · Уравнение для производящей функции · Связь с законами сохранения

3.1 Линеаризация преобразования Миуры

На прошлой лекции мы проверили, что уравнения Кдф и мКдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad (3.1)$$

$$f_t = f_{xx} - 6(f^2 + \lambda)f_x \quad (3.2)$$

связаны преобразованием Миуры

$$u = f_x + f^2 + \lambda, \quad (3.3)$$

и уже извлекли отсюда способ вычисления законов сохранения для (3.1). Теперь вспомним, как линеаризуется уравнение Риккати и сделаем дальнейшую замену

$$f = \frac{\psi_x}{\psi}. \quad (3.4)$$

В результате, уравнение (3.3) превращается в стационарное одномерное уравнение Шрёдингера с потенциалом u :

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi. \quad (3.5)$$

Покажем, что уравнение мКдФ при этой подстановке также превращается в уравнение, линейное относительно ψ . Интегрируя (3.2) один раз по x , получаем

$$\frac{\psi_t}{\psi} = f_{xx} - 2f^3 - 6\lambda f + C(t).$$

Функцию $C(t)$ можно считать равной 0 без потери общности: она уничтожается заменой $\psi = c(t)\tilde{\psi}$, где $c'/c = C$. Далее, имеем

$$f_{xx} = u_x - 2ff_x = u_x - 2f(u - \lambda - f^2) = u_x - 2(u - \lambda)f + 2f^3$$

и подстановка в уравнение для ψ даёт

$$\frac{\psi_t}{\psi} = u_x - 2uf - 4\lambda f,$$

что равносильно

$$\psi_t = u_x\psi - 2(2\lambda + u)\psi_x. \quad (3.6)$$

Согласно Утверждению 2.1, уравнение КдФ является следствием уравнений (3.2) и (3.3). Так как уравнения (3.5) и (3.6) им эквивалентны, то уравнение КдФ является также и их следствием. Мы переформулируем это утверждение в чуть более общем виде и проведём прямую проверку.

Утверждение 3.1. *Условие совместности линейных уравнений*

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = b\psi + a\psi_x \quad (3.7)$$

имеет вид

$$a_{xx} + 2b_x = 0, \quad u_t = -\frac{1}{2}a_{xxx} + 2(u - \lambda)a_x + u_x a. \quad (3.8)$$

В частности, при $a = -4\lambda - 2u$, $b = u_x$, уравнения (3.8) эквивалентны уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Доказательство. Проверка совместности заключается в вычислении смешанной производной ψ_{xxt} двумя разными способами. Предварительно, вычислим ψ_{xt} , дифференцируя второе уравнение и заменяя ψ_{xx} из первого:

$$\psi_{xt} = (b_x + (u - \lambda)a)\psi + (b + a_x)\psi_x. \quad (3.9)$$

Теперь сначала дифференцируем это уравнение по x , затем первое уравнение (3.7) дифференцируем по t , и результаты приравниваем:

$$\begin{aligned} \psi_{xxt} &= (b_{xx} + u_x a + (u - \lambda)(2a_x + b))\psi + (2b_x + a_{xx} + (u - \lambda)a)\psi_x \\ &= u_t \psi + (u - \lambda)(b\psi + a\psi_x). \end{aligned}$$

Кое-что сокращается, а оставшиеся коэффициенты при ψ , ψ_x дают

$$a_{xx} + 2b_x = 0, \quad u_t = b_{xx} + 2(u - \lambda)a_x + u_x a,$$

что эквивалентно условию (3.8). Остаётся подставить указанные a и b . \square

Отметим, что равенство смешанных производных является условием совместности в локальной форме. Глобально, оно обеспечивает, что любое решение $\psi(x, \lambda)$ первого уравнения (3.7) можно достроить до решения, удовлетворяющего обоим уравнениям, взяв $\psi(x, \lambda)$ в качестве начального условия при $t = t_0$.

3.2 Представление нулевой кривизны и представление Лакса

Полученный результат полезно переписать в матричном виде. Отметим, что первое уравнение (3.8) можно заменить, не теряя общности, на $b = -\frac{1}{2}a_x$: константа интегрирования здесь не важна, так как во второе уравнение она всё равно не входит. Для порядка, её можно прибить преобразованием вида $\tilde{\psi} = e^{c(t)}\psi$, тогда рассматриваемые линейные уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = -\frac{1}{2}a_x\psi + a\psi_x, \quad \psi_{xt} = \left(-\frac{1}{2}a_{xx} + (u - \lambda)a\right)\psi + \frac{1}{2}a_x\psi_x.$$

Это можно переписать в виде системы для вектор-столбца $\Psi = (\psi, \psi_x)^T$:

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (3.10)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_x & a \\ -\frac{1}{2}a_{xx} + (u - \lambda)a & \frac{1}{2}a_x \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

и при $a = -4\lambda - 2u$ получаем матрицу

$$V = \begin{pmatrix} u_x & -4\lambda - 2u \\ u_{xx} - 2(u - \lambda)(2\lambda + u) & -u_x \end{pmatrix}.$$

Условие совместности уравнений (3.10) выглядит в матричном виде совершенно прозрачно:

$$\begin{aligned} \Psi_{xt} &= U_t \Psi + U \Psi_t = (U_t + UV) \Psi \\ &= V_x \Psi + V \Psi_x = (V_x + VU) \Psi \Rightarrow \\ U_t - V_x &= [V, U]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнение КдФ в этой схеме не является исключительным и при другом выборе матриц U, V можно получить и другие нелинейные уравнения. Примеры будут дальше в этой лекции.

Определение 3.1. Нелинейное уравнение в частных производных $F[u] = 0$ допускает представление нулевой кривизны, если оно эквивалентно уравнению (3.12), где U, V матрицы подходящей размерности, зависящие от динамических переменных для данного уравнения и параметра λ .

Параметр λ принято называть спектральным, а уравнение $\Psi_x = U\Psi$ спектральной задачей. Альтернативно, уравнения (3.5), (3.6) можно переписать в операторном виде, это даёт ещё один способ записи Утверждения 3.1. Заметим, что уравнение (3.6) не содержит производных ψ по x выше первого порядка, поскольку они исключаются в силу уравнения Шрёдингера (3.5). Фактически, при выводе (3.6) мы понижали порядок производных по x , дифференцируя преобразование Миуры (3.3). Вместо исключения производных можно избавиться от параметра λ . Продифференцируем (3.5) по x и сократим в (3.6) член с $\lambda\psi_x$, тогда наши линейные уравнения примут вид

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi.$$

Это можно записать как

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = A\psi, \quad (3.13)$$

где L это оператор Шрёдингера, а A оператор третьего порядка:

$$L = -D_x^2 + u, \quad A = 4D_x^3 - 6uD_x - 3u_x. \quad (3.14)$$

Условие совместности в этом случае выглядит следующим образом:

$$(L_t + LA)\psi = \lambda A\psi = AL\psi \Rightarrow L_t = [A, L].$$

Это приводит к следующему общему определению.

Определение 3.2. Нелинейное уравнение в частных производных $F[u] = 0$ допускает представление Лакса, если оно эквивалентно уравнению

$$L_t = [A, L], \quad (3.15)$$

где $A, L \in \mathcal{F}[D_x]$ дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от динамических переменных для данного уравнения.

Часто представлением Лакса называют любые уравнения вида (3.15), не обязательно для дифференциальных операторов; например, A и L могут быть элементами некоторой алгебры Ли. Исторически, введённые выше понятия появились в такой последовательности: в 1967 г. было показано, что уравнение КдФ служит условием совместности пары линейных уравнений (Гарднер, Грин, Краскал, Миура); в 1968 г. были найдены преобразование Миуры и представление Лакса; представление нулевой кривизны появилось в 1971 г. (Захаров, Шабат).

3.3 Иерархия КдФ

Уравнение КдФ это не всё, что можно получить из уравнения (3.8). Будем искать $a = a^{(n)}$ в виде многочлена по λ с коэффициентами, зависящими от динамических переменных u_j : пусть $a^{(n)} = A_0\lambda^n + \dots + A_n$, $A_j = A_j[u]$. Тогда подстановка в (3.8) даёт такую систему:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1} : \quad & 0 = -2A_{0,x}, \\ \lambda^{n-j} : \quad & 0 = -\frac{1}{2}A_{j,xxx} + 2uA_{j,x} + u_xA_j - 2A_{j+1,x}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \lambda^0 : \quad & u_{t_{2n+1}} = -\frac{1}{2}A_{n,xxx} + 2uA_{n,x} + u_xA_n = 2A_{n+1,x}. \end{aligned}$$

Здесь A_{n+1} фиктивный коэффициент, введённый для однообразия. Обратим внимание, что вид рекуррентных соотношений для A_j не зависит от n , то есть, удобно считать, что A_j образуют бесконечную последовательность, которую мы обрываем где хотим и используем для определения u_t .

Первые два уравнения разрешить легко: $A_0 = c_0$, $A_1 = \frac{c_0}{2}u + c_1$, где $c_i = \text{const}$. Чтобы двигаться дальше, перепишем уравнение для A_{j+1} :

$$-4A_{j+1,x} = A_{j,xxx} - 4(uA_j)_x + 2u_xA_j.$$

После интегрирования, это можно записать в виде

$$-4A_{j+1} = R(A_j) \Rightarrow A_j = (-4)^{-j}c_0S^j(1),$$

где S это псевдодифференциальный оператор

$$S = D_x^2 - 4u + 2D_x^{-1}u_1.$$

Здесь D_x^{-1} следует понимать, как неопределённый интеграл, а $D_x^{-1}u_1$ как оператор умножения на u_1 и затем интегрирования. Общий числовой множитель не важен, так как от него можно избавиться растяжением t . Рассмотрим также сопряженный оператор

$$R = D_xSD_x^{-1} = (D_x^3 - 4uD_x - 4u_1 + 2u_1)D_x^{-1} = D_x^2 - 4u - 2u_1D_x^{-1}.$$

В результате, мы приходим к следующей последовательности уравнений.

Определение 3.3. Иерархией КдФ называются уравнения вида

$$u_{t_{2n+1}} = D_xS^n(u) = R^n(u_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Оператор R , действующий непосредственно на правые части уравнений, называется оператором рекурсии.

$$\begin{aligned}
u_{t_1} &= D_x(u) = u_1, \\
u_{t_3} &= D_x(u_2 - 3u^2) = u_3 - 6uu_1, \\
u_{t_5} &= D_x(u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3), \\
u_{t_7} &= D_x(u_6 - 14uu_4 - 28u_1u_3 - 21u_2^2 + 70u^2u_2 + 70uu_1^2 - 35u^4), \\
u_{t_9} &= D_x(u_8 - 18uu_6 - 54u_1u_5 - 114u_2u_4 - 69u_3^2 \\
&\quad + 126u^2u_4 + 504uu_1u_3 + 378uu_2^2 + 462u_1^2u_2 \\
&\quad - 420u^3u_2 - 630u^2u_1^2 + 126u^5), \quad \dots
\end{aligned}$$

Таблица 3. Иерархия КдФ.

Прямые вычисления при помощи оператора S или R приводят к последовательности многочленов, выписанной в табл. 3. Отметим, что они однородны относительно веса $w(u_n) = n + 2$. Это вытекает из того, что оператор рекурсии однороден (имеет вес 2), если положить $w(D_x) = 1$. При применении D_x^{-1} возникают константы интегрирования, но их можно считать нулевыми, так как они просто добавляют в правую часть линейную комбинацию многочленов меньшего веса.

Первое уравнение $u_{t_1} = u_1$ тривиально, второе это и есть КдФ, следующие уравнения называются *высшими симметриями* КдФ. Что означает термин «симметрия» будет объяснено на следующей лекции. Пока отметим только, что эти уравнения имеет смысл объединять в одно семейство, или иерархию, поскольку методы их исследования и решения совершенно идентичны. В основе этого лежит, конечно, тот факт, что все они ассоциированы с одним и тем же линейным уравнением (3.5). Из проделанных вычислений следует, что уравнения (3.16) допускают представление нулевой кривизны с матрицами (3.11), где

$$a = a^{(n)} = (-4\lambda)^n + (-4\lambda)^{n-1}S(1) + \dots + S^n(1).$$

3.4 Локальность потоков

Прежде чем переходить к изучению свойств иерархии КдФ, разберёмся с одним феноменом, с которым мы столкнулись, пока выписывали табл. 3. Как мы помним из предыдущей лекции, интеграл $D_x^{-1}(f)$ от функции, зависящей от переменных u_n , далеко не всегда записывается в виде аналогичной функции. Иначе говоря, операция D_x^{-1} выводит за пределы поля \mathcal{F} . Можно было бы ожидать, что при вычислении $R^n(1)$ в ответе будет сидеть интеграл на интеграле. Как же так получается, что ответ записывается в локальном виде? Неужели везёт?

Разгадка довольно проста. Рассмотрим производящую функцию

$$a = A_0 + A_1\lambda^{-1} + A_2\lambda^{-2} + A_3\lambda^{-3} + \dots \quad (3.17)$$

Многочлен $a^{(n)}$ получается из неё по формуле $a^{(n)} = (\lambda^n a)_{\geq 0}$, где значок ≥ 0 означает отбрасывание всех отрицательных степеней λ . Ясно, что a удовлетворяет тому же уравнению (3.8), что и $a^{(n)}$, но с нулевой левой частью (действительно, поделим

(3.8) на λ^n и перейдём к пределу $n \rightarrow \infty$), то есть,

$$a_{xxx} + 4(\lambda - u)a_x - 2u_x a = 0. \quad (3.18)$$

Это уравнение допускает однократное интегрирование:

$$2aa_{xx} - a_x^2 + 4(\lambda - u)a^2 = 4A_0^2\lambda + c_0 + c_1/\lambda + \dots, \quad (3.19)$$

с произвольными постоянными в правой части. Фактически, в этой формуле мы берём интегралы сразу во всех степенях $R^n(1)$. Собирая коэффициенты при λ^{-n} , получаем уже явные, хотя и квадратичные рекуррентные соотношения (напомним, что можно считать $A_0 = 1$)

$$8A_0A_{n+1} = \sum_{s=0}^n (A_{s,x}A_{n-s,x} - 2A_sA_{n-s,xx} + 4uA_sA_{n-s}) - 4 \sum_{s=1}^n A_sA_{n+1-s} + c_n. \quad (3.20)$$

Нетрудно видеть, что однородные многочлены получаются, если выбрать $c_n = 0$ для всех n , что эквивалентно умножению A на подходящий ряд с постоянными коэффициентами.

Для дальнейшего нам также понадобится связь между a и производящей функцией для плотностей законов сохранения, которую мы построили на прошлой лекции.

Утверждение 3.2. Пусть $f(z)$ формальное решение уравнения $f_x + f^2 = u - \lambda$,

$$f(z) = -\frac{z}{2} + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots, \quad z^2 = -4\lambda.$$

Тогда производящая функция

$$a(\lambda) = \frac{z}{f(-z) - f(z)} = 1 + \frac{A_1}{\lambda} + \frac{A_2}{\lambda^2} + \dots \quad (3.21)$$

удовлетворяет уравнению

$$2aa_{xx} - a_x^2 + 4(\lambda - u)a^2 = 4\lambda. \quad (3.22)$$

Доказательство. Это утверждение несложно доказать прямым вычислением, что оставляется в качестве домашнего упражнения. Сейчас приведём не прямое доказательство, с использованием ψ -функций. Заметим, что уравнению (3.18) удовлетворяет произведение $a = \psi\tilde{\psi}$ любых двух решений уравнения Шрёдингера (3.5). Действительно:

$$a_x = \psi_x\tilde{\psi} + \psi\tilde{\psi}_x,$$

$$a_{xx} = 2(u - \lambda)a + 2\psi_x\tilde{\psi}_x,$$

$$a_{xxx} = 2u_x a + 2(u - \lambda)a_x + 2(u - \lambda)(\psi_x\tilde{\psi} + \psi\tilde{\psi}_x) = 2u_x a + 4(u - \lambda)a_x.$$

Рассмотрим соответствующие решения уравнения Риккати: $f = \psi_x/\psi$ и $\tilde{f} = \tilde{\psi}_x/\tilde{\psi}$. Для них имеем

$$\tilde{f} - f = \frac{\psi\tilde{\psi}_x - \psi_x\tilde{\psi}}{\psi\tilde{\psi}} = \frac{c}{a},$$

где c есть вронскиан двух решений уравнения Шрёдингера, не зависящий от x . Примем в качестве f и \tilde{f} ряды $f(z)$ и $f(-z)$, а в качестве a ряд, определяемый уравнением (3.22). Так как коэффициенты этих рядов однородны, то из сравнения главных коэффициентов следует $c = z$. \square

3.5 Примеры

Основная идея, с которой мы сегодня познакомились — это то, что некоторые нелинейные уравнения допускают интерпретацию как условия совместности для вспомогательных линейных уравнений. Польза от этого будет выясняться в дальнейшем, а сейчас, в завершение лекции, просто рассмотрим ещё несколько уравнений, допускающих такое представление. Все эти примеры относятся к золотому фонду, открытому ещё в 1970-х. Конечно, это лишь незначительная часть того, что было найдено с тех пор. Сколько имеется в литературе существенно различных примеров такого типа — мне не известно, может быть, несколько тысяч (без учета бесконечного числа высших симметрий, естественно).

Пример 3.1 (Система Захарова–Шабата–Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура). Выберем матрицы U, V в виде

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda & -v \\ u & \lambda \end{pmatrix}, \quad V = 2\lambda U + U_1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} -uv & v_x \\ u_x & uv \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

тогда уравнение (3.12) оказывается эквивалентным 2-компонентной эволюционной системе

$$u_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2. \quad (3.24)$$

Если считать переменные u, v комплексными и сделать замену $t \rightarrow it$, то получается система

$$-iu_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad iv_t = v_{xx} + 2uv^2,$$

согласованная со связью $v = \pm \bar{u}$ (то есть, дифференцирование этого соотношения по t даёт тождество; связи такого типа называются редукциями. Фактически, годится и более общая связь $v = a\bar{u}$, $a \in \mathbb{R}$, но она не даёт ничего нового, если учесть растяжения). В результате, возникает нелинейное уравнение Шрёдингера

$$-iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2u,$$

которое уже упоминалось в примерах.

Пример 3.2. Если взять U как в предыдущем примере, а в качестве V матрицу

$$V = 4\lambda^2 U + 2\lambda U_1 + U_2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & -v_{xx} - 2uv^2 \\ u_{xx} + 2u^2 v & u_x v - uv_x \end{pmatrix},$$

то получится система

$$u_t = u_{xxx} + 6uvu_x, \quad v_t = v_{xxx} + 6uvv_x. \quad (3.25)$$

В этом примере, как и в случае уравнения КдФ, одной и той же матрице U отвечают разные матрицы V , порождающие различные уравнения. Система (3.25) совместна со связью $v = 1$ сводящей систему к уравнению КдФ, и со связью $v = \pm u$, которая даёт модифицированное уравнение КдФ.

Пример 3.3. Рассмотрим матрицы

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & -u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (3.12) эквивалентно уравнению sin-Гордон

$$u_{xt} = \sin u. \quad (3.26)$$

Если же взять

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & u_x \\ u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u \\ \sinh u & -\cosh u \end{pmatrix},$$

то получится уравнение sinh-Гордон

$$u_{xt} = \sinh u. \quad (3.27)$$

Отметим, что матрица U здесь фактически та же, что и в (3.23), с точностью до замены $u \rightarrow u_x$, $v \rightarrow \pm u_x$ и несущественных переобозначений. Как и в случае уравнений мКдФ $^\pm$, НШ $^\pm$, уравнения (3.26) и (3.27) эквивалентны, если считать переменную u комплексной, но вещественные решения этих уравнений друг к другу не сводятся.

Пример 3.4. Представление нулевой кривизны можно определить не только для уравнений в частных производных, но и для разностных или дифференциально-разностных уравнений, типа цепочки Тоды (1.10) или цепочки Вольтерра

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \quad (3.28)$$

(она уже встречалась в задаче 1.6; здесь индекс n не обозначает производную, это просто номер, дискретная переменная, заменяющая непрерывную переменную x ; индекс t по прежнему обозначает производную по t). Рассмотрим линейные уравнения

$$\Psi_{n+1} = U_n \Psi_n, \quad \Psi_{n,t} = V_n \Psi_n \quad (3.29)$$

с матрицами U_n, V_n , зависящими от переменных u_j и спектрального параметра λ . Для них условие совместности получается при вычислении $\Psi_{n+1,t}$ двумя разными способами:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1,t} &= U_{n,t} \Psi_n + U_n \Psi_{n,t} = (U_{n,t} + U_n V_n) \Psi_n \\ &= V_{n+1} \Psi_{n+1} = V_{n+1} U_n \Psi_n, \end{aligned}$$

то есть, вместо (3.12) получаем для уравнений данного типа представление нулевой кривизны вида

$$U_{n,t} = V_{n+1} U_n - U_n V_n. \quad (3.30)$$

В частности, можно проверить, что цепочку (3.28) обслуживают матрицы

$$U_n = \begin{pmatrix} \lambda & u_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} u_n & -\lambda u_n \\ -\lambda & \lambda^2 + u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Отметим, что уравнение $\Psi_{n+1} = U_n \Psi_n$ эквивалентно системе

$$\psi_{n+1} = \lambda \psi_n + u_n \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \psi_n \Rightarrow \psi_{n+1} - u_n \psi_{n-1} = \lambda \psi_n.$$

Последнее уравнение служит разностным аналогом уравнения Шрёдингера $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$.

Пример 3.5. Рассмотрим матрицы (опять для непрерывного случая)

$$U = \begin{pmatrix} u & \lambda(u-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} f[u] & \lambda(f[u]+1) \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $f[u]$ обозначает произвольную функцию $f(x, u, u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}$. Нетрудно проверить, что уравнение (3.12) для таких матриц эквивалентно уравнению $u_t = D_x(f[u])$. Получается, что мы нашли представление нулевой кривизны для произвольного уравнения такого вида? Увы, нет, это обман, то, что называют ‘fake Lax pair’. Матрицы U, V получаются обкруткой диагональных матриц:

$$U = K\tilde{U}K^{-1}, \quad V = K\tilde{V}K^{-1}, \quad K = \text{const},$$

а именно,

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} f[u] & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, уравнения (3.12) для пар U, V и \tilde{U}, \tilde{V} при таком преобразовании эквивалентны. Из такого представления нулевой кривизны ничего извлечь невозможно. Чтобы оно было рабочим, нужно, чтобы матрицы U, V не сводились к диагональным и чтобы зависимость от λ нельзя было уничтожить. В диагональном случае уравнения становятся линейными, так в (3.12) исчезает коммутатор, а зависимость от λ требуется, чтобы была возможность строить формальные разложения типа (2.3). Поэтому, при поиске представления (3.12) следует учитывать возможность его тривиализации каким-либо калибровочным преобразованием, то есть, заменой вида $\Psi = K[u, \lambda]\tilde{\Psi}$ в линейных уравнениях (3.10). При таких заменах матрица U преобразуется по правилу

$$U = K\tilde{U}K^{-1} + K_x K^{-1}, \quad V = K\tilde{V}K^{-1} + K_t K^{-1}.$$

В связи с этим примером возникают два довольно естественных вопроса:

- существует ли представление нулевой кривизны для любого заданного нелинейного уравнения;
- существует ли алгоритм его построения (или доказательства, что его нет).

Ответ на первый вопрос отрицательный — наличие настоящего, не фальшивого представления нулевой кривизны является редким, исключительным свойством, и в таких случаях мы говорим, что уравнение интегрируемо. Но, отличить интегрируемое уравнение от неинтегрируемого может быть достаточно сложно. Алгоритмы хотя и существуют, но они не универсальны и очень сложны с вычислительной точки зрения.

3.6 Задачи. Представления нулевой кривизны

Задача 3.1. (2 балла) В примере 3.1 заменить V на матрицу общего вида

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

и вывести соотношения, аналогичные (3.8). Считая a, b, c многочленами по λ , получить для них рекуррентные соотношения и оператор рекурсии для иерархии AKNS:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_n} = R^n \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \quad R = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & -D_x \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u D_x^{-1} v & u D_x^{-1} u \\ -v D_x^{-1} v & -v D_x^{-1} u \end{pmatrix}.$$

Вывести с его помощью уравнения (3.24), (3.25) и следующее уравнение иерархии 4-го порядка.

Задача 3.2 (продолжение). (2 балла) Доказать, что применение оператора R в предыдущем примере сохраняет локальность уравнений, то есть, интегралы всегда берутся в виде функций от u_k, v_k . [Подсказка: доказать соотношение $a^2 + bc = \text{const}$ для производящих функций.]

Задача 3.3. (1 балл) Представления нулевой кривизны, рассмотренные в разделе 3.5, не очень сложны и допускают ручную проверку. Можно воспользоваться и компьютером. В *Mathematica*, матрицы задаются выражениями типа $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, матричное умножение обозначается точкой. Проверьте по 2–3 из приведенных примеров, начав со следующего образца для уравнения КдФ:

```
u[j_]:=D[u[x,t],{x,j}];
U={{0,1},
   {u[0]-L,0}};
V={{u[1],-2(u[0]+2L)},
   {u[2]-2(u[0]+2L)(u[0]-L),-u[1]}};
Expand[D[U,t]-D[V,x]-V.U+U.V]
```

Здесь мы не пользуемся определениями (2.15) из прошлого занятия, достаточно встроено дифференцирование D . Обозначение $u[j]$ использовано для сокращения ввода, а при выводе *Mathematica* будет обозначать частные производные верхними индексами в скобках.

Задача 3.4. (1 балл) Проверить, что условие совместности для уравнений

$$\psi_{xxx} = \frac{3}{2}u\psi_x + \frac{1}{4}(\lambda + v + 3u_x)\psi, \quad \psi_t = \psi_{xx} - u\psi$$

равносильно системе

$$3u_t = v_x, \quad -v_t = (u_{xx} - 3u^2)_x,$$

эквивалентной уравнению Буссинеска (1.6) с точностью до коэффициента перед u_{tt} :

$$-3u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx}. \quad (3.32)$$

Выписать соответствующее матричное представление (3.12), приняв $\Psi = (\psi, \psi_x, \psi_{xx})^T$ (в отличие от предыдущих примеров, здесь приходится брать матрицы размера 3×3)

Задача 3.5. (1 балл) Проверить, что уравнение Циццейки

$$u_{xt} = e^{2u} - e^{-u} \quad (3.33)$$

служит условием совместности для системы

$$\psi_{xx} = -u_x \psi_x + \lambda e^u \psi_t, \quad \psi_{xt} = e^{-u} \psi, \quad \psi_{tt} = \lambda^{-1} e^u \psi_x - u_t \psi_t.$$

Переписать эту систему в матричном виде $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi_t = V\Psi$ с матрицами размера 3×3 , приняв в качестве Ψ вектор $(\psi, \psi_x, \psi_t)^T$.

Задача 3.6. (2 балла) Уравнения иерархии КдФ имеют вид $u_{t_{2n+1}} = D_x(A_{n+1})$ (с точностью до числового множителя), где для вычисления многочленов A_n у нас есть три рабочих формулы: при помощи оператора S (3.16), квадратичное рекуррентное соотношение (3.20) и формула (3.21), выражающая A_n через коэффициенты производящей функции f (2.3), (2.4).

Реализовать все три способа, используя введённые ранее функции (2.15) и функцию `int` из задачи 2.6. Сравнить эффективность при помощи функции `Timing[...]`, которая возвращает результат вычисления и затраченное на него время. В тех случаях, когда время слишком мало, можно использовать повторение в цикле, чтобы получить более надёжный результат:

```
Timing[
  Do[ClearSystemCache[];
    ...,
    {k, 1, 100}]
]
```

Здесь очистка кэша необходима, чтобы вычисление проводилось заново при каждом прохождении цикла; без этого не в меру умная *Mathematica* сделает вычисление только один раз, а потом будет использовать полученный результат.

4 Высшие симметрии

Совместность · Алгебра Ли высших симметрий · Коммутативность иерархии КдФ · Уравнения Новикова · Уравнения Дубровина · Однородные многочлены · Метод неопределённых коэффициентов · Вычисления для заданного уравнения · Новые примеры уравнений 5-го порядка

4.1 Высшие, или обобщённые симметрии

Наиболее характерной чертой интегрируемых уравнений является свойство совместности. Для эволюционных уравнений оно формулируется следующим образом. Рассмотрим пару уравнений

$$u_t = f(x, u, \dots, u_n), \quad (4.1)$$

$$u_\tau = g(x, u, \dots, u_m). \quad (4.2)$$

Решение $u(x, t)$ первого уравнения определяется, локально, по заданному начальному условию $u(x, t_0) = u(x)$. Примем, при каждом t , это решение в качестве начального условия для второго уравнения и построим функцию $u(x, t, \tau)$. Уравнения совместны, если эта функция останется решением первого уравнения для каждого значения τ (по крайней мере в некоторой окрестности τ_0). Это свойство эквивалентно равенству перекрёстных производных $(u_t)_\tau = (u_\tau)_t$, вычисляемых в силу заданных уравнений, то есть,

$$\begin{aligned} \partial_0(f)g + \partial_1(f)D_x(g) + \dots + \partial_n(f)D_x^n(g) \\ = \partial_0(g)f + \partial_1(g)D_x(f) + \dots + \partial_m(g)D_x^m(f). \end{aligned}$$

Если это условие выполнено тождественно по переменным u_j , то любое решение одного из уравнений можно локально продолжить до функции $u(x, t, \tau)$, удовлетворяющей обоим уравнениям. Если условие не выполнено, то такое продолжение, вообще говоря, невозможно (за исключением специальных решений, для которых равенство $(u_t)_\tau = (u_\tau)_t$ все же выполняется).

Вспоминая определение эволюционного дифференцирования (2.7), приходим к следующему определению.

Определение 4.1. Уравнение $u_\tau = g[x, u]$ является симметрией уравнения $u_t = f[x, u]$, если выполняется соотношение

$$[f, g] = 0, \quad (4.3)$$

тождественно по переменным u_j , где

$$[f, g] := \nabla_f(g) - \nabla_g(f), \quad f, g \in \mathcal{F}. \quad (4.4)$$

Множество всех g , удовлетворяющих соотношению (4.3), для фиксированной функции f , будем обозначать $\text{Sym}(f)$.

С учетом тождества $\nabla_f(g) = g_*(f)$ для оператора линейаризации (2.8), скобку $[f, g]$ можно определить эквивалентно, как

$$[f, g] = g_*(f) - f_*(g) \quad \text{или} \quad [f, g] = (\nabla_f - f_*)(g).$$

Отсюда немедленно получаем важное для приложений следствие.

Следствие 4.1. Если уравнение $u_\tau = g[x, u]$ есть симметрия уравнения $u_t = f[x, u]$, то стационарное уравнение $g = 0$ совместен с динамикой по t :

$$D_t(g) \Big|_{g=0} = 0.$$

Доказательство. Действительно, из равенства $g = 0$ следует, что также $D_x^s(g) = 0$, для всех $s \geq 0$; по определению симметрии имеем $D_t(g) = f_*(g)$, и правая часть обращается в 0 при $g = 0$, так как $f_* = \sum \partial_s(f) D_x^s$. \square

Рассмотрим простейшие примеры. Прежде всего, это линейные уравнения, они всегда коммутируют. Пусть

$$u_t = u_n, \quad u_\tau = u_m,$$

тогда $(u_t)_\tau = (u_n)_\tau = u_{n+m} = (u_\tau)_t$. Для нелинейных уравнений вычисления усложняются. Например, для пары уравнений типа Хопфа

$$u_t = a(u)u_1, \quad u_\tau = b(u)u_1$$

имеем

$$(u_t)_\tau = a'(u)b(u)u_1^2 + a(u)(b(u)u_2 + b'(u)u_1^2).$$

Это выражение симметрично по a и b , следовательно $(u_t)_\tau = (u_\tau)_t$.

Пример 4.1 (Симметрия уравнения Бюргерса). Проверим, что следующая пара уравнений совместна:

$$u_t = f = u_2 + 2uu_1, \quad u_\tau = g = u_3 + 3uu_2 + 3u_1^2 + 3u^2u_1.$$

Вычисления здесь уже довольно громоздкие. Чуть-чуть облегчить их можно, заметив, что в правых частях стоят полные производные:

$$f = D_x(u_1 + u^2), \quad g = D_x(u_2 + 3uu_1 + u^3).$$

С учетом тождества $(D_x(f))_* = D_x f_*$ имеем

$$[f, g] = D_x((D_x^2 + 3uD_x + 3u_1 + 3u^2)(f) - (D_x + 2u)(g)),$$

и достаточно проверить, что выражение в скобках есть 0. Вычисляем:

$$\begin{aligned} & (3u_1 + 3u^2)(u_2 + 2uu_1) \\ & + 3u(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) \\ & + u_4 + 2uu_3 + 6u_1u_2 \\ & \stackrel{?}{=} 2u(u_3 + 3uu_2 + 3u_1^2 + 3u^2u_1) \\ & u_4 + 3uu_3 + 9u_1u_2 + 3u^2u_2 + 6uu_1^2. \end{aligned}$$

Сравниваем коэффициенты:

$$\begin{array}{ll} u_4 : & 1 = 1, \\ uu_3 : & 3 + 2 = 2 + 3, \\ u_1u_2 : & 3 + 6 = 9, \\ u^2u_2 : & 3 + 6 = 6 + 3, \\ uu_1^2 : & 6 + 6 = 6 + 6, \\ u^3u_1 : & 6 = 6. \end{array}$$

Всё сошлось!

Очевидно, для заданного уравнения $u_t = f$ сумма двух симметрий и произведение симметрии на число снова является симметрией, то есть, $\text{Sym}(f)$ есть линейное пространство:

$$g_*(f) = f_*(g), \quad h_*(f) = f_*(h) \Rightarrow (g+h)_*(f) = f_*(g+h), \quad (\alpha g)_*(f) = f_*(\alpha g).$$

Квадратные скобки далее будут использоваться не только для операции (4.4), но и для коммутатора векторных полей и дифференциальных операторов. Это не приводит к недоразумениям, так как смысл обозначения всегда ясен из типа операндов. Следующее утверждение можно рассматривать, как продолжение Утверждения 2.3.

Утверждение 4.2. *Выполняются тождества, для произвольных $f, g, h \in \mathcal{F}$:*

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f, g]}, \quad (4.5)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (4.6)$$

Доказательство. Для доказательства (4.5) применим коммутатор к динамическим переменным $x, u = u_0, u_1, \dots$. Имеем $[\nabla_f, \nabla_g](x) = 0$ и

$$[\nabla_f, \nabla_g](u_k) = \nabla_f(D_x^k(g)) - \nabla_g(D_x^k(f)) = D_x^k(\nabla_f(g) - \nabla_g(f)) = D_x^k([f, g]),$$

что и требуется. Таким образом, коммутатор двух эволюционных дифференцирований есть снова эволюционное дифференцирование, то есть, эволюционные дифференцирования образуют алгебру Ли. Тождество (4.6) следует из общего тождества Якоби для векторных полей. \square

Из тождества Якоби (4.6) следует, что все множество \mathcal{F} является алгеброй Ли относительно скобки $[\cdot, \cdot]$, и что множество симметрий $\text{Sym}(f)$ также есть алгебра Ли: коммутатор симметрий есть снова симметрия.

4.2 Коммутативность потоков КдФ

На прошлой лекции мы определили иерархию КдФ, как последовательность уравнений

$$u_{t_{2n+1}} = P_{n+1} = -\frac{1}{2}D_x(A_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

с производящей функцией

$$a = A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots, \quad A_0 = 1, \quad \zeta = z^2 = -4\lambda,$$

определяемой уравнением (3.22)

$$2aa_{xx} - a_x^2 - (\zeta + 4u)a^2 = -\zeta.$$

Докажем, что многочлены A_n удовлетворяют следующему тождеству.

Утверждение 4.3. *Выполняется соотношение*

$$D_{t_{2n+1}}(A_{m+1}) = A_0 D_x(A_{n+m+1}) + \dots + A_n D_x(A_{m+1}) - D_x(A_0)A_{n+m+1} - \dots - D_x(A_n)A_{m+1}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Воспользуемся выражением для a , установленным в Утверждении 3.2:

$$a = \frac{z}{\tilde{f} - f},$$

где $f = f(z)$, $\tilde{f} = f(-z)$ удовлетворяют уравнению $f_x + f^2 = u - \lambda$. Так как функция f определяется, как логарифмическая производная ψ -функции, то для неё правило дифференцирования по t_{2n+1} следует из того, что уравнение (4.7) эквивалентно условию совместности уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_{t_{2n+1}} = -\frac{1}{2}D_x(a^{(n)})\psi + a^{(n)}\psi_x,$$

где $a^{(n)} = (z^{2n}a)_{\geq 0} = z^{2n} + A_1 z^{2n-2} + \dots + A_n$. Отсюда получаем

$$D_{t_{2n+1}}(f) = D_x(a^{(n)}f - \frac{1}{2}D_x(a^{(n)})).$$

Функция \tilde{f} удовлетворяет этому же уравнению, так как замена $z \rightarrow -z$ его не меняет. Тогда

$$D_{t_{2n+1}}\left(\frac{z}{a}\right) = D_{t_{2n+1}}(\tilde{f} - f) = D_x(a^{(n)}(\tilde{f} - f)) = D_x\left(\frac{z a^{(n)}}{a}\right),$$

что равносильно

$$D_{t_{2n+1}}(a) = a^{(n)}D_x(a) - D_x(a^{(n)})a,$$

а это и есть (4.8). □

Отсюда сразу получается следующее важное свойство.

Теорема 4.4. *Уравнения (4.7) являются симметриями друг для друга, то есть, для любой пары $n, m = 0, 1, 2, \dots$ выполняется равенство $[P_{n+1}, P_{m+1}] = 0$.*

Доказательство. Так как

$$D_{t_{2n+1}}(P_{m+1}) = 2D_x D_{t_{2n+1}}(A_{m+1}),$$

то достаточно проверить, что выражение $D_{t_{2n+1}}(A_{m+1})$ симметрично относительно m, n , то есть, выполняется тождество

$$\begin{aligned} & a_0 D_x(a_{n+m+1}) + \dots + a_n D_x(a_{m+1}) - D_x(a_0)a_{n+m+1} - \dots - D_x(a_n)a_{m+1} \\ &= a_0 D_x(a_{n+m+1}) + \dots + a_m D_x(a_{n+1}) - D_x(a_0)a_{n+m+1} - \dots - D_x(a_m)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Для этого нужно лишь перенести члены с минусом на противоположную сторону равенства, тогда в обеих частях будет стоять сумма $\sum_{s=0}^{n+m+1} a_s D_x(a_{n+m+1-s})$. □

4.3 Уравнения Дубровина

Если у нас имеется коммутативная иерархия уравнений $u_{t_n} = g_n[u]$, то любое решение $u(x, t_n)$ одного уравнения можно продолжить до функции $u(x, t_1, t_2, \dots)$ удовлетворяющей одновременно любому конечному числу уравнений. Если зависимость от каких-то переменных t_j не интересна, то они просто считаются постоянными. А из Следствия 4.1 получаем, что стационарное уравнение для любой конечной линейной комбинации потоков

$$G = c_n g_2[u] + \dots + c_2 g_2[u] + c_1 g_1[u] = 0 \quad (4.9)$$

совместно со всеми уравнениями иерархии, то есть, для любого дифференцирования D_{t_m} имеем

$$D_{t_m}(G) \Big|_{G=0} = 0.$$

Таким образом, мы можем ограничить динамику по t_m на конечномерное пространство, определяемое уравнением (4.9), причем при этом сохраняется совместность с остальными потоками, так что есть основания ожидать, что полученное ОДУ можно будет каким-либо образом проинтегрировать.

Фактически, мы уже рассматривали такой пример на первой лекции, когда строили решения КдФ в виде бегущей волны. Действительно, эта задача равносильна решению стационарного уравнения для линейной комбинации первых двух потоков:

$$u_{t_3} + c_1 u_{t_1} = u_3 - 6uu_1 + c_1 u_1 = 0 \Rightarrow u_2 - 3u^2 + c_1 u + c_2 = 0.$$

Теперь ясно, что этот пример можно обобщить, рассматривая высшие уравнения КдФ $u_{t_{2n+1}} = 2D_x(A_{n+1})$. После однократного интегрирования, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2n$

$$A_{n+1} + c_1 A_n + \dots + c_n A_1 + c_{n+1} = 0, \quad (4.10)$$

которое называется уравнением Новикова. Например, в следующем по сложности случае, при $n = 2$, получаем уравнение вида

$$u_4 - 10uu_2 - 5u_1^2 + 10u^3 + c_1(u_2 - 3u^2) + c_2u + c_3 = 0$$

и так далее. Напомним, что при $n = 1$ нам удалось понизить порядок уравнения до 1, умножив его на интегрирующий множитель u_1 . При этом, общее решение нашлось в эллиптических функциях, а в случае некоторого вырождения мы получили солитонное решение. Оказывается, что нечто подобное можно проделать и для уравнения (4.10) произвольного порядка, хотя картина сильно усложняется. Оказывается, что вместо эллиптических функций здесь возникают так называемые конечнозонные потенциалы. Рассматривать их теорию в полном объеме мы не имеем возможности, попробуем лишь наметить схему решения.

Заметим, что уравнение (4.10) эквивалентно следующему условию: существует формальный ряд Лорана по ζ^{-1} с постоянными коэффициентами $c = \zeta^n + c_1 \zeta^{n-1} + \dots + c_n + c_{n+1} \zeta^{-1} + \dots$ такой, что при умножении на производящую функцию $a = 1 + A_1 \zeta^{-1} + A_2 \zeta^{-2} + \dots$ получается многочлен от ζ степени n :

$$\begin{aligned} ca &= \zeta^n + (A_1 + c_1) \zeta^{n-1} + (A_2 + c_1 A_1 + c_2) \zeta^{n-2} + \dots + (A_n + c_1 A_{n-1} + \dots + c_n) \\ &= \zeta^n + G_1 \zeta^{n-1} + \dots + G_n = g. \end{aligned}$$

Действительно, коэффициент при ζ^{-1} обращается в 0 в силу (4.10), а коэффициенты при следующих отрицательных степенях можно обратить в 0 в силу следствий из (4.10), получающихся в результате применения оператора S :

$$A_{n+2} + c_1 A_{n+1} + \dots + c_n A_2 + c_{n+1} A_1 + c_{n+2} = 0,$$

и так далее, где c_{n+2}, c_{n+3}, \dots некоторые постоянные интегрирования. Многочлен g удовлетворяет тому же линейному уравнению

$$g_{xxx} - (\zeta + 4u)g_x - 2u_1 g = 0, \quad (4.11)$$

что и ряд a . Нетрудно видеть, что оно эквивалентно уравнению (4.10), причем постоянные c_j возникают как константы интегрирования при применении оператора S . Как и раньше, можно умножить это уравнение на g и проинтегрировать, получится такое же квадратичное уравнение, что и (3.22) для ряда a , только в правой части вместо $-\zeta$ будет стоять ряд $-\zeta c^2$; и так как левая часть есть многочлен от ζ , то и этот ряд оказывается многочленом, степени $2n + 1$:

$$2gg_{xx} - g_x^2 - (\zeta + 4u)g^2 = -\zeta c^2 = -P(\zeta) = -\zeta^{2n+1} - p_1 \zeta^{2n} - \dots - p_{2n+1}. \quad (4.12)$$

На первый взгляд, такое переписывание не помогает решить уравнение (4.10), но мы сделаем ещё один шаг: перейдём к корням многочленов g и P . Пусть

$$g(\zeta) = (\zeta - y_1) \dots (\zeta - y_n), \quad P(\zeta) = (\zeta - e_1) \dots (\zeta - e_{2n+1}).$$

Если теперь в (4.12) положить $\zeta = y_j$, то первое и третье слагаемое обратятся в 0 и в результате мы получим следующую систему ОДУ на переменные y_j :

$$g_x^2|_{\zeta=y_j} = P(y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как

$$g_x|_{\zeta=y_j} = -y_{j,x} \prod_{i \neq j} (y_j - y_i),$$

то эти уравнения эквивалентны системе

$$y_{j,x} = \frac{\sqrt{P(y_j)}}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

которая называется системой Дубровина. Таким образом, мы свели уравнение (4.10) порядка $2n$ к системе порядка n . Понижение порядка произошло при переходе от уравнения (4.11) к (4.12). Исходное уравнение содержало $n+1$ постоянную c_1, \dots, c_{n+1} , а система (4.13) содержит $2n + 1$ постоянную e_1, \dots, e_{2n+1} , как и должно быть.

Отметим, что интересующая нас переменная u легко восстанавливается по переменным y_j . Действительно, коэффициент при ζ^{2n} в уравнении (4.12) дает соотношение $4u + 2G_1 = p_1$, что эквивалентно

$$4u = 2(y_1 + \dots + y_n) - e_1 - \dots - e_{2n+1}. \quad (4.14)$$

Собирая коэффициенты при младших степенях ζ , можно найти выражения через y_j и для других коэффициентов многочлена g , а тем самым, и для коэффициентов A_k

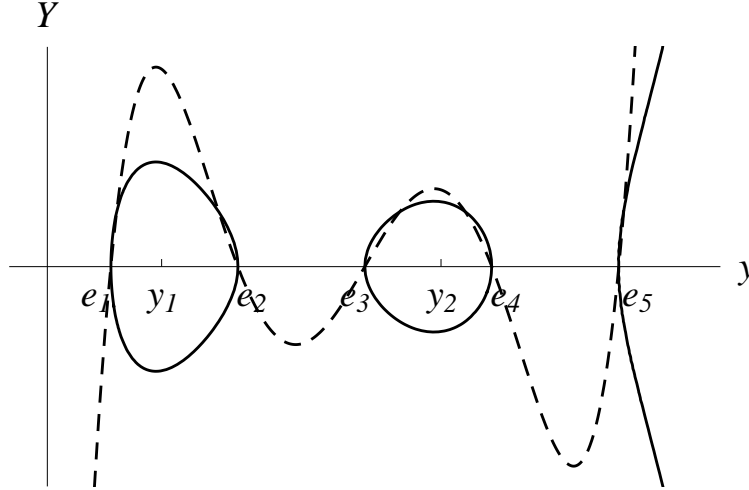


Рис. 7. Гиперэллиптическая кривая $Y^2 = P(y)$. Пунктиром показан график самого многочлена $P(y)$.

производящей функции a . Это позволяет, в принципе, выписать системы, которые определяют динамику по другим временам, они имеют вид

$$y_{j,t_k} = a^{(k)}(y_j) \frac{\sqrt{P(y_j)}}{\prod_{i \neq j} (y_j - y_i)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.15)$$

где $a^{(k)}(\zeta)$ это наши старые полиномы $\zeta^k + A_1\zeta^{k-1} + \dots + A_k$. Эти системы коммутируют с системой (4.13) и друг с другом.

Дальнейшее интегрирование системы Дубровина требует привлечения теории абелевых дифференциалов, и окончательный ответ записывается в виде тэта-функций, отвечающих гиперэллиптической кривой $Y^2 = P(y)$. Мы не будем этим заниматься, и ограничимся грубым качественным анализом. Так же, как на первой лекции, нарисуете график многочлена $P(y)$, в предположении, что все корни e_k различны и вещественны; для определённости, пусть

$$e_1 < e_2 < \dots < e_{2n+1}.$$

Тогда, для того чтобы решение системы было вещественным, нужно, чтобы все переменные y_j лежали в тех интервалах, где $P(y) \geq 0$, то есть, $[e_{2k-1}, e_{2k}]$, $k = 1, \dots, n$, или $[e_{2n+1}, \infty)$. При этом, если две переменные y_i, y_j попадут в один интервал, то в решении возникнет особенность из-за множителя $y_i - y_j$ в знаменателе правой части. Также, решение будет неограниченным, если какая-то переменная лежит в интервале $[e_{2n+1}, \infty)$. Таким образом, для вещественности и ограниченности решения следует задавать начальные условия для y_j так

$$e_1 \leq y_1 \leq e_2 < e_3 \leq y_2 \leq e_4 < \dots < e_{2n-1} \leq y_n \leq e_{2n} < e_{2n+1}.$$

В этом случае переменные y_j отделены друг от друга, никаких особенностей в правых частях систем (4.13), (4.15) не возникает и их совместное решение определено

при всех x, t_i . Грубо говоря, переменные u_j крутятся каждая в своей клетке, взаимодействуя друг с другом только на расстоянии, поэтому из формулы (4.14) интуитивно ясно, что решение представляет собой квазипериодическую функцию по x и всем временам t_i .

Так же, как и в случае $n = 1$, в этой картине имеется вырождение, когда все пары корней e_{2k} и e_{2k+1} сливаются, так что многочлен P принимает вид $P = z(z - \alpha_1)^2 \dots (z - \alpha_n)^2$ (корень e_1 перенесем в точку $\zeta = 0$). В этом случае все периоды становятся равными бесконечности и мы получаем n -солитонное решение. В этом случае интегрирование уравнений упрощается и сводится к линейной алгебре. Мы займемся этим случаем на одной из ближайших лекций.

4.4 Однородные многочлены

Во всех рассмотренных до сих пор примерах интегрируемых эволюционных уравнений правая часть являлась многочленом от производных u_j (или u_j, v_j , в случае двух-компонентных систем типа АКС). Не следует думать, что это всегда так — известны примеры, в которых u_j входят рационально, или через экспоненты, или еще более сложным образом. Тем не менее, полиномиальные уравнения образуют достаточно важный и широкий класс. При вычислении законов сохранения и высших симметрий для таких уравнений можно с успехом применять метод неопределенных коэффициентов. Для простоты ограничимся скалярным случаем, то есть, уравнениями вида

$$u_t = P(u_0, u_1, \dots, u_n),$$

где P многочлен. В теории таких уравнений оказывается полезным следующее понятие.

Определение 4.2. Пусть числа $\mu \geq 0, \nu \geq 0$ не равны одновременно нулю. Многочлен P называется однородным относительно веса $w(u_j) = \mu + \nu j$, если

$$P(c^\mu u_0, c^{\mu+\nu} u_1, c^{\mu+2\nu} u_2, \dots, c^{\mu+n\nu} u_n) = c^M P(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Число $M = w(P)$ называется весом многочлена. Это свойство эквивалентно тому, что все мономы $u_0^{d_0} u_1^{d_1} \dots u_n^{d_n}$ в многочлене имеют один и тот же вес $M = \mu d + \nu r$, где степень d и общий порядок по производным r определены формулами

$$d = d_0 + d_1 + \dots + d_n = d, \quad r = d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n.$$

Свойство однородности означает, что уравнение $u_t = P$ инвариантно относительно однопараметрической группы растяжений

$$u \rightarrow e^{\mu a} u, \quad x \rightarrow e^{-\nu a} x, \quad t \rightarrow e^{(\mu-M)a} t.$$

Чтобы определить, однородно ли данное уравнение и найти его показатели, нужно приписать переменной u_j вес $\mu + \nu j$ и приравнять веса всех мономов в правой части. Если полученная система имеет решение относительно μ, ν , то уравнение однородно. Например, уравнения Бюргерса, мКдФ и КдФ однородны относительно следующих

показателей μ, ν :

$$\begin{aligned} u_t &= u_2 + 2uu_1, & \mu &= 1, & \nu &= 1, & M &= 3, \\ u_t &= u_3 - 6u^2u_1, & \mu &= 1, & \nu &= 1, & M &= 4, \\ u_t &= u_3 - 6uu_1, & \mu &= 2, & \nu &= 1, & M &= 5. \end{aligned}$$

Законы сохранения и высшие симметрии для однородного уравнения также однородны, точнее, являются линейными комбинациями однородных плотностей или симметрий. Это легко показать, заметив, что операторы D_x и $D_t = \nabla_P$ сохраняют однородность.

Если $\mu > 0, \nu > 0$, то число мономов заданного веса K конечно и их можно все перечислить, например,

$$\mu = 1, \nu = 1, K = 4: \quad u_3, u_0u_2, u_1^2, u_0^2u_1, u_0^4.$$

Высшая симметрия ищется в виде линейной комбинации таких мономов с неопределёнными коэффициентами. Таким образом, симметрию третьего порядка для уравнения Бюргерса следует искать в виде

$$u_\tau = a_1u_3 + a_2u_0u_2 + a_3u_1^2 + a_4u_0^2u_1 + a_5u_0^4.$$

Повторяя для неё вычисления, проделанные в примере 4.1, и приравнивая коэффициенты при разных мономах, мы получим некоторую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно a_j . Решив её, мы и найдём приведённый в этом примере ответ, с точностью до произвольного общего множителя.

Аналогично ищутся и плотности законов сохранения, но при этом следует учесть, что среди однородных мономов есть эквивалентные по модулю $\text{Im } D_x$. Их лучше отбросить заранее, так как иначе уравнения на коэффициенты будут недоопределены и в ответ будет входить линейная комбинация лишних решений, отвечающих тривиальным законам сохранения. Ясно, что достаточно удалить мономы, линейные по старшей переменной u_k , входящей в этот моном, при $k > 0$. Действительно, интегрирование по частям переводит такой моном в эквивалентную сумму мономов, в которые u_k вовсе не входит; единственным исключением является моном u_0 . Например, из приведённого выше списка следует оставить только u_1^2 и u_0^4 . Далее, составляем ρ с неопределёнными коэффициентами и расписываем уравнение $E(\nabla_P(\rho)) = 0$. Это опять даёт систему линейных уравнений на коэффициенты, решая которую мы либо находим плотность, либо доказываем, что её не существует.

Всё это нетрудно запрограммировать. Пример реализации на *Mathematica* приведён в упражнениях и демонстрационной программе к этой лекции. С её помощью можно заново пересчитать плотности для КдФ. Как уже упоминалось во второй лекции, именно так их и считал Миура-сэнсэй, только без компьютера. Первые 10 плотностей заняли у него две недели, после чего он понял, что так дальше дело не пойдёт и придумал своё знаменитое преобразование. А если бы у него был компьютер, то не придумал бы, потому что компьютер считает за минуту... И, кстати, это существенно медленнее, чем мы считали раньше при помощи преобразования Миуры. Это и понятно, потому что там мы имели явную рекуррентную формулу, а сейчас должны выписывать и решать довольно сложные линейные системы на коэффициенты.

Итак, польза от метода неопределённых коэффициентов заключается в том, что он применим в тех случаях, когда мы заранее не знаем других способов вычисления или вообще не знаем, существует ли ответ. Более того, его можно применить не только для вычисления симметрии для *заданного* уравнения, но и для поиска *новых* интегрируемых уравнений. Для этого только нужно выбирать произвольными коэффициенты в обоих уравнениях. Существенное усложнение при этом заключается в том, что теперь система на коэффициенты будет не линейная, а квадратичная. Число уравнений и неизвестных в этой системе быстро растет с увеличением порядка по производным. Тем не менее, перебирая различные наборы μ, ν, M, K и решая соответствующие системы на коэффициенты, действительно удается найти несколько примеров уравнений, обладающих высшими симметриями. Наиболее интересные примеры это уравнение Савады–Котеры

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \quad (4.16)$$

обладающее симметрией

$$u_\tau = u_7 + 7uu_5 + 14u_1u_4 + 21u_2u_3 + 14u^2u_3 + 42uu_1u_2 + 7u_1^3 + \frac{28}{3}u^3u_1,$$

и уравнение Каупа–Купершмидта

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1, \quad (4.17)$$

обладающее симметрией

$$u_\tau = u_7 + 7uu_5 + \frac{49}{2}u_1u_4 + 42u_2u_3 + 14u^2u_3 + 63uu_1u_2 + \frac{35}{2}u_1^3 + \frac{28}{3}u^3u_1.$$

Как и для уравнения КдФ, однородность в этих примерах определяется весом $w(u_j) = 2 + j$. Отметим, что коэффициенты при u_5 и uu_3 можно выбрать равными 1 без 5 потери общности, за счет растяжений, после этого все остальные коэффициенты фиксированы. Для сравнения, симметрия 5-го порядка для КдФ при такой нормировке примет вид

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 10u_1u_2 + \frac{15}{2}u^2u_1. \quad (4.18)$$

Как видим, все три уравнения очень похожи. Однако, уравнения (4.17) и (4.16) не обладают симметрией порядка 3, то есть, это младшие уравнения в своих иерархиях. Вычисляя для них высшие симметрии, можно убедиться, что их порядки равны 7, 11, 13, 17, ..., то есть, из натурального ряда вычеркиваются числа, кратные 2 и 3 (тогда как для КдФ вычеркиваются только кратные 2).

Общее число примеров, которые удаётся найти описанным способом невелико — около 15, причем между ними имеются дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры. Сравнительно недавно было доказано, что других полиномиальных ответов не существует, однако доказательство очень сложное. Что касается задачи классификации уравнений с произвольной правой частью, то здесь имеются результаты об уравнениях 3-го и 5-го порядков и системах типа АКНС, при некоторых дополнительных предположениях о структуре уравнений.

4.5 Задачи. Метод неопределенных коэффициентов

Задача 4.1. Пусть m, n, M натуральные числа. Определить функции `hom[m,n,M]` и `rhom[m,n,M]`, возвращающие, соответственно, полный список мономов веса M относительно веса $w(u_j) = m + nj$, и список мономов, неэквивалентных по модулю $\text{Im } D_x$.

Решение.

```
mon[d_,r_,k_] := If[d==1,
  If[r>=k, {u[r]}, {}],
  Flatten[Table[u[s] mon[d-1,r-s,s],{s,k,r}]]
]
hom[m_,n_,M_] := Flatten[
  Table[
    If[IntegerQ[(M - m d)/n], mon[d,(M - m d)/n,0], {}],
    {d, 1, Floor[M/m]}]
]
rhom[m_,n_,M_] := Select[hom[m,n,M],
  Exponent[#,Last[vars[#,u]]]>1 || #==u[0]&]
```

Здесь `mon[d,r,k]` вспомогательная функция, возвращающая список мономов степени d по переменным u_k, u_{k+1}, \dots с общей суммой индексов равной r . Этот список составляется рекурсивно; нам, фактически, нужна только команда `mon[d,r,0]` без ограничений на порядок производных. Стандартная функция `Flatten` превращает список любой вложенности в одномерный. Далее, список `hom[m,n,M]` однородных мономов составляется перебором натуральных чисел d, r удовлетворяющих соотношению $md + nr = M$. Обратим внимание, что при данной организации циклов список автоматически получается в обратном лексикографическом порядке.

Отсев мономов в `rhom[m,n,M]` производится при помощи функции `Select`, вторым аргументом которой служит условие, что степень монома по старшей переменной больше 1, либо сам моном равен u .

Задача 4.2. Вычислить плотность веса 10 для уравнения КдФ.

Решение. В случае КдФ имеем $w(u_j) = 2 + j$. Определим наши стандартные функции (2.15) и выполним следующую ячейку:

```
pol[l_,a_] := a/@Range[Length[l]].1
ut= u[3] - 6u[0] u[1];
rho= pol[rhom[2,1,10],a]/.a[1]->1
p=var[star[rho,ut]]
Complement[Flatten[CoefficientList[p,vars[p,u]]],{0}]
Solve[%==0]
rho/.%[[1]]
```

В первой строчке определяется функция `pol[l,a]`, которая возвращает линейную комбинацию элементов списка `l` с коэффициентами `a[i]`. Результатом выполнения третьей строки будет многочлен

$$a[4]u[0]^5 + a[3]u[0]^2u[1]^2 + a[2]u[0]u[2]^2 + u[3]^2$$

Коэффициент при u_3^2 заранее положен равным 1, чтобы исключить произвол в ответе. Далее формируется и решается система линейных уравнений на коэффициенты, в результате получаем

$$14 u[0]^5 + 70 u[0]^2 u[1]^2 + 14 u[0] u[2]^2 + u[3]^2$$

Задача 4.3. (2 балла) Воспроизвести указанным способом Великое Вычисление Миуры (полную таблицу 1).

Замечание. Это может показаться неожиданным, но примерно с середины таблицы больше всего времени тратится на собирание коэффициентов при помощи функции `CoefficientList`. Дело в том, что она возвращает огромный массив размерности, равной числу переменных, причем большая часть элементов массива равна 0. Чтобы избежать этого, можно определить функцию

```
cfs[p_,u_] := Module[{z, pp = Expand[p]},
  If[FreeQ[pp, Plus], {pp/. _u->1},
  Union[
    Reap[Map[Sow[z=#/. _u->1, #/z]&, pp]; , _ , Plus@@#2&][[2]]
  ]]]
```

В предположении, что p есть многочлен по переменным u , эта функция возвращает список коэффициентов перед всеми мономами, причем повторяющиеся коэффициенты отбрасываются. Результат получается такой же, как от строчки с `Complement[Flatten...` в предыдущем примере, но на порядки быстрее, если число переменных велико. Однако, было бы неплохо придумать что-то более понятное.

Задача 4.4. (по 1 баллу за каждое уравнение) Вычислить по 4 плотности и 2 симметрии для уравнений (4.16) и (4.17). Вычисления примерно такие же, как в упражнении 4.2, но желательно оформить их, определив функции `sym[P,m,n,r]`, `dens[P,m,n,r]`, возвращающие, для заданного уравнения $u_t = P$, симметрию и плотность веса r относительно однородности $w(u_j) = m + nj$. Для полной автоматизации, можно также определить функцию, определяющую m, n для заданного уравнения.

Задача 4.5. (по 2 балла за каждый случай) Классификационная задача: найти все совместные пары уравнений порядков 5 и 7, с единичным коэффициентом при старшей производной, однородные относительно веса $w(u_j) = 2 + j$ (ответ должен состоять из уравнений (4.16), (4.17), (4.18) и их симметрий). Проверить, что найденные ответы допускают симметрии и более высоких порядков.

То же самое для порядков 5, 7 и веса $w(u_j) = 1 + j$.

То же самое для порядков 3, 5 и веса $w(u_j) = 1 + 2j$.

Задача 4.6. (2 балла) Уравнение Дима имеет вид $u_t = u^3 u_3$. Найти для него симметрии порядков 5 и 7. Так как здесь всего один моном, то числа m, n могут быть любые, приведенная выше схема не годится. Зависимость симметрий от старших производных имеет вид $u_{t_5} = u^5 u_5 + \dots$, $u_{t_7} = u^7 u_7 + \dots$ (можно это доказать или принять на веру). Заменить многоточия на сумму мономов той же степени и общего порядка по производным, что и старший член, и применить метод неопределенных коэффициентов.

5 Многосолитонные решения

Формальная функция Бейкера–Ахиезера · Условие обрыва · Регулярные потенциалы · Собственные функции · Вронскианы · Фазовый сдвиг · Двух-солитонное решение · Взаимодействие солитонов

5.1 Потенциалы Баргманна

На предыдущих лекциях мы показали, что условия совместности для линейных уравнений

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad \psi_{t_{2m+1}} = -\frac{1}{2}a_x^{(m)}\psi + a^{(m)}\psi_x, \quad (5.1)$$

где

$$a^{(m)} = (\zeta^m a)_{\geq 0} = \zeta^m + A_1\zeta^{m-1} + \dots + A_m, \quad -4\lambda = \zeta = z^2,$$

равносильны уравнениям иерархии КдФ

$$u_{t_{2m+1}} = P_{m+1} = -\frac{1}{2}D_x(A_{m+1}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Для производящей функции $a = 1 + A_1\zeta^{-1} + A_2\zeta^{-2} + \dots$ было получено выражение через производящие функции, удовлетворяющие уравнению Риккати:

$$a = \frac{z}{f(-z) - f(z)}, \quad f_x = u - \lambda - f^2, \quad f(z) = -\frac{z}{2} + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \dots \quad (5.2)$$

Для дальнейшего, введём обозначение

$$X = \frac{1}{2}(z(x + t_1) + z^3t_3 + z^5t_5 + \dots),$$

понимая под суммой произвольное конечное число слагаемых, содержащих интересные нас времена. Например, чтобы строить решения только для самого уравнения КдФ, забыв про высшие симметрии, можно оставить в сумме только $zx + z^3t_3$, а остальные t_{2m+1} считать равными 0.

Построим решение самих уравнений (5.1) в виде так называемой формальной функции Бейкера–Ахиезера.

Утверждение 5.1. Пусть система (5.1) совместна, тогда она допускает решение в виде формального ряда

$$\varphi(x, t_1, t_3, \dots; z) = e^{-X} \left(1 + \frac{\varphi_1}{z} + \frac{\varphi_2}{z^2} + \dots \right). \quad (5.3)$$

Доказательство. Определим φ , как решение уравнений

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = f, \quad \frac{\varphi_{t_{2m+1}}}{\varphi} = -\frac{1}{2}a_x^{(m)} + a^{(m)}f.$$

Покажем, что во втором уравнении правая часть имеет вид

$$-\frac{1}{2}a_x^{(m)} + a^{(m)}f = -\frac{1}{2}z^{2m+1} + q_1^{(m)}z^{-1} + q_2^{(m)}z^{-2} + \dots,$$

то есть, отсутствуют все неотрицательные степени z , кроме z^{2m+1} . Из (5.2) имеем:

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{f_x(-z) - f_x(z)}{f(-z) - f(z)} = f(-z) + f(z),$$

отсюда следует соотношение

$$a_x - 2af = z.$$

Умножим его на z^{2m} , и отбросим отрицательные степени. Пусть $a_-^{(m)} = A_{m+1}z^{-2} + A_{m+2}z^{-4} + \dots = z^{2m}a - a^{(m)}$, тогда

$$z^{2m+1} = (z^{2m}a_x - 2z^{2m}af)_{\geq 0} = a_x^{(m)} - 2(a^{(m)}f)_{\geq 0} + 2(a_-^{(m)}f)_{\geq 0}.$$

Так как разложение для f начинается с $-z/2$, то последнее слагаемое в правой части равно 0, то есть, $(a_x^{(m)} - 2a^{(m)}f)_{\geq 0} = z^{2m+1}$, что и требуется. Интегрируя уравнения для φ , получаем

$$\log \varphi = -X + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots,$$

где функции h_j корректно определены из совместной системы

$$\partial_x(h_j) = F_j, \quad \partial_{t_{2m+1}}(h_j) = q_j^{(m)},$$

с точностью до произвольных постоянных интегрирования. Применяя экспоненту и разлагая $\exp(h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots)$ по z^{-1} , приходим к решению вида (5.3). \square

Прямой подстановкой решения $\psi = \varphi$ в уравнение Шрёдингера $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$ проверяется, что оно эквивалентно следующей цепочке уравнений:

$$\varphi_{1,x} = -u, \quad \varphi_{j+1,x} = \varphi_{j,xx} - u\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Их можно рассматривать, как рекуррентную систему для определения коэффициентов ряда. Выигрыш в переходе от f к φ заключается в том, что уравнения для φ линейны. Однако, в отличие от коэффициентов F_j или A_j , коэффициенты φ_j не выражаются в виде функций от u, u_1, \dots — требуется интегрирование. Постоянные интегрирования являются произвольными функциями от t_3, t_5, \dots , которые уточняются при подстановке в уравнения (5.1) для $\psi_{t_{2m+1}}$. После этого ряд φ находится уже однозначно с точностью до умножения на произвольный ряд $1 + \alpha_1/z + \alpha_2/z^2 + \dots$ с постоянными коэффициентами.

Явные формулы, определяющие дифференцирование φ_j по t_{2m+1} нам не понадобятся, однако, и не выписывая их, можно доказать следующее важное свойство.

Утверждение 5.2. *Динамика по x и всем t_{2m+1} совместна с условием обрыва*

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = \dots = 0,$$

или, равносильно (после умножения φ на z^n), с условием, что система (5.1) допускает решение вида

$$\varphi = e^{-X}\Phi, \quad \Phi = z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_n. \quad (5.5)$$

Доказательство. Для дифференцирования по x это следует непосредственно из (5.4): если $\varphi_{n+1} = 0$, то $\varphi_{n+2}, \varphi_{n+3}, \dots$ также можно положить равными нулю. Дифференцирование по t_{2m+1} переписывается, как легко проверить, в виде

$$\Phi_{t_{2m+1}} = \frac{1}{2}(z^{2m+1} - za^{(m)} - a_x^{(m)})\Phi + a^{(m)}\Phi_x.$$

Коэффициенты при Φ и Φ_x многочлены по z , поэтому, если Φ, Φ_x многочлены, то это верно и для $\Phi_{t_{2m+1}}$, что и требуется. \square

Условие обрыва (5.5) выделяет некоторый специальный класс функций u . Действительно, это условие превращает уравнение Шрёдингера для φ в замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ относительно функций φ_j : из (5.4) имеем

$$\begin{cases} \varphi_{1,xx} = -\varphi_1\varphi_{1,x} + \varphi_{2,x}, \\ \varphi_{2,xx} = -\varphi_2\varphi_{1,x} + \varphi_{3,x}, \\ \dots \\ \varphi_{n-1,xx} = -\varphi_{n-1}\varphi_{1,x} + \varphi_{n,x}, \\ \varphi_{n,xx} = -\varphi_n\varphi_{1,x}, \end{cases} \quad (5.6)$$

а функция u восстанавливается по решению этой системы, как

$$u = -\varphi_{1,x}. \quad (5.7)$$

Определение 5.1. Будем говорить, что функция $u(x)$ регулярна, если она вещественна, не имеет особенностей на всей оси x и быстро убывает при $x \rightarrow \pm\infty$. Регулярная функция называется потенциалом Баргманна, если соответствующее уравнение Шрёдингера допускает решение вида $\varphi = e^{-\frac{1}{2}zx}(z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \dots + \varphi_n(x))$.

Зависимость φ и u от времён t_{2m+1} определяется из вспомогательных систем, которые следуют из второго уравнения (5.1), причём совместность с системой по x гарантируется построением. Мы покажем, что их общее решение можно найти, не выписывая сами системы явно, причём задача сводится к линейной алгебре. Условия регулярности важны, так как именно они выделяют класс многосолитонных решений. Однако, общее решение системы (5.6) не обязательно удовлетворяет этим условиям, и вначале мы не будем их учитывать.

5.2 Вронскианнные формулы

Заметим, что общее решение (5.6) содержит $2n$ произвольных констант интегрирования. Их роль играют постоянные k_j, c_j , указанные в следующем утверждении.

Утверждение 5.3. Вронскиан функций φ и $\bar{\varphi} = \varphi(-z) = e^X\Phi(-z)$ не зависит от x и всех t_{2m+1} , u является нечётным многочленом от z :

$$w = \varphi\bar{\varphi}_x - \varphi_x\bar{\varphi} = zQ(z^2) = z(z^2 - k_1^2) \dots (z^2 - k_n^2), \quad (5.8)$$

с некоторыми постоянными k_j . В точках $z = k_j$ отношение функций $\varphi, \bar{\varphi}$ также есть величина постоянная:

$$\frac{\bar{\varphi}(k_j)}{\varphi(k_j)} = c_j, \quad \partial_x(c_j) = \partial_{t_{2m+1}}(c_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Проведём прямое вычисление, для краткости опуская индекс m , то есть, для пары уравнений

$$\varphi_{xx} = (u - \lambda)\varphi, \quad \varphi_t = -\frac{1}{2}a_x\varphi + a\varphi_x,$$

из которых следует также

$$\varphi_{xt} = \left((u - \lambda) - \frac{1}{2}a_{xx} \right) \varphi + \frac{1}{2}a_x\varphi_x.$$

Так как эти уравнения содержат z только в чётных степенях, то $\bar{\varphi}$ является их решением наряду с функцией φ . Отсюда сразу получаем $w_x = \varphi\bar{\varphi}_{xx} - \varphi_{xx}\bar{\varphi} = 0$; далее

$$\begin{aligned} (\varphi\bar{\varphi}_x)_t &= \varphi_t\bar{\varphi}_x + \varphi\bar{\varphi}_{xt} \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_x\varphi + a\varphi_x \right) \bar{\varphi}_x + \varphi \left(\left((u - \lambda) - \frac{1}{2}a_{xx} \right) \bar{\varphi} + \frac{1}{2}a_x\bar{\varphi}_x \right) \\ &= a\varphi_x\bar{\varphi}_x + \left((u - \lambda) - \frac{1}{2}a_{xx} \right) \varphi\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Так как результат симметричен относительно $\varphi, \bar{\varphi}$, то $w_t = 0$. Наконец, имеем

$$\partial_x \left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi} \right) = \frac{w}{\varphi^2}, \quad \partial_t \left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi} \right) = \frac{aw}{\varphi^2},$$

и при подстановке $z = k_j$ выражение обращается в 0. \square

Итак, в нулях вронскиана функции ϕ и $\bar{\phi}$ отличаются только на постоянные множители, то есть, выполняются соотношения

$$e^{X_j}\Phi(-k_j) = c_j e^{-X_j}\Phi(k_j), \quad X_j := X(k_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Подстановка $-k_j$ вместо k_j даёт, очевидно, то же самое, с заменой c_j на $1/c_j$, так что в каждой паре нулей работает лишь один. Параметрам c_j разрешается принимать значения 0 или ∞ .

Уравнения (5.9) есть система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. В развёрнутом виде, имеем

$$\begin{aligned} (c_j e^{-X_j} - e^{X_j})\varphi_n + k_j(c_j e^{-X_j} + e^{X_j})\varphi_{n-1} + \dots \\ + k_j^{n-1}(c_j e^{-X_j} + (-1)^n e^{X_j})\varphi_1 = -k_j^n(c_j e^{-X_j} + (-1)^{n+1} e^{X_j}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Чтобы компактно записать её решение, введём обозначение для вронскиана от произвольного набора функций

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \partial_x(y_1) & \partial_x(y_2) & \dots & \partial_x(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_x^{n-1}(y_1) & \partial_x^{n-1}(y_2) & \dots & \partial_x^{n-1}(y_n) \end{pmatrix}.$$

Утверждение 5.4. Пусть

$$y_j = c_j e^{-X_j} - e^{X_j}, \quad X_j = \frac{1}{2}(k_j(x + t_1) + k_j^3 t_3 + k_j^5 t_5 + \dots),$$

тогда функция

$$u = -2\partial_x^2 \log W(y_1, \dots, y_n) \quad (5.10)$$

является (комплексным) решением иерархии КдФ при произвольных комплексных параметрах k_j, c_j таких, что k_j^2 попарно различны и не равны 0.

Доказательство. Запишем систему (5.9) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \partial_x(y_1) & \dots & \partial_x^{n-1}(y_1) \\ y_2 & \partial_x(y_2) & \dots & \partial_x^{n-1}(y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & \partial_x(y_n) & \dots & \partial_x^{n-1}(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ -2\varphi_{n-1} \\ \dots \\ (-2)^{n-1}\varphi_1 \end{pmatrix} = -(-2)^n \begin{pmatrix} \partial_x^n(y_1) \\ \partial_x^n(y_2) \\ \dots \\ \partial_x^n(y_n) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой системы равен $W = W(y_1, \dots, y_n)$ и при сделанных предположениях относительно k_j он не равен тождественно 0. По формулам Крамера, $(-2)^{n-1}\varphi_1 = \Delta/W$, где Δ есть определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой последнего столбца на столбец свободных членов. Нетрудно видеть, что $\Delta = -(-2)^n W_x$, то есть, $\varphi_1 = 2W_x/W$, и (5.10) следует из (5.7). По построению, эта функция удовлетворяет всем уравнениям иерархии КдФ. \square

Итак, чисто алгебраическим путём, мы получили огромный запас точных решений КдФ, и всё что теперь нужно сделать — это постараться отобрать среди них физически интересные решения, удовлетворяющие условиям регулярности. Это и будут n -солитонные решения.

Замечание 5.1. Утверждение 5.4 не даёт полного решения системы (5.6), так как в ней не рассмотрен случай, когда вронскиан w имеет кратные нули. Система (5.9) становится тогда вырожденной, но это не означает, что исходная система (5.6) не имеет решения, просто теперь рассмотрение нулей w даёт недостаточно информации для его построения. Оказывается, однако, что в этом случае регулярных решений не существует: у функции u обязательно оказывается полюс на вещественной оси. Мы не будем это доказывать и пропустим этот класс решений (он содержит рациональные решения и рациональные на солитонном фоне). Хватит с нас чистых солитонов.

Замечание 5.2. Отметим, для потенциалов Баргманна произведение $g = \phi(z)\phi(-z)$ является многочленом по ζ^{-1} и удовлетворяет уравнению (4.12), в котором $P(\zeta)$ имеет вид $P(\zeta) = w^2 = \zeta Q^2(\zeta)$. В результате, мы приходим к специальному случаю уравнений Дубровина, упоминавшемуся в конце раздела 4.3.

5.3 Свойства n -солитонного решения

Понятно, что в Утверждении 5.4 константы c_j можно занести в показатель экспоненты. Такую смену обозначений удобно сделать при формулировке условий регулярности.

Теорема 5.5. Пусть $k_1 > \dots > k_n > 0$, параметры d_j произвольные вещественные числа,

$$y_j = e^{X_j} + (-1)^{n-j} e^{-X_j}, \quad X_j = \frac{1}{2}(k_j(x + t_1) + k_j^3 t_3 + \dots) + d_j,$$

тогда функция $u = -2\partial_x^2 \log W(y_1, \dots, y_n)$ является регулярным решением иерархии КдФ. Наоборот, если решение (5.10) регулярно, то оно приводится к указанному виду с точностью до перенумерации и смены знаков k_j .

Таким образом, вронскиан составляется по такому правилу: числа k_j упорядочиваются по убыванию, минимальному числу k_n отвечает функция $y_n = \cosh X_n$, числу k_{n-1} функция $y_{n-1} = \sinh X_{n-1}$ и так далее по очереди. В результате, имеем

$$W = \begin{cases} W(\sinh X_1, \cosh X_2, \dots, \sinh X_{n-1}, \cosh X_n) & \text{при чётном } n, \\ W(\cosh X_1, \sinh X_2, \dots, \sinh X_{n-1}, \cosh X_n) & \text{при нечётном } n. \end{cases}$$

Линейные функции X_j будем называть фазами солитонов.

Схема доказательства. Из уравнений (5.6) следует, что если функция u регулярна, то функции φ_j не имеют особенностей на вещественной оси и растут не более чем полиномиально (действительно, φ_1 получается интегрированием u , и далее на каждом шаге происходит еще одно интегрирование).

Допустим, что $k_j = \alpha_j + \beta_j$. Если $\alpha_j \neq 0$, то $\varphi(k_j)$ равна произведению $e^{-\alpha_j x}$ на функцию, растущую по x как многочлен и следовательно, убывает на одной из бесконечностей. Но, так как $\varphi(-k_j) = c_j \varphi(k_j)$, то эта функция убывает и на другой бесконечности, то есть, $\varphi(k_j)$ — собственная функция оператора Шрёдингера. Но тогда собственное число $\lambda_j = -k_j^2/4$ вещественно, следовательно $\beta_j = 0$ и k_j вещественно. Если $\alpha_j = 0$, то это рассуждение не проходит, но в этом случае функция $y_j = c_j e^{-X_j} - e^{X_j}$ является периодической по x и можно доказать, что решение имеет особенность на вещественной оси. Для обоснования правила чередования знаков требуется учитывать свойства нулей функции φ . \square

При $n = 1$ формула (5.10) даёт солитон КдФ

$$u = -\frac{k^2}{2 \cosh^2 X}, \quad X = \frac{1}{2}(kx + k^3 t) + d$$

(для краткости здесь и далее полагаем $t_j = 0$ при $j > 3$, зависимость от любого времени легко восстанавливается).

Двух-солитонное решение описывается формулой

$$u = -\frac{(k_1^2 - k_2^2)(k_1^2 - k_2^2 + k_2^2 \cosh 2X_1 + a_1^2 \cosh 2X_2)}{4(k_1 \cosh X_1 \cosh X_2 - k_2 \sinh X_1 \sinh X_2)^2}, \quad k_1 > k_2 > 0, \quad (5.11)$$

и типичный график функции $-u$ показан на рис. 8. Можно видеть, что после прохождения друг через друга солитоны восстанавливают форму, подобно решениям линейного волнового уравнения. Однако, кое-что во взаимодействии солитонов происходит не так, как подсказывает линейная интуиция.

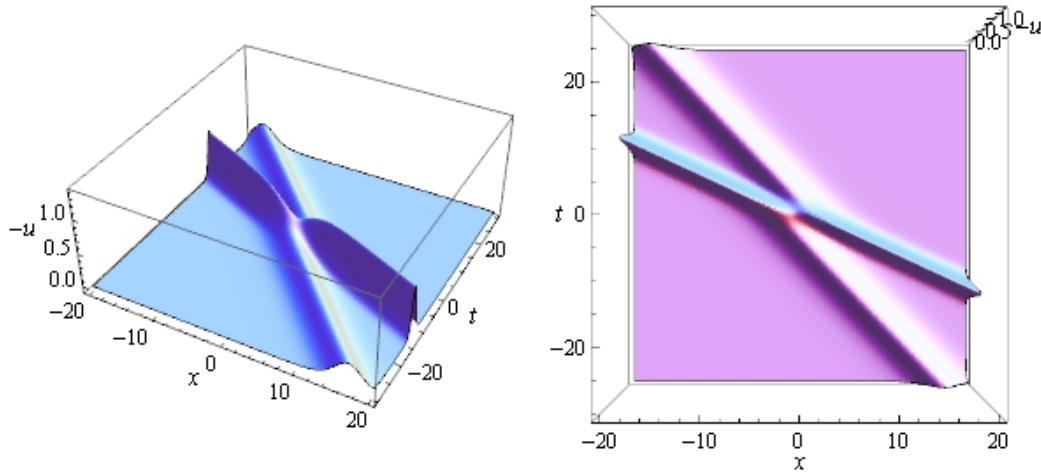


Рис. 8. 2-солитонное решение уравнения КдФ. Значения параметров: $k_1 = 1.2$, $k_2 = 0.8$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0.15$.

Во-первых, в момент столкновения амплитуды солитонов не складываются, как в линейном случае, а скорее усредняются. В любой момент времени амплитуда решения не превосходит амплитуды самого большого солитона. Это можно доказать непосредственно из формулы (5.11).

Во-вторых, после взаимодействия траектории солитонов слегка смещаются, происходит так называемый фазовый сдвиг (он хорошо заметен при виде сверху). Его величину можно найти следующим образом. Запишем вронскиан как сумму экспонент:

$$\begin{aligned} W &= k_1 \cosh X_1 \cosh X_2 - k_2 \sinh X_1 \sinh X_2 \\ &= (k_1 - k_2)(e^{X_1+X_2} + e^{-X_1-X_2}) + (k_1 + k_2)(e^{X_2-X_1} + e^{X_1-X_2}). \end{aligned}$$

Рассмотрим его в окрестности прямой $x + k_1^2 t = 0$. Тогда $e^{X_1} \sim 1$, а для e^{X_2} имеем

$$e^{X_2} \sim e^{\frac{1}{2}k_2(k_2^2 - k_1^2)t} = \begin{cases} \infty & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ 0 & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Отсюда получаем, отбрасывая убывающие экспоненты:

$$\begin{aligned} \text{при } t \rightarrow -\infty: \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{X_1+X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_2-X_1} \\ &= \text{const } e^{X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} e^{-X_1} \right) = \text{const } e^{X_2} \cosh(X_1 - \delta_1), \\ \text{при } t \rightarrow +\infty: \quad W &\sim (k_1 - k_2)e^{-X_1-X_2} + (k_1 + k_2)e^{X_1-X_2} \\ &= \text{const } e^{-X_2} \left(e^{X_1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-X_1} \right) = \text{const } e^{-X_2} \cosh(X_1 + \delta_1), \end{aligned}$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}$$

есть половина сдвига фазы первого солитона.

Аналогичным рассуждением можно найти фазовый сдвиг и в общем случае. Для этого используем следующую лемму.

Лемма 5.6. Пусть $A = \partial_x - f_{1,x}/f_1$, тогда

$$W(f_1, \dots, f_n) = f_1 W(A(f_2), \dots, A(f_n)). \quad (5.12)$$

Доказательство. Обе части равенства — линейные дифференциальные операторы, действующие на f_n . Ядра этих операторов совпадают, откуда следует, что они отличаются на скалярный множитель. Сравнение коэффициентов при $\partial^{n-1}(f_n)$ приводит к равенству $W(f_1, \dots, f_{n-1}) = f_1 W(A(f_1), \dots, A(f_{n-1}))$, что позволяет доказать утверждение по индукции. \square

Утверждение 5.7. Асимптотически, n -солитонное решение представляет собой сумму солитонов

$$u = - \sum_{j=1}^n \frac{k_j^2}{2 \cosh^2(X_j \pm \delta_j)}, \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

где $X_j = \frac{1}{2}(k_j x + k_j^3 t) + d_j$ и фазовый сдвиг равен

$$2\delta_j = \sum_{i=1}^{j-1} \log \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} - \sum_{i=j+1}^n \log \frac{k_i + k_j}{k_j - k_i}. \quad (5.13)$$

Доказательство. Рассмотрим $W(y_1, \dots, y_n)$ вне полосы $X_j = \text{const}$. Если взять ширину полосы достаточно большой, то y_j можно заменить на e^{-X_j} при $t \rightarrow -\infty$ и e^{X_j} при $t \rightarrow +\infty$. Применим теперь лемму, выбирая y_j в качестве f_1 . Получаем:

$$W \sim W(A(y_1), \dots, A(y_{j-1}), A(y_{j+1}), \dots, A(y_n)), \quad A = \partial_x - y_{j,x}/y_j.$$

С учетом асимптотики, получаем

$$A(y_i) = \frac{1}{2} y_i \times \begin{cases} e^{-\delta_{ij}}, & \text{при } i < j, \quad t \rightarrow -\infty, \\ e^{\delta_{ij}}, & \text{при } i > j, \quad t \rightarrow -\infty, \\ e^{\delta_{ij}}, & \text{при } i < j, \quad t \rightarrow +\infty, \\ e^{-\delta_{ij}}, & \text{при } i > j, \quad t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

где $e^{\delta_{ij}} = \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j}$. Таким образом, вне рассматриваемой полосы W заменяется на вронскиан такого же вида, но меньшего размера и со сдвинутыми фазами. Продолжая по индукции, получаем утверждение. \square

При $t \rightarrow -\infty$, многосолитонное решение представляет собой сумму солитонов, упорядоченных слева направо по возрастанию амплитуды (точнее, по глубине щели, и путешествующих с собственными скоростями. После взаимодействия на конечных временах, порядок солитонов меняется и при $t \rightarrow +\infty$ солитоны располагаются в обратном порядке. При этом они восстанавливают и форму, и скорость, и единственным результатом взаимодействия является фазовый сдвиг. Из формулы (5.13) следует, что общий сдвиг, который испытывает один солитон, равен сумме сдвигов, которые он испытывает при попарном взаимодействии. Иначе говоря, эффекты от тройного взаимодействия отсутствуют.

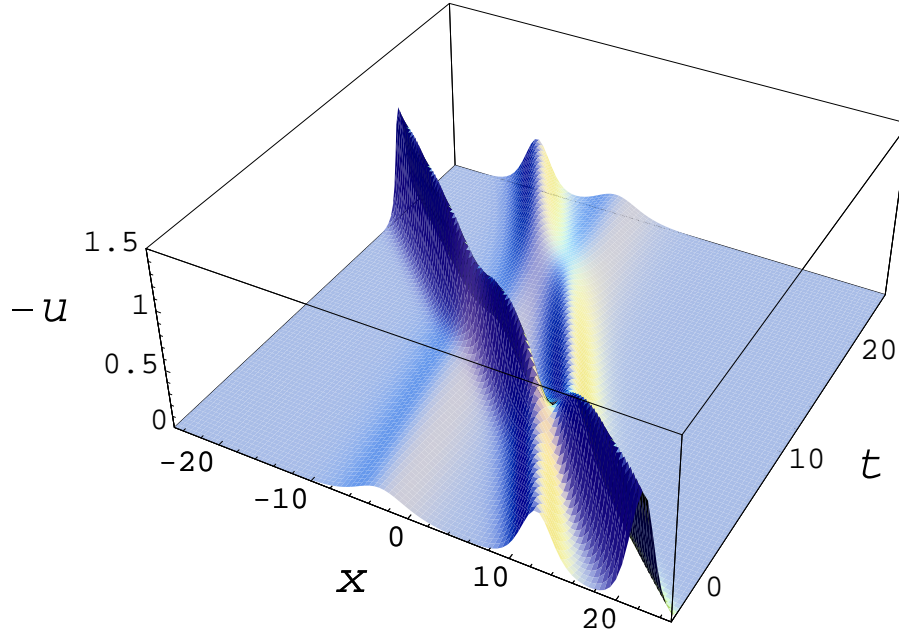


Рис. 9. 3-солитонное решение уравнения КдФ. Значения параметров: $a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.7$, $d_1 = 0$, $d_2 = -5$, $d_3 = -10$.

5.4 Так как же всё-таки взаимодействуют солитоны?

При конечных t описать n -солитонное решение довольно сложно, да и не особенно нужно, но некоторое любопытство эта задача всё же вызывает. Действительно, следить только за асимптотикой, это всё равно что приходить на цирковое представление, когда клоуны ещё не приехали или уже уехали... На графиках, мы всегда смотрим на решение именно в самый волнующий момент прохождения солитонов друг через друга. Кое-что интересное можно увидеть уже на примере решения (5.11). Рассматривая его, можно заметить, что имеется три сценария прохождения солитонов друг через друга, в зависимости от величины отношения $R = k_1/k_2$.

1) Если амплитуды достаточно близки друг к другу, $1 < R < C_1$, где C_1 некоторое критическое значение, то солитоны остаются разделёнными в любой момент времени и взаимодействие заключается в «перекачке» большего в меньший, (см. рис. 10). Профиль решения в любой момент времени имеет два минимума.

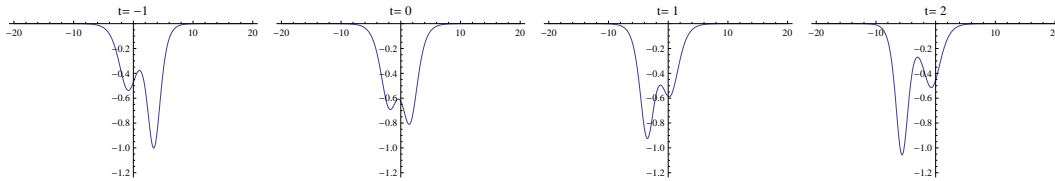


Рис. 10. Режим перекачки, $R = 1.5$.

2) Если $C_1 < R$, то в какой-то момент один минимум временно исчезает, происходит «соединение» солитонов. Однако, если отношение R еще не слишком велико, $R < C_2$, то затем опять происходит раздвоение щели на два слабо выраженных минимума (рис. 11), затем опять временно остается один минимум, и, наконец, солитоны меняются местами.

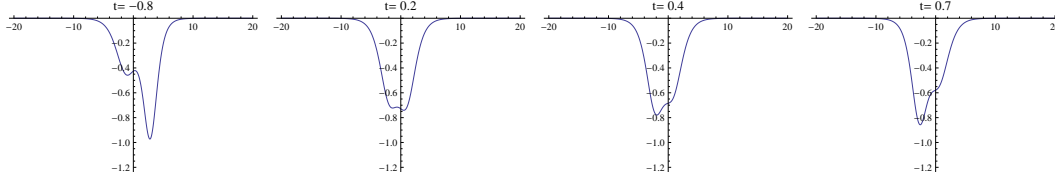


Рис. 11. Режим соединения, $R = 1.66$.

3) Наконец, если $C_2 < R$, то происходит полное «поглощение» меньшего солитона, и профиль имеет один минимум все время прохождения (рис. 12).

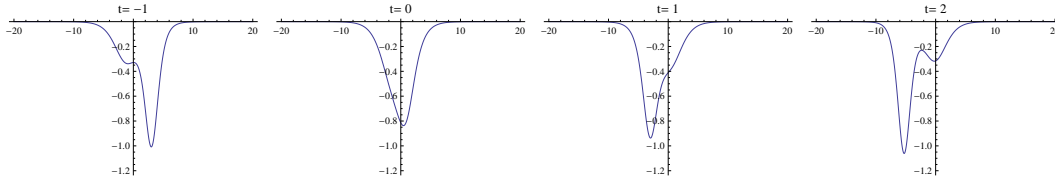


Рис. 12. Режим поглощения, $R = 1.9$.

Утверждение 5.8. Критические значения равны

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.61803, \quad C_2 = \sqrt{3} \approx 1.73205.$$

Схема доказательства. Отношение $R = k_1/k_2 > 1$ это единственный существенный параметр в двух-солитонном решении: δ_j можно убрать сдвигами x, t , а за счет растяжения сделать один из k_j равным 1. Рассмотрим такое упрощённое решение $u(x, t, R)$. Уравнение $u_x = 0$ определяет кривую в плоскости x, t , по которой движутся точки минимума и максимума профиля решения. Её особые точки характеризуются уравнениями

$$u_x = 0, \quad u_{xx} = 0, \quad u_{xt} = 0.$$

Вообще говоря, при произвольном R эта система не имеет решения. Можно из двух уравнений выразить x, t , подставить в третье, получится некоторое алгебраическое уравнение на R , которое и выдаёт золотое сечение C_1 (плюс еще некие комплексные корни). Это довольно сложное вычисление. При этом значении R происходит перестройка ветвей кривой (см. рис. 13).

Аналогично, критическое значение C_2 характеризуется условиями

$$u_x = 0, \quad u_{xx} = 0, \quad u_{xxx} = 0,$$

которые означают, что на кривой $u_x = 0$, рассматриваемой как график функции $t = f(x)$, сливаются две критические точки. Это условие также сводится к алгебраическому уравнению на R . Его получить проще: из соображений симметрии ясно,

что это слияние происходит в точке $(x, t) = 0$ (напомним, что сдвиги $\delta_j = 0$), причем в ней автоматически выполняются условия $u_x = u_{xxx} = 0$. Поэтому остаётся лишь решить уравнение $u_{xx}(0, 0, R) = 0$. \square

На рис. 13 показаны нули функции u_x на плоскости x, t в зависимости от R . Красные линии отвечают точкам минимума u , то есть, асимптотически это те линии, вдоль которых распространяются солитоны, на синих линиях расположены точки максимума. При значении $R = C_2$ на средней красной кривой появляется синяя точка, это значит, что там минимум стал максимумом. А при $R = C_1$ происходит перестройка самих кривых.

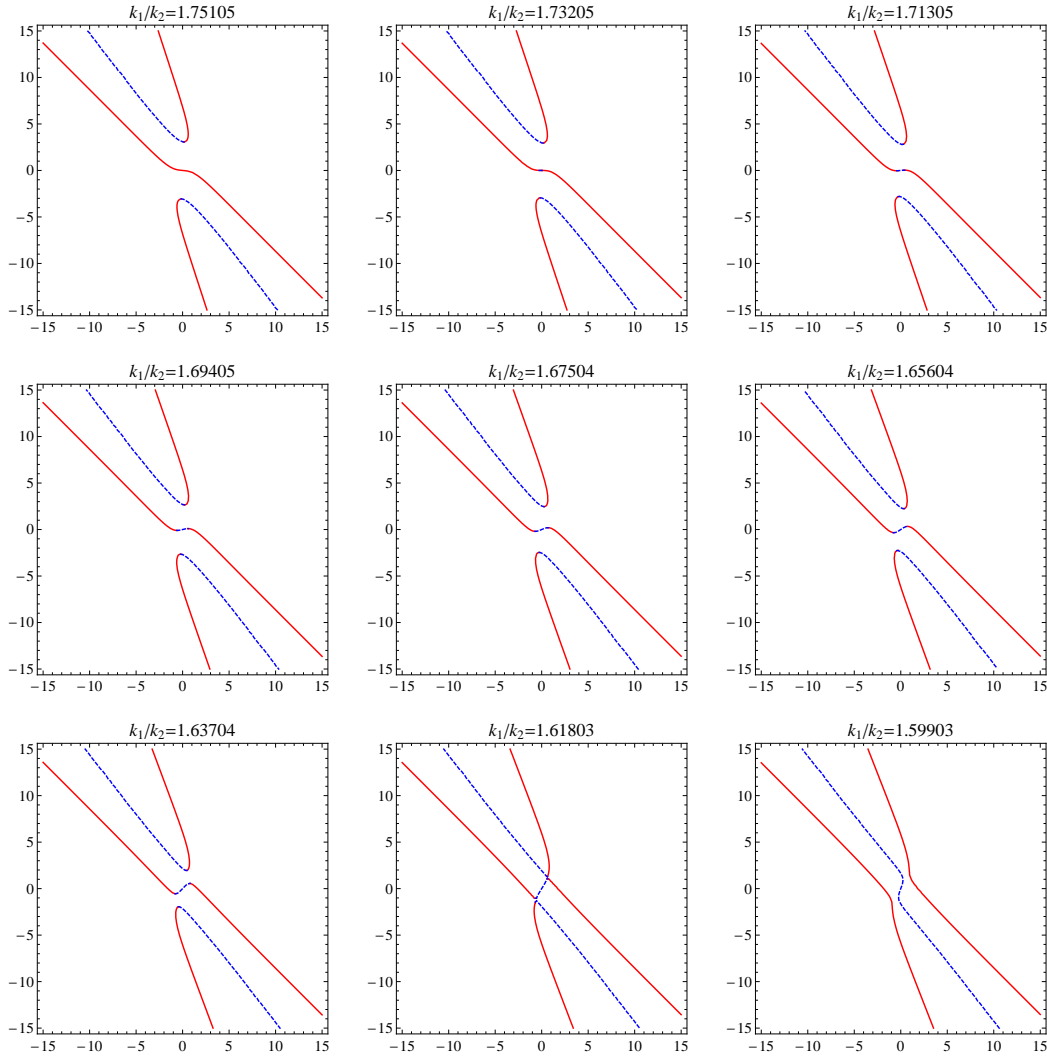


Рис. 13. Нули u_x (критические значения сверху и снизу в среднем столбце).

При большем числе солитонов сценарии прохождения становятся очень разнообразными и проследить за деталями перестройки максимумов практически невозможно. Тем замечательнее тот факт, что несмотря на сложное поведение при конечных временах, асимптотика решения описывается совершенно единообразно.

5.5 Задачи

Задача 5.1. (3 балла) В доказательстве Утверждения 5.4 нам нужен был только коэффициент φ_1 , чтобы восстановить u . Однако, решив систему полностью, можно найти и остальные φ_j и, тем самым, построить функцию Бейкера–Ахизера $\varphi(z)$. Сделать это для случая $n = 1$ и (на компьютере) при $n = 2, 3$. Убедиться, что при $z = k_j$ получаются собственные функции оператора Шрёдингера.

Задача 5.2. (3 балла) Рассмотреть примеры общего комплексного решения (5.10) при $n = 2$. Какие ответы можно получить, если требовать только вещественность решения, но разрешать особенности на вещественной оси? Можно попробовать взять комплексно сопряжённые k_1, k_2 , или пару чисто мнимых k_j , или отказаться от чередования \cosh / \sinh . Построить графики.

Задача 5.3. (2 балла) Рассмотреть двухсолитонное решение при близких значениях k_1, k_2 . В этом случае происходит «перекачка» и максимумы остаются разделёнными. На какое минимальное расстояние они сближаются?

6 Преобразование Дарбу–Бэклунда

Преобразование Бэклунда как композиция преобразований Миуры · x - и t -части преобразования Бэклунда · Пример для уравнения \sin -Гордон · Одевающая цепочка · Диаграмма Бьянки · Совместность вокруг куба · Опять вронскианы

6.1 Преобразование Бэклунда для уравнения КдФ

Согласно Утверждению 2.1, преобразование Миуры переводит решение уравнения мКдФ в решение КдФ:

$$M^+ : \quad f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x \quad \xrightarrow{u=f^2+f_x+\alpha} \quad u_t = u_{xxx} - 6uu_x.$$

Наоборот, пусть дана функция $u(x, t)$ удовлетворяющая уравнению КдФ. Тогда решение мКдФ строится, как решение совместной пары обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} f_x = u - \alpha - f^2, \\ f_t = u_{xx} - 2u_x f - 2(u + 2\alpha)(u - f^2 - \alpha). \end{cases} \quad (6.1)$$

Далее, воспользуемся инвариантностью мКдФ относительно замены $f \rightarrow -f$. Это даёт ещё одну подстановку между теми же уравнениями:

$$M^- : \quad f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \alpha)f_x \quad \xrightarrow{\hat{u}=f^2-f_x+\alpha} \quad \hat{u}_t = \hat{u}_{xxx} - 6\hat{u}\hat{u}_x.$$

Уравнения для u и \hat{u} совпадают, но сами-то решения разные! Получается, что у нас есть способ, как по произвольному решению u уравнения КдФ построить некоторое новое решение \hat{u} . Это и есть преобразование Бэклунда для КдФ. Оно неявное, так как включает в себя операцию решения системы (6.1) для f . На первый взгляд, польза от такого преобразования невелика, поскольку уравнения Риккати, вообще говоря, не решаются в квадратурах. Тем не менее, чуть позже мы увидим, что при помощи преобразования Бэклунда можно строить $(n+1)$ -солитонные решения из n -солитонных, причем это делается чисто алгебраическим способом, более эффективным, чем вычисление вронскианов.

В соотношениях

$$u = M^+(f) = f^2 + f_x + \alpha, \quad \hat{u} = M^-(f) = f^2 - f_x + \alpha, \quad (6.2)$$

можно рассматривать f как вспомогательную, промежуточную переменную. Её нетрудно исключить и получить преобразование Бэклунда непосредственно в терминах переменных u, \hat{u} . Имеем:

$$u - \hat{u} = 2f_x, \quad u + \hat{u} = 2f^2 + 2\alpha.$$

Из второго уравнения находим f и подставляем в первое, это даёт

$$u_x + \hat{u}_x = (u - \hat{u})\sqrt{2(u + \hat{u} - 2\alpha)}. \quad (6.3)$$

Это так называемая x -часть преобразования Бэклунда для КдФ. Ещё одно уравнение, t -часть, получается, если подставить f во второе уравнение (6.1) или непосредственно в уравнение мКдФ; это даст

$$u_t + \hat{u}_t = (u_{xx} - \hat{u}_{xx} - 3u^2 + 3\hat{u}^2)\sqrt{2(u + \hat{u} - 2\alpha)}. \quad (6.4)$$

Нетрудно видеть, что после перекрёстного дифференцирования из уравнений (6.3), (6.4) следует

$$-u_t + u_{xxx} - 6uu_x = -\hat{u}_t + \hat{u}_{xxx} - 6\hat{u}\hat{u}_x,$$

то есть, если одна из переменных удовлетворяет КдФ, то это верно и для второй; кроме того, можно проверить, что дифференцирование (6.3) в силу уравнений КдФ даёт тождество. Это приводит к следующему общему определению преобразований Бэклунда.

Определение 6.1. Система дифференциальных уравнений

$$A[u, \hat{u}] = 0, \quad B[u, \hat{u}] = 0$$

задаёт преобразование Бэклунда между уравнениями $F[u] = 0$, $G[\hat{u}]$, если результат исключения u из уравнений $A = B = F = 0$ в точности эквивалентен уравнению $G = 0$ и наоборот, при исключении \hat{u} из уравнений $A = B = G = 0$ возникает в точности уравнение $F = 0$. В том случае, когда уравнения для u и \hat{u} совпадают, иногда используется также термин авто-преобразование Бэклунда.

Более простым и наглядным примером, иллюстрирующим это определение, служит авто-преобразование Бэклунда для уравнения \sin -Гордон. Исторически, оно и было первым примером преобразований такого рода (Бэклунд, 1883), тогда как преобразование для уравнения КдФ было получено Уолквистом и Эстабруком в 1973.

Пример 6.1. Рассмотрим уравнения

$$\hat{u}_x + u_x = 2\alpha \sin \frac{\hat{u} - u}{2}, \quad \hat{u}_y - u_y = \frac{2}{\alpha} \sin \frac{\hat{u} + u}{2}.$$

Продифференцируем первое по y , второе по x , и заменим производные в правых частях в силу самих уравнений. Получим

$$\hat{u}_{xy} + u_{xy} = 2 \cos \frac{\hat{u} - u}{2} \sin \frac{\hat{u} + u}{2}, \quad \hat{u}_{xy} - u_{xy} = 2 \cos \frac{\hat{u} + u}{2} \sin \frac{\hat{u} - u}{2}.$$

Если вычесть эти уравнения, то переменные \hat{u} сокращаются; при сложении сокращаются u и мы получаем

$$u_{xy} = \sin u, \quad \hat{u}_{xy} = \sin \hat{u}.$$

Возвращаясь к случаю КдФ, отметим, что вместо исключения f из соотношений (6.2) можно исключить \hat{u} из соотношений

$$\hat{u} = M^+(\hat{u}) = \hat{f}^2 + \hat{f}_x + \hat{\alpha}, \quad \hat{u} = M^-(f) = f^2 - f_x + \alpha, \quad (6.5)$$

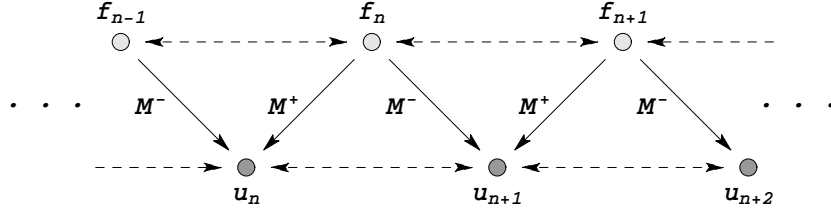


Рис. 14. Последовательность преобразований Бэклунда.

где параметр $\hat{\alpha}$ выбирается независимо от α . Это даёт преобразование Бэклунда

$$f_x + \hat{f}_x = f^2 - \hat{f}^2 + \alpha - \hat{\alpha} \quad (6.6)$$

между двумя уравнениями мКдФ с разными параметрами. Точнее говоря, это только x -часть преобразования Бэклунда, но, для краткости, мы далее будем часто забывать про t -часть, так как зависимость решений от t восстановить несложно. Ещё более удобной переменной оказывается переменная v , определяемая по формулам

$$u = 2v_x, \quad f = v - \hat{v}.$$

Постоянную интегрирования можно выбрать так, чтобы эта переменная удовлетворяла потенциальному уравнению КдФ

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2. \quad (6.7)$$

(Замены такого типа называют дифференциальной подстановкой типа введения потенциала; однако, поскольку сама переменная u играет роль потенциала в уравнении Шрёдингера, то v иногда называют *пред-потенциалом*.) В результате такой замены, соотношения (6.2) заменяются на одно уравнение

$$v_x + \hat{v}_x = (v - \hat{v})^2 + \alpha, \quad (6.8)$$

которое определяет x -часть преобразования Бэклунда для уравнения (6.7).

В результате многократного применения преобразования Бэклунда согласно схеме на рис. 14, то есть,

$$u_j = M^+(f_j), \quad u_{j+1} = M^-(f_j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

возникает последовательность функций u_j , f_j , v_j , связанных соотношениями

$$u_j = f_j^2 + f_{j,x} + \alpha_j, \quad u_{j+1} = u_j - 2f_{j,x} \Rightarrow u_j = 2v_{j,x}, \quad f_j = v_j - v_{j+1}. \quad (6.9)$$

При этом, параметры α_j выбираются независимо на каждом шаге. Для переменных f_j, v_j возникают дифференциально-разностные уравнения

$$f_{j,x} + f_{j+1,x} = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j - \alpha_{j+1}; \quad (6.10)$$

$$v_{j,x} + v_{j+1,x} = (v_j - v_{j+1})^2 + \alpha_j, \quad (6.11)$$

которые называются *одевающими цепочками*. Вообще, метод преобразований Бэклунда иногда называют *методом одевания*, так как с его помощью можно строить нетривиальные решения, стартуя с голого нуля.

6.2 Коммутативность преобразований Бэклунда

Итак, у нас имеются некие авто-преобразования для уравнения КдФ, причём содержащие произвольный параметр α . Возникает законный вопрос о свойствах группы, порождённой этими преобразованиями. Ответ проще всего формулируется в терминах переменной v . Здесь мы опять рассматриваем только x -часть преобразования, но можно проверить, что все формулы согласованы и с динамикой по t .

Теорема 6.1 (Принцип нелинейной суперпозиции). *Пусть переменные v и v_i, v_j связаны преобразованиями Бэклунда с различными параметрами α_i, α_j , соответственно:*

$$v_x + v_{i,x} = (v - v_i)^2 + \alpha_i, \quad v_x + v_{j,x} = (v - v_j)^2 + \alpha_j.$$

Тогда существует единственная переменная v_{ij} , связанная с v_i, v_j преобразованиями с параметрами α_j и α_i :

$$v_{i,x} + v_{ij,x} = (v_i - v_{ij})^2 + \alpha_j, \quad v_{j,x} + v_{ij,x} = (v_j - v_{ij})^2 + \alpha_i.$$

Эта переменная однозначно выражается через v, v_i, v_j из уравнения

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j. \quad (6.12)$$

Доказательство. Сложим уравнения с нужными знаками, так чтобы уничтожить все производные. Нетрудно проверить, что это даёт в точности соотношение (6.12). Таким образом, если искомая переменная v_{ij} существует, то она единственна и находится из этого уравнения (деление возможно, так как если $v_i = v_j$, то и $\alpha_i = \alpha_j$). Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе v_{ij} два последних уравнения действительно выполняются в силу двух первых. \square

Таким образом, преобразования Бэклунда с разными параметрами перестановочны. Впервые это свойство было установлено Бьянки в 1892, на примере уравнения \sin -Гордон. Наглядно, его можно изобразить диаграммой на рис. 15. Давайте немедленно применим формулы (6.12).

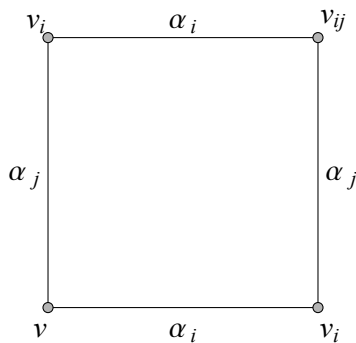


Рис. 15. Диаграмма Бьянки.

Пример 6.2 (Построение 2-солитонного решения). Стартуем с тривиального решения $v = 0$ уравнения $v_t = v_{xxx} - 6v_x^2$. Решаем уравнение для v_j , полагая $\alpha_j = -k_j^2/4$ и уточняя зависимость от t подстановкой в само уравнение. Это даёт

$$v_{j,x} = v_j^2 - \frac{k_j^2}{4} \Rightarrow v_j = -\frac{k_j}{2} \tanh X_j, \quad X_j = \frac{1}{2}(k_j x + k_j^3 t) + d_j.$$

Дифференцируя, получаем наш любимый солитончик КдФ

$$u_j = 2v_{j,x} = -\frac{k_j^2}{2 \cosh^2 X_j}.$$

Далее, используем формулу (6.12) и получаем решение rot-КдФ

$$v_{ij} = \frac{k_i^2 - k_j^2}{4(v_i - v_j)} = \frac{k_i^2 - k_j^2}{2(k_j \tanh X_j - k_i \tanh X_i)}.$$

Несложно проверить, что соответствующая функция $u_{ij} = 2v_{ij,x}$ «почти» совпадает с двухсолитонным решением (5.11) — мешает только такая мелочь, как полюс, возникающий из-за того, что функция $k_j \tanh X_j - k_i \tanh X_i$ обязательно обращается в ноль при некотором $x \in \mathbb{R}$. Но, мы уже знаем, как с этим бороться: нужно один из тангенсов превратить в котангенс. Пусть $k_i^2 > k_j^2$, тогда сделаем замену $d_i \rightarrow d_i + \frac{i\pi}{2}$ и получим регулярное решение

$$v_{ij} = \frac{k_i^2 - k_j^2}{2(k_j \tanh X_j - k_i \coth X_i)}, \quad k_i^2 > k_j^2.$$

Понятно, что для того, чтобы построить 3-солитонное решение, нужно заготовить три односолитонных решения v_i, v_j, v_k и добраться при помощи формул (6.12) до переменной v_{ijk} . Это иллюстрируется 3-мерным кубом, в котором каждая грань представляет собой диаграмму Бьянки, см. рис. 16. Однако, тут возникает вопрос — одно решение мы при этом получим или три? Ведь вычисления можно вести в разном порядке: можно найти v_{ijk} по значениям v_i, v_{ij}, v_{ik} , а можно по v_j, v_{ij}, v_{jk} или v_k, v_{ik}, v_{jk} . Проще всего ответить на этот вопрос прямым вычислением.

Теорема 6.2 (3D-совместность, или совместность вокруг куба). *Если значения v_{ij} найдены из уравнений*

$$(v - v_{ij})(v_i - v_j) = \alpha_i - \alpha_j, \quad (6.13)$$

то значения переменной v_{ijk} , найденные из уравнений

$$(v_k - v_{ijk})(v_{ik} - v_{jk}) = \alpha_i - \alpha_j$$

совпадают при любой перестановке индексов.

Доказательство. Вычисляя сначала v_{ik}, v_{jk} , а затем v_{ijk} (что отвечает затенённым граням куба на рис. 16), получаем

$$v_{ijk} = -\frac{(\alpha_j - \alpha_i)v_i v_j + (\alpha_k - \alpha_j)v_j v_k + (\alpha_i - \alpha_k)v_k v_i}{(\alpha_j - \alpha_i)v_k + (\alpha_k - \alpha_j)v_i + (\alpha_i - \alpha_k)v_j}. \quad (6.14)$$

Поскольку эта формула симметрична относительно перестановки индексов, два других способа вычисления дают тот же самый результат. \square

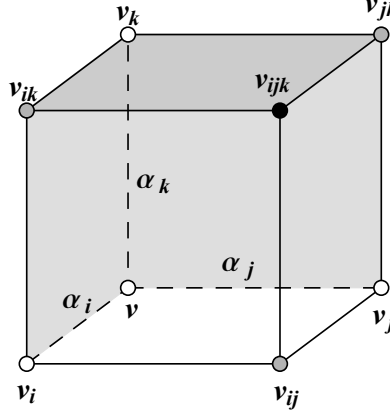


Рис. 16. 3D-совместность. Белые кружки отмечают начальные данные, серые — промежуточные величины, чёрный — переменную, для которой выполняется условие совместности. Затенённые грани отвечают одному из трёх возможных способов осуществления отображений.

Можно показать, что отсюда автоматически следует независимость результата от порядка вычислений при n -кратном применении формулы (6.12).

Свойство перестановочности преобразований Бэклунда можно переформулировать также, рассматривая отображения вида (6.12) как преобразования, действующие на решениях одевающей цепочки (6.11), причём группа, порождённая этими преобразованиями, оказывается изоморфной группе финитных перестановок бесконечного множества. Вместо (6.11), можно рассматривать также цепочку (6.10), следует учесть только, что для неё переменные f_j ассоциируются не с вершинами, а рёбрами квадрата. Преобразования такого типа называются отображениями Янга–Бакстера.

Утверждение 6.3. Преобразования R_k , действующие на бесконечной последовательности параметров α_j и переменных v_j по формулам

$$\tilde{v}_k = v_k - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{v_{k+1} - v_{k-1}}, \quad \tilde{v}_j = v_j, \quad j \neq k, \quad (6.15)$$

$$\tilde{\alpha}_{k-1} = \alpha_k, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_{k-1}, \quad \tilde{\alpha}_j = \alpha_j, \quad j \neq k-1, k,$$

переводят решения цепочки (6.11) в решения и удовлетворяют тождествам

$$R_k^2 = (R_k R_{k+1})^3 = (R_k R_i)^2 = \text{id}, \quad i \neq k \pm 1. \quad (6.16)$$

Это же верно для преобразований цепочки (6.10):

$$\tilde{f}_{k-1} = f_{k-1} - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, \quad \tilde{f}_k = f_k + \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, \quad \tilde{f}_j = f_j, \quad (6.17)$$

$$\tilde{\alpha}_{k-1} = \alpha_k, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_{k-1}, \quad \tilde{\alpha}_j = \alpha_j, \quad j \neq k-1, k.$$

Доказательство. Преобразование (6.15) эквивалентно уравнению (6.12), при отождествлении

$$v = v_{k-1}, \quad v_1 = v_k, \quad v_2 = \tilde{v}_k, \quad v_{12} = v_{k+1}, \quad \alpha_1 = \alpha_{k-1}, \quad \alpha_2 = \alpha_k.$$

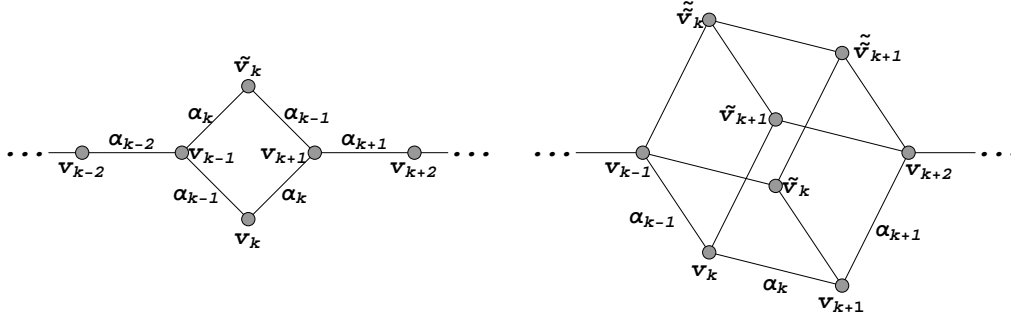


Рис. 17. Авто-преобразование одевающей цепочки. Тожество $(R_k R_{k+1})^3 = \text{id}$.

Так как в цепочке (6.11) переменные $v_{k\pm 1}$ связаны с v_k преобразованиями Бэклунда, то из Теоремы 6.1 следует, что и переменная \tilde{v}_k связана с переменными $v_{k\pm 1}$ преобразованиями Бэклунда, причём параметры переставляются.

Тожества $R_k^2 = (R_k R_i)^2 = \text{id}$ очевидны, тождество $(R_k R_{k+1})^3 = \text{id}$ эквивалентно свойству 3D-совместности. Действительно, оно означает, что если принять $v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}$ в качестве начальных условий, то все переменные, порождаемые из них преобразованиями R_k, R_{k+1} можно сопоставить с вершинами куба (см. рис. 17). Данный набор начальных условий отличается от того, что используется в определении свойства 3D-совместности, но эквивалентен ему: достаточно перейти от v_{k+2} к $\tilde{v}_{k+1} = R_{k+1}(v_{k+1})$, пользуясь тем, что уравнение (6.13) однозначно разрешимо относительно любой переменной. \square

При построении n -солитонного решения при помощи формул нелинейной суперпозиции, мы стартуем с n решений v_1, \dots, v_n , отвечающих параметрам $k_1^2 > \dots > k_n^2$, причём, согласно правилу чередования знаков, решения берутся поочерёдно в виде \tanh и \coth , начиная с v_n в обратном порядке:

$$v_n = -\frac{k_n}{2} \tanh X_n, \quad v_{n-1} = -\frac{k_{n-1}}{2} \coth X_{n-1}, \quad v_{n-2} = -\frac{k_{n-2}}{2} \tanh X_{n-2}, \dots$$

где $X_j = \frac{1}{2}(k_j x + k_j^3 x) + d_j$. Затем с помощью формулы (6.12) последовательно вычисляются решения вида $v_{ij}, v_{ijk}, \dots, v_{12\dots n}$, и по последнему находится решение КдФ $u = 2\partial_x(v_{12\dots n})$. При этом, некоторые из промежуточных решений будут иметь полюса на вещественной оси, но нас интересует только решение, полученное на последнем шаге. Следует отметить также, что решения не нужно находить для всех 2^n вершин куба, достаточно рассмотреть, например, только такие вершины, которые занумерованы набором натуральных чисел идущих от 1 до предпоследнего числа без пропусков. Например, для $n = 4$, это будут

$$\begin{aligned} &v_1, v_2, v_3, v_4, \\ &v_{12}, v_{13}, v_{14}, \\ &v_{123}, v_{124}, \\ &v_{1234}. \end{aligned}$$

Таким образом, построение n -солитонного решения по этой схеме требует вычисления $\frac{1}{2}n(n+1)$ функций по очень простым формулам.

6.3 Преобразование Дарбу для оператора Шрёдингера

На прошлой лекции мы строили солитоны, пользуясь определением потенциалов Баргманна, на этой мы изучили преобразование Бэклунда и диаграмму Бьянки и получили ещё один способ. БББ, очень легко запомнить, но откуда мы знаем, что построили те же самые решения? Пока что мы не сопоставили оба метода. Ясно, что для этого нужно проследить, как преобразования Бэклунда действуют на ψ -функцию в уравнении Шрёдингера. Это приводит нас к понятию преобразования Дарбу (1911). В теории линейных уравнений так называют преобразования, переводящие решения рассматриваемого уравнения в решения уравнения такого же вида, но с новыми коэффициентами.

Определение 6.2. (Элементарным) преобразованием Дарбу для уравнения Шрёдингера

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi \quad (6.18)$$

называется подстановка вида

$$\hat{\psi} = \psi_x - f(x)\psi, \quad (6.19)$$

переводящая решения уравнения (6.18) с потенциалом u в решения такого же уравнения с потенциалом \hat{u} .

Найдем соотношения, связывающие u и f . Дифференцируя (6.19) и заменяя ψ_{xx} в силу уравнения (6.18), получаем

$$\hat{\psi}_x = \psi_{xx} - f_x\psi - f\psi_x = (u - f_x - \lambda)\psi - f\psi_x; \quad (6.20)$$

дифференцируя ещё раз, получаем

$$\hat{\psi}_{xx} = (u_x - f_{xx} - f(u - \lambda))\psi + (u - 2f_x - \lambda)\psi_x.$$

С другой стороны, по определению преобразования Дарбу должно быть

$$\hat{\psi}_{xx} = (\hat{u} - \lambda)\hat{\psi} = (\hat{u} - \lambda)(\psi_x - f\psi).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$\hat{u} = u - 2f_x, \quad u_x - f_{xx} - f(u - \hat{u}) = 0,$$

что эквивалентно

$$u = f^2 + f_x + \alpha, \quad \hat{u} = u - 2f_x, \quad (6.21)$$

где α константа интегрирования. Это уже знакомое нам преобразование Бэклунда (точнее, его x -часть). Преобразование Дарбу, является, таким образом, расширением этого преобразования на волновые функции, которые пересчитываются по формуле (6.19). Кроме того, линеаризация преобразования Миуры подстановкой $f = \phi_x/\phi$, приводит к уравнению $\phi_{xx} = (u - \alpha)\phi$, то есть, для того чтобы осуществить преобразование Дарбу, достаточно иметь частное решение уравнения Шрёдингера при частном значении спектрального параметра $\lambda = \alpha$. Преобразования $u \rightarrow \hat{u}$ и

$\hat{u} \rightarrow u$ отличаются только сменой знака f . На решениях уравнения Шрёдингера, действие обратного преобразования Дарбу имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \lambda}(\hat{\psi}_x + f\hat{\psi}), \quad (6.22)$$

это уравнение легко получается из (6.19) и (6.20).

Рассмотрим теперь многократные преобразования Дарбу. Пусть все переменные зависят от целочисленной переменной, увеличение которой описывается элементарным преобразованием (6.19):

$$\psi_{j,xx} = (u_j - \lambda)\psi_j, \quad \psi_{j+1} = \psi_{j,x} - f_j\psi_j, \quad (6.23)$$

тогда формулы (6.21) заменяются на (6.9) и мы приходим к одевающей цепочке (6.10). Уравнения (6.23) полезно переписать также в матричном виде:

$$\Psi_{j,x} = U_j\Psi_j, \quad \Psi_{j+1} = F_j\Psi_j, \quad (6.24)$$

где

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_j - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_j = \begin{pmatrix} -f_j & 1 \\ f_j^2 + \alpha_j - \lambda & -f_j \end{pmatrix}, \quad \Psi_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \psi_{j,x} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

(вторая строка матрицы F получается из (6.20), если заменить u при помощи первого соотношения (6.21)). Вычисляя условие совместности для уравнений (6.24), получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_{j+1,x} &= U_{j+1}\Psi_{j+1} = U_{j+1}F_j\Psi_j \\ &= (F_j\Psi_j)_x = F_{j,x}\Psi_j + F_jU_j\Psi_j, \end{aligned}$$

откуда следует матричное равенство

$$F_{j,x} = U_{j+1}F_j - F_jU_j. \quad (6.26)$$

Можно непосредственным вычислением проверить, что это уравнение в точности эквивалентно соотношениям (6.9), то есть, (6.26) служит представлением нулевой кривизны для одевающей цепочки.

В практическом применении преобразований Дарбу можно выделить два взаимно дополняющих сценария. Первый реализуется, если мы стартуем с достаточно простого потенциала u_0 , для которого известны частные решения $\psi_{0,j}$ для многих значений $\lambda = \alpha_j$. Тогда, используя эти решения одно за другим и пересчитывая остальные, мы строим последовательность всё более и более сложных потенциалов, зависящих всё от большего числа параметров. Именно таким «одеванием» мы и строим солитоны, начиная с $u = 0$.

Второй сценарий реализуется, если удастся найти частное решение одевающей цепочки (6.10), например, сделав какие-то предположения о виде зависимости переменных от j . Каждое такое решение порождает семейство потенциалов вместе с волновыми функциями, отвечающими значениям $\lambda = \alpha_j$. Действительно, функция $\phi_k = \exp(\int f_k dx)$ служит частным решением для уравнения Шрёдингера с потенциалом u_k , и её можно пересчитать в решения всей последовательности уравнений

Шрёдингера. Здесь мы рассмотрим пока только один простейший пример. Важно отметить, что он *не связан* с уравнением КдФ, так как динамика по t (t -часть преобразования Бэклунда) не согласована с рассматриваемой редукцией. Ну, тем хуже для КдФ...

Пример 6.3. Гармонический осциллятор. Пусть

$$f_j = -x, \quad \alpha_j = 2j, \quad u_j = f_j^2 + f_j' + \alpha_j = x^2 + 2j - 1.$$

Тогда решение $\phi_{0,0} = e^{-x^2/2}$ является основной собственной функцией для u_0 . Действуя на неё оператором $\frac{d}{dx} - f = \frac{d}{dx} + x$, получаем 0; оператор $\frac{d}{dx} + f = \frac{d}{dx} - x$ даёт

$$\phi_{0,1} = -2xe^{-x^2/2}.$$

Это собственная функция отвечающая $\lambda = \alpha_0 = 0$ для u_{-1} , но так как здесь все потенциалы отличаются просто сдвигом, то это также собственная функция, отвечающая $\lambda = \alpha_1 = 2$ для самого u_0 . Так что, просто действуя $\frac{d}{dx} + x$ (оператор рождения), мы получим все собственные функции для u_0 , отвечающие спектру $0, 2, 4, \dots$

6.4 Вронскианы

Воспроизведём формулы с вронскианами для n -солитонного решения. Пусть

$$\phi_{0,j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

частные решения уравнения Шрёдингера с потенциалом u_0 , и $f_0 = \phi_{0,0}'/\phi_{0,0}$ (для краткости, мы не будем сейчас следить за переменной t , а производную по x будем обозначать штрихом). Тогда для потенциала $u_1 = u_0 - 2f_0'$ получаем набор решений

$$\phi_{1,j} = \left(\frac{d}{dx} - f_0 \right) (\phi_{0,j}), \quad j = 1, 2, \dots$$

(решение $\phi_{0,0}$ уходит в 0). Теперь повторяем процедуру: положим

$$f_j = \phi_{j,j}'/\phi_{j,j}, \quad \phi_{j+1,i} = \left(\frac{d}{dx} - f_j \right) (\phi_{j,i}), \quad i > j. \quad (6.27)$$

Введем обозначения

$$\Delta_{j+1} = W(\phi_{0,0}, \dots, \phi_{0,j}), \quad \Delta_0 = 1, \quad (6.28)$$

$$\Delta_{j+1}(y) = W(\phi_{0,0}, \dots, \phi_{0,j}, y), \quad \Delta_0(y) = y, \quad (6.29)$$

где y произвольная функция. Пользуясь Леммой 5.6, легко доказать, что

$$\Delta_{j+1} = \phi_{0,0} \dots \phi_{j,j}, \quad \Delta_{j+1}(\phi_{0,i}) = \phi_{0,0} \dots \phi_{j,j} \phi_{j+1,i}, \quad i > j.$$

Отсюда, для решений отвечающих потенциалу u_j следуют явные формулы, выражающие их через решения, отвечающие потенциалу u_0 :

$$\phi_{j,i} = \Delta_j(\phi_{0,i})/\Delta_j, \quad i \geq j. \quad (6.30)$$

Через вронскианы выражаются и функции f_j , и сами потенциалы. Действительно, так как $f_j = \phi'_{j,j}/\phi_{j,j}$, то

$$f_j = \frac{d}{dx} \left(\log \frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} \right) = \frac{\Delta'_{j+1}}{\Delta_{j+1}} - \frac{\Delta'_j}{\Delta_j}, \quad (6.31)$$

тогда для потенциала u_n имеем

$$u_n = u_0 - 2f'_0 - \dots - 2f'_{n-1} = u_0 - 2 \frac{d^2}{dx^2} (\log \Delta_n). \quad (6.32)$$

Если взять $u_0 = 0$ и использовать функции $\phi_{0,j} = c_j e^{-k_j x/2} - e^{k_j x/2}$, то получается потенциал (5.10). Кроме того, попутно мы получили вронскианные формулы для переменных f_j , удовлетворяющих уравнению мКдФ (если включить зависимость от t) и волновых функций операторов Шрёдингера с рассматриваемым потенциалом.

Остаётся заметить ещё, что свойство перестановочности преобразований Бэклунда объясняется теперь очень просто: если мы поменяем нумерацию исходных волновых функций $\phi_{0,j}$, то построенный по ним определитель, самое большее, поменяет знак и потенциал u_n не изменится, но промежуточные потенциалы u_j будут другими. Имеет место простое утверждение.

Утверждение 6.4. *Перестановка $\tilde{\psi}_{0,k-1} = \psi_{0,k}$, $\tilde{\psi}_{0,k} = \psi_{0,k-1}$ приводит к преобразованию (6.17) для функций f_j , построенных по формулам (6.31).*

Доказательство. Легко видеть, что при перестановке $\psi_{0,k}$ и $\psi_{0,k-1}$ выполняются равенства $\tilde{\Delta}_j = \pm \Delta_j$, $j \neq k$, откуда следует, что

$$\tilde{f}_j = f_j, \quad \text{при } j \neq k-1, k.$$

Нужно получить только формулы для $\tilde{f}_{k-1}, \tilde{f}_k$. Так как при $j < k-1$ операторы $\frac{d}{dx} - f_j$ не меняются, то ψ -функции при $j \leq k-1$ преобразуются по правилу

$$\tilde{\psi}_{j,k-1} = \psi_{j,k}, \quad \tilde{\psi}_{j,k} = \psi_{j,k-1}.$$

Обозначим для краткости

$$\psi_{k-1,k-1} = p, \quad \psi_{k-1,k} = q, \quad w = pq' - p'q.$$

Выбирая в качестве основного набора ψ -функций вместо $\psi_{0,i}$ функции $\psi_{k-1,i}$ получаем, согласно (6.31),

$$f_{k-1} = -\frac{p'}{p}, \quad f_k = \frac{p'}{p} - \frac{w'}{w}.$$

После преобразования имеем $\tilde{p} = q$, $\tilde{q} = p$, $\tilde{w} = -w$ и

$$\tilde{f}_{k-1} = -\frac{q'}{q}, \quad \tilde{f}_k = \frac{q'}{q} - \frac{w'}{w}.$$

Учитывая равенство $w' = (\alpha_{k-1} - \alpha_k)pq$, получаем:

$$\tilde{f}_{k-1} - f_{k-1} = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q} = -\frac{w}{pq} = -(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \frac{w}{w'} = \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{f_{k-1} + f_k},$$

что и требуется. Аналогичная формула для \tilde{f}_k следует из соотношения $f_{k-1} + f_k = \tilde{f}_{k-1} + \tilde{f}_k$. \square

6.5 Задачи. Опять солитоны...

Задача 6.1. (1 балл) Проверить, что следующее соотношение является x -частью преобразования Бэклунда для потенциального уравнения мКдФ:

$$u_x + \hat{u}_x = \alpha \sinh(u - \hat{u}), \quad u_t = u_{xxx} - 2u_x^3,$$

а также для уравнения $u_{xy} = \sinh 2u$. Вычисление заключается в том, что нужно продифференцировать данное соотношение $A[u, \hat{u}] = 0$ по t либо по y и показать, что результат есть следствие соотношений $D_x(A) = 0$, $D_x^2(A) = 0, \dots$

Задача 6.2. (1 балл) Привести преобразование Бэклунда из предыдущей задачи к рациональному виду, сделав замену $u \rightarrow \log v$, и вывести формулу нелинейной суперпозиции $v_{ij} = f(v, v_i, v_j; \alpha_i, \alpha_j)$, аналогичную (6.12). Проверить непосредственным вычислением, что для неё выполняется свойство 3D-совместности, показав, что выражение для v_{ijk} симметрично по индексам, также как (6.14).

Задача 6.3. (1 балл) Использовать полученные формулы для построения простейших солитонных решений (1-, 2-, самое большее 3; о регулярности можно не заботиться).

Задача 6.4. (3 балла) Предыдущие задачи для пары

$$u_x \hat{u}_x = \frac{1}{2\alpha}(u - \hat{u})^2 - \frac{\delta\alpha}{2}, \quad u_t = u_{xxx} - \frac{3(u_{xx}^2 - \delta)}{2u_x}.$$

Здесь α , как и раньше, параметр в преобразовании Бэклунда, а δ фиксированный параметр, который можно считать равным 0 или 1 (так что, фактически, это два примера, а не один).

Задача 6.5. (1 балл) Во всех предыдущих примерах преобразование Бэклунда было неявным — требовалось решать уравнение типа Риккати. Существуют и явные преобразования Бэклунда (их также называют преобразованиями Шлезингера). Показать, что система ЗШ-АКНС

$$u_t = u_{xx} + 2u^2v, \quad -v_t = v_{xx} + 2v^2u$$

остаётся инвариантной под действием отображения

$$\hat{u} = u_{xx} - u_x^2/u + u^2v, \quad \hat{v} = 1/u.$$

Выписать обратное преобразование. Проверить, что переменные u_j, v_j , определенные по правилу $(u_{j+1}, v_{j+1}) = (\hat{u}_j, \hat{v}_j)$ удовлетворяют, после замены $u = e_j^q$, $v = e^{-q_{j-1}}$, цепочке Тоды

$$q_{j,xx} = e^{q_{j+1}-q_j} - e^{q_j-q_{j-1}}.$$

Задача 6.6. (1 балл) Может показаться, что преобразование из предыдущей задачи не годится для построения точных решений, так как оно не содержит дополнительных параметров и, следовательно, не может «одеть» решение. Ну, значит, параметры должны быть в стартовом решении изначально... Заметим, что система ЗШ-АКНС допускает редукцию $v = 0$, причём для u остаётся линейное уравнение.

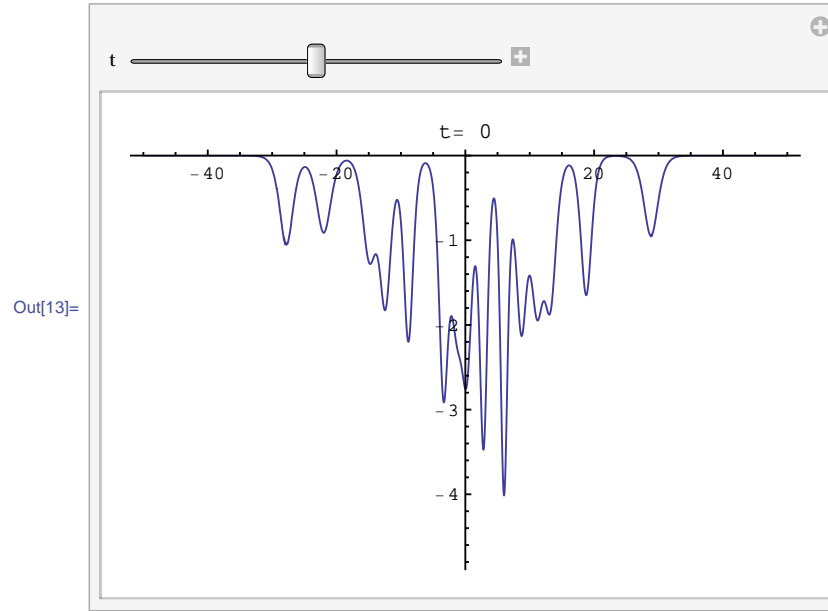


Рис. 18. Профиль 15-солитонного решения.

Применяя преобразование к его решению, можно получить решение АКНС уже с ненулевой v . Итак, задача: принять в качестве стартового решения

$$u_0 = \sum_{j=1}^n c_j e^{k_j x + k_j^2 t}, \quad v_0 = 0$$

и посмотреть (при помощи компьютера, естественно), что получится через $n/2$ и через n шагов. Взять $n = 1, 2, 3, \dots$

Задача 6.7. ($n=15$ баллов) Построить n -солитонное решение КдФ по схеме, описанной в конце раздела 6.2. Рекомендуется параметры k_j выбрать случайно в интервале $[1, 3]$, сдвиги d_j в интервале $[-5, 5]$ (при таком выборе за столкновениями солитонов удобно наблюдать на масштабах $-50 < x < 50$, $-10 < t < 10$, $-5 < u < 0$). На рис. 18 изображено решение для $n = 15$, полученное при помощи приведённой ниже программы. Данное вычисление, по-видимому, близко к пределу, которого можно достичь на *Mathematica*, по крайней мере, при помощи формул нелинейной суперпозиции. Оно занимает порядка минуты при $n = 15$, при дальнейшем увеличении n время вычисления становится слишком велико, также накапливаются численные ошибки и на графике появляются артефакты в виде полюсов, которых быть не должно... Предлагается побить этот рекорд, усовершенствовав алгоритм либо при помощи более производительных языков программирования.

Решение. Пример реализации:

```
n=15;
X[j_]:= (K[j]x+K[j]^2t)/2+d[j]
v[]=0;
```

```

Do[v[j]=-K[j]/2 Tanh[X[j]],{j,n,1,-2}]
Do[v[j]=-K[j]/2 Coth[X[j]],{j,n-1,1,-2}]
v[i___,j_,k_]:=v[i]+(K[j]^2-K[k]^2)/4/(v[i,j]-v[i,k])

KK=Sort[RandomReal[{1,3},n]]
dd=RandomReal[{-5,5},n]
par=Flatten[Table[{K[n+1-j]->KK[[j]],d[j]->dd[[j]]},{j,1,n}]]

u=2D[v@@Range[n]/.par,x];
cu=Compile[{{x,_Real},{t,_Real}},Evaluate[u]];

cgrou[t_,xmin_,xmax_] := Plot[cu[x,t],{x,xmin,xmax},
  PlotRange->{-0.55K[1]^2/.par,0},
  PlotPoints->100,
  PlotLabel->"t= "<>ToString[t]
]
Manipulate[cgrou[t,-50,50],{{t,0},-10,10,Appearance->"Labelled"}]

```

Здесь тройное подчеркивание в первом аргументе $v[i_,_ ,k_]$ означает, что он может быть произвольной последовательностью, в том числе пустой. В присваивании $u=2D[v@@Range[n]/.par,x]$; происходит рекурсивное вычисление переменной $v_{1,2,\dots,n}$, выполнение этой строчки занимает больше всего времени. Далее выражение для u компилируется, при конкретных значениях параметров, без этого дальнейшее построение графика было бы слишком медленной операцией.

7 Линеаризуемые уравнения

Уравнение Бюргерса · Подстановка Коула–Хопфа · Комбинаторика · Разбиения множеств · Многочлены Белла · Числа Стирлинга второго рода · Гиперболические уравнения · Интегрируемость по Дарбу · Вронскианские решения для цепочки Тоды

7.1 Иерархия Бюргерса

На предыдущих лекциях мы видели, что интегрирование уравнения КдФ тесно связано с тем, что оно служит условием совместности для пары вспомогательных линейных уравнений. Нелинейные уравнения такого типа иногда называют S -интегрируемыми (от слова *scattering*, то есть, интегрируемые при помощи метода обратной задачи рассеяния). Пример более простой и непосредственной связи с линейными уравнениями даёт уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x, \quad (7.1)$$

которое линеаризуется подстановкой Коула–Хопфа: решения (7.1) получаются из решений уравнения теплопроводности $\psi_t = \psi_{xx}$ при замене $u = \psi_x/\psi$ (см. Утверждение 2.5). Уравнения такого типа называют C -интегрируемыми (от слова *change*, то есть, интегрируемые посредством замены переменных).

Подстановку Коула–Хопфа можно применить, например, для решения задачи Коши на всей оси. Для этого нужно пересчитать начальное условие $u(x, 0) = q(x)$ в начальное условие для уравнения теплопроводности, по формуле

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) = \exp\left(\int_0^x q(\xi) d\xi\right),$$

найти решение $\psi(x, t)$ по формуле Пуассона (будет выведена в курсе УМФ)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi$$

и пересчитать его обратно в $u(x, t)$. Это ещё не означает, что решения уравнения Бюргерса полностью описаны и поняты, но, во всяком случае, мы видим, что ситуация существенно проще, чем в случае КдФ. В некотором смысле, C -интегрируемые уравнения можно считать тривиальными. Тем не менее, они заслуживают изучения: во-первых, они не виноваты; во-вторых, у них тоже могут быть интересные свойства; в-третьих, надо уметь отличать их от более благородных S -интегрируемых уравнений.

Мы ограничимся рассмотрением некоторых свойств высших симметрий уравнения Бюргерса. Замена $\psi \rightarrow u$ является композицией точечного преобразования и введения потенциала:

$$\psi = \exp v, \quad v_x = u.$$

При переходе к переменной v , линейная иерархия

$$\psi_{t_n} = \psi_n, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 1 \\
Y_1 &= v_1 \\
Y_2 &= v_2 + v_1^2 \\
Y_3 &= v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3 \\
Y_4 &= v_4 + (4v_1v_3 + 3v_2^2) + 6v_1^2v_2 + v_1^4 \\
Y_5 &= v_5 + (5v_1v_4 + 10v_2v_3) + (10v_1^2v_3 + 15v_1v_2^2) + 10v_1^3v_2 + v_1^5
\end{aligned}$$

Таблица 4. Многочлены Белла Y_n ; скобки группируют члены одинаковой степени, то есть, многочлены $Y_{n,k}$.

преобразуется по формуле $v_{t_n} = \psi^{-1} D_x^n(\psi) = e^{-v} D_x^n(e^v)$. В результате, мы приходим к потенциальной иерархии Бюргерса

$$v_{t_n} = (D_x + v_1)^n(1) = Y_n(v_1, \dots, v_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Так как правые части уравнений не содержат v_0 , то можно сделать подстановку $u = u_0 = v_1$, что и приводит к иерархии Бюргерса

$$u_{t_n} = D_x(Y_n(u_0, \dots, u_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Коммутативность линейных уравнений (7.2) очевидна. Несложно доказать, что это свойство сохраняется при точечных заменах переменных.

Утверждение 7.1. *Потоки (7.3) попарно коммутируют, также как и потоки (7.4), то есть $[Y_n, Y_m] = 0$ и $[D_x(Y_n[u]), D_x(Y_m[u])] = 0$, для скобки (4.4).*

Несколько первых многочленов Y_n выписано в таблице 4. Согласно (7.3), оператор $D_x + v_1$ играет для них роль оператора рекурсии:

$$Y_0 = 1, \quad Y_{n+1} = (D_x + v_1)(Y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

Это так называемые *многочлены Белла* (точнее, полные экспоненциальные многочлены Белла). Их можно определить также при помощи явной формулы для экспоненциальной производящей функции.

Утверждение 7.2. *Выполняется тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{z^n}{n!} \right). \quad (7.6)$$

Доказательство. Так как $Y_n = e^{-v} D_x^n(e^v)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} D_x^n(e^v) \frac{z^n}{n!} = e^{v(x+z)-v(x)}$$

и (7.6) получается при разложении $v(x+z)$ в ряд Тейлора по z . □

Чем замечательны эти многочлены? Во-первых, они фигурируют в формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции. Пусть $Y_{n,k}$ обозначают сумму членов степени k в многочлене Y_n (частные многочлены Белла). Тогда справедливо тождество

$$D_x^n(f(v)) = f'(v)Y_{n,1} + f''(v)Y_{n,2} + \cdots + f^{(n)}(v)Y_{n,n}, \quad (7.7)$$

что без труда доказывается по индукции. Во-вторых, кроме дифференциального исчисления, многочлены Белла играют важную роль в комбинаторике. Хотя эта тема не имеет непосредственного отношения к нашему курсу, она настолько красива, что пройти мимо невозможно. Кто знает, что в жизни пригодится...

7.2 Многочлены Белла и разбиения множеств

Разбиением множества называется множество его непустых попарно непересекающихся подмножеств (*блоков*), объединение которых даёт всё множество. Запись $\pi \vdash [n]$ означает, что π является разбиением множества $[n] = \{1, \dots, n\}$. Множество всех разбиений $[n]$ обозначается Π_n , его подмножество, состоящее из разбиений на k блоков обозначается $\Pi_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$. Будем обозначать блоки той же буквой, что и само разбиение, с нижним индексом: $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$. При $n = 0$ удобно принять, что множество $[0] = \emptyset$ допускает единственное разбиение \emptyset , не содержащее ни одного блока, то есть, $\Pi_0 = \Pi_{0,0} = \{\emptyset\}$. Пусть $|A|$ обозначает число элементов множества, тогда $|\pi|$ число блоков в разбиении, а $|\pi_j|$ размер блока.

По определению, разбиение это неупорядоченное множество, то есть, порядок блоков и порядок элементов в блоках не важны. Тем не менее, нумерацию элементов можно использовать для определения однозначной записи разбиения. В канонической записи, блок разбиения представлен списком, упорядоченным по возрастанию элементов, а само разбиение списком блоков, упорядоченных по возрастанию первого (минимального) элемента. Например, $\pi = 1, 2, 7|3, 5|4, 9, 12|6|8, 10, 11$, где, для краткости, блоки разделены чертой. Графически, это разбиение изображено на рис. 19, где строки диаграммы представляют блоки, упорядоченные сверху вниз в порядке возрастания минимальных элементов.

Основными задачами в комбинаторике являются порождение и подсчёт всех рассматриваемых объектов. Для разбиений множеств, первая задача допускает следующее решение. Рассмотрим операции

$$d_j : \Pi_{n,k} \rightarrow \Pi_{n+1,k}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad M : \Pi_{n,k} \rightarrow \Pi_{n+1,k+1},$$

определяемые, как добавление нового элемента в один из существующих блоков разбиения $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ или же в качестве нового синглета (блока из одного элемента):

$$d_j \pi = \{\pi_1, \dots, \pi_j \cup \{n+1\}, \dots, \pi_k\}, \quad M \pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k, \{n+1\}\}. \quad (7.8)$$

На рис. 19, эти операции заносят новый элемент на одну из вакансий в столбце справа от диаграммы. В результате, получается простой и достаточно эффективный алгоритм построения разбиений множеств.

Утверждение 7.3. *Стартуя с разбиения \emptyset , можно породить операциями d_j, M любое разбиение $[n]$, причём единственным способом.*

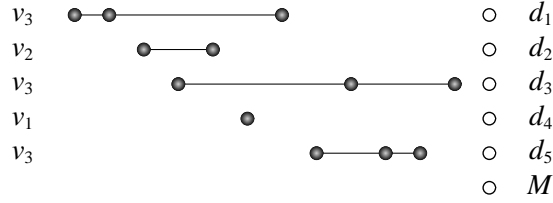


Рис. 19. Разбиение множества $\pi = 1, 2, 7|3, 5|4, 9, 12|6|8, 10, 11$. Блоку размера l приписана переменная v_l . Порождающие операции d_j , M добавляют новый элемент на одну из вакансий, отмеченных пустыми кружками.

Доказательство. Последовательность операций однозначно восстанавливается удалением элементов в обратном порядке, от n до 1. \square

Перейдём теперь ко второй задаче, подсчёту числа разбиений. Сопоставим блоку π_j из l элементов переменную v_l . Разбиению сопоставим моном, равный произведению переменных, отвечающих каждому блоку:

$$p(\pi) = \prod_{j=1}^{|\pi|} v_{|\pi_j|}. \quad (7.9)$$

Наконец, суммируя по всем разбиениям $[n]$, определим многочлен

$$Y_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{j=1}^{|\pi|} v_{|\pi_j|}. \quad (7.10)$$

При $n = 0$ имеем $Y_0 = p(\emptyset) = 1$, в соответствии с обычным соглашением, что произведение по пустому множеству равно 1. По построению, в многочлене Y_n степени любого монома $v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r}$ связаны соотношением

$$n = k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r$$

(то есть, многочлен однороден относительно веса $w(v_l) = l$), а коэффициент при этом мономе равен числу таких разбиений $[n]$, которые содержат в точности k_1 блок с одним элементом, k_2 блоков с двумя элементами, ..., k_r блоков с r элементами. Например, вот все разбиения множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и соответствующие мономы:

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= v_4 + 4v_1v_3 + 3v_2^2 + 6v_1^2v_2 + v_1^4 \\
 n &= 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &\quad 1234 \quad 1|234 \quad 12|34 \quad 1|2|34 \quad 1|2|3|4 \\
 &\quad \quad 123|4 \quad 13|24 \quad 1|23|4 \\
 &\quad \quad 124|3 \quad 14|23 \quad 1|24|3 \\
 &\quad \quad 134|2 \quad 12|3|4 \\
 &\quad \quad \quad 13|2|4 \\
 &\quad \quad \quad 14|2|3
 \end{aligned}$$

Оказывается, что определённые таким образом многочлены есть ни что иное, как многочлены Белла. Как видим, подсчёт разбиений — казалось бы, чисто дискретная задача — сводится к дифференциальным рекуррентным соотношениям. Для доказательства нужно только проследить за действием порождающих операций d_j , M на многочлены и проинтерпретировать его на языке дифференциальных операторов.

Утверждение 7.4. *Многочлены Y_n от переменных $v_l = D_x^l(v)$ подчиняются рекуррентному соотношению (7.5), то есть, совпадают с многочленами Белла.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi_n$. По правилу Лейбница, действие дифференцирования D_x на моном $p(\pi)$ состоит в замене v_l на v_{l+1} поочерёдно для каждого сомножителя, с учётом кратности. На языке разбиений, этому отвечает поочерёдное наращивание одного из блоков новым элементом. В результате, мы получаем сумму мономов $p(d_j\pi)$ для всех допустимых значений j . Умножение монома $p(\pi)$ на v_1 даёт моном $p(M\pi)$.

Следовательно, $(D_x + v_1)(p(\pi)) = \sum_{\pi'} p(\pi')$, где суммирование ведётся по разбиениям π' , получающимся из разбиения π добавлением элемента $n+1$ всеми возможными способами. Суммируя по π и учитывая Утверждение 7.3, получаем соотношение (7.5). \square

Итак, коэффициенты многочленов Y_n дают числа разбиений с блоками предписанного размера. Их можно найти явно, и в результате получается формула

$$Y_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+rk_r=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1} \dots (r!)^{k_r} k_1! \dots k_r!} v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r}.$$

Правда, чтобы её применить, нужно предварительно построить всевозможные *разбиения числа* $k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = n$ (или, диаграммы Юнга).

В завершение этого сюжета, отметим ещё несколько комбинаторных формул. Забудем про размеры блоков, будем следить только за их числом в данном разбиении. Для этого достаточно сложить коэффициенты $Y_{n,k}$, что равносильно отождествлению всех переменных v_l . Возникают многочлены Белла–Тупшара от одной переменной

$$B_n(v) = Y_n(v, \dots, v) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} v^k,$$

где коэффициент при v^k , равный числу разбиений $[n]$ на k блоков называется числом Стирлинга второго рода (см. таблицу 5). В соответствии с соглашением $\Pi_{0,0} = \{\emptyset\}$, имеем $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ при $n > 0$ и $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$. При подстановке $v_l = v$, рекуррентное соотношение (7.5) превращается в

$$B_0(v) = 1, \quad B_{n+1}(v) = (v\partial_v + v)(B_n(v)) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Производящая функция (7.6) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(v) \frac{z^n}{n!} = \exp(v(e^z - 1)).$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	B_n
0	1								1
1	0	1							1
2	0	1	1						2
3	0	1	3	1					5
4	0	1	7	6	1				15
5	0	1	15	25	10	1			52
6	0	1	31	90	65	15	1		203
7	0	1	63	301	350	140	21	1	877

Таблица 5. Числа Стирлинга второго рода $\{^n_k\} = |\Pi_{n,k}|$; суммы по строкам дают числа Белла $B_n = |\Pi_n|$.

Отсюда получаем формулы и для чисел Белла, дающих общее число разбиений n -элементного множества:

$$B_n = B_n(1) = Y_n(1, \dots, 1) = \sum_{k=0}^n \{^n_k\}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z - 1}.$$

7.3 Уравнение Лиувилля

Обратимся теперь к гиперболическим уравнениям. Здесь простейшим, и в то же время наиболее типичным примером S -интегрируемого уравнения служит уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = e^u. \quad (7.11)$$

Оно обладает следующими свойствами.

Утверждение 7.5. 1) *Линеаризуемость: подстановка*

$$e^u = 2 \frac{\psi_x \psi_y}{\psi^2}$$

переводит решения уравнения $\psi_{xy} = 0$ в решения уравнения Лиувилля;

2) *существование x - и y -интегралов: если u удовлетворяет уравнению Лиувилля, то следующие величины I и J не зависят, соответственно, от x и y :*

$$I = u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2, \quad \partial_x(I) = 0; \quad J = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2, \quad \partial_y(J) = 0;$$

3) *конформная инвариантность: если $u(x, y)$ решение уравнения Лиувилля, и $f(x)$, $g(y)$ произвольные непостоянные, дифференцируемые функции, то решением является также функция*

$$\tilde{u}(x, y) = u(f(x), g(y)) + \log(f'(x)g'(y)); \quad (7.12)$$

4) *общее решение находится по явной формуле:*

$$e^u = \frac{2a'(x)b'(y)}{(a(x) + b(y))^2}, \quad (7.13)$$

где a, b произвольные функции.

Доказательство. Свойства 1), 2), 3) доказываются прямым вычислением. Проверим подстановку:

$$\begin{aligned} u &= \log 2 + \log \psi_x + \log \psi_y - 2 \log \psi \Rightarrow \\ u_{xy} &= -2(\log \psi)_{xy} = -2 \frac{\psi_{xy}\psi - \psi_x\psi_y}{\psi^2} = \frac{2\psi_x\psi_y}{\psi^2} = e^u. \end{aligned}$$

Дифференцируем интегралы:

$$\partial_x(I) = u_{xyy} - u_y u_{xy} = u_y(e^u - u_{xy}) = 0,$$

и аналогично для $\partial_y(J)$. Проверяем инвариантность:

$$\tilde{u}_{xy} = f'(x)g'(y)u_{xy} = f'(x)g'(y)e^u = e^{\tilde{u}}.$$

Докажем 4). То, что (7.13) есть решение уравнения Лиувилля, следует из свойства 1) и формулы Даламбера $\psi = a(x) + b(y)$. Осталось доказать только, что *любое* решение $u(x, y)$ уравнения Лиувилля может быть записано в таком виде. Забудем про свойство 1) и получим решение другим способом, используя свойство 2), согласно которому любое решение u удовлетворяет также паре обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2 = I(y), \quad u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 = J(x),$$

и свойство 3), которое позволяет обратить функции I, J в 0 за счет выбора подходящих f, g . Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x &= f'u_x + \frac{f''}{f'}, \quad \tilde{u}_{xx} = (f')^2 u_{xx} + f''u_x + \left(\frac{f''}{f'}\right)' \Rightarrow \\ \tilde{J} &= \tilde{u}_{xx} - \frac{1}{2}\tilde{u}_x^2 = (f')^2 J + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{J} = 0$ есть ОДУ относительно f , и для замены достаточно взять какое-нибудь его частное решение. Точно так же уничтожается функция \tilde{I} . Мы показали, что заменой (7.12) любое решение уравнения Лиувилля сводится к решению системы

$$u_{xx} = \frac{1}{2}u_x^2, \quad u_{yy} = \frac{1}{2}u_y^2, \quad u_{xy} = e^u.$$

Эти уравнения легко решаются. Получаем ответ в виде $e^u = (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^{-2}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ постоянные, такие что $2\beta\gamma - 2\alpha\delta = 1$. Дробно-линейными заменами x, y (они оставляют значения I, J нулевыми) можно привести это решение к виду $e^u = 2(x + y)^{-2}$. Опять применяя (7.12), получаем решение в виде (7.13). \square

Отметим, что формулу для решения можно записать также в виде

$$e^u = -\frac{2a'(x)b'(y)}{(1 + a(x)b(y))^2},$$

это — та же самая формула, с точностью до замены $a \rightarrow 1/a$.

Замечание 7.1. Можно показать, что уравнение Лиувилля интегрируемо также и в смысле существования высших симметрий, но мы не будем на этом останавливаться. Сошлемся лишь на следующий классификационный результат (Ибрагимов, Шабат 1980): среди уравнений вида

$$u_{xy} = f(u),$$

рассматриваемых с точностью до комплексных линейных замен u и x, y , высшими симметриями обладают лишь уравнения \sin -Гордона $u_{xy} = \sin u$, Цицейки $u_{xy} = e^u - e^{-2u}$, Лиувилля, и линейные $u_{xy} = \alpha u + \beta$. Гораздо больше интегрируемых случаев, как S -, так и C -интегрируемых, содержится в классе уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

7.4 Двумерная цепочка Тоды с закреплёнными концами

Двумерной цепочкой Тоды называется бесконечная последовательность уравнений

$$u_{j,xy} = e^{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7.14)$$

Условие периодичности $u_{j+n+1} = u_j$ превращает её в n -компонентную S -интегрируемую систему, обобщающую уравнение \sinh -Гордон. Есть и другие способы замкнуть эту цепочку, приводящие как к S -, так и к C -интегрируемым системам, причём при описании всевозможных интегрируемых обрывов было обнаружено некое соответствие с классификацией простых алгебр Ли (Лезнов, Савельев, Шабат, 1980). Мы сейчас рассмотрим только обобщения уравнения Лиувилля, отвечающие серии A_n . Они определяются граничными условиями с фиксированными переменными на концах интервала

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 0. \quad (7.15)$$

При $n = 1$ получаем само уравнение Лиувилля (с точностью до растяжения)

$$u_{1,xy} = e^{-2u_1},$$

при $n = 2$ систему

$$u_{1,xy} = e^{u_2-2u_1}, \quad u_{2,xy} = e^{-2u_2+u_1},$$

в общем случае систему

$$\begin{aligned} u_{1,xy} &= e^{u_2-2u_1}, \\ u_{j,xy} &= e^{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ u_{n,xy} &= e^{-2u_n+u_{n-1}}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Оказывается, что для неё существует явная формула, аналогичная (7.13), выражающая общее решение через $2n$ произвольных функций $a_1(x), \dots, a_n(x), b_1(y), \dots, b_n(y)$. Идея вывода заключается в том, чтобы сначала выписать общее решение полубесконечной цепочки, учитывая только граничное условие при $j = 0$, а затем выделить из него те решения, которые удовлетворяют граничному условию при $j = n+1$. Понятно, что решение полубесконечной цепочки полностью определяется произвольной функцией $u_1(x, y)$, так как все остальные переменные находятся рекуррентно.

Удобно перейти к уравнениям в рациональной форме, сделав замену $u_j = \log w_j$, тогда имеем

$$w_j w_{j,xy} = w_{j,x} w_{j,y} + w_{j-1} w_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (7.17)$$

а граничные условия принимают вид $w_0 = 1$, $w_{n+1} = 1$. Забывая сначала про второе условие, находим:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = f(x, y), \quad w_2 = f f_{xy} - f_x f_y = \det \begin{pmatrix} f & f_y \\ f_x & f_{xy} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \frac{1}{f} (w_2 w_{2,xy} - w_{2,x} w_{2,y}).$$

Если расписать последнее выражение, то оказывается, что

$$w_3 = \det \begin{pmatrix} f & f_y & f_{yy} \\ f_x & f_{xy} & f_{xyy} \\ f_{xx} & f_{xxy} & f_{xxyy} \end{pmatrix},$$

после чего уже можно угадать общий ответ. Чтобы доказать его, нам понадобится одно тождество для вронскианов (ср. с Леммой 5.6)

$$W(f_0, \dots, f_j) = \det (\partial_x^k (f_i))_{i,k=0}^j.$$

Предполагается, что функции $f_i(x)$ дифференцируемы достаточное число раз. При необходимости, переменную, по которой происходит дифференцирование, будем помечать индексом, например, формулу для w_3 можно записать как $W_x(f, f_y, f_{yy})$ или как $W_y(f, f_x, f_{xx})$.

Лемма 7.6. Пусть F обозначает последовательность функций f_0, \dots, f_j (возможно пустую, при этом полагаем $W(\emptyset) = 1$). Тогда выполняется тождество

$$W(F)W(F, g, h) = W(W(F, g), W(F, h))$$

$$= W(F, g) \partial_x(W(F, h)) - \partial_x(W(F, g)) W(F, h). \quad (7.18)$$

Доказательство. Относительно функции h , выражение $W(F, g, h)$ и правая часть тождества являются дифференциальными операторами с ядром $\{f_0, \dots, f_j, g\}$. Ядро определяет дифференциальный оператор с точностью до скалярного множителя, который легко уточнить сравнением коэффициентов при $\partial_x^{j+2}(h)$, в результате в левой части и возникает множитель $W(F)$. \square

Следствие 7.7. Общее решение полубесконечной цепочки (7.17) при $j > 0$ и $w_0 = 1$ имеет вид

$$w_j = W_x(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-1}(f)),$$

где $f(x, y)$ произвольная, достаточное число раз дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть F последовательность $f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-2}(f)$ и $g = \partial_y^{j-1}(f)$, $h = \partial_y^j(f)$, тогда в тождестве (7.18) имеем

$$W(F) = w_{j-1}, \quad W(F, g) = w_j, \quad W(F, h) = \partial_y(w_j), \quad W(F, g, h) = w_{j+1}.$$

Следовательно, функции w_j удовлетворяют уравнениям

$$w_0 = 1, \quad w_{j-1}w_{j+1} = w_jw_{j,xy} - w_{j,x}w_{j,y},$$

что и требуется. \square

Теперь нужно подобрать функцию f так, чтобы выполнялось граничное условие на правом конце, $w_{n+1} = 1$. Фактически, мы преобразовали систему (7.16) в одно скалярное уравнение порядка $2n$ на функцию f :

$$W_x(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^n(f)) = 1. \quad (7.19)$$

Легко видеть, что для функций вида $f = a_0(x)b_0(y) + \dots + a_n(x)b_n(y)$ вронскиан факторизуется на множители, зависящие только от x и от y . Действительно, пусть скобки (\cdot) обозначают вектор-строку, скобки $[\cdot]$ — вектор-столбец, и пусть $f = AB$, где

$$A = (a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)), \quad B = [b_0(y), b_1(y), \dots, b_n(y)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_x(f, \dots, \partial_y^n(f)) &= \det \begin{pmatrix} AB & AB^{(1)} & \dots & AB^{(n)} \\ A^{(1)}B & A^{(1)}B^{(1)} & \dots & A^{(1)}B^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(n)}B & A^{(n)}B^{(1)} & \dots & A^{(n)}B^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \det[A, A^{(1)}, \dots, A^{(n)}] \det(B, B^{(1)}, \dots, B^{(n)}) = W_x(a_0, \dots, a_n) W_y(b_0, \dots, b_n). \end{aligned}$$

При умножении всех функций a_i на общий множитель $p(x)$, он выносится из вронскиана:

$$W_x(pa_0, \dots, pa_n) = p^{n+1} W_x(a_0, \dots, a_n),$$

и аналогично для W_y . Поэтому можно сначала положить функции a_0, b_0 равными 1, и затем подходящей нормировкой можно сделать вронскианы равными 1 (при условии, что они не равны нулю, то есть, функции a_i и b_i линейно независимы). В результате, получаем следующее утверждение.

Утверждение 7.8. Система (7.16) имеет решение

$$u_j = \log W_x(f, \partial_y(f), \dots, \partial_y^{j-1}(f)), \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$f = (W_x(a'_1, \dots, a'_n) W_y(b'_1, \dots, b'_n))^{-\frac{1}{n+1}} (1 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n),$$

с произвольными линейно независимыми функциями $a_i(x), b_i(y)$.

Как и случае уравнения Лиувилля, эта формула задаёт общее решение системы, но доказательство, конечно, более сложное и мы не будем на нём останавливаться.

7.5 Задачи

Задача 7.1. (2 балла) Построить несколько точных частных решений уравнения Бюргерса при помощи подстановки Коула–Хопфа, используя линейные комбинации простейших решений уравнения теплопроводности например,

$$\psi = 1, \quad x^2 + 2t, \quad \exp(kx + k^2t), \quad \sin(kx + d)e^{-k^2t}, \quad (t + a)^{-1/2}e^{-\frac{(x+b)^2}{4(t+a)}}.$$

Подбирайте значения параметров так, чтобы решение не имело полюсов, по крайней мере при $t > 0$.

Задача 7.2 (Доказательство Утверждения 7.1). (2 балла) Пусть уравнения $u_t = f[u]$, $u_\tau = g[u]$ коммутируют, то есть $\{f, g\} = 0$ (см. лекцию 4). Докажите, что это свойство сохраняется и для уравнений $v_t = F[v]$, $v_\tau = G[v]$, получающихся в результате замены вида $u = a(v)$ (на самом деле, это верно и для более общих точечных преобразований, их мы будем рассматривать на одной из следующих лекций).

Далее, пусть правые части уравнений $u_t = f[u]$, $u_\tau = g[u]$ содержат лишь производные u_1, u_2, \dots , но не саму функцию u . Докажите, что тогда можно сделать подстановку $u_1 = v$, и уравнения для v по прежнему будут коммутировать.

Задача 7.3. (3 балла) В задаче 4.5 о классификации однородных полиномиальных уравнений одним из ответов служит уравнение Ибрагимова–Шабата

$$u_t = u_3 + 3u^2u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4u_1 \quad (7.20)$$

(вес $w(u_n) = 1 + 2n$, симметрия порядка 5). Можно проверить, что у него есть высшие симметрии любого нечётного порядка, но нет законов сохранения. Проверьте прямыми вычислениями, что следующие точечные замены и подстановки типа введения потенциала связывают (7.20) с уравнением $\psi_t = \psi_3$:

$$\begin{array}{ll} \psi_t = \psi_3 & u_t = u_3 + 3u^2u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4u_1 \\ \Downarrow \psi^2 = s & \Downarrow u^2 = v \\ s_t = D_x \left(s_2 - \frac{3s_1^2}{4s} \right) & v_t = D_x \left(v_2 - \frac{3v_1^2}{4v} + 3vv_1 + v^3 \right) \\ \uparrow s = q_1 & \uparrow v = w_1 \\ q_t = q_3 - \frac{3q_2^2}{4q_1} & \xleftrightarrow{q=e^{2w}} w_t = w_3 - \frac{3w_2^2}{4w_1} + 3w_1w_2 + w_1^3 \end{array}$$

Таким образом, уравнение (7.20) линеаризуемо, но последовательность замен сложнее, чем для уравнения Бюргерса, и необратима в обе стороны. Вся иерархия состоит из уравнений, связанных этими же преобразованиями с уравнениями $\psi_{t_{2m+1}} = \psi_{2m+1}$. Отсутствие чётных потоков объясняется тем, что замены частично разрушают алгебру симметрий. Проверьте, что для $\partial_{t_{2m+1}}$ замена $\psi^2 = s$ приводит к уравнению с полной производной в правой части:

$$s_{t_{2m+1}} = 2\psi\psi_{2m+1} = D_x(2\psi\psi_{2m} - 2\psi_1\psi_{2m-1} + 2\psi_2\psi_{2m-2} + \dots \pm \psi_m^2),$$

тогда как в аналогичной формуле для $s_{t_{2m}}$ слагаемое ψ_m^2 остаётся за знаком производной, то есть $s_{t_{2m}} \notin \text{Im } D_x$, поэтому дальнейшая подстановка $s = q_1$ выводит из класса эволюционных уравнений.

Следующая задача приведена просто как упражнение для работы со списками (напомним, что в *Mathematica* это основная структура данных).

Задача 7.4. Сгенерировать список всех разбиений множества из n элементов, для $n = 1, \dots, 10$. Подсчитать для каждого n число разбиений с k блоками и построить таблицу чисел $\{n_k\}$.

Решение. В *Mathematica*, работа со многими комбинаторными объектами, в том числе и разбиениями множеств, возможна при помощи специального пакета. Команды

```
<<Combinatorica`
maxn=10;
pol[plist_]:=Plus@@(u^Length[#]&/@plist)
partitions=Table[SetPartitions[n],{n,0,maxn}];
polynom=pol/@partitions;
stirling=CoefficientList[#,u]&/@polynom;
TableForm[stirling]
```

загружают этот пакет и функция `SetPartitions` делает всё за нас. Наша здесь только функция `pol`, которая строит многочлен от одной переменной по заданному списку разбиений. Да и таблицу $\{n_k\}$ можно получить, просто набрав

```
TableForm[Table[StirlingS2[n,k],{n,0,maxn},{k,0,n}]]
```

Так не интересно... Построить разбиения самим при помощи операций d_j , M можно так:

```
d[p_,el_]:=Table[ReplacePart[p,j->Append[p[[j]],el]],{j,1,Length[p]}]
partitions={{{} }};
Do[
  AppendTo[partitions,
    Join[
      Flatten[d[#,n+1]&/@partitions[[-1]],1],
      Append[#{n+1}&/@partitions[[-1]]
    ]
  ],
  {n,0,maxn-1}
];
polynom=pol/@partitions;
stirling=CoefficientList[#,u]&/@polynom;
TableForm[stirling]
```

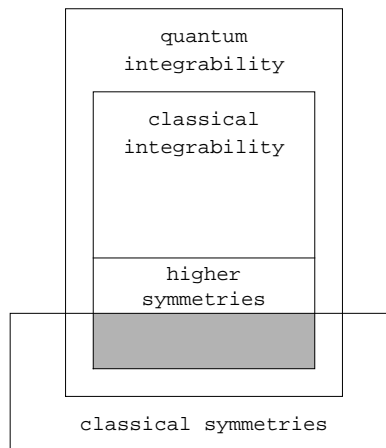
Функция `d` применяется к разбиению и возвращает список всех разбиений, получающихся добавлением элемента к одному из существующих блоков. Далее применяем её в цикле вместе с добавлением нового синглета.

8 Классические симметрии

Группы Ли · Векторные поля · Коммутатор · Дробно-линейные преобразования · Замены переменных · Продолжение на старшие производные · Точечные и контактные преобразования · Преобразование Лежандра

8.1 Непрерывные группы преобразований

Вернёмся к понятию симметрии. В лекции 4 мы ввели высшие, или обобщённые симметрии, перескочив через более простые классические, чтобы не терять скорости. Классические симметрии отвечают непрерывным группам преобразований, действующих на решениях рассматриваемого уравнения. Следует подчеркнуть, что теория таких симметрий *не является* частью теории интегрируемых систем, область ее приложений гораздо шире. Слово «классический» само по себе не означает ничего и всегда требует пояснений. Например, в названии курса «классические интегрируемые модели» это слово означает «не квантовые», и ничего больше. Для ясности, можно нарисовать такую схему (на этой и следующей лекции нас будет интересовать, в основном, то, что относится к закрашенному прямоугольнику):



Так что же такое симметрия? В общем-то, ответ известен: симметрией называется преобразование, переводящее некоторый объект в себя. Например, рассмотрим движения евклидовой плоскости, то есть, линейные преобразования, сохраняющие расстояние. Среди них, симметриями квадрата являются повороты вокруг центра на углы, кратные 90° , отражения относительно диагоналей и относительно прямых, проходящих через середины сторон. Все такие преобразования образуют дискретную, даже конечную группу. Группа симметрий окружности состоит из поворотов на произвольный угол и отражений относительно любого диаметра. Множество поворотов даёт пример непрерывной группы, или группы Ли. Это понятие нам и нужно. Наша цель — научиться применять его к дифференциальным уравнениям.

Группой Ли называется гладкое многообразие G , на котором определена структура группы, причем операции группового умножения $G \times G \rightarrow G$ и взятия обратного элемента $G \rightarrow G$ являются гладкими отображениями. Группы Ли часто

реализуются как группы преобразований. Для наших целей достаточно рассматривать только преобразования, близкие к тождественному, что приводит к понятию локальных групп Ли.

Определение 8.1. Пусть M конечномерное многообразие, $a \in (-A, A) \subseteq \mathbb{R}$. Семейство G гладких отображений $T_a : M \rightarrow M$ называется локальной однопараметрической группой Ли, если:

1. для всех $a \in (-A, A)$ отображение T_a невырождено;
2. $T_0 = \text{id}$ и наоборот, если $T_a = \text{id}$ для некоторого $a \in (-A, A)$, то $a = 0$;
3. $T_a T_b = T_{a+b}$ для всех a и b таких, что все три преобразования определены.

Пример 8.1. Пусть M — окружность, круг или вся плоскость, T_a — поворот на угол a , $-\pi < a < \pi$. Множество всех T_a образует локальную однопараметрическую группу Ли. Такие геометрические преобразования, как параллельные переносы, растяжения, общие аффинные, евклидовы или проективные преобразования — все это группы Ли (многопараметрические). Важно помнить, что при рассмотрении локальных однопараметрических групп Ли параметр выбирается так, чтобы групповая операция была аддитивной. Например, гомотетию нужно записывать не как $x \rightarrow kx$, а как $x \rightarrow e^a x$.

На практике, удобнее работать не с самой группой Ли, а с её алгеброй Ли, то есть, с касательным пространством к G в окрестности единичного элемента. Это связано с тем, что операции в группе нелинейные, а в алгебре линейные, что существенно упрощает вычисления. В случае однопараметрических групп преобразований мы приходим к следующему определению.

Определение 8.2. Пусть G локальная однопараметрическая группа Ли, действующая на многообразии M с локальными координатами q_1, \dots, q_r , и преобразования $T_a : (q_1, \dots, q_r) \mapsto (q_1(a), \dots, q_r(a))$ задаются формулами

$$q_j(a) = \Phi_j(a, q_1, \dots, q_r), \quad j = 1, \dots, r, \quad (8.1)$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями Φ_j . Инфинитезимальным оператором, или генератором, группы G называется векторное поле на M

$$X = \varphi_1 \partial_{q_1} + \dots + \varphi_r \partial_{q_r}, \quad \varphi_j(q_1, \dots, q_r) = \left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial a} \right|_{a=0}. \quad (8.2)$$

Теорема 8.1 (Ли). Преобразование T_a однозначно восстанавливается по своему генератору, как решение задачи Коши

$$q'_1(a) = \varphi_1(q_1(a), \dots, q_r(a)), \quad \dots \quad q'_r(a) = \varphi_r(q_1(a), \dots, q_r(a)) \quad (8.3)$$

с начальными условиями $q_1(0) = q_1, \dots, q_r(0) = q_r$. Иными словами, преобразование T_a действует на точку q как сдвиг по траектории динамической системы (8.3).

Доказательство. Групповое свойство преобразований T_a выражается тождествами $q_j(a+b) = \Phi_j(b, q_1(a), \dots, q_r(a))$, для всех $j = 1, \dots, r$. Дифференцируя по b и полагая $b = 0$ получаем (8.3). Наоборот, решение $q(a)$ этой задачи Коши определено и непрерывно в некоторой окрестности точки $a = 0$, в которой оно совпадает с тождественным преобразованием. Групповое свойство следует из того, что для автономной системы $q(a+b)$ также является решением. \square

Рассмотрим конечномерную динамическую систему

$$\dot{q}_1(t) = f_1(t, q_1(t), \dots, q_r(t)), \quad \dots \quad \dot{q}_r(t) = f_r(t, q_1(t), \dots, q_r(t)). \quad (8.4)$$

Система (8.3) называется симметрией для (8.4), если векторные поля X и $F = f_1 \partial_{q_1} + \dots + f_r \partial_{q_r}$ коммутируют:

$$[X, F] = (X(f_1) - F(\varphi_1)) \partial_{q_1} + \dots + (X(f_r) - F(\varphi_r)) \partial_{q_r} = 0$$

(про сами векторные поля тоже говорят, что X есть симметрия F). Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы преобразования T_a , отвечающие генератору X , переводили решения (8.4) в решения.

Пример 8.2. Рассмотрим систему вида

$$\dot{q}_1 = q_1 f(t, q_1^\beta / q_2^\alpha), \quad \dot{q}_2 = q_2 g(t, q_1^\beta / q_2^\alpha).$$

Она обладает симметрией с генератором $X = \alpha q_1 \partial_{q_1} + \beta q_2 \partial_{q_2}$, то есть,

$$q_1' = \alpha q_1, \quad q_2' = \beta q_2.$$

Действительно, так как $X(q_1^\beta / q_2^\alpha) = 0$, то функции f, g при вычислении коммутатора играют роль постоянных и легко видеть, что $[X, F] = 0$. Групповое преобразование T_a , отвечающее генератору X , легко находится по теореме Ли:

$$T_a(q_1) = e^{\alpha a} q_1, \quad T_a(q_2) = e^{\beta a} q_2,$$

то есть, это группа растяжений. Также легко проверить, что эти преобразования действуют на решениях системы.

Наличие симметрии позволяет понизить размерность системы на 1. Для этого, «выпрямим» векторное поле X , делая замену

$$\tilde{q}_1 = q_1^\beta / q_2^\alpha, \quad \tilde{q}_2 = \log q_2 \Rightarrow \tilde{X} = \beta \tilde{\partial}_{\tilde{q}_2}.$$

Операция коммутатора согласована с заменами переменных, в частности, если векторные поля коммутируют в одних координатах, то они коммутируют и в любых других, поэтому должно выполняться равенство $[\tilde{X}, \tilde{F}] = 0$. Но это означает, что в координатах \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 компоненты \tilde{F} не зависят от \tilde{q}_2 . Действительно, для переменной \tilde{q}_1 получаем уравнение

$$\dot{\tilde{q}}_1 = \tilde{q}_1 (\beta f(t, \tilde{q}_1) - \alpha g(t, \tilde{q}_1)).$$

Конечно, в этом примере понижающая замена и так очевидна, но в более сложных задачах симметрии могут быть единственным систематическим способом их поиска.

В случае d -параметрических групп Ли мы получаем d -мерное линейное пространство, порожденное генераторами некоторых однопараметрических подгрупп. При этом, друг с другом эти генераторы не обязаны коммутировать, но коммутатор принадлежит этому же линейному пространству, то есть, мы получаем некоторую алгебру Ли векторных полей. Это можно доказать, установив связь между коммутаторами генераторов и групповыми коммутаторами $T_a S_b T_{-a} S_{-b}$, но мы не будем на этом останавливаться.

Пример 8.3. Рассмотрим дробно-линейные преобразования $q \rightarrow \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}$, $\alpha\delta \neq \gamma\beta$. Это 3-параметрическая группа Ли, так как коэффициенты определены с точностью до произвольного множителя. Вся группа порождается преобразованиями вида

$$q \rightarrow q + a, \quad q \rightarrow aq, \quad q \rightarrow \frac{1}{q}.$$

Первые два образуют однопараметрические подгруппы, только во втором нужно ещё заменить a на e^a . Третье преобразование дискретное, но его легко включить в однопараметрическую подгруппу, рассмотрев сопряжение преобразований $q \rightarrow q - a$:

$$q \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{q} - a} = \frac{q}{1 - aq}.$$

Вычисляя генераторы, получаем векторные поля

$$X_0 = \partial_q, \quad X_1 = q\partial_q, \quad X_2 = q^2\partial_q.$$

Легко проверить, что

$$[X_0, X_1] = X_0, \quad [X_0, X_2] = 2X_1, \quad [X_1, X_2] = -X_2$$

(эта алгебра Ли изоморфна $sl_2(\mathbb{R})$).

При изучении динамических систем можно и не рассматривать симметрии на уровне группы преобразований, а сразу стартовать на уровне инфинитезимальных генераторов, то есть, на уровне алгебры Ли. При этом, симметрии могут не коммутировать, однако коммутатор двух симметрий также является симметрией: если $[X, F] = [Y, F] = 0$ и $Z = [X, Y]$, то, в силу тождества Якоби,

$$[Z, F] = [[X, Y], F] = [[X, F], Y] + [X, [Y, F]] = 0.$$

Таким образом, линейное пространство всех симметрий данной системы всегда образует подалгебру в алгебре Ли векторных полей. Чем больше размерность d , тем лучше для интегрирования исходной системы. В простейшем случае, если все симметрии коммутируют, то при понижении порядка при помощи одной симметрии, редуцированная система сохраняет все остальные симметрии. В итоге, можно последовательно понизить порядок системы на d единиц. Если же симметрии некоммутативны, то ситуация сложнее, так как редуцированная система может, вообще говоря, потерять часть симметрий. Тем не менее, процедура может быть выполнена без потерь в случае, если алгебра симметрий разрешима. Упомянем, без доказательства, следующую теорему.

Теорема 8.2 (Ли–Бьянки). *Если система (8.4) допускает r -мерную разрешимую алгебру Ли симметрий, то она интегрируется в квадратурах.*

Напомним, что алгебра Ли L называется разрешимой, если последовательность ее производных подалгебр $L^{(0)} = L$, $L^{(j)} = [L^{(j-1)}, L^{(j-1)}]$, $j = 1, 2, \dots$ обрывается, то есть, $L^{(j)} = 0$ начиная с некоторого номера j ; здесь $[L_1, L_2] = \{\sum [X, Y] \mid X \in L_1, Y \in L_2\}$. Для примера, алгебра Ли из примера 8.3 не является разрешимой, так как для неё $L^{(1)} = L$.

Теория динамических систем неисчерпаема, но это не совсем то, что нам нужно, так как мы хотим изучить понятие симметрии в приложении к дифференциальным уравнениям. Для этого нужно, прежде всего, разобраться, какие рассматриваются преобразования и как они действуют. Для наглядности, мы и начнём со случая обыкновенных дифференциальных уравнений.

8.2 Преобразования для ОДУ

Рассмотрим преобразования, действующие на обыкновенных дифференциальных уравнениях

$$F(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) = 0, \quad \tilde{u}_j = d^j \tilde{u} / d\tilde{x}^j. \quad (8.5)$$

Определение 8.3. Точечным преобразованием с одной независимой и одной зависимой переменной называется невырожденная замена вида

$$\tilde{x} = P(x, u), \quad \tilde{u} = Q(x, u), \quad \det \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_u & Q_u \end{pmatrix} \neq 0 \quad (8.6)$$

(производные P, Q будем обозначать $P_x = \partial_x(P)$, $P_{xu} = \partial_x \partial_u(P)$ и т.п.).

Для замены производных, нужно построить для преобразования (8.6) *продолжение* k -го порядка, то есть, вычислить $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k$. Считая \tilde{u} функцией от $\tilde{x} = P(x, u)$, запишем тождество

$$\tilde{u}(P(x, u(x))) = Q(x, u(x))$$

и продифференцируем по x . Это даст выражение для \tilde{u}_1 :

$$(P_x + P_u u_1) \tilde{u}_1 = Q_x + Q_u u_1 \Rightarrow \tilde{u}_1 = Q^1(x, u, u_1) = \frac{Q_x + Q_u u_1}{P_x + P_u u_1} = \frac{D_x(Q)}{D_x(P)},$$

где $D_x = \partial_x + \sum u_{j+1} \partial_j$ есть оператор полной производной (2.6). Заметим, что P_x и P_u не равны 0 одновременно в силу невырожденности замены. Далее, считая \tilde{u}_1 функцией от $\tilde{x} = P(x, u)$ и дифференцируя по x , получим выражение для \tilde{u}_2 :

$$(P_x + P_u u_1) \tilde{u}_2 = Q_x^1 + Q_u^1 u_1 + Q_{u_1}^1 u_2 \Rightarrow \tilde{u}_2 = Q^2(x, u, u_1, u_2) = \frac{D_x(Q^1)}{D_x(P)}.$$

Точно так же получаем формулу для производной любого порядка.

Утверждение 8.3. *Продолжение k -го порядка преобразований (8.6) задается формулами*

$$\tilde{u}_j = Q^j[x, u] = \frac{D_x(Q^{j-1})}{D_x(P)} = \left(\frac{1}{D_x(P)} D_x \right)^j (Q), \quad j = 1, \dots, k, \quad (8.7)$$

где $Q^j[x, u] = Q^j(x, u, \dots, u_j)$. Иными словами, при точечном преобразовании оператор полного дифференцирования преобразуется по правилу

$$D_{\tilde{x}} = \frac{1}{D_x(P)} D_x. \quad (8.8)$$

Пример 8.4. Простейшие точечные преобразования, сдвиги и растяжения:

$$\tilde{x} = x + a, \quad \tilde{u} = u + b \Rightarrow D_{\tilde{x}} = D_x, \quad \tilde{u}_j = u_j, \quad j \geq 1;$$

$$\tilde{x} = ax, \quad \tilde{u} = bu \Rightarrow D_{\tilde{x}} = \frac{1}{a}D_x, \quad \tilde{u}_j = a^{-j}bu_j, \quad j \geq 1.$$

Так называемое преобразование годографа:

$$\tilde{x} = u, \quad \tilde{u} = x \Rightarrow D_{\tilde{x}} = \frac{1}{u_1}D_x, \quad \tilde{u}_1 = \frac{1}{u_1}, \quad \tilde{u}_2 = -\frac{u_2}{u_1^3}, \quad \tilde{u}_3 = -\frac{u_3}{u_1^4} + \frac{3u_2^2}{u_1^5}, \dots$$

Явно выписать продолжение сколь угодно высокого порядка может быть непросто. Однако, для осуществления замены в уравнении (8.5) нужны лишь первые k производных $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k$, так что эта задача требует конечного числа шагов.

Возникает вопрос, существуют ли более общие преобразования, чем точечные. Конечно, существуют. Можно в формуле (8.6) добавить в P, Q зависимость от производных, сколько угодно: пусть

$$\tilde{x} = P(x, u, u_1, \dots, u_m), \quad \tilde{u} = Q(x, u, u_1, \dots, u_m). \quad (8.9)$$

Продолжение на старшие производные строится точно так же: дифференцируем равенство $\tilde{u}(P) = Q$, получаем

$$D_x(P)\tilde{u}_1 = D_x(Q) \Rightarrow \tilde{u}_1 = \frac{D_x(Q)}{D_x(P)} = Q^1(x, u, u_1, \dots, u_{m+1}).$$

Дифференцируя дальше, получаем ту же самую формулу (8.7), только теперь в ней Q^j зависят от большего числа производных. При этом происходит маленькая неприятность — преобразование, вообще говоря, теряет обратимость. Это плохо, так как мы хотим рассматривать группы преобразований. Можно, правда, возразить, что на самом деле обратимость имеется, если рассматривать преобразование не само по себе, а на решениях уравнения (8.5). Действительно, в этом случае порядок производных ограничен, так как все производные порядка $\geq k$ выражаются через x, u_0, \dots, u_{k-1} и, следовательно, все функции зависят от этого конечного набора переменных. Такой подход вполне логичен, но, фактически, это возврат к симметриям для динамических систем. Сейчас мы этого не хотим, будем требовать, чтобы преобразование определялось независимо от уравнения, к которому оно применяется.

Некоторое расширение класса точечных преобразований, сохраняющее обратимость, все же существует.

Определение 8.4. Контактным преобразованием называется замена вида

$$\tilde{x} = P(x, u, u_1), \quad \tilde{u} = Q(x, u, u_1), \quad \tilde{u}_1 = Q^1(x, u, u_1), \quad (8.10)$$

где функции P, Q, Q^1 удовлетворяют соотношениям

$$Q_{u_1} = Q^1 P_{u_1}, \quad Q_x + Q_u u_1 = Q^1(P_x + P_u u_1) \quad (8.11)$$

и условию невырожденности $\det \frac{\partial(P, Q, Q^1)}{\partial(x, u, u_1)} \neq 0$.

Продолжение контактного преобразования на старшие производные дается общей формулой (8.7), и в частности, должно быть, $Q^1 = D_x(Q)/D_x(P)$. Условия (8.11) возникают из требования, чтобы эта функция не зависела от u_2 , то есть, в равенстве

$$Q^1(P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2) = Q_x + Q_u u_1 + Q_{u_1} u_2$$

должны тождественно сокращаться коэффициенты при u_2^1 и u_2^0 .

Заметим, что если $Q_{u_1} = 0$, то $P_{u_1} = 0$, и наоборот. В этом случае контактное преобразование есть просто первое продолжение точечного преобразования (8.6). В случае собственно контактного преобразования исключая Q^1 из (8.11), находим, что P и Q являются функционально независимыми решениями уравнения

$$R_x + R_u u_1 + \phi R_{u_1} = 0,$$

где $\phi(x, u, u_1)$ — произвольная функция.

Замечание 8.1. Имеется теорема Бэклунда, утверждающая, что при продолжении по правилу (8.7), все преобразования с обратимыми продолжениями исчерпываются точечными и контактными. Это же верно и для случая уравнений с частными производными. Однако, ситуация становится менее понятной при рассмотрении систем с несколькими зависимыми переменными. Например, преобразование $\tilde{u} = u + f(v, v_1, \dots, v_l)$, $\tilde{v} = v$ очевидно, обратимо при любой функции f , с производными любого порядка.

Пример 8.5. Стандартным примером контактного преобразования служит преобразование Лежандра

$$\tilde{x} = u_1, \quad \tilde{u} = x u_1 - u, \quad \tilde{u}_1 = x. \quad (8.12)$$

Проверьте, что это действительно контактное преобразование, и найдите для него несколько первых продолжений.

Пример 8.6. Рассмотрим преобразование

$$\tilde{x} = x + a u_1, \quad \tilde{u} = u + \frac{a}{2} u_1^2, \quad \tilde{u}_1 = u_1. \quad (8.13)$$

Невырожденность очевидна, условие контактности легко проверяется:

$$Q_{u_1} = a u_1 = Q^1 P_{u_1}, \quad Q_x + Q_u u_1 = u_1 = Q^1 (P_x + P_u u_1).$$

Применяя оператор $D_{\tilde{x}} = \frac{1}{1 + a u_2} D_x$, последовательно находим продолжения преобразования

$$\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{1 + a u_2}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{(1 + a u_2)^3}, \quad \tilde{u}_4 = \frac{u_4 + a(u_2 u_4 - 3u_3^2)}{(1 + a u_2)^5}, \dots$$

8.3 Преобразования для уравнения в частных производных

Пусть теперь независимыми переменными являются x_1, \dots, x_n . Для обозначений производных будем использовать мультииндексы:

$$\partial_{x_1}^{s_1} \dots \partial_{x_n}^{s_n} (u) = u_\sigma, \quad \sigma = s_1, \dots, s_n; \quad \partial_{x_j} (u_\sigma) = u_{\sigma+(j)},$$

где (j) обозначает мультииндекс с 1 на j -й позиции и 0 на остальных. Операторы полных производных будут обозначаться следующим образом:

$$D_{x_j} = \partial_{x_j} + \sum_{\sigma} u_{\sigma+(j)} \partial_{u_{\sigma}}, \quad D_x^{\sigma} = D_{x_1}^{s_1} \dots D_{x_n}^{s_n}.$$

Точечные преобразования имеют вид

$$\tilde{x}_j = P_j(x_1, \dots, x_n, u), \quad j = 1, \dots, n, \quad \tilde{u} = Q(x_1, \dots, x_n, u), \quad (8.14)$$

с условием невырожденности

$$\det \begin{pmatrix} P_{1,x_1} & \dots & P_{n,x_1} & Q_{x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1,x_1} & \dots & P_{n,x_1} & Q_{x_1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Функции, определяющие продолжения преобразования $\tilde{u}_{\sigma} = Q^{\sigma}(x_1, \dots, x_n, u, u_{\alpha})$, $|\alpha| \leq |\sigma|$, вычисляются рекуррентно из системы линейных уравнений

$$\sum_j D_{x_i}(P_j) Q^{\sigma+(j)} = D_{x_i}(Q^{\sigma}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.15)$$

Считая, что $D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$ есть вектор-столбец, можно записать ответ в виде, аналогичном (8.7), (8.8):

$$\tilde{u}_{\sigma} = Q^{\sigma}[x, u] = D_{\tilde{x}}^{\sigma}(Q), \quad D_{\tilde{x}} = (D_x(P))^{-1} D_x,$$

где $D_x(P)$ матрица размера $n \times n$ с элементами

$$D_{x_i}(P_j) = \partial_{x_i}(P_j) + u_i \partial_u(P_j).$$

Аналогично обобщается понятие контактного преобразования:

$$\tilde{x}_j = P_j, \quad \tilde{u} = Q, \quad \tilde{u}_{(j)} = Q^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.16)$$

где функции $P_j, Q, Q^{(j)}$ зависят от $x_1, \dots, x_n, u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$. При подстановке в (8.15), условие сокращения производных $u_{(ij)}$ приводит к соотношениям

$$D_{x_j}(Q) = \sum_{s=1}^n Q^{(s)} D_{x_j}(P_s) \Leftrightarrow$$

$$Q_{u_{(j)}} = \sum_{s=1}^n Q^{(s)} P_{s,u_{(j)}}, \quad Q_{x_j} + Q_u u_{(j)} = \sum_{s=1}^n Q^{(s)} (P_{s,x_j} + P_{s,u} u_{(j)}) \quad (8.17)$$

которым должны удовлетворять функции $P_j, Q, Q^{(j)}$.

Следует отметить, что при рассмотрении тех или иных подклассов уравнений множество допустимых преобразований может искусственно сужаться, если мы хотим ограничиваться только такими преобразованиями, которые не портят вид уравнения. Рассмотрим, например, важный для нас класс эволюционных уравнений с одной пространственной переменной:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = f(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k). \quad (8.18)$$

Общие точечные преобразования для переменных t, x, u

$$\tilde{t} = R(t, x, u), \quad \tilde{x} = P(t, x, u), \quad \tilde{u} = Q(t, x, u)$$

портят эволюционный вид уравнения. Действительно, решая (8.15), получаем, что продолжения таких преобразований строятся при помощи операторов

$$\begin{aligned} D_{\tilde{t}} &= \frac{D_x(P)}{\Delta} D_t - \frac{D_t(P)}{\Delta} D_x, \\ D_{\tilde{x}} &= -\frac{D_x(R)}{\Delta} D_t + \frac{D_t(R)}{\Delta} D_x, \end{aligned}$$

где $\Delta = D_x(P)D_t(R) - D_x(R)D_t(P)$ и D_x, D_t операторы полных производных. Выражение для $\tilde{u}_k = D_{\tilde{x}}^k(Q)$, вообще говоря, содержит производную $\partial_t^k(u)$, которой в преобразованном уравнении не должно быть (считаем, что $k > 1$). Чтобы её не было, должно выполняться равенство $D_x(R) = 0$, то есть, R должна быть функцией только от t . Это же верно и для контактных преобразований. В результате, формулы упрощаются:

$$D_{\tilde{t}} = \frac{1}{R'(t)} \left(D_t - \frac{D_t(P)}{D_x(P)} D_x \right), \quad D_{\tilde{x}} = \frac{1}{D_x(P)} D_x,$$

причём первую из них нам нужно применить всего один раз, чтобы пересчитать уравнение, а вторая имеет в точности тот же вид, что и в случае обыкновенных уравнений. В результате, определения преобразований и вычисления продолжений лишь слегка модифицируются по сравнению со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений. Из приведённых ниже формул видно, что все отличие заключается в том, что переменная t преобразуется отдельно и входит как параметр в функции P, Q^j .

Определение 8.5. Точечным преобразованием для эволюционных уравнений (8.18) называется невырожденная замена вида

$$\tilde{t} = R(t), \quad \tilde{x} = P(t, x, u), \quad \tilde{u} = Q(t, x, u), \quad R' \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_u & Q_u \end{pmatrix} \neq 0. \quad (8.19)$$

Контактным преобразованием называется замена вида

$$\tilde{t} = R(t), \quad \tilde{x} = P(t, x, u, u_1), \quad \tilde{u} = Q(t, x, u, u_1), \quad \tilde{u}_1 = Q^1(t, x, u, u_1), \quad (8.20)$$

где функции P, Q, Q^1 удовлетворяют соотношениям

$$Q_{u_1} = Q^1 P_{u_1}, \quad Q_x + Q_u u_1 = Q^1 (P_x + P_u u_1) \quad (8.21)$$

и условиям невырожденности $R' \neq 0, \det \frac{\partial(P, Q, Q^1)}{\partial(x, u, u_1)} \neq 0$.

В обоих случаях продолжение на производные даётся формулами

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= Q^j[t, x, u] = \frac{D_x(Q^{j-1})}{D_x(P)} = \left(\frac{1}{D_x(P)} D_x \right)^j (Q), \quad j = 1, \dots, k, \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} &= Q^t[t, x, u] = \frac{1}{R'(t)} (D_t(Q) - D_t(P) Q^1). \end{aligned} \quad (8.22)$$

8.4 Продолжение генератора для однопараметрической группы

Для наглядности, опять начнем со случая ОДУ. Пусть G^1 есть локальная однопараметрическая группа Ли точечных или контактных преобразований

$$\tilde{x} = P(a, x, u, u_1), \quad \tilde{u} = Q(a, x, u, u_1), \quad \tilde{u}_1 = Q^1(a, x, u, u_1). \quad (8.23)$$

Для любого k , продолжения k -го порядка этих преобразований также образуют локальную однопараметрическую группу Ли G^k , действующую в пространстве переменных x, u, \dots, u_k .

Определение 8.6. Говорят, что уравнение

$$F(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0 \quad (8.24)$$

инвариантно относительно группы Ли G (или допускает G), если все преобразования T_a из G^k переводят решения этого уравнения в решения.

Иными словами, уравнение, переписанное в новых переменных, должно иметь тот же вид, что и прежде: $F(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) = 0$, причём для любого значения a .

Удобнее работать не с самой группой, а с её генератором. Для него мы будем использовать обозначение

$$X^1 = p\partial_x + q\partial_0 + q^1\partial_1, \quad p = P_a|_{a=0}, \quad q = Q_a|_{a=0}, \quad q^1 = Q_a^1|_{a=0}, \quad (8.25)$$

генератор k -го продолжения группы будет обозначаться $X^k = p\partial_x + q\partial_0 + \dots + q^k\partial_k$. Так как k может быть произвольным, удобно рассматривать бесконечное продолжение в виде формального ряда

$$X = p\partial_x + q\partial_0 + q^1\partial_1 + \dots$$

Понятно, что действие X на функции, зависящие от конечного числа u_j корректно определено. Инфинитезимальный критерий инвариантности заключается в том, что векторное поле X должно касаться подмногообразия $F = 0$, выделяемого уравнением (8.24) в пространстве переменных x, u, u_1, \dots, u_k .

Теорема 8.4. Уравнение (8.24) инвариантно относительно группы G тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$X(F)|_{F=0} = 0. \quad (8.26)$$

Определение 8.7. Равенство (8.26), рассматриваемое как уравнение на векторное поле X , называется определяющим уравнением группы, допускаемой уравнением (8.24), а его решения — классическими симметриями. Множество всех классических симметрий обозначается $\text{Sym}_1(F)$, точечных — $\text{Sym}_0(F)$.

Чтобы применять уравнение (8.26), нужно научиться вычислять продолжения X^k . Для этого можно построить продолжение группы G^k и затем вычислить его генератор. Однако, есть более короткий путь. Условия контактности (8.11) накладывают на коэффициенты p, q, q^1 определенные ограничения. Действительно, дифференцируя эти равенства и полагая $a = 0$, получаем

$$q_{u_1} = u_1 p_{u_1}, \quad q_x + u_1 q_u = q^1 + u_1(p_x + u_1 p_u). \quad (8.27)$$

Первое равенство есть условие контактности в инфинитезимальной форме, а второе служит для определения q^1 . Оператор X^1 однозначно восстанавливается по $X^0 = p\partial_x + q\partial_u$. Это верно и для следующих продолжений. Согласно (8.7), функции Q^j определяются рекуррентно из уравнений

$$Q^j D_x(P) = D_x(Q^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

Дифференцируя их по a , получим

$$\frac{dQ^j}{da} D_x(P) + Q^j D_x\left(\frac{dP}{da}\right) = D_x\left(\frac{dQ^{j-1}}{da}\right).$$

Полагая $a = 0$ и учитывая, что $P|_{a=0} = x$, $Q^j|_{a=0} = u_j$, получаем рекуррентное соотношение для вычисления коэффициентов X :

$$q^j = D_x(q^{j-1}) - u_j D_x(p), \quad j = 1, 2, \dots \quad (8.28)$$

Можно ещё упростить ответ. Обозначим $\omega = u_1 p - q$, и покажем, что

$$q^j = u_{j+1} p - D_x^j(\omega). \quad (8.29)$$

Для $j = 0$ равенство верно. Пусть оно доказано для $j - 1$, тогда

$$q^j = D_x(u_j - D_x^{j-1}(\omega)) - u_j D_x(p) = u_{j+1} p - D_x^j(\omega)$$

и шаг индукции обоснован. Кроме того, заметим, что из условий (8.27) следует условие $\omega_{u_1} = p$. Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

Теорема 8.5. В случае ОДУ, бесконечное продолжение генератора для однопараметрической группы контактных преобразований имеет вид

$$X_\omega = \omega_{u_1} D_x - \sum_{j=0}^{\infty} D_x^j(\omega) \partial_j = \omega_{u_1} D_x - \nabla_\omega, \quad (8.30)$$

где ω произвольная функция от x, u, u_1 , причем точечные группы характеризуются условием $\omega_{u_1 u_1} = 0$.

Величину ω называют *характеристикой* векторного поля X_ω . Векторные поля вида (8.30) называются *контактными*, а в том случае, когда ω линейна по u_1 — *точечными*.

В случае уравнений в частных производных все аналогично. Пусть преобразования (8.14) или (8.16) образуют однопараметрическую группу, то есть функции $P_j, Q, Q^{(j)}$ зависят от группового параметра a . Её инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X^1 = p_1 \partial_{x_1} + \dots + p_n \partial_{x_n} + q \partial_u + q^{(1)} \partial_{u_{(1)}} + \dots + q^{(n)} \partial_{u_{(n)}},$$

где $p_j = (dP_j/da)|_{a=0}$, $q = (dQ/da)|_{a=0}$, $q^{(j)} = (dQ^{(j)}/da)|_{a=0}$. Для вычисления продолженного оператора

$$X = p_1 \partial_{x_1} + \dots + p_n \partial_{x_n} + \sum_{\sigma} q^{\sigma} \partial_{u_{\sigma}} \quad (8.31)$$

дифференцируем уравнения (8.15) и полагаем $a = 0$. В результате получаем

$$q^{\sigma+(i)} = D_{x_i}(q^\sigma) - \sum_j D_{x_i}(p_j)u_{\sigma+(j)}. \quad (8.32)$$

Напомним, что построение продолжения для действия группы по формулам (8.15) требует решения системы линейных уравнений. В отличие от этого, уравнения (8.32) для продолжения генератора группы — явные! То есть, переход от группы к алгебре Ли сильно упрощает вычисления.

Пример 8.7. Рассмотрим группу вращений независимых переменных

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = u,$$

и вычислим для её генератора продолжение X^2 . Имеем $p_1 = -x_2$, $p_2 = x_1$, $q = 0$; тогда соотношения (8.32) принимают вид

$$q^{\sigma+(1)} = D_{x_1}(q^\sigma) - u_{\sigma+(2)}, \quad q^{\sigma+(2)} = D_{x_2}(q^\sigma) + u_{\sigma+(1)}$$

и последовательно находим:

$$\begin{aligned} q^{1,0} &= -u_{0,1}, & q^{0,1} &= u_{1,0}, \\ q^{2,0} &= D_{x_1}(q^{1,0}) - u_{1,1} = -2u_{1,1}, \\ q^{1,1} &= D_{x_1}(q^{0,1}) - u_{0,2} = u_{2,0} - u_{0,2}, \\ q^{0,2} &= D_{x_2}(q^{0,1}) + u_{1,1} = 2u_{1,1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} X^2 &= -x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2} - u_{0,1} \partial_{u_{1,0}} + u_{1,0} \partial_{u_{0,1}} \\ &\quad - 2u_{1,1} \partial_{u_{2,0}} + (u_{2,0} - u_{0,2}) \partial_{u_{1,1}} + 2u_{1,1} \partial_{u_{0,2}}. \end{aligned}$$

В частности, отсюда видим, что $X^2(u_{2,0} + u_{0,2} - F(u)) = 0$, то есть, уравнение $u_{2,0} + u_{0,2} = F(u)$ инвариантно относительно группы вращений x_1, x_2 .

Можно доказать также аналог теоремы 8.5.

Теорема 8.6. *Бесконечное продолжение инфинитезимального оператора для произвольной однопараметрической группы контактных преобразований (8.16) имеет вид*

$$X_\omega = \sum_j \omega_{u_{(j)}} D_{x_j} - \nabla_\omega, \quad (8.33)$$

где $\nabla_\omega := \sum_\sigma D_x^\sigma(\omega) \partial_{u_\sigma}$ (эволюционное дифференцирование), а характеристика векторного поля ω есть произвольная функция от $x_j, u, u_{(j)}$, причем точечные группы характеризуются условием $\omega_{u_{(i)}u_{(j)}} = 0$.

Доказательство. Пусть X векторное поле (8.31) с коэффициентами, построенными согласно соотношениям (8.32). Положим

$$\omega = \sum_j u_{(j)} p_j - q,$$

тогда индукция по порядку мультииндекса $|\sigma|$ позволяет доказать аналог формулы (8.29):

$$q^\sigma = \sum_j u_{\sigma+(j)} p_j - D_x^\sigma(\omega), \quad (8.34)$$

в результате, X приводится к виду (8.33).

Наоборот, пусть X_ω векторное поле (8.33) построенное по произвольной функции ω . Условия контактности в инфинитезимальной форме получаются при дифференцировании (8.17) по a в точке $a = 0$ и имеют вид

$$q_{u_{(i)}} = \sum_j u_{(j)} p_{j, u_{(i)}} \quad (8.35)$$

(как и в случае ОДУ, второе соотношение (8.17) превращается в уравнение для определения $q^{(j)}$, уже учтенное в (8.32)). Отсюда следует

$$p_j = \omega_{u_{(j)}}, \quad q = \sum_j u_{(j)} \omega_{u_{(j)}} - \omega,$$

то есть, коэффициенты p_j, q восстанавливаются по ω однозначно, причём (8.35) превращается в тождество. Оператор (8.31) построенный по p_j, q , совпадает с X_ω . Точечные преобразования характеризуются тем, что p_j не зависят от u_i , что равносильно условию $\omega_{u_{(i)}u_{(j)}} = 0$. \square

Итак, на этой лекции мы рассмотрели действие групп Ли точечных и контактных преобразований на дифференциальных уравнениях и вывели определяющее уравнение для инфинитезимального генератора группы. Для заданного уравнения, поиск его классических симметрий сводится к изучению определяющего уравнения. Это составляет предмет группового анализа, которым мы займемся на следующей лекции.

8.5 Задачи. Замены переменных

Задача 8.1. (1 балл) Обобщить пример 8.2 на случай трёх переменных: проверить, что система

$$\dot{q}_1 = q_1 f(t, p_1, p_2), \quad \dot{q}_2 = q_2 g(t, p_1, p_2), \quad \dot{q}_3 = q_3 h(t, p_1, p_2),$$

где $p_1 = \frac{q_1^\gamma}{q_3^\alpha}$, $p_2 = \frac{q_2^\gamma}{q_3^\beta}$, допускает симметрию растяжений

$$q'_1 = \alpha q_1, \quad q'_2 = \beta q_2, \quad q'_3 = \gamma q_3,$$

и использовать её для понижения порядка.

Задача 8.2. (1 балл) Показать, пользуясь формулами (8.22), что точечная замена

$$\tilde{t} = \frac{4}{t^2}, \quad \tilde{x} = -2\frac{x}{t}, \quad \tilde{u} = \frac{t^2 u}{4} - \frac{xt}{24}$$

связывает так называемое цилиндрическое уравнение КдФ

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_3 - 6\tilde{u}\tilde{u}_1 - \frac{\tilde{u}}{2\tilde{t}}$$

с обычным $u_t = u_3 - 6uu_1$.

Задача 8.3. (1 балл) Проверить, что преобразование Лежандра

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = u_x, \quad \tilde{u} = xu_1 - u$$

связывает уравнения

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_2 \quad \text{и} \quad u_t = -\frac{1}{u_2}.$$

Задача 8.4. (1 балл) Проверить, что преобразование Лежандра

$$\tilde{x}_j = u_{(j)}, \quad \tilde{u} = \sum x_j u_{(j)} - u, \quad \tilde{u}_{(j)} = x_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

является контактным (то есть, выполнены условия (8.17)) и найти его продолжение на производные второго порядка.

Задача 8.5. (1 балл) Показать, что уравнение $u_3 = u_2^3(xu_1 - 2u)$ допускает группу из примера 8.6.

Все задачи в этом разделе довольно лёгкие и делаются вручную. Однако, при желании можно применить и компьютер. Так, функции `vars`, `dif`, которые мы использовали для определения операторов полной производной и эволюционного дифференцирования (см. задачи к лекции 2 и далее) легко приспособить и для определения производной вдоль векторного поля и коммутатора векторных полей:

```
vars[f_] := Union[Cases[f, _u, {0, \[Infinity]}]]
dif[f_] := Plus@@(D[f, #]d[#]&/@vars[f])
Dx[f_] := D[f, x] + dif[f]/.d[u[k_]] :> u[k+1]
Dx[f_, k_] := Nest[Dx, f, k]
dLie[f_, vec_] := dif[f]/.d[u[k_]] :> vec[[k]]
comm[vec1_, vec2_] := Expand[dLie[vec1, vec2] - dLie[vec2, vec1]]
```

Здесь предполагается, что `vec`, `vec1`, `vec2` это векторные поля, заданные в виде списка своих координат, то есть, $f_1 \partial_1 + \dots + f_r \partial_r$ представляется, как `{f[1], \dots, f[r]}`. Обозначения, с математической точки зрения, неправильные, так как производной Ли от векторного поля вдоль другого векторного поля называется именно коммутатор, у нас же векторное поле `dLie[vec1, vec2]` определяется путем покоординатного дифференцирования `vec1` вдоль `vec2`. Проверку, что соответствующие аргументы имеют нужный вид и размерность, мы не делаем. Что касается вычислений, связанных с продолжением точечных или контактных преобразований, то для случаев ОДУ и эволюционных уравнений типа КдФ они легко реализуются при помощи функции `Dx`.

9 Групповой анализ

Анализ определяющего уравнения · Примеры: уравнения теплопроводности и КдФ · Понижение порядка ОДУ · Дифференциальные инварианты · Производная Шварца · Редукция уравнения в частных производных

9.1 Вычисление алгебры симметрий для ОДУ

Чтобы вычислить алгебру симметрий данного ОДУ $F[x, u] = 0$, нужно найти все решения определяющего уравнения $X(F) = 0|_{F=0}$, где

$$X = p\partial_x + q\partial_0 + q^1\partial_1 + \dots = \omega_{u_1}D_x - \nabla_\omega, \quad \omega = u_1p - q.$$

Ответ на вопрос, насколько эффективно это можно сделать, зависит от порядка уравнения. Для уравнений первого порядка процедура неэффективна, поскольку в определяющем уравнении все слишком перемешано. С уравнениями второго порядка можно эффективно работать, если ограничиться только точечными симметриями. Для уравнений порядка $k \geq 3$ определяющее уравнение содержит переменные u_2, \dots, u_{k-1} , которые не входят в функции p, q ; благодаря этому задача сводится к переопределенной системе, анализ которой не представляет принципиальных трудностей.

1) *Уравнения первого порядка.* В случае уравнений

$$u_1 = F(x, u), \tag{9.1}$$

определяющее уравнение $pF_x + qF_u - q^1 = 0$ можно преобразовать, с учётом формул (8.27), к виду

$$q_x + (q_u - p_x)F - p_uF^2 = pF_x + qF_u \tag{9.2}$$

причем аргумент u_1 в функциях p, q следует заменить на F и, кроме того, эти функции связаны еще соотношением $q_{u_1} = u_1p_{u_1}$. Это уравнение имеет огромное количество решений, даже если ограничиться только точечными группами. Действительно, взяв в качестве p произвольную функцию от x, u , мы видим, что q определяется, как решение линейного уравнения в частных производных первого порядка вида $q_x + Fq_u = F_uq + \phi(x, u)$. Как известно, решение такого уравнения сводится к решению вспомогательной системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{F} = \frac{dq}{F_uq + \phi},$$

причем первое равенство эквивалентно $\frac{du}{dx} = F$, то есть исходному уравнению! Итак, уравнение первого порядка допускает множество симметрий, но их нахождение — задача столь же трудная, как и решение самого уравнения. Какого-либо систематического способа решения уравнения (9.2) не существует. Одно решение, правда, всегда есть: $q = pF$, где $p(x, u)$ произвольная функция. Действительно, так как $\omega = u_1p - q = 0$ на уравнении (9.1), то инфинитезимальный оператор \bar{X} совпадает с pD_x и уравнение (9.2) удовлетворяется тривиальным образом. Соответствующая группа Ли есть группа сдвигов вдоль интегральных кривых исходного уравнения, и ее рассмотрение ничего не дает.

Тем не менее, если для данного уравнения все же удалось найти, из каких-либо соображений, какую-нибудь симметрию, то этого достаточно, чтобы проинтегрировать его. Следующий результат показывает, что для уравнений (9.1) знание однопараметрической группы симметрий позволяет перейти к уравнению в полных дифференциалах

$$Mdx + Ndu = 0, \quad M_u = N_x$$

и, таким образом, получить решение в квадратурах.

Теорема 9.1 (Ли). *Уравнение (9.1) допускает группу G с генератором $X = p\partial_x + q\partial_0 + q^1\partial_1$ тогда и только тогда, когда $1/\omega$, где $\omega(x, u) = (u_1p - q)|_{u_1=F}$, служит для него интегрирующим множителем.*

Доказательство. Определяющее уравнение $\nabla_\omega(u_1 - F)|_{u_1=F} = 0$ эквивалентно соотношению

$$\omega F_u - \omega_u F - \omega_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\omega}\right)_x + \left(\frac{F}{\omega}\right)_u = 0,$$

что и означает, что уравнение $\frac{1}{\omega}du - \frac{F}{\omega}dx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах. \square

Пример 9.1. Ли показал также, что все приёмы интегрирования ОДУ первого порядка могут быть выведены из доказанной теоремы. Например, уравнение с разделяющимися переменными $u_1 = f(x)g(u)$ допускает группу преобразований

$$\tilde{x} = F^{-1}(F(x) + a), \quad \tilde{u} = u, \quad \text{где} \quad F(x) = \int f dx.$$

(Проверим это непосредственно. Имеем $F(\tilde{x}) = F(x) + a \Rightarrow f(\tilde{x})D_x(\tilde{x}) = f(x)$, следовательно $\tilde{u}_1 = D_x(\tilde{u})/D_x(\tilde{x}) = u_1f(\tilde{x})/f(x) = f(\tilde{x})g(\tilde{u})$.) Инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X^1 = \frac{1}{f}\partial_x + \frac{f'}{f^2}u_1\partial_{u_1}$$

и так как $\omega = (u_1/f(x)) = g(u)$ в силу уравнения, то интегрирующий множитель равен $1/g(u)$.

Однородное уравнение $u_1 = F(\frac{u}{x})$ инвариантно относительно группы растяжений $\tilde{x} = e^ax$, $\tilde{u} = e^au$ с генератором $X^0 = x\partial_x + u\partial_u$. Имеем $\omega = xF - u$ и уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{du}{xF - u} - \frac{Fdx}{xF - u} = 0.$$

Линейное уравнение $u_1 = A(x)u + B(x)$ инвариантно относительно группы $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u + av$, где v решение однородного уравнения $v_1 = Av$. Инфинитезимальный оператор равен $X^0 = v\partial_u$ и интегрирующий множитель равен $1/v$.

2) *Уравнения второго порядка.* В случае

$$u_2 = F(x, u, u_1) \tag{9.3}$$

определяющее уравнение имеет вид

$$pF_x + qF_u + q^1F_{u_1} - q^2 = 0, \quad (9.4)$$

где коэффициенты q^1, q^2 находятся по формуле (8.28):

$$q^1 = D_x(q) - u_1 D_x(p), \quad q^2 = D_x^2(q) - u_1 D_x^2(p) - 2u_2 D_x(p),$$

причем производные u_2 исключаются в силу уравнения (9.3). Следовательно, для определения функций p, q мы имеем систему из двух линейных уравнений в частных производных — уравнения первого порядка (8.27) и уравнения второго порядка (9.4). (Впрочем, эти уравнения можно заменить одним уравнением на функцию ω .) Как и в случае уравнений первого порядка, эта система имеет бесконечно много решений, но общего метода для их нахождения не существует.

Картина меняется, если мы ограничимся поиском точечных симметрий, то есть будем считать, что коэффициенты p, q , зависят только от x, u . Вычисляя q^1, q^2 и подставляя в формулу (9.4) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & q_{xx} + (2q_{xu} - p_{xx})u_1 + (q_{uu} - 2p_{xu})u_1^2 - p_{uu}u_1^3 \\ &= (q_x + (q_u - p_x)u_1 - p_u u_1^2)F_{u_1} + qF_u + pF_x + (2p_x - q_u + 3p_u u_1)F. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Как видим, определяющее уравнение содержит «лишнюю» переменную u_1 и превратилось в переопределенную систему, решение которой, как правило, легко находится. Например, если производная u_1 входит в уравнение (9.3) полиномиально (что часто встречается на практике), то мы должны собрать отдельно все члены одинаковой степени по u_1 и приравнять их 0. Конечно, если удастся найти какую-нибудь контактную симметрию, то ей не следует пренебрегать, так как для последующего интегрирования уравнения она столь же полезна, как и точечная. Однако, под вычислением алгебры симметрий для уравнения второго порядка понимается именно нахождение точечных симметрий. Продемонстрируем процедуру решения уравнения (9.5) на простейшем примере.

Пример 9.2. Рассмотрим уравнение $u_2 = 0$. Очевидно, в этом случае определяющее уравнение (9.5) эквивалентно системе

$$q_{xx} = 0, \quad 2q_{xu} = p_{xx}, \quad q_{uu} = 2p_{xu}, \quad p_{uu} = 0.$$

Заметим, что она содержит в себе исходное уравнение, что объясняется его линейностью. В более сложных случаях определяющие уравнения для симметрий нелинейного уравнения обычно проще, чем оно само.

Дифференцируя второе уравнение по x , а третье по u , получаем $p_{xxx} = q_{uuu} = 0$, так что функции p, q имеют вид

$$\begin{aligned} p &= (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)u + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \\ q &= (c_2 u^2 + c_1 u + c_0)x + d_2 u^2 + d_1 u + d_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения опять во второе и третье уравнения, убеждаемся, что параметры связаны соотношениями

$$a_2 = c_2 = 0, \quad b_2 = c_1, \quad d_2 = a_1.$$

Итак, наиболее общий вид точечных симметрий для нашего уравнения имеет вид

$$X^0 = ((a_1x + a_0)u + c_1x^2 + b_1x + b_0)\partial_x + ((c_1u + c_0)x + a_1u^2 + d_1u + d_0)\partial_u,$$

то есть точечные симметрии образуют 8-мерное пространство. В качестве базиса можно выбрать векторные поля

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= x\partial_x, & X_3 &= u\partial_x, & X_4 &= x^2\partial_x + xu\partial_u, \\ Y_1 &= \partial_u, & Y_2 &= u\partial_u, & Y_3 &= x\partial_u, & Y_4 &= xu\partial_x + u^2\partial_u. \end{aligned}$$

Вычисляя их коммутаторы, получаем структурную таблицу для алгебры Ли симметрий:

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	X_1	0	$2X_2 + Y_2$	0	0	Y_1	X_3
X_2		0	$-X_3$	X_4	0	0	Y_3	0
X_3			0	Y_4	$-X_1$	$-X_3$	$Y_2 - X_2$	0
X_4				0	$-Y_3$	0	0	0
Y_1					0	Y_1	0	$2Y_2 + X_2$
Y_2						0	$-Y_3$	Y_4
Y_3							0	X_4
Y_4								0

Соответствующую группу Ли можно легко найти, решая уравнение Ли (8.3) для каждого из найденных инфинитезимальных операторов. Так, операторам X_1 и X_2 отвечают уже знакомые нам преобразования сдвига и растяжения переменной x :

$$\tilde{x} = x + a, \quad \tilde{u} = u; \quad \tilde{x} = e^a x, \quad \tilde{u} = u.$$

Оператору X_3 соответствует преобразование Галилея

$$\tilde{x} = x + au, \quad \tilde{u} = u;$$

оператору X_4 — преобразование

$$\tilde{x} = \frac{x}{1 - ax}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{1 - ax}.$$

Комбинируя эти и аналогичные преобразования, соответствующие операторам Y_j , можно построить группу проективных преобразований плоскости (x, u) :

$$\tilde{x} = \frac{ax + bu + c}{\alpha x + \beta u + \gamma}, \quad \tilde{u} = \frac{dx + eu + f}{\alpha x + \beta u + \gamma}.$$

Фактически, мы показали, что множество всех прямых (то есть решений уравнения $u_2 = 0$) инвариантно относительно этой группы.

3) *Уравнения порядка выше, чем 2.* Здесь удобнее работать с характеристикой ω , после того, как она найдена, коэффициенты p, q и оператор X восстанавливаются по формулам $p = \omega_{u_1}$, $q = u_1 p - \omega$, $X = pD_x - \nabla_\omega$. Так как $D_x(F)|_{F=0} = 0$, то из

формулы (8.30) следует, что инфинитезимальный оператор $X = \omega_{u_1} D_x - \nabla_\omega$ в определяющем уравнении (8.26) можно заменить на эволюционное дифференцирование ∇_ω . В результате, определяющее уравнение принимает вид

$$F_*(\omega)|_{F=0} = 0,$$

где $F_* = F_u + F_{u_1} D_x + \dots + F_{u_k} D_x^k$ обозначает оператор линеаризации (см. лекцию 2). Допустим, что уравнение (8.24) разрешено относительно старшей производной: $u_k = f(x, u, \dots, u_{k-1})$. Чтобы сразу учесть дифференциальные следствия, можно считать, что D_x есть оператор полной производной в силу уравнения: $D_x = \partial_x + u_1 \partial_u + \dots + f \partial_{u_{k-1}}$. Тогда определяющее уравнение примет вид

$$(D_x^k - f_*)(\omega) = 0, \quad (9.6)$$

наиболее удобный для практического вычисления симметрий (нетрудно видеть, что это уравнение есть ни что иное, как условие совместности $u_{x\dots x, \tau} = u_{\tau, x\dots x}$ для пары уравнений $u_k = f$ и $u_\tau = \omega$). Так как ω зависит только от x, u, u_1 , то в уравнении (9.6) происходит расщепление по переменным u_2, \dots, u_{k-1} . Исследование возникающей при этом переопределенной системы на функцию ω обычно не вызывает принципиальных трудностей, но может быть достаточно утомительным. Системы символьных вычислений позволяют облегчить эту задачу.

9.2 Вычисления для уравнений в частных производных

При вычислении алгебры симметрий иногда удобнее пользоваться представлением генератора в виде (8.31), иногда в виде (8.33). В последнем варианте, мы следим всего лишь за одной функцией ω вместо $n + 1$ функций p_1, \dots, p_n, q . Кроме того, при подстановке в определяющее уравнение (8.26) слагаемые $\omega_{u_s} D_{x_s}$ действуют на F и обращаются в 0, так как $D_{x_s}(F)|_{F=0} \equiv 0$. Итак, все что нужно — это найти функцию $\omega(x_1, \dots, x_n, u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)})$ такую, что

$$\nabla_\omega(F)|_{F=0} = 0. \quad (9.7)$$

После этого, как показано в доказательстве Теоремы 8.6, можно восстановить оператор X^0 по явным формулам

$$p_j = \omega_{u_{(j)}}, \quad q = \sum_j u_{(j)} p_j - \omega.$$

Вычисления особенно упрощаются для эволюционных уравнений. Если $n = 2$, то для производных по x можно использовать привычные обозначения $u_j = \partial_x^j(u)$. Пусть дано уравнение $u_t = f(t, x, u, u_1, \dots, u_k)$, тогда определяющее уравнение записывается, как

$$(D_t(\omega) - \nabla_\omega(f))|_{u_t=f} = 0.$$

Кроме того, группы, действующие на уравнении имеют вид (8.19) или (8.20), откуда следует, что ω имеет специальный вид $\omega = r(t)u_t + a(t, x, u, u_1)$. Удобно избавиться от производных по t , заменяя их в силу уравнения, тогда получаем

$$(\partial_t + \nabla_f)(rf + a) = \nabla_{rf+a}(f).$$

После некоторых преобразований, это даёт соотношение

$$r'(t)f + rf_t + a_t + a_*(f) = f_*(a), \quad (9.8)$$

которое должно выполняться тождественно, так как уравнение $u_t = f$ уже учтено. Нетрудно видеть, что это уравнение есть условие совместности для уравнений

$$u_t = f(t, x, u, u_1, \dots, u_k), \quad u_\tau = r(t)f + a(t, x, u, u_1).$$

Таким образом, высшие симметрии из лекции 4 действительно можно рассматривать как обобщение классических, возникающее при рассмотрении функций a , зависящих от производных произвольного порядка. При этом теряется группа преобразований, но на уровне алгебры Ли различие не чувствуется.

Пример 9.3. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \quad (9.9)$$

Ищем ω в виде $\omega = r(t)u_2 + a(t, x, u, u_1)$. Подстановка в (9.8) даёт

$$r'u_2 + a_t + a_u u_2 = D_x(a_x + a_u u_1) + D_x(a_{u_1})u_2. \quad (9.10)$$

Здесь происходит расщепление по u_2 . Приравнивая нулю коэффициенты при u_2^2 и u_2 , уточняем вид функции a :

$$a_{u_1 u_1} = 0, \quad r' = 2(a_{xu_1} + a_{uu_1}u_1).$$

Из первого уравнения имеем $a = \alpha u_1 + b$, где α и b могут зависеть уже только от t, x, u , тогда второе уравнение принимает вид $r' = 2D_x(\alpha)$. Следовательно,

$$a = \left(\frac{r'}{2}x + \beta(t)\right)u_1 + b(t, x, u).$$

Подстановка в (9.10) даёт

$$\left(\frac{r''}{2}x + \beta'\right)u_1 + b_t = D_x(b_x) + D_x(b_u)u_1,$$

здесь происходит расщепление по u_1 . Приравнивая 0 коэффициенты при u_1^2, u_1 , а также свободный член, получаем уравнения

$$b_{uu} = 0, \quad \frac{r''}{2}x + \beta' = 2b_{xu}, \quad b_t = b_{xx}.$$

Полагая $b = \gamma u + c$, где γ и c зависят от t, x , переписываем эти уравнения в виде

$$\frac{r''}{2}x + \beta' = 2\gamma_x, \quad \gamma_t = \gamma_{xx}, \quad c_t = c_{xx}.$$

Из первого уравнения имеем

$$\gamma = \frac{r''}{8}x^2 + \frac{\beta'}{2}x + \delta(t),$$

и подстановка во второе дает

$$r''' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \delta = \frac{r'}{4} + \text{const}.$$

Из третьего уравнения следует только, что c — произвольное решение уравнения (9.9). Всё, больше никаких уравнений не осталось.

Начнём собирать всё вместе. Заменяя u_2 на u_t , имеем

$$\begin{aligned} \omega &= ru_t + a = ru_t + \left(\frac{r'}{2}x + \beta\right)u_x + b = ru_t + \left(\frac{r'}{2}x + \beta\right)u_x + \gamma u + c \\ &= ru_t + \left(\frac{r'}{2}x + \beta\right)u_x + \left(\frac{r''}{8}x^2 + \frac{\beta'}{2}x + \delta\right)u + c, \end{aligned}$$

где

$$r = 4C_1t^2 + 2C_2t + C_3, \quad \beta = 2C_4t + C_5, \quad \delta = 2C_1t + C_6, \quad c_t = c_{xx}.$$

Полагая нулями по очереди все коэффициенты, кроме одного, получаем, что общее решение ω есть линейная комбинация следующих частных решений:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 4t^2u_t + 4txu_x + (x^2 + 2t)u, & \omega_2 &= 2tu_t + xu_x, & \omega_3 &= u_t, \\ \omega_4 &= 2tu_x + xu, & \omega_5 &= u_x, & \omega_6 &= u, & \omega_c &= c. \end{aligned}$$

Заметим, что все эти решения линейны по производным, то есть, собственно контактных симметрий не нашлось. Легко вычислить соответствующие операторы X^0 :

$$\begin{aligned} X_1 &= 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u, & X_2 &= 2t\partial_t + x\partial_x, & X_3 &= \partial_t, \\ X_4 &= 2t\partial_x - xu\partial_u, & X_5 &= \partial_x, & X_6 &= u\partial_u, & X_c &= c\partial_u. \end{aligned}$$

Алгебра симметрий в данном примере бесконечномерна из-за наличия симметрий вида X_c , где c — произвольное решение уравнения теплопроводности. Бесконечномерность алгебры симметрий характерна для линейных уравнений и отражает просто принцип линейной суперпозиции. Действительно, соответствующее групповое преобразование задается формулой $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{u} = u + \alpha c$.

Пример 9.4. Рассмотрим уравнение КдФ $u_t = u_3 + 6uu_1$. Будем придерживаться тех же обозначений, что и в предыдущем примере, и положим $\omega = r(t)u_3 + a(t, x, u, u_1)$. Подставляя в определяющее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} r'u_3 + a_t + a_u u_3 + a_{u_1}(u_4 + 6u_1^2) + 18r(u_1u_3 + u_2^2) \\ = D_x^2(a_x + a_u u_1 + a_{u_1}u_2) + 6ua_x + 6u_1a. \end{aligned}$$

Коэффициент при u_3 дает уравнение

$$r' + 18ru_1 = 3(a_{xu_1} + a_{uu_1}u_1 + a_{u_1u_1}u_2),$$

которое, в свою очередь, расщепляется по u_2 . Полагая сначала $a = \alpha u_1 + b$, получаем уравнения $r' = 3\alpha_x$, $6r = \alpha_u$, из которых следует, что a имеет вид

$$a = \left(6ru + \frac{r'}{3}x + \beta(t)\right)u_1 + b(t, x, u).$$

В результате, определяющее уравнение переписывается в виде

$$\left(4r'u + \frac{r''}{3}x + \beta_t\right)u_1 + b_t = D_x^2(b_x) + D_x^2(b_u)u_1 + 2D_x(b_u)u_2 + 6ub_x + 6u_1b.$$

Коэффициент при u_2 дает $3D_x(b_u) = 0$, откуда $b = \gamma(t)u + c(t, x)$ и

$$\left(4r'u + \frac{r''}{3}x + \beta_t\right)u_1 + \gamma_t u + c_t = c_{xxx} + 6uc_x + 6u_1(\gamma u + c).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при uu_1 , u_1 и u получаем систему уравнений

$$\gamma = \frac{2}{3}r', \quad \gamma_t = 6c_x, \quad 6c = \frac{r''}{3}x + \beta_t, \quad c_t = c_{xxx}.$$

Она легко решается:

$$r = 3C_1t + C_2, \quad \beta = 6C_3t + C_4, \quad \gamma = 2C_1, \quad c = C_3.$$

Осталось собрать все воедино. Имеем

$$\begin{aligned} \omega &= ru_t + \left(\frac{r'}{3}x + \beta\right)u_1 + \gamma u + c = \\ &= (3C_1t + C_2)u_t + (C_1x + 6C_3t + C_4)u_x + 2C_1u + C_3. \end{aligned}$$

В этом примере, как и в предыдущем, все симметрии точечные. Алгебра симметрий 4-мерна, в качестве базиса можно принять векторные поля (выписаны X^0)

$$X_1 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = 6t\partial_x - \partial_u, \quad X_4 = \partial_x$$

с коммутационными соотношениями

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-3X_2$	$2X_3$	$-X_4$
X_2		0	$6X_4$	0
X_3			0	0
X_4				0

Легко найти и соответствующие групповые преобразования:

$$\begin{aligned} X_1 : \quad & \tilde{t} = e^{3at} & \tilde{x} = e^ax & \tilde{u} = e^{-2a}u & \text{(растяжение)} \\ X_2 : \quad & \tilde{t} = t + a & \tilde{x} = x & \tilde{u} = u & \text{(сдвиг по } t) \\ X_3 : \quad & \tilde{t} = t & \tilde{x} = x + 6at & \tilde{u} = u - a & \text{(преобразование Галилея)} \\ X_4 : \quad & \tilde{t} = t & \tilde{x} = x + a & \tilde{u} = u & \text{(сдвиг по } x) \end{aligned}$$

9.3 Дифференциальные инварианты

Для ОДУ наличие симметрий позволяет понижать порядок уравнения. Для уравнения в частных производных, симметрии позволяют перейти к уравнению с меньшим числом независимых переменных (может быть, даже к обыкновенному); правда при этом мы получаем не все решения исходного уравнения, а только решения, *инвариантные относительно группы*. В обоих случаях, соответствующие замены удобно

делать при помощи перехода к некоторым новым переменным — так называемым *дифференциальным инвариантам* группы симметрий. Для произвольной группы Ли G преобразований некоторого многообразия M функция $h(y)$ от локальных координат на M называется инвариантом группы G (или G -инвариантной функцией), если $h(T(y)) = h(y)$ для всех $T \in G$. Эквивалентное инфинитезимальное определение заключается в том, что производная функции h вдоль всех векторных полей из алгебры Ли g отвечающей группе G должна равняться нулю.

Определение 9.1. Пусть g некоторая подалгебра Ли контактных векторных полей. Функция $h(x, u, u_1, \dots, u_k)$ называется ее дифференциальным инвариантом k -го порядка, если $X(h) = 0$ для всех X из g .

Из определения следует, что нахождение дифференциальных инвариантов сводится к решению системы уравнений в частных производных

$$X_s(h) = p_s h_x + q_s h_u + q_s^1 h_{u_1} + \dots + q_s^k h_{u_k} = 0, \quad s = 1, \dots, r \quad (9.11)$$

где r — размерность алгебры g . Очевидно, произвольная функция от дифференциальных инвариантов есть дифференциальный инвариант, поэтому нужно найти не общее решение, а набор функционально независимых решений, по возможности полный. Инварианты можно дифференцировать, что позволяет увеличивать их порядок. Точнее, имеем следующее утверждение.

Утверждение 9.2. Пусть h_1, h_2 дифференциальные инварианты порядка k алгебры g . Тогда функция

$$h = \frac{dh_1}{dh_2} = \frac{D_x(h_1)}{D_x(h_2)} \quad (9.12)$$

есть дифференциальный инвариант порядка $k + 1$.

Доказательство. Напомним, что векторные поля из g имеют вид $X = pD_x - \nabla_\omega$, где $p = \omega_{u_1}$. Тогда имеем (при $j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} XD_x(h_j) &= pD_x^2(h_j) - \nabla_\omega D_x(h_j) = \\ &= D_x(pD_x(h_j) - \nabla_\omega(h_j)) - D_x(p)D_x(h_j) = -D_x(p)D_x(h_j), \end{aligned}$$

откуда следует $X(h) = 0$. □

Следствие 9.3. Для однопараметрической группы все функционально независимые дифференциальные инварианты имеют вид

$$y, \quad v, \quad v_1 = \frac{dv}{dy}, \quad v_2 = \frac{d^2v}{dy^2}, \quad \dots, \quad v_k = \frac{d^k v}{dy^k}, \quad \dots \quad (9.13)$$

где y, v — независимые инварианты первого порядка.

Доказательство. Инварианты порядка не выше k определяются как решения уравнения (9.11) при $r = 1$. Это эквивалентно построению первых интегралов для системы характеристических уравнений

$$\frac{dx}{p} = \frac{du}{q} = \frac{du_1}{q^1} = \dots = \frac{du_k}{q^k}.$$

Размерность системы равна $k + 2$, следовательно, число функционально независимых первых интегралов равно $k + 1$. В частности, при $k = 1$ имеются два инварианта y, v , и построенные по ним инварианты (9.13) дают нужное количество инвариантов в каждом порядке. \square

Методы построения инвариантов иллюстрируются в следующих трех примерах.

Пример 9.5. В простейших случаях можно решать систему (9.11) в лоб. Найдем дифференциальные инварианты 2-параметрической группы растяжений $\tilde{x} = e^a x$, $\tilde{u} = e^b u$. Соответствующая алгебра Ли двумерна и имеет базис

$$X_1 = x\partial_x - \sum_{k=0}^{\infty} k u_k \partial_{u_k}, \quad X_2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \partial_{u_k},$$

так что характеристические уравнения имеют вид

$$-\frac{dx}{x} = \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{2u_2} = \dots = \frac{du_k}{k u_k} = \dots; \quad \frac{du}{u} = \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \dots = \frac{du_k}{u_k} = \dots$$

Первые интегралы каждой системы легко находятся, имеем, соответственно:

$$u, \quad x u_1, \quad x^2 u_2, \quad \dots, \quad x^k u_k, \quad \dots; \quad x, \quad \frac{u_1}{u}, \quad \frac{u_2}{u}, \quad \dots, \quad \frac{u_k}{u}, \quad \dots$$

Отметим, что эти инварианты не совпадают с инвариантами, построенными по формуле (9.13), но эквивалентны им. Дифференциальные инварианты всей алгебры Ли — это такие функции, которые можно одновременно записать как функции от инвариантов из любой последовательности. Очевидно, это функции

$$x \frac{u_1}{u}, \quad x^2 \frac{u_2}{u}, \quad \dots, \quad x^k \frac{u_k}{u}, \quad \dots$$

Пример 9.6. В более сложных случаях выгодно систему (9.11) решать последовательно. На первом шаге находим инварианты y, v, v_1, \dots для векторного поля X_1 . Поскольку инварианты всей алгебры должны быть функциями от этих переменных, то мы можем переписать в них оставшиеся векторные поля и, тем самым, понизить порядок уравнений (9.11). Заметим, что для переписывания векторного поля X_2 достаточно вычислить величины $\bar{p}_2 = X_2(y)$, $\bar{q}_2 = X_2(v)$, $\bar{q}_2^i = X_2(v_i)$. Найдем этим способом дифференциальные инварианты 3-го порядка проективной группы прямой

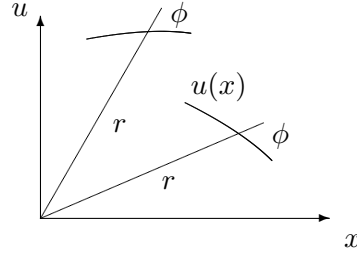
$$\tilde{x} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \tilde{u} = u, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

с алгеброй Ли

$$X_1^0 = \partial_x, \quad X_2^0 = x\partial_x, \quad X_3^0 = x^2\partial_x, \\ [X_1, X_2] = X_1, \quad [X_3, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = 2X_2.$$

Продолжения векторных полей имеют вид

$$X_1^3 = \partial_x, \quad X_2^3 = x\partial_x - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - 3u_3\partial_{u_3}, \\ X_3^3 = x^2\partial_x - 2xu_1\partial_{u_1} - (4xu_2 + 2u_1)\partial_{u_2} - 6(xu_3 + u_2)\partial_{u_3}.$$



Очевидно, инварианты первого векторного поля — это u, u_1, u_2, u_3 , так что переписывание X_2 в новых переменных сводится просто к отбрасыванию члена $x\partial_x$ и мы получаем векторное поле

$$\bar{X}_2 = u_1\partial_{u_1} + 2u_2\partial_{u_2} + 3u_3\partial_{u_3}.$$

Его инварианты равны $u, v = u_2/u_1^2, v_1 = u_3/u_1^3$. Перепишем X_3 в этих переменных. Имеем

$$X_3^3(u) = 0, \quad X_3^3(v) = -\frac{2}{u_1}, \quad X_3^3(v_1) = -6\frac{u_2}{u_1^3},$$

следовательно, векторное поле принимает вид

$$\bar{X}_3 = -\frac{2}{u_1}(\partial_v + 3v\partial_{v_1}).$$

Очевидно, оно имеет инварианты u и $v_1 - \frac{3}{2}v^2$ и окончательно мы получаем, что функции

$$u, \quad \frac{u_3}{u_1^3} - \frac{3u_2^2}{u_1^4}$$

составляют полный набор функционально независимых инвариантов третьего порядка для проективной группы. Построение старших инвариантов может осуществляться по формуле (9.12).

Пример 9.7. Наконец, иногда инварианты можно найти из геометрических соображений. Рассмотрим однопараметрическую группу вращений плоскости (x, u)

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта группа допускает следующие инварианты: радиус $r = \sqrt{x^2 + u^2}$, угол

$$\phi = \arctg u_1 - \arcsin \frac{u}{\sqrt{u^2 + x^2}} = \arctg u_1 - \arctg \frac{u}{x}$$

между радиус-вектором и касательной к графику $u = u(x)$ и кривизну этого графика, которая, как известно из аналитической геометрии, задается формулой

$$\kappa = \frac{u_2}{(1 + u_1^2)^{3/2}}.$$

Сравним эти инварианты с найденными стандартным методом. Инфинитезимальный оператор группы вращений есть

$$X = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_1^2)\partial_{u_1} + 3u_1u_2\partial_{u_2} + (4u_1u_3 + 3u_2^2)\partial_{u_3} + \dots,$$

следовательно характеристическое уравнение для дифференциальных инвариантов первого порядка имеет вид

$$-\frac{dx}{u} = \frac{du}{x} = \frac{du_1}{1+u_1^2}.$$

Сначала из первого равенства находим первый интеграл $x^2 + u^2$, совпадающий с r^2 . После этого второе равенство принимает вид

$$\frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} = \frac{du_1}{1+u_1^2}$$

и интегрирование приводит к первому интегралу ϕ . Для удобства можно перейти к инварианту

$$v = \operatorname{tg} \phi = \frac{xu_1 - u}{x + uu_1}.$$

Дальнейшее построение инвариантов осуществляется при помощи Следствия 9.3. Например, инвариант второго порядка равен

$$v_1 = \frac{dv}{dr} = \frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{(x + uu_1)^3} ((x^2 + u^2)u_2 - (1 + u_1^2)(xu_1 - u)).$$

Можно проверить, что он связан с кривизной κ соотношением

$$\kappa = \frac{v_1}{(1 + v^2)^{3/2}} + \frac{v}{r(1 + v^2)^{1/2}}.$$

Использование дифференциальных инвариантов позволяет понижать порядок уравнения.

Теорема 9.4. Пусть h_1, \dots, h_m полный набор функционально независимых инвариантов порядка k алгебры g . Тогда уравнение (8.24) имеет g своей алгеброй симметрий, если и только если оно может быть переписано в виде

$$\tilde{F}(h_1, \dots, h_m) = 0. \quad (9.14)$$

Доказательство. Уравнение (8.24) определяет некоторую гиперповерхность M в пространстве переменных x, u, u_1, \dots, u_k . Из того, что векторные поля g касаются M следует, что M состоит из общих поверхностей уровня $h_1 = c_1, \dots, h_m = c_m$ дифференциальных инвариантов. Сделаем какую-нибудь невырожденную замену переменных $(x, u, u_1, \dots, u_k) \mapsto (h_1, \dots, h_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{k+2})$, тогда поверхность M будет задаваться уравнением вида $\tilde{F}(h, \xi) = 0$. Проектируя M вдоль осей ξ , получим некоторую гиперповерхность вида (9.14) в пространстве переменных h_1, \dots, h_m . \square

Для однопараметрического случая из Теоремы 9.4 и Следствия 9.3 получаем

Следствие 9.5. Если уравнение (8.24) допускает однопараметрическую группу G , то оно может быть записано в виде уравнения $k-1$ порядка

$$\tilde{F}(y, v, v_1, \dots, v_{k-1}) = 0, \quad (9.15)$$

где $y, v, v_j = \frac{d^j v}{dy^j}$ дифференциальные инварианты группы G .

Итак, переход к дифференциальным инвариантам однопараметрической группы позволяет понижать порядок уравнения на 1. Эта замена необратима и поэтому возникает вопрос — сможем ли мы восстановить решение исходного уравнения (8.24) после того как найдем решение редуцированного уравнения (9.15)? Ответ положительный. Действительно, пусть $v = f(y)$ — решение уравнения (9.15), тогда чтобы найти зависимость u от x мы должны решить вспомогательное уравнение первого порядка

$$v(x, u, u_1) = f(y(x, u, u_1)).$$

Но это уравнение содержит только инварианты y, v и следовательно допускает G в качестве группы симметрий. А отсюда следует, что оно может быть решено методом интегрирующего множителя из Теоремы 9.1.

Пример 9.8. Рассмотрим некоторые стандартные методы понижения порядка.

1) Если в уравнение не входит явно неизвестная функция u , то есть оно имеет вид $F(x, u_1, \dots, u_k) = 0$, то понижение порядка достигается за счет подстановки $v = u_1$. Эта очевидная подстановка есть следствие инвариантности уравнения относительно группы сдвигов $u \rightarrow u + a$.

2) Если уравнение не содержит независимой переменной, то есть имеет вид $F(u, u_1, \dots, u_k) = 0$, то порядок можно понизить, приняв за независимую переменную $y = u$ и зависимую переменную $v = u_1$. Очевидно это есть инварианты группы сдвигов $x \rightarrow x + a$. При этом, если найдено решение $v = f(y)$ редуцированного уравнения, то, чтобы найти решение исходного, следует решить вспомогательное уравнение $u_1 = f(u)$ с разделенными переменными.

3) Порядок уравнения понижается, если оно является обобщенно-однородным, то есть, не меняется при замене x на $\lambda^n x$ и u_j на $\lambda^{m-jn} u_j$. Инвариантами первого порядка данной группы растяжений являются $y = u^n/x^m$ и $v = xu_1/u$.

4) Простейшим примером обобщенно-однородных уравнений являются линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами, инвариантные относительно растяжения $u \rightarrow \lambda u$. Инвариантами (эквивалентными указанным выше) служат x и $w = u_1/u$. В частности, эта замена сводит уравнение $u_2 = a(x)u_1 + b(x)$ к уравнению Риккати $w_1 = aw + b - w^2$.

Отметим, что для r -мерной алгебры симметрий ситуация становится сложнее. Во-первых, инварианты h_i из Теоремы 9.4 могут уже не иметь такой простой структуры (9.13), как для однопараметрического случая. Во-вторых, для восстановления решения исходного уравнения по решениям редуцированного может оказаться недостаточно квадратур, это зависит от разрешимости алгебры Ли симметрий.

9.4 Инвариантные решения

В случае уравнений в частных производных инвариантность относительно группы используется для выделения специальных классов решений.

Определение 9.2. Пусть G — некоторая группа точечных симметрий уравнения в частных производных $F(x, u, u_\sigma) = 0$. Решение $u = f(x)$ называется инвариантным относительно группы G , или G -инвариантным, если для любого преобразования $T : (x, u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{u})$ из группы выполняется равенство $\tilde{u} = f(\tilde{x})$.

Пример 9.9 (Сферическая волна). Дано волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad (9.16)$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = \phi(r)$, $u_t|_{t=0} = \psi(r)$ зависящими только от радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда решение будет зависеть только от r в любой момент времени, что позволяет ограничиться поиском решений частного вида $u = v(t, r)$. Чтобы записать уравнение на функцию v , мы должны выразить производные u по t, x, y, z через производные v по t, r . Например, имеем $r_x = x/r$, откуда

$$u_x = \frac{x}{r} v_r, \quad u_{xx} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) v_r + \frac{x^2}{r^2} v_{rr}.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$v_{tt} = \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) v_r + \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) v_{rr} = \frac{2}{r} v_r + v_{rr}. \quad (9.17)$$

Вводя обозначение $w = rv$, сводим нашу задачу к одномерной задаче на полуоси:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= w_{rr}, \quad r > 0 \\ w(0, r) &= r\phi(r), \quad w_t(0, r) = r\psi(r), \quad w(t, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ключевой момент, на который нужно обратить внимание в этом вычислении — это то, как в формуле (9.17) все «лишние» переменные x, y, z собрались в r . Понятно, что если бы этого не произошло, то подстановка $u = v(t, r)$ была бы некорректной. Иначе говоря, требуется не только, чтобы краевые условия были специального вида, но и чтобы само уравнение было согласовано с искомым видом решения, точнее — чтобы оно допускало группу симметрий, сохраняющих вид решения.

Общий вид G -инвариантных функций задается неявной формулой

$$\Phi(h_1, \dots, h_s) = 0 \quad (9.18)$$

где Φ — произвольная функция, а $h_i(x_1, \dots, x_m, u)$, $i = 1, \dots, s$ — полный набор функционально-независимых инвариантов нулевого порядка группы G . Число s таких инвариантов равно $m + 1 - d$, где d — размерность орбит группы G . Для однопараметрических групп, очевидно, $d = 1$ и следовательно $s = m$, но для r -параметрических групп размерность орбит может быть и меньше r . В примере 9.9, мы нашли решения, инвариантные относительно 3-параметрической группы $SO(3)$ вращений 3-мерного пространства \mathbb{R}^3

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{X} = AX, \quad \tilde{u} = u,$$

где $X = (x, y, z)$, $A \in SO(3)$. Орбиты этой группы есть двумерные сферы и поэтому мы имеем $3 = 5 - 2$ инварианта t, r, u .

Способ построения G -инвариантных решений заключается в следующем. Выбираем один из инвариантов в качестве новой зависимой переменной v , а остальные считаем новыми независимыми переменными y_1, \dots, y_{s-1} . Конечно, замена $(x, u) \rightarrow (y, v)$ вырождена, но в силу того, что само уравнение допускает G в качестве группы

симметрий, его можно переписать в новых переменных. Такая процедура называется редукцией. Альтернативно, можно дополнить набор переменных (y, v) какими-нибудь «лишними» переменными так, чтобы замена стала невырожденной. После осуществления замены эти переменные сократятся автоматически. Решая редуцированное уравнение, мы тем самым уточняем вид функции Φ в (9.18).

В теории инвариантных решений возникают два основных вопроса. Они достаточно сложны и мы только зафиксируем внимание на них (по этому поводу см. напр. [10, 11]).

1) Классификация инвариантных решений. Обычно ищутся решения, инвариантные относительно не всей группы симметрий G , а только относительно какой-то подгруппы G_0 (например, можно показать, что полная группа симметрий уравнения (9.16) 10-мерна). При этом каждой подгруппе отвечают свои решения. Однако не все они различаются по существу, так как решения, соответствующие сопряженным подгруппам G_0 и TG_0T^{-1} , переводятся друг в друга преобразованием T . (Например, можно искать решение уравнения (9.16) в виде плоской волны, распространяющейся в направлении $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Это есть решение, инвариантное относительно сдвигов в направлениях, перпендикулярных \vec{a} . Однако, учитывая вращение, мы можем ограничиться изучением плоских волн, распространяющихся вдоль оси x .) Таким образом, возникает задача классификации подгрупп группы G относительно сопряжения.

2) Исследование редуцированного уравнения. Допустим, мы ищем решения, инвариантные относительно подгруппы G_0 . Спрашивается, что при этом происходит с остальными симметриями? Оказывается, что часть из них может перейти в симметрии редуцированного уравнения, а другая часть может пропасть, причем ответ зависит от структуры алгебры симметрий. С другой стороны, в редуцированном уравнении могут появиться дополнительные симметрии.

Для уравнений с двумя независимыми переменными достаточно 1-параметрической подгруппы симметрий, чтобы редуцировать его к обыкновенному уравнению. Рассмотрим уравнение КдФ, группа симметрий которого была вычислена в примере 9.4.

Пример 9.10. 1) *Бегущие волны.* Найдём решения, инвариантные относительно симметрии $X = X_2 + cX_4 = \partial_t + c\partial_x$. Очевидно, это векторное поле имеет инварианты $v = u$ и $y = x - ct$, так что уравнение допускает редукцию $u(x, t) = v(x - ct)$. На функцию v получаем обыкновенное уравнение

$$v''' + 6vv' + cv' = 0,$$

которое мы рассматривали на первой лекции. Как помним, его порядок понижается двукратным интегрированием. Теперь мы понимаем, что это связано с тем, что ОДУ наследует достаточно большую алгебру симметрий.

2) *Галилеевски-инвариантные решения.* Рассмотрим комбинацию преобразования Галилея и сдвига по t : $X = X_3 + cX_2 = 6t\partial_x - \partial_u + c\partial_t$. В данном случае инвариантами служат величины $v = u + at$ и $y = x - 3at^2$, где $a = 1/c$, так что уравнение допускает редукцию $u(x, t) = v(x - 3at^2) - at$. На функцию v получаем уравнение $v''' + 6vv' - a = 0$, которое можно проинтегрировать только один раз:

$$v'' + 3v^2 - ay + b = 0.$$

Это уравнение эквивалентно так называемому первому уравнению Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z,$$

которое не решается в элементарных функциях (можно проверить, что оно не обладает симметриями, то есть, это тот случай, когда группа симметрий исходного уравнения разрушается при редукции). Тем не менее, это уравнение обладает некоторыми замечательными аналитическими свойствами. Оказывается, что решения, связанные с уравнениями такого типа встречаются в интегрируемых уравнениях очень часто. На следующей лекции мы познакомимся с уравнениями Пенлеве подробнее.

9.5 Задачи

Задача 9.1. (2 балла) Построить коммутационную таблицу для векторных полей, найденных в примере 9.3 (уравнение теплопроводности), как в примерах 9.2, 9.4. Интегрируя уравнения (8.3), найти соответствующие групповые преобразования.

Задача 9.2. (4 балла) Вычислить алгебру классических симметрий для уравнения Дима $u_t = u^3 u_z$ (как и в разобранных примерах, искать ω в виде $r(t)u_t + a(t, x, u, u_1)$). Построить коммутационную таблицу, найти групповые преобразования.

Задача 9.3. (4 балла) Найти алгебру классических симметрий для любого уравнения по своему выбору (обыкновенного или в частных производных, не обязательно эволюционного).

Задача 9.4. (4 балла) Рассмотреть какие-нибудь однопараметрические подгруппы для уравнений из предыдущих примеров и осуществить редукцию к инвариантным решениям. Находить решения явно не обязательно, достаточно выписать определяющие их ОДУ. Не нужно также рассматривать *все* возможные подгруппы, достаточно нескольких примеров.

10 Уравнения Пенлеве

Волчок Ковалевской · Тест Пенлеве · Классификация Пенлеве–Гамбье · Автомомельные редукции · Тест Вейсса–Табора–Карнивейла · Обобщенный гармонический осциллятор · Преобразования Бэклунда · Рациональные решения · Представление целыми функциями

10.1 Свойство Пенлеве

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение или систему в комплексной плоскости. Вообще говоря, его решения имеют особые точки, или сингулярности — полюса, точки ветвления (алгебраические или логарифмические), существенно особые точки. При этом, положение особых точек, вообще говоря, различное для разных решений, то есть, при варьировании начальных данных особые точки смещаются, некоторые из них могут пропадать или появляться. Такие особые точки называются подвижными. Бывает и так, что некоторые точки являются особыми для всех решений. Например, имеется теорема, что если уравнение линейно, то все особые точки его решений исчерпываются особыми точками коэффициентов, и следовательно, их положение неизменно.

Полюсные особенности безобидны. Они появляются, если система записана в слишком тесном фазовом пространстве, и обычно его нетрудно расширить так, чтобы решение представлялось аналитическими функциями без особенностей. Простейший пример — уравнение $u' = 1 + u^2$. Его решение $u = \tan(z - c)$ имеет полюсы в точках $z = c + (n + \frac{1}{2})\pi$, а подстановка $u = -w'/w$ приводит к уравнению $w'' = -w$, решение которого являются целыми функциями.

Определение 10.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение обладает свойством Пенлеве, если все подвижные особые точки его решения являются полюсами. Иначе говоря, положение существенно особых точек, если они есть, не должно зависеть от выбора начальных данных.

Это свойство было сформулировано в 1880-х в работах Фукса, Пикара и Пенлеве. В работе Ковалевской (1889) было осознано, что оно связано с интегрируемостью рассматриваемого уравнения, причём переменные следует считать комплексными, даже если исходная постановка задачи вещественная. Волчок Ковалевской это новый интегрируемый случай в уравнениях Эйлера–Пуассона, описывающих движение твёрдого тела, вращающегося около неподвижной точки в однородном поле тяжести:

$$\dot{u} = [u, Ju] + [\gamma, v], \quad \dot{v} = [v, Ju]. \quad (10.1)$$

Здесь $u(t), v(t), \gamma \in \mathbb{R}^3$, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ и γ, J постоянны. Три первых интеграла имеются при любом наборе параметров:

$$\langle v, v \rangle, \quad \langle u, v \rangle, \quad \langle u, Ju \rangle - 2\langle \gamma, v \rangle,$$

но этого недостаточно для интегрирования, требуется ещё один. Он существует в

следующих случаях:

	параметры	первый интеграл
Эйлер	$\gamma = 0$	$\langle u, u \rangle$
Лагранж	$J_1 = J_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$	u_3
Ковалевская	$2J_1 = 2J_2 = J_3, \quad \gamma_3 = 0$	$ J_1(u_1 + iu_2)^2 + 2(\gamma_1 + i\gamma_2)(v_1 + iv_2) ^2$

К волчку Лагранжа сводится также изотропный случай $J_1 = J_2 = J_3$ с дополнительным интегралом $\langle \gamma, u \rangle$. По смыслу задачи, никаких особенностей при вещественных t в решении нет. Однако, в случаях Эйлера и Лагранжа решение выражается через эллиптические функции с подвижными полюсами при комплексных t . Поэтому, Ковалевская поставила вопрос: выяснить, когда общее решение системы мероморфно при комплексных t . Оказалось, что это выполняется ещё только в одном случае, и что для него действительно существует дополнительный первый интеграл. В отличие от предыдущих случаев, решение волчка Ковалевской выражается через гиперэллиптические функции рода 2.

На самом деле, свойство Пенлеве далеко не во всех примерах означает существование первых интегралов, но, тем не менее, уравнения с этим свойством обладают и другими замечательными свойствами и их можно считать интегрируемыми в некотором расширенном смысле.

Как проверять свойство Пенлеве на практике? Необходимые условия можно получить локальным анализом сингулярных решений. Ищем решение в виде ряда Лорана

$$u(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - z_0)^s, \quad k > 0,$$

при подстановке в уравнение определяем возможные значения k . Если они не все целые, то это уже означает, что решения имеют подвижные точки ветвления. Для целых k вычисляем коэффициенты a_s . Поскольку общее решение уравнения n -го порядка содержит n произвольных постоянных, то для того, чтобы ряд представлял такое общее решение, нужно, чтобы среди коэффициентов $n - 1$ был произвольным (ещё одной постоянной является z_0). Такие произвольные коэффициенты называются резонансами. Если их меньше, чем нужно, это означает, что выписанный ряд даёт только частное решение. Как правило, его можно дополнить до общего, добавляя члены с логарифмами или дробными степенями $z - z_0$, но это уже означает, что решение имеет существенно особые подвижные точки.

Например, в случае уравнений Эйлера–Пуассона нужно искать решения в виде

$$u_j = \frac{1}{t^{k_j}} \sum_{s=0}^{\infty} a_{j,s} t^s, \quad v_j = \frac{1}{t^{h_j}} \sum_{s=0}^{\infty} b_{j,s} t^s$$

(t_0 можно брать равным 0, благодаря тому, что уравнения автономны) и выяснять, при каких значениях параметров числа k_j, h_j являются натуральными, а коэффициенты рядов содержат 5 произвольных постоянных. Это очень сложная, хотя и чисто алгебраическая задача, анализ которой и даёт перечисленные выше случаи. Мы рассмотрим пример попроще.

Пример 10.1. Проанализируем уравнение

$$u'' = 2u^3 + zu + \alpha + \beta z.$$

Подставляя решение в виде ряда

$$u = \frac{1}{(z - z_0)^k} (a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots),$$

получаем, что $k = 1$, $a_0^2 = 1$. Далее, собирая коэффициенты при $(z - z_0)^j$, последовательно находим:

$$\begin{aligned} (z - z_0)^{-2} : \quad & a_1 = 0, \\ (z - z_0)^{-1} : \quad & a_2 = -\frac{1}{6}a_0z_0, \\ (z - z_0)^0 : \quad & a_3 = -\frac{1}{4}(\alpha + \beta z_0 + a_0), \\ (z - z_0)^1 : \quad & \beta = 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении a_4 тождественно сокращается, но зато возникает условие на параметр β , входящий в уравнение. В следующих уравнениях ничего интересного не происходит, они оказываются эквивалентными некоторым рекуррентным соотношениям, определяющим остальные члены ряда:

$$\begin{aligned} (z - z_0)^2 : \quad & 6a_5 = \frac{1}{4}\alpha z_0 + \frac{1}{12}a_0z_0, \\ (z - z_0)^3 : \quad & 14a_6 = \frac{\alpha}{2} + \frac{a_0}{216}(27 - 2z_0^3 + 81\alpha^2) - a_4z_0 \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом, решение в виде ряда Лорана может существовать лишь при условии $\beta = 0$, при этом коэффициент a_4 произвольный (резонанс). Проведенное вычисление ещё не означает, что уравнение с $\beta = 0$ обладает свойством Пенлеве, поскольку мы не доказали сходимости ряда и не доказали, что любое решение представляется в таком виде. Проверены лишь некоторые необходимые условия для этого, а строгое доказательство требует более тонких рассуждений. Однако, даже такой анализ позволяет достаточно эффективно отсекал неинтегрируемые случаи.

Задача классификации ОДУ, удовлетворяющих свойству Пенлеве, решена для уравнений первого и второго порядков. Для уравнений $u' = F(z, u)$ с функцией F , рациональной по u и аналитической по z , ответ исчерпывается уравнениями Риккати (Фукс, 1884). Напомним, что эти уравнения линеаризуемы, поэтому свойство Пенлеве для них следует из упоминавшегося выше свойства линейных уравнений. Для уравнений $u'' = F(z, u, u')$, рациональных по u, u' и аналитических по z , классификация была получена Пенлеве и Гамбье (1902–1910). С точностью до замен

$$\tilde{u} = \frac{a(z)u + b(z)}{c(z)u + d(z)}, \quad \tilde{z} = f(z),$$

где a, b, c, d, f аналитические функции, оказалось 50 типов таких уравнений. Из них основными являются шесть уравнений Пенлеве P_1 – P_6 , их общие решения являются новыми специальными функциями. Остальные случаи либо сводятся к этим уравнениям, либо решаются в элементарных и эллиптических функциях.

$$u'' = 6u^2 + z \quad (P_1)$$

$$u'' = 2u^3 + zu + \alpha \quad (P_2)$$

$$u'' = \frac{u'^2}{u} - \frac{u'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \quad (P_3)$$

$$u'' = \frac{u'^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u} \quad (P_4)$$

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 - \frac{u'}{z} + \frac{(u-1)^2}{z^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma \frac{u}{z} + \delta \frac{u(u+1)}{u-1} \quad (P_5)$$

$$u'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-z}\right)u'^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{u-z}\right)u' + \frac{u(u-1)(u-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta \frac{z}{u^2} + \gamma \frac{z-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(u-z)^2}\right) \quad (P_6)$$

Таблица 6. Уравнения Пенлеве

10.2 Приложения к уравнениям в частных производных

При исследовании интегрируемых уравнений в частных производных было замечено, на огромном числе примеров, что уравнения Пенлеве возникают (возможно, после дополнительных замен) при рассмотрении автомодельных решений, то есть, решений, инвариантных относительно некоторой непрерывной группы преобразований.

Пример 10.2. Как уже отмечалось на прошлой лекции, уравнение КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ допускает редукцию $u(x, t) = v(x + 3at^2) - at$, описывающую решения, инвариантные относительно комбинации преобразования Галилея и сдвига по t . Функция $v(y)$ удовлетворяет уравнению

$$v'' = 3v^2 - ay + b = 0,$$

которое легко сводится к (P_1) . Другая редукция связана с симметрией растяжения. Здесь удобнее начинать с уравнения мКдФ $f_t = f_{xxx} - 6f^2f_x$, которое допускает группу

$$\tilde{t} = e^{3a}t, \quad \tilde{x} = e^a x, \quad \tilde{f} = e^{-a}f,$$

с инвариантами $y = t^{-1/3}x$, $v = t^{1/3}f$. Полагая $f = t^{-1/3}v(y)$, получаем на v уравнение

$$v''' - 6v^2v' + \frac{1}{3}(yv' + v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'' = 2v^3 - \frac{1}{3}yv + c,$$

которое легко приводится к (P_2) . Для самого уравнения КдФ однородность другая, для него замена имеет вид $u = t^{-2/3}w(y)$, и на w получается уравнение

$$w''' - 6ww' + \frac{1}{3}(yw' + 2w) = 0.$$

Преобразование Миуры $u = f_x + f^2$ согласовано с однородностью и превращается в подстановку $w = v' + v^2$ между этими двумя уравнениями.

Пример 10.3. Уравнение \sinh -Гордона $u_{xt} = \sinh u$ не меняется при растяжении $x \rightarrow ax$, $t \rightarrow a^{-1}x$. Инвариантами преобразования служат $y = xt$ и u , следовательно, уравнение должно выдерживать редукцию $u(x, t) = v(xt)$. На $v(y)$ получаем уравнение

$$yv'' + v' = \sinh v.$$

Чтобы привести его к рациональному виду по w, w' , нужно сделать ещё дополнительную замену $e^v = w$, в результате приходим к частному случаю (P_3):

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{y} + \frac{1}{2y}(w^2 - 1)$$

(с параметрами $\gamma, \delta = 0$ и $\alpha, \beta \neq 0$; отметим, что в уравнении P_3 параметры масштабируемы).

Список подобных примеров легко продолжить. Разумеется, при редукциях далеко не всегда получаются уравнения именно второго порядка. Например, если стартовать не с самого уравнения КдФ, а с его симметрии 5-го порядка, или с уравнений Савады–Котеры (4.16) и Каупа–Купершмидта (4.17), то для инвариантных решений получатся ОДУ порядка 4. В этом случае полного списка уравнений типа Пенлеве нет, но мы можем применить описанный выше тест и выяснить, существует ли решение в виде формального ряда с нужным числом резонансов.

Гипотеза Абловица–Рамани–Сигура (1978) утверждает, что если уравнение в частных производных интегрируемо в смысле метода обратной задачи рассеяния, то любая его редукция к обыкновенному уравнению обладает свойством Пенлеве. Чтобы применить это свойство к заданному уравнению, нужно сначала провести его групповой анализ, классифицировать все инвариантные решения и перейти к соответствующим ОДУ (на самом деле, бывают редукции и не связанные с группами симметрий, но мы не будем на этом останавливаться). Для каждой полученной редукции следует проделать тест Пенлеве, и если результат всегда положительный, то наше уравнение, возможно, интегрируемо. Конечно, на практике это слишком громоздкая процедура, хочется применять тест только один раз и непосредственно к уравнению в частных производных. Подходящее обобщение было предложено Вейссом, Табором и Кэрнивейлом (WTC-тест, 1983). Оно заключается в том, чтобы искать решение в виде ряда

$$u(x, t) = \frac{1}{X^m}(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots), \quad a_j = a_j(t), \quad X = X(x, t),$$

где m некоторое натуральное число и $X(x, t)$ произвольная функция. Уравнение $X = 0$ описывает сингулярное многообразие решения. Обычно можно, не теряя общности, принять $X = x - q(t)$, что упрощает вычисления. Требуется, чтобы такое решение содержало достаточное число резонансов, то есть, чтобы среди коэффициентов a_j было столько свободных функций, сколько нужно для корректной постановки задачи Коши.

Тест особенно просто проводится для эволюционных уравнений. В этом случае мы фактически делаем те же вычисления, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, просто считаем, что всё зависит от дополнительного параметра t . Если уравнение имеет k -й порядок производных по x , то задача Коши содержит

k произвольных функций от t . Одна из них это $q(t)$, поэтому среди коэффициентов a_j должно найтись $k - 1$ резонансов.

Пример 10.4. Рассмотрим уравнение КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$, и пусть $X = x - q(t)$. Следим сначала только за главными членами:

$$u = \frac{a_0}{X^m} + \dots, \quad u_t = m \frac{q' a_0}{X^{m+1}} + \dots, \quad u_x = -m \frac{a_0}{X^{m+1}} + \dots, \\ u_{xxx} = -m(m+1)(m+2) \frac{a_0}{X^{m+3}} + \dots$$

и сравнивая слагаемые u_{xxx} и uu_x видим, что для баланса необходимо, чтобы было

$$-m(m+1)(m+2) \frac{a_0}{X^{m+3}} + 6m \frac{a_0^2}{X^{2m+1}} = 0 \Rightarrow m = 2, \quad a_0 = 2.$$

Итак, разложение должно иметь вид

$$u = \frac{2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + a_2 + a_3 X + a_4 X^2 + \dots$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\begin{cases} X^{-4}: & 30a_1 = 0, \\ X^{-3}: & 6a_1^2 + 24a_2 - 4q' = 0, \\ X^{-2}: & 6a_1a_2 + 12a_3 - a_1q' = 0, \\ X^{-1}: & -a_1' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{6}q', \quad a_3 = 0.$$

Обратим внимание, что член с X^{-1} сокращается тождественно. В этом порядке должны были бы появиться члены с a_4 , но они сократились. В результате, эта функция остаётся произвольной (резонанс). Продолжая вычисление, получаем

$$\begin{cases} X^0: & -6a_5 - \frac{1}{6}q'' = 0, \\ X^1: & 0 = 0, \\ X^2: & 24a_7 - a_4' = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{36}q'', \quad a_7 = \frac{1}{24}a_4'.$$

Функция a_6 остаётся свободной, это второй резонансный член. Во всех последующих порядках ничего интересного больше не происходит, просто последовательно находим a_8 , a_9 и так далее. В результате, мы получили решение в виде ряда, содержащего произвольные функции $q(t)$, $a_4(t)$, $a_6(t)$. Столько и должно быть, так как уравнение КдФ третьего порядка по x .

10.3 Уравнения Пенлеве и цепочки

Уравнения типа Пенлеве возникают как редукции не только из уравнений в частных производных, но и из дифференциально-разностных. Рассмотрим, вслед за Шаботом и Веселовым (1993), наиболее характерный пример, периодическое замыкание одевающей цепочки для оператора Шрёдингера (см. лекцию 6; сейчас мы обозначаем производную по x штрихом)

$$f_j' + f_{j+1}' = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \delta_j, \quad f_{j+n} = f_j, \quad \delta_{j+n} = \delta_j. \quad (10.2)$$

Условие периодичности превращает цепочку в конечномерную динамическую систему на переменные f_1, \dots, f_n . Её свойства резко отличаются в зависимости от того, равен или не равен 0 параметр

$$\delta = \delta_1 + \dots + \delta_n.$$

Напомним, что одевающая цепочка возникает при исключении u_j из последовательности преобразований Дарбу

$$u_j = f_j^2 + f_j' + \alpha_j, \quad u_{j+1} = u_j - 2f_j', \quad \alpha_j - \alpha_{j+1} = \delta_j \quad (10.3)$$

и допускает дискретное представление нулевой кривизны

$$F_j' = U_{j+1}F_j - F_jU_j, \quad U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_j - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad F_j = \begin{pmatrix} -f_j & 1 \\ f_j^2 + \alpha_j - \lambda & -f_j \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что случай $\delta = 0$ в точности эквивалентен уравнениям Новикова (4.10) для m -зонных потенциалов, где $n = 2m + 1$ или $n = 2m + 2$. Это следует из того, что в этом случае параметры также периодичны, $\alpha_{j+n} = \alpha_j$, то есть, $U_{n+1} = U_1$ и матрица $\hat{F} = F_n \cdots F_1$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{F}' = [U_1, \hat{F}].$$

А это уравнение — то же самое, что условие стационарности $U_t = 0$ для некоторой высшей симметрии КдФ $U_t = V_x + [V, U]$, и нужно только аккуратно сравнить степени по λ матриц \hat{F} и V . В частности, след $\text{tr } \hat{F}$ есть первый интеграл системы. Это многочлен по λ степени m , то есть, его коэффициенты дают набор первых интегралов системы. В результате, можно строго показать, что в случае $\delta = 0$ система (10.2) является гамильтоновой системой, интегрируемой по Лиувиллю–Арнольду.

В случае $\delta \neq 0$ условие периодичности для α_j заменяется на $\alpha_{j+n} = \alpha_j - \delta$. Это, на первый взгляд, незначительное обобщение полностью меняет свойства системы. Теперь $U_{n+1} \neq U_1$, и этого достаточно, чтобы все первые интегралы пропали, за исключением суммы f_j , которая становится неавтономной:

$$f_1 + \dots + f_n = \frac{1}{2}\delta(x - x_0).$$

Следует отметить также, что замыкание с $\delta \neq 0$ не согласовано с иерархией КдФ. Действительно, уравнения (10.2) определяют x -часть преобразований Бэклунда для уравнений $f_{j,t} = f_{j,xxx} - 6(f_j^2 + \alpha_j)f_{j,x}$, поэтому, для того, чтобы условие $f_{j+n} = f_j$ было согласовано с динамикой по t , необходимо, чтобы было также $\alpha_{j+n} = \alpha_j$. С этим мы уже сталкивались в примере 6.3 для гармонического осциллятора, который отвечает простейшему периодическому замыканию $f_{j+1} = f_j$. Оказывается, что замыкание с $n > 1$ допускает аналогичную квантово-механическую интерпретацию, только с более сложными (трансцендентными) потенциалами и волновыми функциями.

Мы рассмотрим только случай $n = 3$. Не теряя общности, положим $\delta = -2$, $x_0 = 0$. Удобно обозначить $g_j = f_j + f_{j+1} = -x - f_{j+2}$, тогда система переписется в виде

$$g_1' = g_1(g_3 - g_2) + \delta_1, \quad g_2' = g_2(g_1 - g_3) + \delta_2, \quad g_3' = g_3(g_2 - g_1) + \delta_3, \quad (10.4)$$

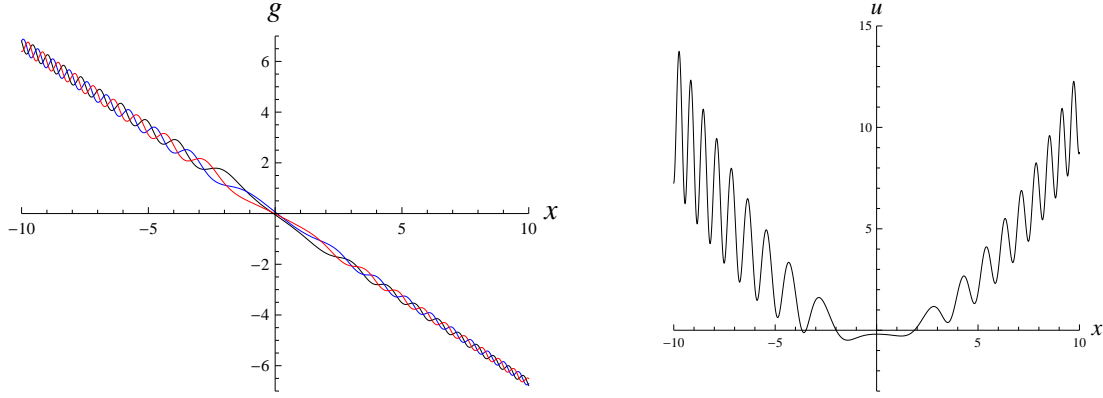


Рис. 20. Решение системы (10.4) и потенциал u_1 . Значения параметров: $\alpha_1 = 0$, $\delta_1 = -0.7$, $\delta_2 = -0.8$, $\delta_3 = -0.5$, $g_1(0) = -0.05$, $g_1(0) = 0.06$, $g_3(0) = -0.01$.

где

$$g_1 + g_2 + g_3 = -2x, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2.$$

Далее, исключим g_3 при помощи первого интеграла:

$$g'_1 = -g_1(g_1 + 2g_2 + 2x) + \delta_1, \quad g'_2 = g_2(2g_1 + g_2 + 2x) + \delta_2.$$

Из первого уравнения выразим g_2 и подставим во второе, в результате на функцию $y = g_1 = -x - f_3$ получится уравнение (P_4) со значениями параметров $\alpha = \delta_2 + \frac{\delta_1}{2} + 1$, $\beta = -\frac{\delta_1^2}{2}$. Вещественное решение системы (10.4) и один из соответствующих потенциалов u_j показаны на рис. 20. Вообще говоря, решение может иметь полюсы на вещественной оси, однако в пространстве параметров и начальных условий имеется некоторая конечная область, отвечающая регулярным решениям. При этом, функции f_j имеют линейный рост по x , а u_j квадратичный, как и в случае гармонического осциллятора, но теперь на него накладываются высокочастотные осцилляции, так что асимптотически $f_j \sim -x/3 + a_j \cos b_j(x - c_j)^2$.

Численные эксперименты показывают, что такое качественное поведение наблюдается при всех нечётных n . Чтобы понять спектральные свойства соответствующих потенциалов, удобно вместо матричного представления нулевой кривизны использовать операторное: цепочка преобразований Дарбу эквивалентна соотношениям

$$L_j = A_j^+ A_j + \alpha_j, \quad L_{j+1} = A_j A_j^+ + \alpha_j,$$

где

$$L_j = -D^2 + u_j, \quad A_j = f_j - D, \quad A_j^+ = f_j + D, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Пусть ψ_j волновая функция L_j , то есть, $L_j \psi_j = \lambda \psi_j$. Из соотношений

$$A_j L_j = L_{j+1} A_j, \quad L_j A_j^+ = A_j^+ L_{j+1}^+$$

вытекает, что операторы A_j, A_j^+ действуют на ψ_j следующим образом:

$$A_j \psi_j \sim \psi_{j+1}, \quad A_j^+ \psi_{j+1} \sim \psi_j.$$

Отсюда следует рекуррентная схема построения собственных функций $\phi_{j,k}$ операторов L_j , отвечающие значениям $\lambda = \alpha_k$:

$$\phi_{k,k} = \exp \int f_k dx, \quad \phi_{j,k} = A_j^+ \phi_{j+1,k}, \quad j < k. \quad (10.5)$$

Здесь мы предполагаем, что все функции f_1, \dots, f_n регулярны и растут как $\delta x/n$, с $\delta < 0$ (см. рис. 20). Тогда $\phi_{1,1}, \dots, \phi_{n,n}$ определяют основные собственные функции для операторов L_1, \dots, L_n ; случай $\delta > 0$ ничем принципиально не отличается, надо просто использовать $-f_k$ и действовать операторами A_j в другую сторону (это равносильно смене нумерации $j \rightarrow -j$ в цепочке).

В периодическом случае применение операторов A_j^+ приведет через n шагов к решению уравнения с потенциалом, сдвинутым на δ . Точнее, оператор рождения

$$\hat{A}_j^+ = A_j^+ \cdots A_{j+n-1}^+$$

строит собственную функцию оператора L_j из собственной функции оператора $L_{j+n} = -D^2 + u_{j+n} = -D^2 + u_j - \delta = L_j - \delta$, то есть, из собственной функции самого L_j , но отвечающей меньшему значению $\lambda + \delta$. Схематически этот процесс изображен на рис. 21. В результате, спектр операторов L_j , оказывается состоящим из n арифметических прогрессий с шагом $-\delta$.

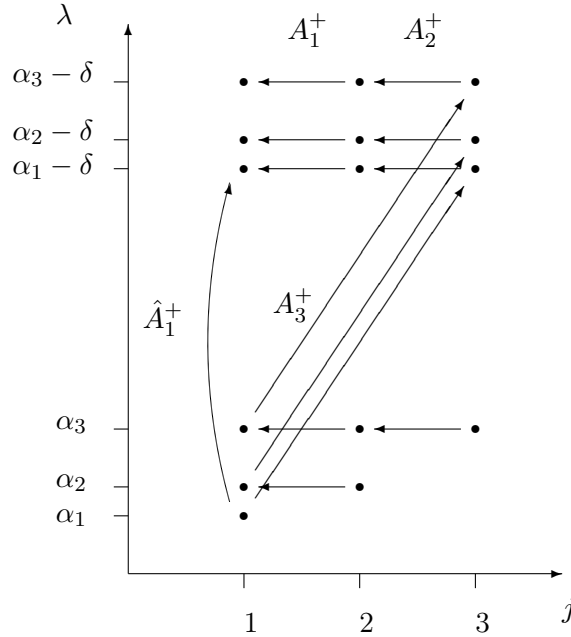


Рис. 21. Начало построения собственных функций.

Для чётных n теория немного усложняется, благодаря тому, что матрица при производных в (10.2) вырождена. Тем не менее, этот случай также приводит к уравнениям типа Пенлеве (в частности, $n = 4$ отвечает уравнению (P_5)). В этом случае решение имеет неподвижную особую точку при $x = 0$ и соответствующие операторы Шрёдингера следует рассматривать на полуоси.

10.4 Некоторые свойства уравнений Пенлеве

1) *Метод изомонодромных деформаций.* На предыдущих лекциях мы видели, что интегрируемые уравнения в частных производных интерпретируются как условия совместности линейных уравнений вида

$$\Psi_x = U[u(x, t); \lambda]\Psi, \quad \Psi_t = V[u(x, t); \lambda]\Psi \Rightarrow U_t = V_x + [V, U].$$

Если первое уравнение интерпретируется как спектральная задача с параметром λ , то дифференцирование по t сохраняет спектр, является изоспектральной деформацией. Аналогично, уравнения Пенлеве допускают представления *изомонодромных деформаций*, следующего вида:

$$\Psi_\lambda = A[u(z), \lambda]\Psi, \quad \Psi_z = U[u(z), \lambda]\Psi \Rightarrow A_z = U_\lambda + [U, A].$$

Например, нетрудно проверить, что уравнение (P_1) $u'' = 6u^2 + z$ получается при выборе

$$A = \begin{pmatrix} -u' & \lambda^2 + \lambda u + u^2 + z/2 \\ 4(\lambda - u) & u' \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & u + \lambda/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что уравнение $\Psi_z = U\Psi$ есть уравнение Шрёдингера, с точностью до незначительных переобозначений, но основным теперь является уравнение $\Psi_\lambda = A\Psi$. Это линейное уравнение второго порядка с особой точкой при $\lambda = \infty$, коэффициенты которого как-то зависят от внешнего параметра z . При обходе вокруг этой особой точки, фундаментальное решение умножается на некоторую матрицу M , которая называется матрицей монодромии (таких матриц столько, сколько особых точек в уравнении). Эта матрица, конечно зависит от значений u, u', z , поскольку они входят в матрицу A . Однако, оказывается, что если u подчиняется уравнению P_1 , то матрица M определяется только начальными значениями $u(z_0), u'(z_0)$ в какой-то точке z_0 , а эволюция по z ничего не меняет, то есть, это изомонодромная деформация уравнения по λ . При помощи представлений такого типа удаётся определять асимптотику решений уравнений Пенлеве и её зависимость от начальных данных.

2) *Представление через целые функции.* Как уже говорилось, от полюсных особенностей можно избавляться при помощи подходящих замен. В дополнение к примеру с тангенсом, напомним, что функция Вейерштрасса $\wp(z)$, определяемая как решение уравнения $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, имеет полюсы второго порядка; её можно представить как $\wp(z) = -\zeta'(z) = -(\log \sigma(z))''$, где функция ζ имеет полюсы первого порядка, а функция σ целая. Аналогичные представления имеются и для всех трансцендентов Пенлеве. Например, точно такая же подстановка $u(z) = -(\log w(z))''$ связывает уравнение (P_1) с уравнением

$$ww'''' - 4w'w''' + 3w''^2 + zw^2 = 0$$

и можно показать, что любое решение этого уравнения есть целая функция.

3) *Преобразования Бэклунда.* Для уравнений P_2 – P_6 имеются дискретные преобразования, сохраняющие вид уравнения, но меняющие значения параметров. Их принято называть преобразованиями Бэклунда, хотя связь с тем, что мы обсуждали

в лекции 6 достаточно отдаленная. Впервые такие преобразования были найдены только в 1970-х Лукашевичем и Громаком (см. задачу 10.4).

Для уравнения (P_4) такие преобразования легко вывести, если пользоваться представлением через одевающую цепочку, для которой мы получили автопреобразования (6.17) исходя из нелинейной суперпозиции для настоящих преобразований Бэклунда. Эти формулы согласованы с периодическим замыканием и при переписывании в переменных g_j принимают вид

$$R_j : \quad \tilde{g}_{j\pm 1} = g_{j\pm 1} \pm \frac{\delta_j}{g_j}, \quad \tilde{\delta}_j = -\delta_j, \quad \tilde{\delta}_{j\pm 1} = \delta_{j\pm 1} + \delta_j.$$

Кроме, того, имеется циклический сдвиг $g_j \rightarrow g_{j+1}$. Рассматривая эти преобразования для системы (10.4), можно получить преобразования для P_4

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\frac{u' + u^2 + 2zu - \delta_3}{2uz}, \\ \tilde{u} &= u + \frac{2\delta_1 u}{u' + u^2 + 2zu - \delta_3}. \end{aligned}$$

4) *Рациональные решения и решения, выражающиеся через классические спец-функции.* Вообще говоря, решения уравнений Пенлеве являются трансцендентными функциями. Однако, при специальных значениях параметров имеются изолированные решения рациональные решения, или одно-параметрические семейства, выражающиеся через гипергеометрические функции или эллиптические функции. Например, для системы (10.4) с $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -2/3$ мы имеем очевидное изолированное решение $g_j = -2/3z$, отвечающее гармоническому осциллятору. Действуя на него преобразованиями R_j , можно получить рациональные решения P_4 . При $\delta_3=0$ можно положить $g_3 = 0$, тогда для g_1, g_2 получается система, которая решается в функциях Эрмита; это решение также можно размножить при помощи преобразований R_j .

10.5 Задачи

Задача 10.1. (2 балла) Повторить вычисления примера 10.4 для уравнения $u_t = u_{xxx} + u_{xx} - 6uu_x$. Условие баланса здесь не меняется и решение ищется, как раньше, в виде ряда $u = 2X^{-2} + a_1X^{-1} + a_2 + a_3X + \dots$, $X = x - q(t)$. Сколько свободных коэффициентов имеется в этом случае?

Задача 10.2. (1 балл) Проверить, что система (10.4) с $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$ решается в эллиптических функциях. (Использовать функцию Вейерштрасса).

Задача 10.3. (3 балла) Рассмотрим цепочку Вольтерра $v'_n = v_n(v_{n+1} - v_{n-1})$, $v_n = v_n(x)$. Проверить, что она согласована со связью $(a, b, c$ произвольные постоянные)

$$v_n(v_{n+1} + v_n + v_{n-1}) + 2axv_n + an + b + (-1)^n c = 0$$

то есть, дифференцирование этого соотношения по x в силу цепочки даёт тождество (Итс, Китаев, Фокас, 1990). Показать, что в результате цепочка сводится к замкнутой системе на переменные v_n, v_{n+1} , которая эквивалентна уравнению (P_4) . Выписать отображение $(v_n, v_{n+1}) \rightarrow (v_{n+1}, v_{n+2})$ и получить из него преобразование Бэклунда для (P_4) .

Задача 10.4. (3 балла) Рассмотрим уравнение (P_2) $u'' = 2u^3 + zu + \alpha$. Проверить, что преобразование Бэклунда (Лукашевич, 1971)

$$B: \quad \tilde{u} = u + \frac{2\alpha + 1}{2u' + 2u^2 + z}, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha - 1$$

переводит его решения в решения (P_2) с параметром $\tilde{\alpha}$, и что $B^2 = \text{id}$. Ещё одно очевидное преобразование есть

$$R: \quad \tilde{u} = -u, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha.$$

Построить несколько рациональных решений, отвечающих целым значениям α , стартуя с $u = 0$ и применяя поочередно B, R . [*Подсказка.* Непосредственная проверка B довольно тяжела и её лучше делать на компьютере. Вручную можно справиться, введя вспомогательную переменную $v = 2u' + 2u^2 + z$ и переписав уравнение в виде системы на u, v .]

11 Гамильтонова структура

Лагранжиан · Полная дивергенция · Разностные лагранжианы · Вариационная симметрия · Теорема Нётер · Скобки Пуассона · Тождество Якоби · Функции Казимира · Гамильтоновы векторные поля · Скобка Дарбу · Скобка Ли · Гамильтонов оператор · Схема Ленарда–Магри

11.1 Вариационные уравнения

На этой лекции мы изучим некоторые общие структуры, которые часто встречаются в дифференциальных уравнениях (неважно, интегрируемых или нет). Рассмотрим сначала уравнения, которые возникают из вариационных принципов. Пусть уравнение $F[u] = 0$ содержит m независимых переменных и d зависимых, то есть, $u = (u^1, \dots, u^d)$, $u^i = u^i(x_1, \dots, x_m)$. Это уравнение называется лагранжевым, если оно эквивалентно уравнению $\delta S = 0$ для экстремалей некоторого функционала (действия)

$$S = \int_{\Omega} L[x, u] dx_1 \dots dx_m. \quad (11.1)$$

Имеем

$$\delta S = \int_{\Omega} \frac{dL[x, u + \varepsilon \delta u]}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dx_1 \dots dx_m = \int_{\Omega} \sum_{i, \sigma} \frac{\partial L}{\partial u_{\sigma}^i} D^{\sigma}(\delta u^i) dx_1 \dots dx_m,$$

где $D^{\sigma} = D_{x_1}^{s_1} \dots D_{x_m}^{s_m}$, $\sigma = (s_1, \dots, s_m)$. Применим интегрирование по частям, предполагая, что вариации $\delta u = (\delta u^1, \dots, \delta u^d)$ таковы, что все граничные члены исчезают (например, можно рассматривать быстроубывающие или периодические граничные условия). Тогда можно, перекидывая производные с δu на L , преобразовать подынтегральное выражение $L_*(\delta u)$ к виду $\langle E(L), \delta u \rangle$, где E оператор Эйлера

$$E = (E_1, \dots, E_d), \quad E_i = \sum_{\sigma} (-D)^{\sigma} \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^i}.$$

В результате, мы получаем уравнения Эйлера–Лагранжа $E(L) = 0$, то есть

$$E_i(L) = \sum_{\sigma} (-D)^{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{\sigma}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (11.2)$$

Лагранжиан называется тривиальным, если эти уравнения выполняются тождественно, то есть, $L \in \ker E$. Как и в одномерном случае, приведем без доказательства характеристику этого ядра, как образ оператора полной дивергенции:

$$\ker E = \text{Im Div}, \quad \text{Div}(f_1, \dots, f_m) := D_{x_1}(f_1) + \dots + D_{x_m}(f_m).$$

Пример 11.1. Уравнения в частных производных. 1) Простейший пример — уравнение \sin -Гордон. Пусть

$$L = \frac{1}{2} u_x u_y - \frac{1}{2} \cos 2u,$$

тогда

$$E(L) = L_u - D_x(L_{u_x}) - D_y(L_{u_y}) = 0 \Leftrightarrow u_{xy} = \sin 2u.$$

2) Системе ЗШ–АКНС отвечает лагранжиан

$$L = u_t v + u_x v_x - u^2 v^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} E_u(L) &= L_u - D_x(L_{u_x}) - D_t(L_{u_t}) = 0 \Leftrightarrow -2uv^2 - D_x(v_x) - D_t(v) = 0, \\ E_v(L) &= L_v - D_x(L_{v_x}) = 0 \Leftrightarrow u_t - 2u^2 v - D_x(u_x) = 0, \end{aligned}$$

то есть,

$$u_t = u_{xx} + 2u^2 v, \quad -v_t = v_{xx} + 2uv^2. \quad (11.3)$$

3) Уравнение может приводиться к лагранжевому виду в результате какого-нибудь преобразования. Например, уравнение Буссинеска (1.6)

$$u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx},$$

как легко проверить, не является лагранжевым. Однако, оно связано подстановкой $u = v_x$ с уравнением

$$v_{tt} = v_{xxxx} - 6v_x v_{xx},$$

для которого $L = \frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_{xx}^2 + v_x^3$. Аналогично, если заменить $u = v_x$ в уравнении КдФ, без дальнейшего интегрирования, то получится уравнение

$$v_{xt} = v_{xxxx} - 6v_x v_{xx},$$

для которого $L = -\frac{1}{2}v_x v_t + \frac{1}{2}v_{xx}^2 + v_x^3$.

Пример 11.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В классической механике рассматриваются функционалы вида

$$S = \int_a^b L(t, u, \dot{u}) dt, \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial L}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

В частности, рассмотрим лагранжианы вида $L = \sum_i (a(\dot{u}_i) - b(u_{i+1} - u_i))$, где $i \in \mathbb{Z}_n$. Их механическая интерпретация — цепочка частиц на окружности, взаимодействующих только с соседними. В этом случае уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$a''(\dot{u}_i) \ddot{u}_i = (T - 1)b'(u_i - u_{i-1}),$$

где $T : u_i \mapsto u_{i+1}$ оператор сдвига. Простейшими примерами служат (неинтегрируемая) цепочка ФПУ (1.8)

$$\ddot{u}_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + (u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2,$$

для которой $a(x) = \frac{1}{2}x^2$, $b(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, и (интегрируемая) цепочка Тоды (1.10)

$$\ddot{u}_i = e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}}, \quad (11.4)$$

для которой $a(x) = \frac{1}{2}x^2$, $b(x) = e^x$.

Относительно цепочек можно сделать следующее замечание. Записывая лагранжиан в виде суммы по i , мы считаем, что u это многокомпонентный вектор, зависящий от одной независимой переменной t . Альтернативно, можно считать, что u это *скалярная* переменная, зависящая от двух независимых переменных, непрерывного t и дискретного i . При такой интерпретации, суммирование входит в определение функционала действия наравне с интегрированием, а лагранжианом считается только один член из суммы:

$$S = \sum_i \int_{\mathbb{R}} L[u] dt, \quad L = L(\dot{u}_i, u_i, u_{i+1}).$$

При этом L_* становится дифференциально-разностным оператором

$$L_* = L_{\dot{u}_i} D_t + L_{u_i} + L_{u_{i+1}} T,$$

а действие оператора Эйлера записывается как

$$E(L) = -D_t(L_{\dot{u}_i}) + L_{u_i} + T^{-1}(L_{u_{i+1}}).$$

Нетрудно видеть, что при вычислении δS для лагранжианов, содержащих как производные, так и сдвиги, операторы D и T перекидываются по правилам

$$A = a D^k T^j \rightarrow A^\dagger = (-D)^k T^{-j} a,$$

при этом общую формулу для вариационной производной всегда можно записать в виде $E(L) = L_*^\dagger(1)$. Понятие лагранжевости имеет смысл и для чисто дискретных уравнений, с суммированием по одномерной или многомерной решетке. Рассмотрим только один пример. Он также иллюстрирует ещё один важный приём, позволяющий работать с переменными на многообразиях, отличных от \mathbb{R}^d .

Пример 11.3. Уравнения со связями. Рассмотрим стационарную спиновую цепочку, или дискретный аналог уравнения Неймана (интегрируемость установлена Веселовым, 1987). Она определяется следующим действием:

$$S = \sum_i \langle u_i, J u_{i+1} \rangle, \quad u_i \in \mathbb{R}^d, \quad |u_i| = 1,$$

где J диагональная невырожденная матрица. Чтобы проварьировать S с учетом связи $|u_i| = 1$, модифицируем лагранжиан, добавляя к нему член со вспомогательной переменной λ_i (множитель Лагранжа):

$$L = \langle u_i, J u_{i+1} \rangle - \frac{\lambda_i}{2} (\langle u_i, u_i \rangle - 1).$$

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} E_u(L) = 0 : \quad J(u_{i+1} + u_{i-1}) &= \lambda_i u_i, \\ E_\lambda(L) = 0 : \quad \langle u_i, u_i \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Из первого уравнения имеем

$$u_{i+1} = -u_{i-1} + \lambda_i J^{-1} u_i,$$

и множитель λ_i находится при подстановке во второе уравнение:

$$1 = 1 - 2\lambda_i \langle J^{-1}u_i, u_{i-1} \rangle + \lambda_i^2 \langle J^{-2}u_i, u_i \rangle \Rightarrow \lambda_i = 2 \frac{\langle J^{-1}u_i, u_{i-1} \rangle}{\langle J^{-2}u_i, u_i \rangle}.$$

Таким образом,

$$u_{i+1} = -u_{i-1} + 2 \frac{\langle J^{-1}u_i, u_{i-1} \rangle}{\langle J^{-2}u_i, u_i \rangle} J^{-1}u_i.$$

Возникает отображение $A : (u_{i-1}, u_i) \rightarrow (u_i, u_{i+1})$, определяющее динамическую систему с дискретным временем.

Определение 11.1. Пусть дан функционал действия $S = \int_{\Omega} L[x, u] dx_1 \dots dx_m$. Эволюционное дифференцирование, определяемое уравнением $u_t = f[u]$ называется вариационной симметрией этого функционала, если оно переводит L в тривиальный лагранжиан:

$$\nabla_f(L) \in \text{Im Div}.$$

Для соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа $E[L] = 0$ вариационная симметрия является симметрией и в обычном смысле, то есть

$$\nabla_f(E[L])|_{E[L]=0} = 0.$$

Пример 11.4. Проверим, что потенциальное уравнение мКдФ $u_t = f = u_{xxx} + 2u_x^3$ определяет вариационную симметрию для уравнения sin-Гордон. Дифференцируем лагранжиан (символ \simeq обозначает равенство по модулю $\text{Im Div} = \text{Im } D_x + \text{Im } D_y$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_t(u_x u_y - \cos 2u) &= \frac{1}{2} D_x(f) u_y + \frac{1}{2} u_x D_y(f) + f \sin 2u \\ &= \frac{1}{2} D_x(f u_y) + \frac{1}{2} D_y(f u_x) + f(\sin 2u - u_{xy}) \\ &\simeq (u_{xxx} + 2u_x^3) \sin 2u - (u_{xxx} + 2u_x^3) u_{xy} \\ &= D_x(u_{xx} \sin 2u - u_{xx} u_{xy}) - \frac{1}{2} D_y(u_x^4) \\ &\quad - 2u_{xx} u_x \cos 2u + 2u_x^3 \sin 2u + u_{xx} u_{xxy} \\ &\simeq -D_x(u_x^2 \cos 2u) + \frac{1}{2} D_y(u_{xx}^2) \simeq 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Пример 11.5. Проверим, что уравнение

$$u_{i,t} = f = u_i'^2 + e^{u_{i+1}-u_i} + e^{u_i-u_{i-1}}$$

есть вариационная симметрия для цепочки Тоды с лагранжианом $L = \frac{1}{2} u_i'^2 - e^{u_{i+1}-u_i}$ (по сравнению с примером 11.2 мы изменили обозначение $\dot{u}(t)$ на $u'(x)$, а t используется в вариационной симметрии). Дифференцируем, опуская, для краткости, индекс

i и обозначая символом \simeq равенство по модулю $\text{Im Div} = \text{Im } D_x + \text{Im}(T - 1)$:

$$\begin{aligned}
D_t\left(\frac{1}{2}u'^2 - e^{u_1-u}\right) &= u'D_x(f) - e^{u_1-u}(T-1)(f) \\
&= u'(2u'u'' + e^{u_1-u}(u'_1 - u') + e^{u-u_1}(u' - u'_{-1})) \\
&\quad - (T-1)(e^{u-u_1}f) + f(e^{u_1-u} - e^{u-u_1}) \\
&\simeq u'(e^{u_1-u}(u'_1 - u') + e^{u-u_1}(u' - u'_{-1})) \\
&\quad + (u'^2 + e^{u_1-u} + e^{u-u_1})(e^{u_1-u} - e^{u-u_1}) \\
&= u'u'_1e^{u_1-u} - u'_{-1}u'e^{u-u_1} + e^{2(u_1-u)} - e^{2(u-u_1)} \\
&\simeq 0.
\end{aligned} \tag{*}$$

Два последние примера показывают, что выражение, получающееся при дифференцировании лагранжиана, можно привести, по модулю Im Div , к виду $fE(L)$, где f правая часть вариационной симметрии, а $E(L)$ само лагранжево уравнение. Соответствующие места в вычислениях помечены $(*)$ (во втором случае приводить в точности к такому виду было невыгодно, но, тем не менее, ясно, что это возможно). Оказывается, это свойство является общим. Сформулируем его для непрерывного случая.

Теорема 11.1 (Э. Нётер). Эволюционное дифференцирование $u_t = f$, $f = (f^1, \dots, f^d)$, определяет вариационную симметрию функционала (11.1), если и только если существуют функции $P_1[x, u], \dots, P_m[x, u]$ такие, что

$$\langle E(L), f \rangle = D_{x_1}(P_1) + \dots + D_{x_m}(P_m).$$

Доказательство. Дифференцирование L по t в точности повторяет вычисления при варьировании функционала S , с заменой δu на f :

$$\nabla_f(L) = \left. \frac{dL[x, u + \varepsilon f]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,\sigma} \frac{\partial L}{\partial u_\sigma^i} D^\sigma(f^i).$$

Перекидывая производные так же, как при выводе самих уравнений Эйлера–Лагранжа, получаем $\nabla_f(L) \simeq \langle E(L), f \rangle$, что и требуется. \square

Соотношения вида $\text{Div } P = 0$, выполняющиеся в силу рассматриваемого уравнения, называются законами сохранения (ср. с определением из лекции 2 для случая $m = 2$). Таким образом, теорема Нётер устанавливает, в вариационном случае, соответствие между обобщенными симметриями и законами сохранения.

11.2 Гамильтоновость в конечномерном случае

Пусть $\mathcal{F}(M)$ обозначает множество гладких вещественнозначных функций на конечномерном многообразии M . Операция $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ называется скобкой Пуассона, а многообразие M называется пуассоновым, если выполняются

следующие свойства:

$$\begin{aligned}
\{\alpha F + \beta G, H\} &= \alpha\{F, H\} + \beta\{G, H\} && (\text{билинейность}) \\
\{F, G\} &= -\{G, F\} && (\text{кососимметричность}) \\
\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} &= 0 && (\text{тождество Якоби}) \\
\{F, GH\} &= \{F, G\}H + \{F, H\}G && (\text{правило Лейбница})
\end{aligned}$$

для любых функций $F, G, H \in \mathcal{F}(M)$ и постоянных α, β .

Пусть u^1, \dots, u^d локальные координаты на M , тогда, в силу правила Лейбница, пуассонова структура определяется формулой

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^d J^{ij} \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial G}{\partial u^j} = \langle \text{grad } F, J \text{ grad } G \rangle, \quad J^{ij} = \{u^i, u^j\}.$$

В тех случаях, когда пуассонова структура задаётся в координатах, обычно выписывают только ненулевые скобки $\{u^i, u^j\}$, для одной из пар i, j или j, i . Тождество Якоби достаточно проверять для всех троек $i < j < k$:

$$\{u^i, \{u^j, u^k\}\} + \{u^j, \{u^k, u^i\}\} + \{u^k, \{u^i, u^j\}\} = 0.$$

В терминах структурной матрицы J , свойство кососимметричности и тождество Якоби выглядят так:

$$J^{ij} = -J^{ji}, \quad \partial_{u^s}(J^{ij})J^{sk} + \partial_{u^s}(J^{ki})J^{sj} + \partial_{u^s}(J^{jk})J^{si} = 0.$$

В частности, пуассонову структуру определяет произвольная постоянная кососимметрическая матрица J .

Рангом пуассоновой структуры в точке u называется ранг матрицы $J(u)$. В частности, пуассонова структура называется невырожденной, если J имеет ранг d . В силу свойства кососимметричности, пуассоновы структуры на нечётномерном многообразии всегда вырождены. Пусть пуассонова структура имеет постоянный ранг $r = 2m$ на M . Тогда существуют (по крайней мере локально) $d - r$ независимых функций, для которых скобка Пуассона тождественно равна нулю:

$$\{C_i, F\} = 0, \quad i = 1, \dots, d - r, \quad \forall F \in \mathcal{F}(M).$$

Они называются функциями Казимира, или аннуляторами пуассоновой структуры.

Динамическая система на многообразии M называется гамильтоновой, с гамильтонианом H , если она может быть представлена в виде

$$\dot{u}_i = \{u_i, H(t, u^1, \dots, u^d)\}. \quad (11.5)$$

Гамильтоновым векторным полем, отвечающим H , называется векторное поле X_H на M , однозначно определенное равенством

$$X_H(F) = \{F, H\} \Leftrightarrow X_H = \sum_i \{u_i, H\} \frac{\partial}{\partial u_i} \Leftrightarrow X_H^i = J^{ij} \frac{\partial H}{\partial u^j},$$

то есть, дифференцирование в силу системы (11.5).

Утверждение 11.2. *Выполняется тождество*

$$[X_H, X_G] = -X_{\{H, G\}}. \quad (11.6)$$

Таким образом, гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли векторных полей на M , изоморфную алгебре Ли функций $(\mathcal{F}(M), \{, \})$, при соответствии $H \rightarrow -X_H$.

Доказательство. Из тождества Якоби для $\{, \}$ имеем, для любой $F \in \mathcal{F}(M)$:

$$\begin{aligned} [X_H, X_G](F) &= X_H(X_G(F)) - X_G(X_H(F)) = X_H(\{F, G\}) - X_G(\{F, H\}) \\ &= \{\{F, G\}, H\} - \{\{F, H\}, G\} = -\{\{G, H\}, F\} \\ &= -X_{\{H, G\}}(F). \end{aligned} \quad \square$$

Пример 11.6. Каноническая скобка Дарбу: многообразие M имеет размерность $2d$ с локальными координатами $(q^1, \dots, q^d, p^1, \dots, p^d)$, и

$$\{q^i, p^i\} = 1, \quad i = 1, \dots, d, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

(нулевые скобки не выписываем, по договоренности). Эта скобка невырождена, а гамильтоновы уравнения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (11.7)$$

Например, цепочка Тоды (11.4) записывается так при

$$H = \sum_i \left(\frac{1}{2} p_i^2 + e^{q_{i+1} - q_i} \right).$$

Напомним переход к (11.7) от лагранжевых уравнений для $L(t, q, \dot{q})$, то есть,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Сначала вводятся импульсы $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, тогда $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Будем предполагать, что матрица $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ невырождена, тогда 1) уравнение можно преобразовать к виду, разрешенному относительно \ddot{q}_i ; 2) замена $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$ обратима. Далее, определяется гамильтониан

$$H(t, q, p) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(t, q, \dot{q}),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i; \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i + \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \dot{q}_i, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пример 11.7. Очень важным примером является скобка Ли–Пуассона. Она имеет вид

$$\{u_i, u_j\} = \sum_k C_{ij}^k u_k,$$

где C_{ij}^k структурные константы некоторой алгебры Ли g в базисе e_1, \dots, e_d :

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k.$$

Например, уравнения Эйлера–Пуассона (10.1)

$$\dot{u} = [u, Ju] + [\gamma, v], \quad \dot{v} = [v, Ju]$$

являются гамильтоновыми относительно такой скобки для алгебры Ли $e(3) = so(3) \oplus \mathbb{R}^3$ движений 3-мерного пространства,

$$\{u_i, u_j\} = \varepsilon_{ijk} u_k, \quad \{u_i, v_j\} = \varepsilon_{ijk} v_k, \quad \{v_i, v_j\} = 0.$$

Это вырожденная скобка, с аннуляторами $\langle u, v \rangle$ и $\langle v, v \rangle$, а гамильтонианом является $H = \frac{1}{2} \langle u, Ju \rangle - \langle \gamma, v \rangle$.

11.3 Гамильтоновость для эволюционных уравнений

В бесконечномерном случае, скобка Пуассона определяется для функционалов. Пусть, как и раньше, $u = (u^1, \dots, u^d)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, и вместо функций от u рассматриваются функционалы вида

$$F = \hat{f} = \int_{\Omega} f[x, u] dx, \quad G = \hat{g} = \int_{\Omega} g[x, u] dx, \quad H = \hat{h} = \int_{\Omega} h[x, u] dx,$$

с функциями $f, g, h \in \mathcal{F}[x, u]$, то есть, гладкими функциями от x, u и производных u_{σ} . Наиболее важный тип скобок Пуассона (так называемые локальные скобки) имеет вид

$$\{F, G\} = \int_{\Omega} E(f) J E(g) dx_1 \dots dx_m = \int_{\Omega} \sum_{i,j} E_i(f) J^{ij} E_j(g) dx_1 \dots dx_m,$$

для некоторого дифференциального оператора J (матричного, при $d > 1$). Свойство линейности

$$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha \{F, H\} + \beta \{G, H\}$$

выполняется для такой скобки автоматически, а правило Лейбница в данном случае не применимо (функционалы нельзя перемножать). Поэтому от скобки требуются только свойство кососимметричности и тождество Якоби:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Оператор J , для которого эти свойства выполняются, называется гамильтоновым. Гамильтоново уравнение, отвечающее функционалу \hat{h} , определяется, как

$$u_t^i = \sum_j J^{ij} (E_j(h)).$$

Свойство кососимметричности эквивалентно тому, что при матричном транспонировании и переходе к сопряженным операторам по правилу $A = \sum a_\sigma D^\sigma \rightarrow A^\dagger = \sum (-D)^\sigma a_\sigma$ оператор J меняет знак:

$$J^\dagger = -J, \quad (J^\dagger)^{ij} := (J^{ji})^\dagger.$$

Проверка тождества Якоби для заданного J может быть довольно нетривиальной, хотя имеется формализм, значительно упрощающий эту задачу (см. [10]). Мы приведем только одно промежуточное утверждение из этой теории.

Утверждение 11.3. *Тождество Якоби для кососимметрического оператора J эквивалентно тождеству*

$$p \nabla_{Jr}(J)q + r \nabla_{Jq}(J)p + q \nabla_{Jp}(J)r \in \text{Im Div} \quad (11.8)$$

для любых вектор-функций $p, q, r \in \mathcal{F}^d$.

Схема доказательства. Обозначим $p = E(f)$, $q = E(g)$, $r = E(h)$, тогда

$$\{\{F, G\}, H\} = \int_{\Omega} \nabla_{Jr}(pJq) dx = \int_{\Omega} \nabla_{Jr}(p)Jq + pJ\nabla_{Jr}(q) + p\nabla_{Jr}(J)q dx$$

Первые два подынтегральные члена эквивалентны следующим, с учетом кососимметричности J :

$$p_*(Jr)Jq - J(p)q_*(Jr).$$

Далее, можно доказать, что для $q = E(g)$ оператор q_* симметричен, $q_* = q_*^\dagger$, и преобразовать второе слагаемое к виду $-q_*(Jp)Jr$. После этого, при циклической перестановке p, q, r эти члены сокращаются, и под знаком интеграла остается выражение (11.8). Оно должно давать полную дивергенцию для любых p, q, r , являющихся вариационными производными, то есть оператор Эйлера от этого выражения должен равняться нулю. Утверждение вытекает из следующего общего свойства (принцип подстановки): если некоторое дифференциальное выражение от p, q, r обращается в 0 при всех p, q, r , являющихся вариационными производными, то оно равно 0 тождественно, при произвольных $p, q, r \in \mathcal{F}^d$. \square

В частности, если оператор J имеет постоянные коэффициенты, то $\nabla_f(J) = 0$ и тождество (11.8) выполняется автоматически. Таким образом, любой постоянный кососимметрический дифференциальный оператор гамильтонов.

Пример 11.8. Пусть $d = 1$, $m = 1$, $J = D_x$. Соответствующая скобка имеет вид

$$\{\hat{f}, \hat{g}\} = \int_{\Omega} E(f)D_x E(g) dx,$$

гамильтоновы уравнения имеют вид

$$u_t = D_x E(h).$$

В частности, уравнению КдФ отвечает гамильтониан $h = -\frac{1}{2}u_x^2 - u^3$, то есть, с точностью до множителя, плотность ρ_3 из таблицы 1.

Пусть $d = 2$ и $u^1 = u$, $u^2 = v$, $m = 1$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\{\hat{f}, \hat{g}\} = \int_{\Omega} E_u(f) E_v(g) - E_v(f) E_u(g) dx,$$

гамильтоновы уравнения имеют вид, напоминающий канонические уравнения (11.7):

$$u_t = E_v(h), \quad v_t = -E_u(h).$$

Такую структуру имеет, например, система ЗШ–АКНС (11.3), при $h = -u_x v_x + u^2 v^2$.

11.4 Бигамильтоновость

Определение 11.2. Пусть даны скобки Пуассона $\{, \}_1$, $\{, \}_2$. Говорят, что они согласованы (образуют бигамильтонову пару), если скобка $\{, \} = \{, \}_1 + \alpha \{, \}_2$ также является скобкой Пуассона. Уравнение называется бигамильтоновым, если оно может быть представлено в виде

$$u_t = \{u, H_1\}_1 = \{u, H_0\}_2. \quad (11.9)$$

Очевидно, при проверке согласованности скобок нужно проверять только тождество Якоби, все остальные свойства выполняются автоматически. Кроме того, достаточно считать $\alpha = 1$.

Бигамильтоновость является весьма специальным свойством, характерным именно для интегрируемых уравнений. Она лежит в основе следующего метода построения коммутативных иерархий.

Утверждение 11.4 (Схема Ленарда–Магри). *Предположим, что для уравнения (11.9) гамильтониан H_0 аннулирует $\{, \}_1$ и последовательность уравнений*

$$\{u, H_j\}_1 = \{u, H_{j-1}\}_2, \quad j = 1, 2, \dots$$

разрешима относительно H_1, H_2, \dots . Тогда все эти гамильтонианы находятся в инволюции относительно обеих скобок. Соответственно, потоки $u_{t_j} = \{u, H_j\}_1$ коммутируют.

Доказательство. Имеем

$$\{H_k, H_j\}_1 = \{H_k, H_{j-1}\}_2 = -\{H_{j-1}, H_k\}_2 = -\{H_{j-1}, H_{k+1}\}_1 = \{H_{k+1}, H_{j-1}\}_1.$$

Повторяя вычисление, получим, через j шагов, равенство

$$\{H_k, H_j\}_1 = \{H_{k+j}, H_0\}_1 = 0. \quad \square$$

Эта схема срабатывает и для конечномерных систем, и для цепочек, и для эволюционных уравнений. Ограничимся только одним уже известным нам примером. Для уравнения КдФ гамильтонову пару образуют операторы $J_1 = D_x$, $J_2 = D_x^3 - 4u D_x - 2u_x$. Проверка тождества Якоби для J_3 нетривиальна. Однако, если оно доказано, то согласованность с J_1 следует просто из замены $u \rightarrow u + \alpha$, так как при этом тождество Якоби не нарушится, а J_2 заменится на $J_2 - 4\alpha D_x$.

В результате, для потоков КдФ получаем рекуррентную схему

$$u_{t_j} = D_x E(h_j) = (D_x^3 - 4uD_x - 2u_x) E(h_{j-1}), \quad h_0 = u, \quad j = 1, 2, \dots$$

из раздела 3.3. Таким образом, оператор рекурсии оказывается отношением двух гамильтоновых операторов $R = J_2 J_1^{-1}$.

11.5 Задачи

Задача 11.1. (4 балла) Проверить, что следующие скобки Пуассона, для переменных u_i , $i \in \mathbb{Z}$, образуют бигамильтонову пару:

$$\begin{aligned} \{u_i, u_{i+1}\}_1 &= u_i u_{i+1}, \\ \{u_i, u_{i+1}\}_2 &= u_i u_{i+1} (u_i + u_{i+1}), \quad \{u_i, u_{i+2}\}_2 = u_i u_{i+1} u_{i+2} \end{aligned}$$

(приведены только ненулевые скобки). Здесь требуется проверить тождество Якоби для всех троек u_i, u_j, u_k ; это можно сделать прямым перебором, так как если индексы отличаются больше чем на 2, то соответствующая скобка равна 0. Найти гамильтонианы H_0, H_1 для цепочки Вольтерра, такие, что H_0 является аннулятором первой скобки и

$$u_{i,x} = u_i (u_{i+1} - u_{i-1}) = \{u_i, H_1\}_1 = \{u_i, H_0\}_2,$$

построить по схеме Ленарда–Магри следующий гамильтониан H_2 .

Список литературы

- [1] А.Т. Филиппов. Многоликий солитон. М.: Наука, 1990.
- [2] Дж.Б. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [3] S. Wolfram. The Mathematica Book, 5th ed., Wolfram Media, 2003.
- [4] R.H. Enns, G.C. McGuire. Nonlinear Physics with *Mathematica* for Scientists and Engineers. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [5] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
- [6] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [7] А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- [8] Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.
- [9] Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [10] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [11] У. Миллер. Симметрия и разделение переменных, М.: Мир, 1981.
- [12] C. Rogers, W.K. Schief. Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.) Солитоны. М.: Мир, 1983.
- [14] V.E. Zakharov (ed). What is Integrability? Springer-Verlag, 1991.
- [15] А.Г. Рейман, М.А. Семёнов-Тян-Шанский. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.
- [16] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal. Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Let.* **15** (1965) 240–243.
- [17] T. Dauxois. Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady. *Physics Today* **61:1** (2008) 55–57 [[arXiv:0801.1590v1](https://arxiv.org/abs/0801.1590v1)].
- [18] M.A. Porter, N.J. Zabusky, B. Hu, D.K. Campbell. Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics. *American Scientist* **97** (2009) 214–221.