Российская Академия Наук
Уфимский Институт Математики

на правах рукописи

Адлер Всеволод Эдуардович

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК

01.01.02 (дифференциальные уравнения)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор А.Б. Шабат

Уфа – 1994

Данный текст является перепечаткой. Все изменения перечислены ниже:

1. В оригинале было 126 стр. набранных на ChiWriter'е. При переводе на TEX слегка изменились формат страницы и начертание отдельных формул. Это касается, почти исключительно, лишь шрифтов и размеров. Примеры наиболее существенных отклонений: дроби типа $\frac{3}{2}\frac{z_x z_{xx}^2}{z_x^2+1}$ теперь пишутся, как в (3.18), $\frac{3z_x z_{xx}^2}{2(z_x^2+1)}$; в двух-трех случаях однострочная формула разбита на две или наоборот; в системе (1.5), (1.6) удалена общая фигурная скобка (в TEX'е нумерованные формулы трудно скобковать).

2. В оригинале нумерация описывалась фразой:

   > Нумерация утверждений, формул и рисунков своя в каждом разделе; при ссылках на другие разделы используется запись типа "Теорема 1.1", "формула (3.14)".

   В данной версии всегда используется нумерация через точку, и потому вторая часть фразы удалена (стр. 5). Кроме того, ликвидированы сокращения вида [33–36]. Все это сделано для того, чтобы можно было использовать hyperTEX. Заодно добавлены обратные ссылки на литературу.

3. Как водится, исправлено несколько коварно вкравшихся опечаток. Не считая орфографических погрешностей, это:

   - с. 14: [45,64] $\to$ [39,45]
   - с. 16: $\widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\pm1} \pm \alpha_k \to \widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\pm1} + \alpha_k$
   - с. 19, (4.5): $\Psi \to \psi$
   - с. 20: Леммой 8 $\to$ Леммой 4.2
   - с. 28: потенциала (13) состоит $\to$ потенциала (5.14) состоит
   - с. 30: и действуя на них операторами (1) $\to$ и действуя на них операторами A
   - с. 30: перейти от f_j к переменным (3.7) $\to$ перейти от f_j к переменным
   - с. 58: теорем 3 и 4 $\to$ теорем 15.1 и 15.2
   - с. 59: $q_{xy} = \operatorname{sh} q \to q_{xy} = \operatorname{sh} 2q$
   - с. 80 (формула, следующая за (23.5): $(2\alpha_2 + s) \to (2\alpha_2 - s)$

4. Рисунки 11.1, 13.1, 15.1, иллюстрирующие итерации отображений (численный счет) временно отсутствуют.

5. Добавлено данное пояснение.

Оглавление

Введение

В диссертации изучаются дискретные автопреобразования нелинейных интегрируемых цепочек. Простейшим примером служат преобразования

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_k = f_k + \dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, & \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \\ \widetilde{f}_{k-1} = f_{k-1} - \dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, & \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \\ \widetilde{f}_j = f_j, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k, k-1, \end{cases} \tag{0.1}$$

действующие на бесконечном наборе переменных f_j и параметров β_j цепочки

$$f'_{j+1} + f'_j = f^2_{j+1} - f^2_j + \beta_{j+1} - \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{0.2}$$

Эта цепочка задает последовательность преобразований Дарбу ([13], см. также [12, 22, 25, 38, 45]) для операторов Шредингера $-D^2 + u_j$, где $u_j = f^2_j - f'_j + \beta_j$, а формула (0.1) задает принцип нелинейной суперпозиции для этих преобразований. Известно, что преобразование Дарбу (0.2) является x-частью преобразования Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \beta) f_x \tag{0.3}$$

интегрируемого методом обратной задачи. Преобразования (0.1) позволяют размножать точные решения цепочки (0.2) и одновременно уравнения (0.3). Это применение принципа нелинейной суперпозиции давно известно [24, 28, 33, 38]. В диссертации развиваются две новых точки зрения на этот объект.

Во-первых, преобразования типа (0.1) приводят к дискретным отображениям, которые представляют самостоятельный интерес и активно изучаются в последнее время [7, 29, 31, 32, 43, 44]. Можно проверить, что в группе B, порожденной B_j, выполняются тождества

$$B^2_j = (B_j B_{j+1})^3 = (B_i B_j)^2 = 1, \quad i \neq j \pm 1, \tag{0.4}$$

то есть B изоморфна группе финитных перестановок бесконечного числа элементов. Преобразования (0.1) задают нелинейное действие этой группы в пространстве переменных f_j, β_j, то есть своего рода дискретную динамическую систему. В [41] показано, что при наложении условия периодичности

$$f_{j+N} = f_j, \quad \beta_{j+N} = \beta_j \tag{0.5}$$

эта система является интегрируемой в смысле дискретной версии теоремы Лиувилля, принадлежащей Веселову [43]. Известно [39, 64], что система (0.2), (0.5) определяет конечнозонные решения уравнения mKdV. В [45] показано, что она эквивалентна уравнению Лакса-Новикова или системе Дубровина, которые впервые были использованы для описания конечнозонных потенциалов [53, 58]. Таким образом, в периодическом случае преобразования (0.1), цепочка (0.2) и уравнение (0.3) представляют три разных уровня дискретизации одного и того же объекта — прямолинейной динамики на якобиане гиперэллиптической кривой.

Итак, с одной стороны, наличие у уравнения (0.3) нетривиальной дискретной симметрии позволяет строить его точные решения, а с другой стороны, наличие у преобразований (0.1) непрерывных симметрий приводит к интегрируемости соответствующего дискретного отображения.

Вторая точка зрения на преобразования (0.1) основана на связи между нелинейными цепочками и уравнениями Пенлеве, обнаруженной недавно в работах Шабата, Веселова и автора [3, 41, 45]. Эта связь доставляет целое новое семейство точнорешаемых спектральных задач, с потенциалами и волновыми функциями, выражающимися через трансценденты Пенлеве. Например, накладывая на цепочку (0.2) ослабленное условие периодичности

$$f_{j+3} = f_j, \quad \beta_{j+3} = \beta_j + 2, \tag{0.6}$$

получаем, что $y = f_1 - x$ удовлетворяет четвертому уравнению Пенлеве (P_4)

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y}$$

где $2a = \beta_2 - 2\beta_1 + \beta_0$, $2b = -(\beta_3 - \beta_2)^2$. Если соответствующий оператор Шредингера $-D^2 + u_1$ регулярен, то его спектр состоит из трех арифметических прогрессий $\beta_j + 2n$, $j = 1, 2, 3$, $n \geq 0$. При этом преобразования (0.1) приводят к дифференциальной подстановке, переводящей P_4 с одним набором параметров в P_4 с новыми параметрами. Такие автоподстановки уравнений Пенлеве известны под названием преобразований Бэклунда или Шлезингера (чтобы избежать путаницы, в диссертации используется второй термин) и изучались многими авторами, см. напр. [1, 5, 17, 18, 30, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55]. Они сводят интегрирование уравнения к случаю, когда параметры лежат в некоторой фундаментальной области, а также позволяют размножать точные решения.

Остальные уравнения Пенлеве (кроме первого) также имеют представления в виде периодически замкнутой цепочки преобразований Дарбу для подходящего дифференциального оператора, причем принцип нелинейной суперпозиции порождает преобразования Шлезингера и для этих уравнений. Преимущество такого представления состоит в более простой и симметричной записи как самих уравнений Пенлеве, так и их автопреобразований, что облегчает получение некоторых важных результатов. Кроме того, этот подход непосредственно обобщается на системы более высоких порядков, приводящие к высшим аналогам уравнений Пенлеве, и облегчает изучение групповых свойств преобразований Шлезингера. Например, из тождеств (0.4) сразу видим, что дискретная группа P_4 содержит аффинную группу Вейля $\widetilde{A}_2$ — результат, полученный ранее в работе [30].

Следует отметить, что, в отличие от рассмотренного выше случая периодического замыкания (0.5), дискретное отображение, возникающее после наложения условия (0.6), по-видимому неинтегрируемо. Его можно считать разностным аналогом 4-го уравнения Пенлеве (о различных способах дискретизации уравнений Пенлеве см. напр. [20, 21]).

Диссертация состоит из 23 разделов, объединенных в 5 глав. Нумерация утверждений, формул и рисунков своя в каждом разделе. В первой главе рассматривается преобразование Дарбу для оператора Шредингера, приводящее к цепочке (0.2). На этом наиболее простом примере подробно разбирается общая схема, применяемая далее к другим операторам. Разделы

1, 2, 4 включают в себя разложение преобразования Дарбу на элементарные, вывод принципа нелинейной суперпозиции, вронскианную технику. В 3-м разделе рассматриваются эволюционные уравнения, связанные с оператором Шредингера. Они связаны последовательностью дифференциальных подстановок типа преобразования Миуры, которые легко получить из замен переменных в цепочке (0.2). О возможности строить преобразования Миуры при помощи цепочечных замен см. напр. [65]. Раздел 5 содержит один новый способ построения точнорешаемых операторов Шредингера, обобщающий классический метод Крама [12] (Теорема 5.1).

Вторая глава посвящена разработке теории 4-го и 5-го уравнений Пенлеве на основе цепочки (0.2). Хотя большая часть результатов, касающихся этих уравнений, известна (в основном из работ Громака и Лукашевича, см. для ссылок [51]), мы воспроизводим их с целью продемонстрировать удобство цепочечного аппарата. Раздел 6 содержит краткое изложение подхода к P_4, P_5 и их высшим аналогам из работы [45]. В разделах 7, 10 показано, как преобразования (0.1) приводят к преобразованиям Шлезингера для этих уравнений. В разделах 8, 9 изучаются рациональные решения P_4. Для одного из двух классов рациональных решений с помощью результатов разделов 4, 5 удается выяснить, при каких значениях параметров эти решения регулярны на вещественной оси (Теорема 9.2).

В третьей главе рассматривается дискретное отображение B, возникающее из преобразований (0.1) после наложения условия периодичности (0.5). Цель первого раздела этой главы — показать, что оно интегрируемо в смысле работ [7, 43] (Теорема 11.1). В разделе 12 динамика исследуется более детально. Показано, что преобразование Абеля, линеаризующее систему Дубровина, линеаризует также и соответствие B, которое оказывается эквивалентным N-значному сдвигу на многообразии Якоби. В разделе 13 устанавливается связь рассматриваемого соответствия с задачей о перекройках многоугольника, которая впервые вызвала интерес автора к данной теме [41].

В четвертую главу включены по возможности разнообразные примеры интегрируемых цепочек, порожденных преобразованиями Дарбу для различных дифференциальных операторов, как скалярных, так и матричных. Как и для оператора Шредингера, для них выводятся принципы нелинейной суперпозиции, позволяющие строить точные решения ассоциированных уравнений в частных производных и, с другой стороны, дающие новые примеры интегрируемых отображений. Общая схема изложена в разделе 14. В разделе 15 более подробно разобран важный случай оператора Дирака, с которым связана нелинейная система Шредингера. В работах [19, 36, 56] изучались многополевые обобщения этой системы, а в работе [37] соответствующие им цепочки преобразований Бэклунда. В разделе 17 показано, что принцип нелинейной суперпозиции также допускает многополевое обобщение. Раздел 18 содержит примеры цепочек, отвечающих операторам второго порядка типа оператора Дирака. Среди ассоциированных систем — модели магнетика Гейзенберга и Ландау-Лифшица. Результаты этого раздела были получены совместно с Р.И. Ямиловым в [4].

В пятой главе приводятся цепочечные представления для уравнений P_2, P_3, P_6 и вырожденного случая P_5, пропущенного ранее. В разделе 19 описана модификация общей схемы, необходимость которой вызвана тем, что в случае матричных операторов приходится более явно учитывать калибровочные преобразования. Уравнение P_2 представлено при помощи преобразования Дарбу для скалярного дифференциального оператора 3-го порядка (раздел 20), а остальные — при помощи преобразований Дарбу для оператора Дирака (разделы 21, 22, 23). Использование принципа нелинейной суперпозиции позволяет вывести преобразования Шлезингера и исследовать их групповые свойства и для этих уравнений Пенлеве.

1 Одевающая цепочка

В первой главе рассматриваются преобразование Дарбу и одевающая цепочка для оператора Шредингера. На этом наиболее простом примере подробно разбирается общая схема, применяемая далее к другим операторам. Разделы 1, 2 включают в себя разложение преобразования Дарбу на элементарные и вывод принципа нелинейной суперпозиции. В 3-м разделе рассматриваются эволюционные уравнения, связанные с одевающей цепочкой и показывается, как ее автопреобразования позволяют строить многосолитонные решения mKdV. Раздел 4 содержит стандартную вронскианную технику, необходимую для дальнейшего. В 5-м разделе приводится один новый способ построения точнорешаемых операторов Шредингера, обобщающий классический метод Крама.

1 Преобразование Дарбу

Рассмотрим уравнение Шредингера с аналитическим потенциалом $u(x)$

$$\psi'' + (\lambda - u)\psi = 0 \tag{1.1}$$

или, в матричном виде,

$$\Psi' = U\Psi \tag{1.2}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Потенциалы $\bar{u}, u$ называются связанными преобразованием Дарбу, если существует аналитическая по x и полиномиальная по λ матрица

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая уравнению

$$W' = \bar{U}W - WU, \tag{1.3}$$

где $\bar{U} = U(\bar{u})$. Расписывая это уравнение поэлементно, получаем систему

$$\begin{array}{ll} a' = c - (u - \lambda)b, & b' = d - a, \\ c' = (\bar{u} - \lambda)a - (u - \lambda)d, & d' = (\bar{u} - \lambda)b - c. \end{array} \tag{1.4}$$

При $b = 0$ легко получаем, что $W = \mathrm{const}\, I$, где I единичная матрица. В этом случае преобразование Дарбу тривиально: $\bar{U} = U$.

Считая $b \neq 0$ и введя обозначения

$$\tau = \operatorname{tr} W = a + d, \quad \delta = \det W = ad - bc,$$

находим, что система (1.4) эквивалентна системе

$$2bb'' - {b'}^2 + 2(2\lambda - u - \bar{u})b^2 = 4\delta - \tau^2, \tag{1.5}$$

$$\tau' = (\bar{u} - u)b, \tag{1.6}$$

причем δ есть константа, а элементы a, d, c выражаются через b, τ, δ по формулам

$$2a = \tau - b', \quad 2d = \tau + b', \quad c^2 = (\tau^2 - 4\delta - b'^2)/(4b). \tag{1.7}$$

Легко показать, что при любых аналитических потенциалах $\bar{u}, u$ система (1.5), (1.6) имеет формальное решение в виде рядов Лорана по λ. Таким образом, если не накладывать условия полиномиальности, то любые 2 потенциала окажутся связанными некоторым преобразованием Дарбу и это понятие потеряет смысл.

Простейший нетривиальный случай преобразования Дарбу соответствует $b = 1$. Система (1.5), (1.6) принимает вид

$$4\lambda - 2(\bar{u} + u) = 4\delta - \tau^2, \quad \tau' = \bar{u} - u.$$

Положив $\tau = 2f,\ \delta = \lambda - \beta$ получаем отсюда

$$\bar{u} = u + 2f', \tag{1.8}$$

$$u = f^2 - f' + \beta. \tag{1.9}$$

Последняя формула определяет так называемое преобразование Миуры. Чтобы применить преобразование Дарбу к заданному потенциалу u, следует найти f из уравнения (1.9), после чего потенциал $\bar{u}$ строится по формуле (1.8). Легко убедиться, что интегрирование уравнения (1.9) эквивалентно решению уравнения (1.1) при $\lambda = \beta$. Поэтому на первый взгляд преобразование Дарбу не может быть особенно полезным при изучении уравнения (1.1). Существуют, тем не менее, достаточно широкие и весьма важные классы потенциалов, к построению и исследованию которых преобразование Дарбу применяется с большим успехом. Некоторые из них будут рассматриваться в последующих разделах.

Очевидно, композиция двух преобразований Дарбу (1.3) и $\overline{W}' = \bar{\bar{U}}\overline{W} - \overline{W}\bar{U}$ есть преобразование Дарбу между потенциалами $\bar{\bar{u}}, u$. Таким образом, можно строить сложные преобразования Дарбу, как композицию элементарных преобразований (1.8), (1.9). Это приводит к так называемой одевающей цепочке, то есть бесконечной системе ОДУ

$$f'_{j+1} + f'_j = f^2_{j+1} - f^2_j + \beta_{j+1} - \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

Изучению ее свойств посвящена большая часть настоящей главы. Из формул (1.7) находим, что представление нулевой кривизны

$$W'_j = U_{j+1}W_j - W_jU_j \tag{1.11}$$

для этой цепочки задается матрицами

$$W_j = \begin{pmatrix} f_j & 1 \\ f_j^2 + \beta_j - \lambda & f_j \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

По каждому решению цепочки (1.10) строится последовательность потенциалов

$$u_j = f_j^2 - f'_j + \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{1.13}$$

в которой каждые два соседних члена связаны элементарным преобразованием Дарбу (1.8), (1.9). Потенциалы u_{j+N} и u_j связаны преобразованием Дарбу с матрицей $W = W_{j+N-1} \dots W_j$.

Имеет место обратное утверждение: оказывается, что любое преобразование Дарбу представимо в виде композиции элементарных. Прежде, чем доказывать это, сделаем следующее замечание. Пусть матрица W задает преобразование Дарбу (1.3). Тогда ее определитель не зависит от x, $\det W = (\lambda - \beta_N) \dots (\lambda - \beta_0)$, где нули β_j могут быть и кратными. Если при некотором j имеем $W(\beta_j, x) \equiv 0$, то, в силу полиномиальности, W делится на $\lambda - \beta_j$ и ее можно сократить на этот скалярный множитель. Итак, не теряя общности можно считать, что

$$\operatorname{rank} W(\beta_j) = 1. \tag{1.14}$$

(Разумеется при некоторых $x = x_0$ не исключается и возможность полного вырождения $W(\beta_j, x_0) = 0$, но в силу аналитичности W такие точки образуют дискретное множество.) В дальнейшем мы всегда предполагаем условие (1.14) выполненным. Это избавляет нас от тривиальных последовательностей преобразований Дарбу типа $W(\beta, -f)W(\beta, f)$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть W задает нетривиальное преобразование Дарбу (1.3) и $\det W(\beta_0) = 0$. Тогда*
1) существует единственное разложение

$$W = \widetilde{W} W_0, \tag{1.15}$$

где матрица $\widetilde{W}$ полиномиальна по λ, а W_0 — матрица вида (1.12).
2) При этом f_0 и $u_0 = u$ связаны формулой вида (1.13).

Доказательство. Покажем, что

$$b(\beta_0, x) \not\equiv 0. \tag{1.16}$$

Действительно, в противном случае из равенства $\det W(\beta_0) = 0$ следует $a(\beta_0, x) \equiv 0$ или $d(\beta_0, x) \equiv 0$, откуда при помощи формул (1.4) легко получаем, что все элементы W равны 0, что противоречит предположению (1.14). Рассмотрим одномерное пространство $K(x) = \ker W(\beta_0, x)$. В силу (1.16) оно не может быть натянуто на вектор $(0, 1)^\top$ и, следовательно, содержит вектор вида $(1, -f_0)^\top$. Определив отсюда f_0 и вместе с тем матрицу W_0, рассмотрим матрицу $\widetilde{W} = W W_0^{-1}$. Имеем

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \\ \widetilde{c} & \widetilde{d} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_0 - \lambda} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_0 & 1 \\ f_0^2 + \beta_0 - \lambda & -f_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\beta_0 - \lambda} \begin{pmatrix} (\beta_0 - \lambda)b - f_0(a - bf_0) & a - bf_0 \\ (\beta_0 - \lambda)d - f_0(c - df_0) & c - df_0 \end{pmatrix}$$

В силу определения f_0 полиномы $a - bf_0$, $c - df_0$ делятся на $\lambda - \beta_0$, следовательно матрица $\widetilde{W}$ полиномиальна. Однозначность разложения (1.15) очевидна из построения.

Перейдем к доказательству второй части утверждения. Из формулы (1.15) имеем

$$b = \widetilde{a} + \widetilde{b} f_0, \quad d = \widetilde{c} + \widetilde{d} f_0,$$
$$a = b f_0 + \widetilde{b}(\beta_0 - \lambda), \quad \widetilde{c} = d f_0 + d(\beta_0 - \lambda).$$

Подставляя эти выражения в равенство $a' = c - (u - \lambda) b$ из системы (1.4), находим

$$(f_0' - f_0^2 + u - \lambda) b = (\lambda - \beta_0)(\widetilde{b}' - \widetilde{d} - \widetilde{b} f_0).$$

Полагая $\lambda = \beta_0$ и учитывая (1.16), получаем требуемую формулу. ∎

Теперь мы можем доказать сформулированное выше утверждение.

Теорема 1.2. *Любое нетривиальное преобразование Дарбу (1.3) есть композиция элементарных преобразований (1.8), (1.9).*

Доказательство. Рассмотрим разложение (1.15) и определим потенциал u_1 по формуле $u_1 = u_0 + 2f_0'$. Тогда потенциалы u_0 и u_1 связаны преобразованием Дарбу (1.8), (1.9), что равносильно матричному равенству $W_0' = U_1 W_0 - W_0 U_0$. Отсюда и из равенства (1.3) следует, что $\widetilde{W}$ также задает преобразование Дарбу: $\widetilde{W}' = \bar{U}\widetilde{W} - \widetilde{W} U_1$. При этом $\deg\det\widetilde{W} = \deg\det W - 1$. Таким образом, через несколько шагов мы придем к матрице $\widehat{W}$ с определителем, не зависящим от λ. Исходя из формул (1.5), (1.6), легко показать, что при $\delta = \mathrm{const}$ преобразование Дарбу тривиально, откуда получаем утверждение теоремы. ∎

Замечание. Разложение $W = W_N \dots W_0$, получаемое по приведенной схеме, не единственно, так как зависит от способа нумерации нулей $\det W$. Характер этой неоднозначности будет выяснен в следующем разделе.

2 Автопреобразования одевающей цепочки

Введем в рассмотрение преобразования B_k, $k \in \mathbb{Z}$, определяемые по формулам

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_k = f_k + \dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, & \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \\ \widetilde{f}_{k-1} = f_{k-1} - \dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{f_k + f_{k-1}}, & \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \\ \widetilde{f}_j = f_j, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k, k-1, \end{cases} \tag{2.1}$$

и действующие на бесконечном наборе переменных f_j и параметров β_j, $j \in \mathbb{Z}$. Эти преобразования обладают рядом замечательных свойств, в основе которых лежит следующее легко проверяемое утверждение.

Лемма 2.1. *Формула (2.1) задает единственное отличное от тождественного решение системы уравнений*

$$\widetilde{W}_k \widetilde{W}_{k-1} = W_k W_{k-1}, \quad \widetilde{W}_j = W_j, \quad j \neq k, k-1, \tag{2.2}$$

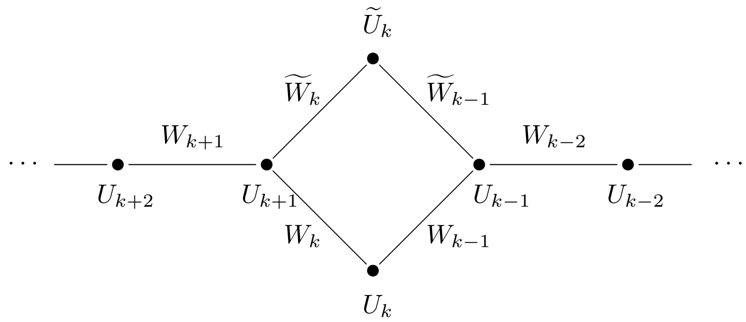
где W_j матрицы вида (1.12), $\widetilde{W}_j = W_j(\widetilde{f}_j, \widetilde{\beta}_j)$. ∎

Наиболее важным для теории уравнения Шредингера является следующее свойство преобразований B_k.

Теорема 2.2. *Преобразования (2.1) действуют на множестве одевающих цепочек (1.10).*

Доказательство. Утверждение можно легко проверить и непосредственно, но более содержательным является следующее рассуждение. Пусть переменные f_j удовлетворяют цепочке (1.10), тогда матрицы $\dots, W_{k+1}, W = W_k W_{k-1}, W_{k-2}, \dots$ задают некоторую последовательность преобразований Дарбу. Повторяя доказательство Теоремы 1.2, получаем, что матрицы $\widetilde{W}_k$, $\widetilde{W}_{k-1}$ нового разложения $W = \widetilde{W}_k \widetilde{W}_{k-1}$ также задают преобразования Дарбу и, следовательно, приводят к цепочке вида (1.10). ∎

Формулы (2.2) отражают коммутативность двух преобразований Дарбу (1.8), (1.9), что может быть выражено диаграммой



на которой нижнему обходу вершин отвечает исходная цепочка, а верхнему — преобразованная. По существу преобразования (2.1) эквивалентны так называемому принципу нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда для mKdV, который в более привычной форме будет выписан в следующем разделе.

Перейдем к изучению групповых свойств преобразований (2.1). Пользуясь единственностью разложения (1.15), легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Пусть матрица W задает преобразование Дарбу (1.3) и $\det W = (\lambda-\beta_N)\dots(\lambda-\beta_1)$. Каждой перестановке $\sigma \in S_N$ соответствует единственное разложение матрицы W на матрицы вида (1.12), такое, что*

$$W = W_N \dots W_1, \quad \det W_j = \lambda - \beta_{\sigma(j)}.$$ ∎

Отсюда сразу получаем

Следствие 2.4. *Код группы B, порожденной преобразованиями B_j, $j \in \mathbb{Z}$, задается тождествами*

$$B_j^2 = (B_j B_{j+1})^3 = (B_i B_j)^2 = 1, \quad i \neq j \pm 1. \tag{2.3}$$

Иными словами, B есть группа Кокстера с графом

Доказательство. Так как преобразования B_j действуют на параметрах β_j как перестановки, то очевидно, что преобразования, действующие на β_j тождественно, порождены B_j^2, $(B_jB_{j+1})^3$, $(B_iB_j)^2$, $i \neq j \pm 1$. Из Утверждения 2.3 следует, что эти преобразования тождественны и на переменных f. ∎

Кроме того, из Утверждения 2.3 следует, что рассмотрение преобразований типа

$$T: \quad \widetilde{W}_k \dots \widetilde{W}_{k-p} = W_k \dots W_{k-p}, \quad \widetilde{W}_j = W_j, \quad j \neq k, \dots, k-p,$$

обобщающих (2.2), не дает ничего нового: все такие преобразования есть композиция преобразований (2.2). Действительно, сравнивая определители, видим, что T действует на β_j как некоторая перестановка. Рассматривая композицию T с преобразованием из группы B, соответствующим обратной перестановке, получаем в силу Утверждения 2.3 тождественное преобразование.

Замечание. При точном определении группы B могут встретиться некоторые затруднения, связанные с бесконечным числом образующих. Ограничиться только финитными преобразованиями нельзя, так как, например, преобразования вида

$$\dots B_{k-2N} B_{k-N} B_k B_{k+N} B_{k+2N} \dots, \quad N > 1 \tag{2.4}$$

вполне корректно определены и будут нами в дальнейшем использоваться. Другой пример: преобразование

$$\dots B_{k-2} B_{k-1} B_k$$

определено корректно, но не имеет обратного.

На множестве цепочек (1.10) действует также ряд других преобразований, порождающих, вместе с B_j, некоторую группу G. Прежде всего, это масштабные преобразования

$$T_q: \quad \widetilde{f}_j(x) = q f_j(qx), \quad \widetilde{\beta}_j = q^2 \beta_j, \tag{2.5}$$

образующие однопараметрическую группу. Далее, это сдвиг

$$S: \quad \widetilde{f}_j = f_{j+1}, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_{j+1}, \tag{2.6}$$

и отражения

$$R_k: \quad \widetilde{f}_j = -f_{k-j}, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_{k-j}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Наконец, сюда надо добавить калибровочное преобразование, отвечающее за выбор начала координат на оси λ:

$$K_\alpha: \quad \widetilde{f}_j = f_j, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_j - \alpha \tag{2.8}$$

(ср. со случаем оператора Дирака, гл. 5).

Легко проверяются следующие тождества:

$$\begin{gathered} R_j^2 = 1, \quad R_i R_j = S^{i-j}, \quad B_{j+1} = S^{-1} B_j S, \\ B_i R_j = R_j B_{j-i+1}, \quad T_q K_\alpha = K_{q^2\alpha} T_q. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Очевидно также, что преобразования T_q и K_α коммутируют с остальными. Подгруппа чисто дискретных преобразований, порожденная B_j, S, R_j, является группой Кокстера с тремя образующими B_1, R_0, R_1 и графом

$$\overset{B_1}{\bullet}\overset{6}{\text{———}}\overset{R_0}{\bullet}\overset{\infty}{\text{———}}\overset{R_1}{\bullet}$$

Следует отметить, что многие важные примеры операторов Шредингера связаны с решениями одевающей цепочки, инвариантными относительно какого-либо элемента из группы G. Так, требование инвариантности относительно отражения R_0 приводит к граничному условию $f_0 = 0$ и многосолитонным потенциалам. Решения, инвариантные относительно сдвига S^N, характеризуют конечнозонные потенциалы [39, 45]. Комбинация сдвига S^N и калибровочного преобразования приводит к трансцендентам Пенлеве и их обобщениям [3, 41, 45], а комбинация S и растяжения (2.5) — к знаменитой функции Шабата [34].

При наложении на цепочку (1.10) какого-либо граничного условия группа преобразований, естественно, сужается. Очевидно, требование инвариантности цепочки относительно некоторого элемента $g \in G$ оставляет в качестве допустимых преобразования, коммутирующие с данным. Например, в важном случае $g = S^N$ группа B сужается до подгруппы, порожденной преобразованиями (2.4) и изоморфной группе Кокстера $\widetilde{A}_{N-1}$. Чтобы не усложнять обозначений, группы преобразований рассматриваемых далее редуцированных цепочек также обозначаются через G.

3 Преобразования Бэклунда для уравнений типа KdV. I

Другая форма записи преобразования Дарбу получается, если из соотношений (1.8), (1.9) исключить не u, а f. Введя новые переменные v_j по формулам

$$2v'_j = u_j, \quad v_{j+1} - v_j = f_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

получим цепочку

$$v'_{j+1} + v'_j = (v_{j+1} - v_j)^2 + \beta_j. \tag{3.2}$$

Она задает преобразования Бэклунда для потенциированного уравнения KdV

$$v_t = v_{xxx} - 6v_x^2 \tag{3.3}$$

найденные впервые Уолквистом и Эстабруком [38]. Преобразования (2.1) легко переписываются в новых переменных и принимают вид

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{v}_k = v_k - \dfrac{\beta_k - \beta_{k-1}}{v_{k+1} - v_{k-1}}, \quad \widetilde{v}_j = v_j, \quad j \neq k, \\ \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \quad \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k, k-1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Переписав формулу для $\widetilde{v}_k$ в виде

$$v_{k+1} = v_{k-1} - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{\widetilde{v}_k - v_k} \tag{3.5}$$

узнаем в ней хорошо известную формулу нелинейной суперпозиции преобразований Бэклунда (см. [25, 38], а также [9, 15, 28, 33]). Она позволяет

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, dashed, shift left] & v \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, dashed, shift left] \arrow[dl, dashed] \\
f \arrow[u, shift left] \arrow[d, dashed, shift left] & w \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, shift left] \arrow[dl, dashed] \\
g \arrow[u, shift left] \arrow[d, dashed, shift left] & \\
h \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3.1: Уравнения, связанные с KdV

по потенциалу v_{k-1} и двум потенциалам $v_k, \widetilde{v}_k$, связанным с ним преобразованием Бэклунда, чисто алгебраически строить результат двукратного применения преобразования Бэклунда — потенциал v_{k+1}.

Сама цепочка (1.10) задает преобразования Бэклунда между уравнениями mKdV

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2 + \beta) f_x, \tag{3.6}$$

различающимися параметрами $\beta = \beta_j$ и связанными с уравнением (3.3) при помощи преобразования Миуры (1.9) и потенциирования:

$$2v' = f^2 - f' + \beta.$$

Простая цепочечная замена (3.1), эквивалентная этому преобразованию, иллюстрирует общую схему из работ Ямилова [40, 65]. Легко выписать еще несколько цепочек, связанных с (1.10) и (3.2) аналогичным образом. Эти связи схематически изображены на рис. 3.1, где двойные стрелки соответствуют потенциированиям, пунктирные — цепочечным заменам, а простые — получающимся в результате их обращения дифференциальным подстановкам типа Миуры. Например, преобразования $v \to u$, $v \to f$ задаются формулой (3.1), а преобразование $f \to u$ формулой (1.9). Его обращение приводит к формуле

$$2(f_j^2 + \beta_j) = u_{j+1} + u_j.$$

В результате этих замен переписываются не только сами цепочки, но также соответствующие им эволюционные уравнения и формулы нелинейной суперпозиции. Они приведены ниже, причем для краткости в записи преобразований B_k выписаны только фактически преобразуемые переменные. Действие B_k на параметры β_j во всех случаях состоит в перестановке β_{k-1} и β_k, поэтому мы его также опускаем. Удобно ввести параметры

$$\alpha_j = \beta_j - \beta_{j-1}, \tag{3.7}$$

для которых, очевидно, имеем

$$\widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\pm1} + \alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_k = -\alpha_k.$$

На переменную u получаем уравнение KdV

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \tag{3.8}$$

цепочка принимает вид

$$u'_{j+1} + u'_j = (u_{j+1} - u_j)\sqrt{2(u_{j+1} + u_j) - 4\beta_j}, \tag{3.9}$$

а преобразование B_k определяется формулой

$$\widetilde{u}_k = u_k + \frac{2\alpha_k(u_{k+1} - u_{k-1})}{\left(\sqrt{u_{k+1} + u_k - 2\beta_k} + \sqrt{u_k + u_{k-1} - 2\beta_{k-1}}\right)^2}. \tag{3.10}$$

Замены $v \to w$, $w \to v$, $w \to f$ задаются соответственно формулами

$$w_j = v_{j+1} + v_j, \quad 2v = w - \sqrt{w' - \beta}, \quad f^2 + \beta = w',$$

причем для переменных w_j имеем

$$w_t = w_{xxx} - \frac{3w_{xx}^2}{4(w_x - \beta)} - 3w_x^2,$$
$$\sqrt{w'_{j+1} - \beta_{j+1}} + \sqrt{w'_j - \beta_j} = w_{j+1} - w_j,$$
$$\widetilde{w}_k = w_k - \frac{\alpha_k}{w_k - w_{k-1}}, \quad \widetilde{w}_{k-1} = w_{k-1} - \frac{\alpha_k}{w_k - w_{k-1}}$$

Замены $w \to g$, $f \to g$, $g \to f$ задаются соответственно формулами

$$g_{j+1} = w_{j+1} - w_j, \quad g_{j+1} = f_{j+1} + f_j, \quad 2f = g + (g' - \alpha)/g.$$

На переменные g_j получаем

$$g_t = g_{xxx} - 3\frac{g_x g_{xx}}{g} + \frac{3g_x^3}{2g^2} - \frac{3}{2}\left(g^2 + \frac{\alpha^2}{g^2} + 2\beta + 2\beta_{-1}\right) g_x, \tag{3.11}$$
$$(g_{j+1}g_j)' = g_{j+1}g_j(g_{j+1} - g_j) + \alpha_{j+1}g_j + \alpha_j g_{j+1}, \tag{3.12}$$
$$\widetilde{g}_{k\pm1} = g_{k\pm1} \pm \frac{\alpha_k}{g_k}. \tag{3.13}$$

Наконец, замены $g \to h$, $h \to g$ задаются формулами

$$h_j = g_{j+1}g_j, \quad 2g_j = (R_j - h'_j)/(h_j - \alpha_{j+1})$$

и на переменные h_j получаем

$$h_t = h_{xxx} - \frac{3h_x(h_{xx} + 2\dot{P})^2}{2(h_x^2 + 4P)} + 6(2h - \beta_1 + \beta - \beta_{-1})h_x, \tag{3.14}$$
$$(R_{j+1} + h'_{j+1})(R_j + h'_j) = 4h_{j+1}(h_{j+1} + \alpha_{j+1})(h_j + \alpha_j), \tag{3.15}$$
$$\begin{aligned} &\widetilde{h}_{k+1} = h_{k+1}\Big(1 + \frac{\alpha_k}{h_k}\Big), && \widetilde{h}_k = h_k + \alpha_k, \\ &\widetilde{h}_{k-1} = h_{k-1} - \alpha_k, && \widetilde{h}_{k-2} = h_{k-2}\Big(1 - \frac{\alpha_k}{h_{k-1}}\Big), \end{aligned} \tag{3.16}$$

где
$$R_j^2 = h_j'^2 + 4P_j(h_j), \quad P_j(h_j) = h_j(h_j + \alpha_j)(h_j - \alpha_{j+1}).$$

Уравнение (3.11) после замены $g = \exp(\varphi)$ переходит в так называемое экспоненциальное уравнение Калоджеро–Дегаспериса

$$\varphi_t = \varphi_{xxx} - \frac{1}{2}\varphi_x^3 - \frac{3}{2}(e^{2\varphi} + \alpha^2 e^{-2\varphi} + 2\beta + 2\beta_{-1})\varphi_x, \tag{3.17}$$

а уравнение (3.14) в результате замены

$$h = H(z), \quad \dot{H}^2 = 4P(H)$$

и переобозначения

$$\wp = F + (\alpha_1 + \alpha)^2/F + 2(\alpha_1 - \alpha)/3, \quad F = H - \alpha_1\alpha/H - \alpha_1 + \alpha$$

переходит в эллиптическое уравнение Калоджеро-Дегаспериса

$$\begin{gathered} z_t = z_{xxx} - \frac{3z_x z_{xx}^2}{2(z_x^2 + 1)} - \frac{3}{2}\wp(z) z_x(z_x^2 + 1) - 2(\beta_1 + \beta + \beta_{-1}) z_x, \\ \dot{\wp}^2 = 4(\wp + \tfrac{4}{3}(\alpha_1 - \alpha))(\wp + \tfrac{4}{3}(\alpha_1 + 2\alpha))(\wp - \tfrac{4}{3}(2\alpha_1 + \alpha)). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Эти уравнения рассматривались в [8], см. также [9], стр. 58 русского перевода. Последовательность дифференциальных подстановок, связывающих уравнения (3.8), (3.6), (3.17), (3.18) приводилась в [60].

В заключение этого раздела покажем, как преобразование (2.1) позволяет строить точные решения уравнения mKdV. Полагая $f_0 = \beta_0 = 0$, легко находим решение-кинк

$$f_1 = -\gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 x + \gamma_1^3 t + c_1), \quad \gamma_1^2 = -\beta_1.$$

Предположим, что результат k-кратного преобразования Бэклунда уже найден в виде
$$f_k = F_k(x, t; \beta_1, c_1, \dots, \beta_{k-1}, c_{k-1}, \beta_k, c_k).$$

Разрешив формулу для преобразования B_{k+1} относительно переменных $f_{k+1}, \widetilde{f}_{k+1}$:

$$f_{k+1} = -f_k + \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{f_k - \widetilde{f}_k}, \quad \widetilde{f}_{k+1} = -\widetilde{f}_k + \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{f_k - \widetilde{f}_k}$$

находим, что

$$F_{k+1}(x, t; \beta_1, c_1, \dots, \beta_k, c_k, \beta_{k+1}, c_{k+1}) = -F_k + \frac{\beta_{k+1} - \beta_k}{F_k - \widetilde{F}_k}$$

где $\widetilde{F}_k = F_k(x, t; \beta_1, c_1, \dots, \beta_{k-1}, c_{k-1}, \beta_{k+1}, c_{k+1})$. Используя вронскианную технику, развитую в следующем разделе, можно показать, что при выборе

$$0 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k > \dots, \quad \operatorname{Im} c_{2j+1} = 0, \quad \operatorname{Im} c_{2j} = \pi i/2$$

все построенные таким образом решения будут гладкими на вещественной оси (ср. [63]).

4 Спектральные свойства одевающей цепочки

Значение преобразований Дарбу для спектральной теории операторов Шредингера очевидно из следующих его свойств.

Теорема 4.1. *Пусть матрица W задает преобразование Дарбу (1.3) между потенциалами $\bar{u}$ и u. Тогда*
1) Если Ψ есть решение уравнения (1.2), то $\overline{\Psi} = W\Psi$ удовлетворяет уравнению (1.2) с потенциалом $\bar{u}$, то есть $\overline{\Psi}' = \overline{U}\overline{\Psi}$.
2) Если $\Psi = (\psi, \psi')^\top \in \ker W|_{\lambda=\beta_0}$, то Ψ есть решение уравнения (1.2) при $\lambda = \beta_0$.

Доказательство. 1) Первое утверждение очевидно. 2) Из (1.3) при $\lambda = \beta_0$ получаем $W'\Psi + WU\Psi = 0$, откуда $W(\Psi' - U\Psi) = 0$. В силу предположения (1.14) отсюда следует $\Psi' - U\Psi = \mu\Psi$. Однако из структуры матрицы U видно, что левая часть последнего равенства имеет вид $(0, *)^\top$, следовательно $\mu = 0$. ∎

На приведенной теореме основано множество методов построения точно решаемых операторов Шредингера. Чтобы как-то описать это множество, воспользуемся тем, что, согласно Теореме 1.2, любое преобразование Дарбу эквивалентно отрезку одевающей цепочки. В этом разделе мы ограничимся рассмотрением половины цепочки, считая, что индекс j в формулах (1.10), (1.13) принимает только неотрицательные значения. Удобно выделить 3 основных метода, применяемых, как правило, в сочетании друг с другом.

1) Диагональный метод позволяет по известному решению f_j одевающей цепочки (1.10) для каждого потенциала u_j из последовательности (1.13) и каждого собственного числа $\lambda = \beta_i$, $i \geq j$, построить волновую функцию $\psi_{j,i}$, то есть решение уравнения

$$\psi''_{j,i} + (\beta_i - u_j)\psi_{j,i} = 0.$$

В начале процесса нам известны функции, соответствующие диагонали $i = j$ (см. рис. 4.1), так как, согласно свойству 2) Теоремы 4.1, достаточно положить

$$\psi_{j,j} = \exp\Big(-\int\limits_{x_0}^{x} f_j\, dx\Big). \tag{4.1}$$

Свойство 1) позволяет найти остальные ψ-функции по формуле

$$\Psi_{j,i} = W_j^{-1}(\beta_i)\Psi_{j+1,i}, \quad i > j. \tag{4.2}$$

Часто вместо матричных операторов W_j^{-1} и W_j удобно рассматривать соответственно операторы рождения и уничтожения

$$A_j^+ = -D + f_j, \quad A_j = D + f_j. \tag{4.3}$$

В терминах этих операторов преобразование Дарбу определяется, как переход от одного оператора Шредингера $L = -D^2 + u$ к другому по формулам

$$L_j = A_j^+ A_j + \beta_j, \quad L_{j+1} = A_j A_j^+ + \beta_j. \tag{4.4}$$

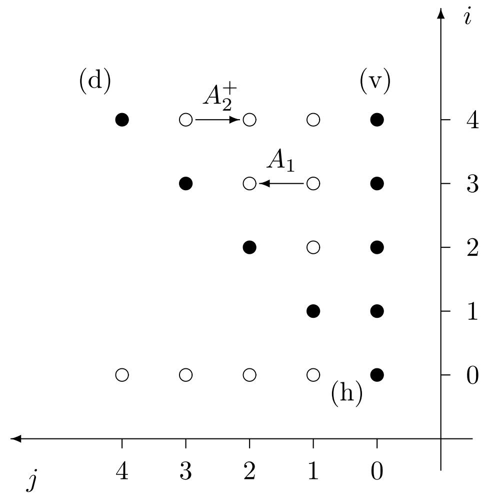


Рис. 4.1: На плоскости (j, i) черными кружками изображены ψ-функции, которые необходимо знать на начальном этапе диагонального (d), вертикального (v) и горизонтального (h) методов. Светлыми кружками обозначены ψ-функции, которые строятся в результате применения этих методов.

С использованием операторов рождения формула (4.2) примет вид

$$\psi_{j,i} = A_j^+(\psi_{j+1,i}), \quad i > j. \tag{4.5}$$

Данный метод позволяет, в сочетании с горизонтальным методом (см. ниже), для каждого потенциала найти столько волновых функций, сколько в цепочке различных параметров β_j.

2) Вертикальный метод является обратным к диагональному. Он позволяет построить решение одевающей цепочки по известным волновым функциям $\psi_{0,i}$ одного потенциала u_0 (см. рис. 4.1). Этот метод замечателен тем, что дает явную формулу, выражающую потенциалы (1.13) через известные $\psi_{0,i}$.

Обозначим через $\langle y_0, \dots, y_n \rangle = \det\left((y_j^{(s)})\right)_0^n$ вронскиан произвольных гладких функций y_j. Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть* $y_0 \neq 0$, $A = D - y_0'/y_0$. *Тогда*

$$\langle y_0, \dots, y_n \rangle = y_0 \langle A(y_1), \dots, A(y_n) \rangle. \tag{4.6}$$

Доказательство. Рассматривая обе части формулы (4.6) как линейные дифференциальные операторы, действующие на y_n, находим, что ядра этих операторов совпадают, откуда следует, что они отличаются на скалярный множитель. Сравнение коэффициентов при $y_n^{(n)}$ приводит к равенству $\langle y_0, \dots, y_{n-1} \rangle = y_0 \langle A(y_1), \dots, A(y_{n-1}) \rangle$, что позволяет доказать утверждение по индукции. ∎

Переход от потенциала u_j к u_{j+1} осуществляется при помощи преобразования Дарбу с матрицей W_j вида (1.12), где, согласно свойству 2) Теоремы 4.1, следует выбрать

$$f_j = -\psi'_{j,j}/\psi_{j,j}. \tag{4.7}$$

При этом, согласно свойству 1), $\psi_{j+1,i}$ определяются по формуле

$$\psi_{j+1,i} = \psi'_{j,i} + f_j\psi_{j,i} = A_j(\psi_{j,i}), \quad i > j. \tag{4.8}$$

(Чтобы получить $\psi_{j+1,j}$, следует применять A_j к ψ-функции, дополнительной к $\psi_{j,j}$, см. следующий метод.) Пользуясь Леммой 4.2, легко доказать формулы

$$\langle\psi_{0,0},\dots,\psi_{0,j}\rangle = \psi_{0,0}\dots\psi_{j,j},$$
$$\langle\psi_{0,0},\dots,\psi_{0,j},\psi_{0,i}\rangle = \psi_{0,0}\dots\psi_{j,j}\psi_{j+1,i}, \quad i > j.$$

Введем обозначения

$$\Delta_{j+1} = \langle\psi_{0,0},\dots,\psi_{0,j}\rangle, \quad \Delta_0 = 1, \tag{4.9}$$
$$\Delta_{j+1}(y) = \langle\psi_{0,0},\dots,\psi_{0,j},y\rangle, \quad \Delta_0(y) = y, \tag{4.10}$$

где y произвольная функция. Для волновых функций потенциала u_j имеем явные формулы

$$\psi_{j,i} = \Delta_j(\psi_{0,i})/\Delta_j, \quad i \geq j, \tag{4.11}$$

выражающие их через волновые функции потенциала u_0. В частности, для функций f_j из (4.7) получаем

$$f_j = -D(\ln(\Delta_{j+1}/\Delta_j)). \tag{4.12}$$

Для потенциала u_j имеем, согласно (1.8),

$$u_j = u_0 + 2f'_0 + \dots + 2f'_{j-1},$$

следовательно

$$u_j = u_0 - 2D^2(\ln(\Delta_j)). \tag{4.13}$$

Формулы (4.7), (4.8) позволяют построить отрезок одевающей цепочки длиной, равной числу изначально известных функций $\psi_{0,i}$. Чтобы продолжить цепочку дальше, можно использовать следующий метод.

3) Горизонтальный метод похож на предыдущий, но отличается от него тем, что требует для своего осуществления всего лишь одну волновую функцию $\psi_{0,0}$ для потенциала u_0. Цепочка, построенная по этому методу, не содержит параметров, так как все β_j равны β_0.

Переход от потенциала u_j к u_{j+1} основан на попеременном применении свойств 1) и 2) Теоремы 4.1 и происходит по следующей схеме. Сначала по решению ψ_j находим, пользуясь свойством 2), $f_j = -\psi'_j/\psi_j$ и операторы A^+_j, A_j. Сразу воспользоваться свойством 1) нельзя, так как $A_j(\psi_j) = 0$ ($W_j(\beta_0)\Psi_j = 0$ на матричном языке), поэтому необходимо найти второе линейно независимое решение φ уравнения (1.1) по формуле

$$\varphi = \psi\int\limits_{x_0}^{x}\psi^{-2}\,dx. \tag{4.14}$$

Далее, применяя A_j и снова пользуясь формулой (4.14), строим фундаментальную систему решений

$$\psi_{j+1} = \psi_j^{-1}, \quad \varphi_{j+1} = \psi_j^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_j^2 \, dx$$

для уравнения Шредингера с потенциалом $u_{j+1} = u_j + 2f_j'$. Найденные ψ-функции можно изобразить на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\psi_j^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_j^2 \, dx = \varphi_{j+1} \arrow[rr, "A_j^+"] & & \psi_j \arrow[dl, "A_j"] \\
& 0 & \\
\psi_j^{-1} = \psi_{j+1} \arrow[ur, "A_j^+"] & & \varphi_j = \psi_j \int\limits_{x_0}^{x} \psi_j^{-2} dx \arrow[ll, "A_j"]
\end{tikzcd}$$

Заметим, что повторение описанной процедуры приводит к преобразованию Дарбу с матрицей $W_j^+ = W_j(-f_j)$ и возвращает нас к исходному потенциалу u_j. Поэтому для получения нетривиального результата на следующем шаге следует использовать линейную комбинацию $c\psi_{j+1} + \varphi_{j+1}$. При этом получаем

$$u_{j+2} = u_j + 2f_j' + 2f_{j+1}' = u_j - 2D\Big(\psi_j^2\Big(c + \int\limits_{x_0}^{x} \psi_j^2 \, dx\Big)^{-1}\Big).$$

При помощи описанного метода в работе [2] были построены рациональные решения уравнения KdV. Однако для построения точно решаемых потенциалов он малопригоден, поскольку все происходит на одном и том же спектральном уровне $\lambda = \beta_0$. Тем не менее этот метод существенно усиливает предыдущие, позволяя продолжить процесс построения ψ-функций и соответствующих им потенциалов за границы треугольной области на рис. 4.1.

В заключение этого раздела рассмотрим вопрос о действии преобразований (2.1) на функции $\psi_{0,i}$. Из схемы построения одевающей цепочки вертикальным методом, то есть по формулам (4.12) видно, что результат не является единственным, так как зависит от нумерации волновых функций. Имеет место простое утверждение.

Утверждение 4.3. *Перенумерация волновых функций $\psi_{0,k} \leftrightarrow \psi_{0,k-1}$ приводит в терминах f_j, построенных по формулам (4.12), к преобразованию (2.1).*

Доказательство. Легко видеть, что при перестановке $\psi_{0,k}$ и $\psi_{0,k-1}$ выполняются равенства $\widetilde{\Delta}_j = \pm\Delta_j$, $j \neq k$, откуда $\widetilde{f}_j = f_j$ при $j \neq k, k-1$. Таким образом, при $j < k-1$ операторы A_j не меняются и, следовательно, ψ-функции, построенные по формуле (4.8) при $j \leq k-1$ преобразуются по правилу

$$\widetilde{\psi}_{j,k-1} = \psi_{j,k}, \quad \widetilde{\psi}_{j,k} = \psi_{j,k-1}.$$

Обозначим для краткости $\psi_{k-1,k-1} = y$, $\psi_{k-1,k} = p$, $w = yp' - y'p$. Выбирая в качестве основного набора ψ-функций вместо $\psi_{0,i}$ функции $\psi_{k-1,i}$ получаем, согласно (4.12),

$$f_{k-1} = -y'/y, \quad f_k = y'/y - w'/w.$$

После преобразования имеем $\widetilde{y} = p$, $\widetilde{p} = y$, $\widetilde{w} = -w$ и

$$\widetilde{f}_{k-1} = -p'/p, \quad \widetilde{f}_k = p'/p - w'/w.$$

Учитывая равенство $w' = (\beta_{k-1} - \beta_k)yp$, легко получаем отсюда формулы (2.1). ∎

5 Удаление собственных значений

До сих пор все выкладки носили формально-алгебраический характер. Более тонких рассуждений требует выяснение условий, при которых потенциалы, построенные из данного при помощи преобразований Дарбу, обладают нужными аналитическими свойствами, а функции (4.11) являются собственными функциями некоторой краевой задачи. Рассмотрим, например, потенциал $u = u_0 \in C^\infty(a,b)$ на конечном отрезке в виде ямы с асимптотикой

$$u(x) \sim \alpha/(x-a)^2,\ x \to a, \quad u(x) \sim \beta/(x-b)^2,\ x \to b, \tag{5.1}$$

где $\alpha, \beta > 0$, и дополним уравнение (1.1) граничными условиями

$$\psi(a) = \psi(b) = 0. \tag{5.2}$$

Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ собственные значения рассматриваемой краевой задачи, а φ_m собственная функция, отвечающая λ_m. В настоящем разделе, как и в работе Крама [12], в качестве исходных волновых функций используются только собственные функции. Положив $\psi_{0,j} = \varphi_{m_j}$ и пользуясь формулой (4.13), получим потенциал

$$\widetilde{u} = u - 2D^2(\ln\langle\varphi_{m_0}, \dots, \varphi_{m_{n-1}}\rangle), \tag{5.3}$$

который, вообще говоря, может иметь особенность внутри (a,b). Возникает вопрос, как следует выбирать m_j, чтобы потенциал $\widetilde{u}$ также представлял собой потенциальную яму на (a,b), а функции (4.11) были его собственными. В [12, 14] показано, что если выбирать собственные функции подряд, начиная с нулевой, то есть $m_j = j$, то потенциал (5.3) будет регулярным. При этом функция $\widetilde{\psi}_{n+s}$ построенная по формуле (4.10) будет его s-й собственной функцией, то есть спектр $\widetilde{u}$ получается из спектра u удалением собственных значений $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$. Оказывается, однако, что такой выбор далеко не единствен. Наша цель в этом разделе — доказать следующую основную теорему.

Теорема 5.1. *Пусть номера $m_0, \dots, m_{n-1}$, расположенные в порядке возрастания, образуют несколько отрезков натурального ряда*

$$0, \dots, M'_0;\ M_1, \dots, M'_1; \quad \dots; \quad M_s, \dots, M'_s, \quad M'_j < M_{j+1} - 1,$$

(первого отрезка может и не быть). Для регулярности потенциала (5.3) необходимо и достаточно, чтобы все отрезки $M_j, \dots, M'_j$, кроме отрезка $0, \dots, M'_0$, состояли из четного числа членов. При этом спектр $\widetilde{u}$ совпадает со спектром u, в котором вычеркнуты собственные значения λ_{m_0}, …, $\lambda_{m_{n-1}}$. ∎

По индукции легко доказывается, что все функции f_j, построенные по формуле (4.7), имеют асимптотику вида

$$f(x) \sim \gamma/(x-a),\ x \to a, \quad f(x) \sim \delta/(x-b),\ x \to b, \tag{5.4}$$

потенциалы u_j асимптотику вида (5.1), а функции (4.11) удовлетворяют условию (5.2) и, кроме того, условию

$$\psi'(a) = \psi'(b) = 0. \tag{5.5}$$

Поэтому нужно выяснить лишь, при каких условиях потенциалы u_j будут регулярными в интервале (a,b). Так как собственная функция основного состояния φ_0 не имеет нулей между a и b, то очевидно, что выбор $\psi_{0,0} = \varphi_0$ приведет к регулярному потенциалу

$$u_1 = u_0 - 2D^2(\ln\varphi_0). \tag{5.6}$$

Как мы увидим дальше, спектр u_1 получается из спектра u вычеркиванием λ_0, откуда сразу следует, что все потенциалы

$$u_n = u_0 - 2D^2(\ln\langle\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}\rangle),$$

введенные в работе [12], регулярны. Это наблюдение еще не исчерпывает все возможности, которые, как видно из следующей леммы, можно расширить, отказавшись от требования, чтобы регулярными были все промежуточные потенциалы (4.13).

Лемма 5.2. *Функция $w = \varphi_m\varphi_n' - \varphi_m'\varphi_n$, $m<n$, сохраняет знак на (a,b) если и только если $n = m+1$.*

Доказательство. Имеем

$$w' = \delta\varphi_m\varphi_n, \quad w'' = \delta(\varphi_m\varphi_n' + \varphi_m'\varphi_n), \quad \delta = \lambda_m - \lambda_n.$$

Пусть $x_1 < \dots < x_m$ нули φ_m, а $y_1 < \dots < y_n$ нули φ_n в интервале (a,b). Очевидно

$$w'(x_i) = w'(y_j) = 0,$$
$$w''(x_i) = -\delta w(x_i), \tag{5.7}$$
$$w''(y_j) = \delta w(y_j). \tag{5.8}$$

Пусть сначала $n > m+1$. Тогда найдутся 2 соседних нуля y_k, y_{k+1} функции φ_n, между которыми нет нулей φ_m, так что они одновременно будут соседними нулями w'. Так как нули w', очевидно, простые, то $w''(y_k)$ и $w''(y_{k+1})$ имеют разные знаки. Из (5.8) видим, что w обращается в ноль на (y_k, y_{k+1}).

Пусть теперь $n = m+1$. Тогда нули x_i и y_j функции w' распределяются следующим образом:

$$y_1 < x_1 < y_2 < \dots < x_m < y_{m+1}.$$

Учитывая (5.7), (5.8), находим, что знак w во всех точках x_i, y_j один и тот же. Отсюда следует, что w не меняет знака на отрезке $[y_1, y_{m+1}]$, так как в противном случае w' имела бы кроме x_i и y_j еще и другие нули. При $x < y_1$ функция w' сохраняет знак, следовательно w монотонна и, так как $w(a) = 0$, то w не обращается в 0. Аналогично показывается, что w сохраняет знак и при $x > y_{m+1}$. ∎

Теперь ясно, что выбор $\psi_{0,0} = \varphi_m$, $\psi_{0,1} = \varphi_{m+1}$ также приводит к регулярному потенциалу

$$u_2 = u_0 - 2D^2(\ln\langle\varphi_m, \varphi_{m+1}\rangle), \tag{5.9}$$

хотя промежуточный потенциал u_1, вообще говоря, будет иметь особенность внутри интервала (a, b).

Лемма 5.3. *Спектры потенциалов (5.6) и (5.9) совпадают со спектром потенциала* u_0, *в котором вычеркнуты, соответственно, члены* λ_0 *и* λ_m, λ_{m+1}.

Доказательство. Учитывая формулы (5.4), (5.5) и действуя на собственные функции потенциалов (5.6) или (5.9) оператором A_0^+, (соответственно $A_0^+A_1^+$), убеждаемся, что новых собственных значений не добавляется. Аналогично, действуя операторами A_0 и A_1A_0 на собственные функции потенциала q, получаем, что при $\lambda \neq \lambda_0$, (соответственно $\lambda \neq \lambda_m, \lambda_{m+1}$) собственные значения сохраняются.

Покажем, что спектр потенциала (5.6) не содержит λ_0. Действительно, согласно формуле (4.11) потенциал u_1 имеет собственную функцию $\psi_{1,1} = \langle\varphi_0, \varphi_1\rangle/\varphi_0$, отвечающую собственному значению λ_1. В силу Леммы 5.2 она не имеет нулей, следовательно λ_1 — наименьшее собственное значение u_1.

Покажем теперь, что λ_m и λ_{m+1} не являются собственными значениями потенциала (5.9). Для этого рассмотрим потенциал u_2, построенный при помощи функций φ_{m-1}, φ_m и потенциал u_4, построенный при помощи собственных функций $\widetilde{\varphi}_{2,m+1}, \widetilde{\varphi}_{2,m+2}$ потенциала $\widetilde{u}_2$. Они регулярны, так как получаются в результате двукратного применения формулы (5.9). С другой стороны, u_4 можно построить и по собственным функциям $\varphi_{2,m-1}$, $\varphi_{2,m+2}$ потенциала u_2. В силу Леммы 5.2 отсюда вытекает, что эти функции отвечают соседним собственным значениям u_2, то есть между λ_{m-1} и λ_{m+2} собственных значений нет. ∎

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Доказательство. Достаточность) Очевидно, что если m_j удовлетворяют условию теоремы, то потенциал $\widetilde{u}$ можно построить за несколько шагов вида (5.6) или (5.9). Это обеспечивает его регулярность и доказывает утверждение о спектре.

Необходимость) Допустим, что m_j не удовлетворяют условию теоремы, но потенциал $\widetilde{u}$ регулярен. Пусть отрезок $M_l, \dots, M_l'$ самый правый в натуральном ряду, состоящий из нечетного числа членов. Будем строить новые регулярные потенциалы по формуле (5.6), начиная с $\widetilde{u}$. Через несколько шагов все отрезки левее $M_l, \dots, M_l'$ сольются в один, и мы придем к потенциалу $\bar{u}$, построенному по функциям φ_m с номерами

$$0, \dots, M_{l-1}';\ M_l, \dots, M_l';\ M_{l+1}, \dots, M_{l+1}'; \dots$$

Потенциал $\widehat{u}$, построенный по этим же функциям, кроме $\varphi_{M_l'}$, удовлетворяет условию теоремы и, по доказанному, регулярен. Так как $\widehat{\varphi}_{M_l'}$ не есть его основное состояние, то потенциал

$$\bar{u} = \widehat{u} - 2D^2(\ln \widehat{\varphi}_{M_l'}),$$

не может быть регулярным. Полученное противоречие завершает доказательство. ∎

Так как введенные выше потенциалы имеют особенности на концах отрезка (a,b), то полнота системы их собственных функций нуждается в обосновании. Очевидно, для этого достаточно, чтобы полнота имела место для исходного потенциала u и потенциалов (5.6), (5.9), после чего утверждение получается по индукции. Индуктивный переход к потенциалу (5.6) обоснован в работе [12]; мы воспроизведем его, так как для потенциала (5.9) доказательство основано на той же идее, хотя технически немного сложнее.

Утверждение 5.4. *Пусть система собственных функций φ_j потенциала u полна в $L^2(a,b)$, тогда собственные функции $\widetilde{\varphi}_j$ потенциала (5.6) или (5.9) также образуют полную систему.*

Доказательство. Пусть $f \in L^2(a,b)$, а g гладкая функция на (a,b), такая что $||f-g||^2 < \varepsilon$ и $g(x) = 0$ при $a < x < a+\delta$, $b-\delta < x < b$. Очевидно, достаточно показать, что g можно приблизить отрезком ряда $\sum_0^\infty C_s\widetilde{\varphi}_s$ с произвольной точностью.

Случай потенциала (5.6). Пусть

$$h = -A_0^+ g = g' + \varphi_0' g/\varphi_0, \quad \varphi_0 h = (\varphi_0 g)'.$$

Очевидно, $\int\limits_a^b \varphi_0 h\, d\xi = \varphi_0 g|_a^b = 0$, поэтому приближение h функциями φ_j имеет вид $h = \sum\limits_1^N c_s\varphi_s + \eta$, $||\eta||^2 < \varepsilon$. Так как

$$(\varphi_i\varphi_j' - \varphi_i'\varphi_j)' = (\lambda_i - \lambda_j)\varphi_i\varphi_j,$$

то

$$\int\limits_a^x \varphi_0\varphi_s\, d\xi = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_s}(\varphi_0\varphi_s' - \varphi_0'\varphi_s) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_s}\varphi_0\widetilde{\varphi}_s,$$

где $\widetilde{\varphi}_s = A_0\varphi_s$, $s \neq 0$, есть собственные функции потенциала u_1. Следовательно

$$\varphi_0 g = \int\limits_a^x \varphi_0 h\, d\xi = \sum_1^N c_s \int\limits_a^x \varphi_0\varphi_s\, d\xi + \int\limits_a^x \varphi_0\eta\, d\xi = \sum_1^N C_s\widetilde{\varphi}_s + \zeta,$$

где $C_s = c_s/(\lambda_0 - \lambda_s)$,

$$\zeta = \frac{1}{\varphi_0}\int\limits_a^x \varphi_0\eta\, d\xi = -\frac{1}{\varphi_0}\int\limits_x^b \varphi_0\eta\, d\xi. \tag{5.10}$$

В силу соотношений (5.4) выполняются оценки

$$\int\limits_a^x \varphi_0^2\, d\xi = o(\varphi_0^2),\ x \to a, \quad \int\limits_x^b \varphi_0^2\, d\xi = o(\varphi_0^2),\ x \to b. \tag{5.11}$$

(Действительно, $2\lim\limits_{x\to a}\int\limits_a^x \varphi_0^2\,d\xi/\varphi_0^2 = \lim\limits_{x\to a}\varphi_0/\varphi_0' = \lim\limits_{x\to a} 1/f_0 = 0$.) Пользуясь неравенством Шварца, из (5.10) и (5.11) получаем

$$\zeta < M\int\limits_a^b \eta^2\,d\xi < M\varepsilon \Rightarrow \int\limits_a^b \zeta^2\,d\xi < \widetilde{M}\varepsilon,$$

и индуктивный переход в этом случае обоснован.

Случай потенциала (5.9). Рассмотрим оператор

$$A = A_{m+1}A_m = \Big(D - \big(\ln\frac{w}{\varphi_m}\big)'\Big)\big(D - (\ln\varphi_m)'\big) =$$
$$= \Big(D - \big(\ln\frac{w}{\varphi_{m+1}}\big)'\Big)\big(D - (\ln\varphi_{m+1})'\big),$$

где $w = \langle\varphi_m, \varphi_{m+1}\rangle$. Пусть $h = A^+(g)$. Имеем

$$\varphi_m h = \Big(\frac{\varphi_m^2}{w}\Big(\frac{w}{\varphi_m}g\Big)'\Big)', \quad \varphi_{m+1}h = \Big(\frac{\varphi_{m+1}^2}{w}\Big(\frac{w}{\varphi_{m+1}}g\Big)'\Big)',$$

откуда

$$P = \int\limits_a^x \varphi_m h\,d\xi = \varphi_m g' + \big(\varphi_m\frac{w'}{w} - \varphi_m'\big)g,$$

$$Q = \int\limits_a^x \varphi_{m+1} h\,d\xi = \varphi_{m+1} g' + \big(\varphi_{m+1}\frac{w'}{w} - \varphi_{m+1}'\big)g.$$

Из последних двух равенств находим

$$wg = \varphi_{m+1}P - \varphi_m Q. \tag{5.12}$$

Рассмотрим приближение h функциями φ_j :

$$h = \sum_{\substack{s=0\\ s\neq m,m+1}}^{n} c_s\varphi_s + \eta, \quad ||\eta||^2 < \varepsilon.$$

Для P получаем формулу

$$P = \sum c_s\int\limits_a^x \varphi_m\varphi_s\,d\xi + \int\limits_a^x \varphi_m\eta\,d\xi = \sum\frac{c_s}{\lambda_m - \lambda_s}(\varphi_m\varphi_s' - \varphi_m'\varphi_s) + \int\limits_a^x \varphi_m\eta\,d\xi$$

и аналогично

$$Q = \sum\frac{c_s}{\lambda_{m+1} - \lambda_s}(\varphi_{m+1}\varphi_s' - \varphi_{m+1}'\varphi_s) + \int\limits_a^x \varphi_{m+1}\eta\,d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что собственные функции $\widetilde{\varphi}_s = A\varphi_s$, $s \neq m, m+1$, потенциала (5.9) равны

$$\widetilde{\varphi}_s = ((\lambda_m\varphi_m\varphi_{m+1}' - \lambda_{m+1}\varphi_m'\varphi_{m+1})/w - \lambda_s)\varphi_s - \frac{w'}{w}\varphi_s'.$$

С учетом этой формулы, подстановка выражений для P и Q в формулу (5.12) дает

$$g = \sum_{\substack{s=0 \\ s\neq m,m+1}}^{N} C_s \widetilde{\varphi}_s + \zeta,$$

где $C_s = c_s/(\lambda_m - \lambda_s)(\lambda_{m+1} - \lambda_s)$,

$$\zeta = \Big(\varphi_{m+1} \int\limits_a^x \varphi_m \eta \, d\xi - \varphi_m \int\limits_a^x \varphi_{m+1} \eta \, d\xi\Big)/w.$$

Нормируем функции φ_j так, что $\varphi_j = (x-a)^p + O((x-a)^{p+1})$, $x \to a$ (где p зависит от a в формуле (5.4)), тогда $w = O((x-a)^{2p+1})$. Переписав формулу для ζ в виде

$$\zeta = \frac{1}{2w}\Big((\varphi_{m+1} - \varphi_m) \int\limits_a^x (\varphi_{m+1} + \varphi_m)\eta \, d\xi - (\varphi_{m+1} + \varphi_m) \int\limits_a^x (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\eta \, d\xi\Big),$$

имеем при $x \to a$ оценку

$$\zeta^2 < \frac{1}{2w^2}\Big((\varphi_{m+1} - \varphi_m)^2 \int\limits_a^x (\varphi_{m+1} + \varphi_m)^2 \, d\xi + \\ + (\varphi_{m+1} + \varphi_m)^2 \int\limits_a^x (\varphi_{m+1} - \varphi_m)^2 \, d\xi\Big) \int\limits_a^b \eta^2 \, d\xi = O(x-a)\varepsilon.$$

Аналогичная оценка выполняется при $x \to b$, следовательно

$$\zeta^2 < M\varepsilon, \quad \int\limits_a^b \zeta^2 \, d\xi < \widetilde{M}\varepsilon,$$

и утверждение доказано. ∎

Для примера выясним, что можно получить, начиная с бесконечной прямоугольной ямы, то есть потенциала $u_0 = 0$ при $x \in (a, b) = (0, 2\pi)$. Легко убедиться, что Лемма 5.2 верна и в этом случае, хотя формула (5.4) и не выполняется. Удаление основного состояния по формуле (5.6) приводит к простейшему из потенциалов Пешля-Теллера [62], с. 102

$$u_1 = 2/\sin^2 x.$$

Формула (5.9) приводит к потенциалу

$$u_2 = -2D^2(\ln(\sin(2m+1)x - (2m+1)\sin x)).$$

Оба эти потенциала имеют асимптотику (5.4), следовательно процесс построения потенциалов можно продолжать дальше. Так мы получаем семейство потенциальных ям вида

$$u = -2D^2(\ln\langle \sin(m_0+1)x, \sin(m_1+1)x, \ldots, \sin(m_{n-1}+1)x \rangle),$$

где m_j — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию Теоремы 5.1. Спектр потенциала u состоит из последовательности $1, \dots, m^2, \dots$, из которой удалены члены $(m_j+1)^2$.

Доказанные выше утверждения практически без изменений переносятся на случаи оси и полуоси, в предположении, что $u(x) \to +\infty$, $x \to \infty$. Рассмотрим второй классический пример — гармонический осциллятор с потенциалом $u_0 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$ и собственными функциями $\varphi_m = \exp(-\frac{x^2}{4})H_m(\frac{x}{\sqrt{2}})$, где

$$H_m(x) = \exp(x^2)(-D)^m \exp(-x^2) \tag{5.13}$$

полиномы Эрмита. Новые потенциалы имеют вид

$$u = \frac{1}{4}x^2 + n - \frac{1}{2} - 2D^2\Big(\ln\langle H_{m_0}(x/\sqrt{2}), \dots, H_{m_{n-1}}(x/\sqrt{2})\rangle\Big), \tag{5.14}$$

где числа m_j должны удовлетворять условию Теоремы 5.1. Спектр потенциала (5.14) состоит из последовательности $0, 1, 2, 3, \dots$, из которой вычеркнуты члены m_j. Как отмечено в [12], применение формулы (5.6) (то есть выбор $m_j = j$) приводит лишь к прибавлению константы и не дает ничего нового. Таким образом, все нетривиальные потенциалы получаются в данном случае при помощи формулы (5.9). Простейший пример — потенциал

$$u = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} - 2D^2(\ln\langle H_1(x/\sqrt{2}), H_2(x/\sqrt{2})\rangle) = \\ = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{x^2+1} - \frac{8}{(x^2+1)^2},$$

недавно подробно изучавшийся в работе [52].

Очевидное решение цепочки (1.10) $f_j = x/2$, $\beta_j = j$ отвечает выбору собственных функций гармонического осциллятора подряд: $\psi_{0,j} = \varphi_j$. Применяя преобразования (2.1), мы можем произвольно менять их порядок и, следовательно, находить потенциалы (5.14) чисто алгебраическим путем.

2 Уравнения Пенлеве P_4 и P_5

Эта глава посвящена разработке теории 4-го и 5-го уравнений Пенлеве на основе одевающей цепочки. Хотя полученные результаты, касающиеся этих уравнений, в основном уже известны из работ Громака и Лукашевича, мы воспроизводим их с целью продемонстрировать удобство цепочечного аппарата. В разделе 6 кратко излагается подход к P_4, P_5 и их высшим аналогам из работы [45]. В разделах 7, 10 показано, как автопреобразования цепочки приводят к преобразованиям Шлезингера для этих уравнений. В разделах 8, 9 изучаются рациональные решения P_4. При помощи результатов разделов 4, 5 удается выяснить, при каких значениях параметров эти решения регулярны на вещественной оси.

6 Спектральная теория 4-го и 5-го трансцендентов Пенлеве

В этом разделе воспроизводится подход Веселова и Шабата [45], позволивший установить новый любопытный класс точно решаемых операторов Шредингера $-D^2+u$ со спектром вида

$$m\alpha,\ \beta_1+m\alpha,\ \dots,\ \beta_{N-1}+m\alpha, \quad m=0,1,2,\dots, \quad \alpha>0.$$

Как и для гармонического осциллятора ($N=1,\ u=x^2$), в общем случае построение собственных функций осуществляется при помощи операторов рождения–уничтожения (4.3), но при $N\ge 3$ требует, вообще говоря, введения некоторой трансцендентной функции. На одевающую цепочку (1.10) накладывается требование инвариантности относительно комбинации $S^N K_\alpha$ сдвига и калибровочного преобразования, что приводит к условию периодического замыкания

$$f_{j+N}=f_j, \quad \beta_{j+N}=\beta_j+\alpha. \tag{6.1}$$

При этом цепочка (1.10) сводится к динамической системе

$$f'_j+f'_{j-1}=f_j^2-f_{j-1}^2+\alpha_j, \quad j\in\mathbb{Z}_N \tag{6.2}$$

где обозначено $\alpha_j=\beta_j-\beta_{j-1}$. При $N=3,4$ эта система эквивалентна уравнениям Пенлеве P_4 и P_5 соответственно [41, 45]. С каждым ее решением связан набор операторов Шредингера $L_j=-D^2+u_j$, где

$$u_j=f_j^2-f'_j, \tag{6.3}$$

причем операторы A_{j-1}, A_j^+ переводят волновые функции оператора L_j в волновые функции операторов L_{j-1}, L_{j+1} соответственно. При помощи (4.4) легко показать, что оператор $\widehat{A}_j=A_{j+N-1}\dots A_j$ удовлетворяет уравнению

$$[\widehat{A}_j, L_j]=\alpha\widehat{A}_j \tag{6.4}$$

(ср. [16]). Используя в качестве затравочных волновые функции

$$\varphi_j=\exp\bigl(-\int f_j\,dx\bigr),$$

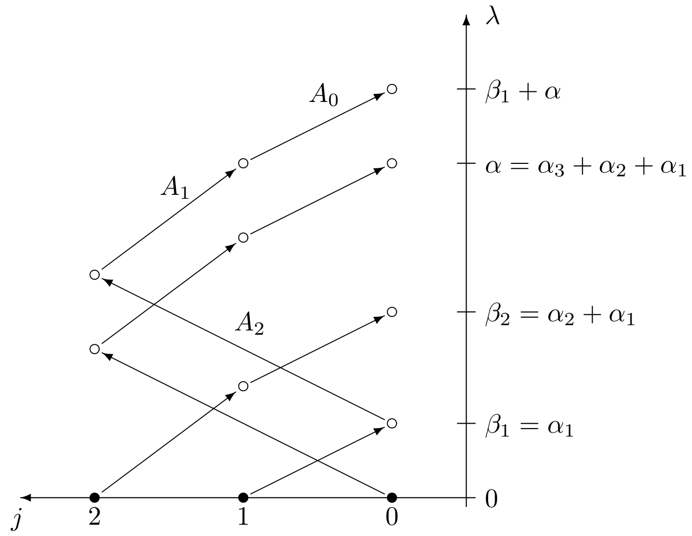


Рис. 6.1: Начало процесса построения ψ-функций операторов L_0, L_1, L_2. На оси λ отмечены собственные значения L_0.

и действуя на них операторами A, можно построить волновые функции для всего спектра. Очевидно, приведенная схема является примером применения диагонального метода из раздела 4, с тем лишь отличием, что, как видно из сравнения формул (1.13) и (6.3), потенциалы u_j отнормированы сдвигом на константу так, чтобы волновые функции φ_j соответствовали собственному значению $\lambda = 0$. С учетом этого различия и условия периодичности рис. 4.1 следует заменить на рис. 6.1, где для наглядности взято $N = 3$ и предполагается, что все $\alpha_j > 0$.

Поскольку сам потенциал u_j также выражается через f_j, его аналитические свойства a priori не известны. Поэтому для обоснования метода необходимо выяснить, при каких условиях построенный потенциал будет регулярным, а φ_j — его собственной функцией. В разделе 9 эта задача решается для весьма специального, но достаточно интересного класса рациональных решений P_4, приводящих к потенциалам вида (5.14).

Связь между системой (6.2) при $N = 3, 4$ и уравнениями P_4 и P_5 устанавливается соответственно в разделах 7 и 10. Понятно, что не теряя общности можно положить

$$\sum f_j = \alpha x/2. \tag{6.5}$$

Кроме того, масштабное преобразование (2.5) позволяет превратить параметр $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ в произвольную отличную от 0 константу.

7 Групповые свойства P_4

Рассмотрим сначала случай $N = 3$. Удобно перейти от f_j к переменным

$$g_j = f_j + f_{j-1} = \alpha x/2 - f_{j+1}. \tag{7.1}$$

При этом система (6.2), (6.5) принимает вид

$$g_j' = g_j(g_{j+1} - g_{j-1}) + \alpha_j, \quad j \in \mathbb{Z}_3, \tag{7.2}$$

$$g_0 + g_1 + g_2 = \alpha x, \quad \alpha > 0. \tag{7.3}$$

Полагая

$$y(x) = -qg_0(qx), \quad q = \sqrt{2/\alpha}, \tag{7.4}$$

и исключая лишние переменные, находим, что y удовлетворяет P_4

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y} \tag{7.5}$$

где

$$a = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}, \quad b = -2\frac{\alpha_0^2}{\alpha^2} \tag{7.6}$$

Перейдем теперь к изучению дискретной группы G, действующей на множестве систем вида (7.2), (7.3). Прежде всего, в нее входят преобразования B_j (3.13) (строго говоря, их комбинации (2.4)). Сдвиг (2.6) приводит к преобразованию

$$S: \quad \widetilde{g}_j = g_{j+1}, \quad \alpha_j = \alpha_{j+1}. \tag{7.7}$$

Отражения (2.7) меняют знак параметра α, поэтому, чтобы сохранить нормировку (7.3), приходится рассматривать их комбинацию с масштабным преобразованием. Преобразование $X_k = T_{-i}R_{2k-1}$ имеет вид

$$X_k: \quad \begin{cases} \widetilde{g}_k(x) = ig_k(-ix), \quad \widetilde{g}_{k\pm1}(x) = ig_{k\mp1}(-ix), \\ \widetilde{\alpha}_k = \alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\mp1}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Легко проверяется, что подгруппа G, порожденная X_j, конечна, а подгруппа, порожденная B_j, изоморфна бесконечной группе Кокстера $\widetilde{A}_2$.

Ясно, что перечисленные преобразования можно переписать и в терминах уравнения (7.5). Например, S и B_1 дают соответственно дифференциальные подстановки

$$\widetilde{y} = -\frac{y' + y^2 + 2xy + 2\alpha_0/\alpha}{2y}, \tag{7.9}$$

$$\widetilde{y} = y + \frac{4\alpha_1 y/\alpha}{y' + y^2 + 2xy + 2\alpha_0/\alpha}$$

из одного P_4 в другое. (При этом коэффициенты a и b пересчитываются согласно соотношениям (7.6).) Подстановка (7.9) впервые была найдена в работе [54].

Важно отметить, что соответствие между множеством уравнений P_4 и множеством систем (7.2), (7.3) не является взаимно-однозначным: данному уравнению P_4 соответствует, вообще говоря, 2 системы, различающиеся выбором знака в формуле $\alpha_0 = \pm\alpha\sqrt{-b/2}$. Эти 2 системы связаны преобразованием B_0, которое на уравнении (7.5) действует тождественно. Данное явление называется "склейкой параметров" [51] и встречается также при рассмотрении других уравнений Пенлеве. Благодаря этому наблюдению при построении решений P_4 можно ограничиться подстановкой (7.9) и заменой $\widetilde{y}(x) = iy(-ix)$, эквивалентной преобразованию X_0. Несмотря на

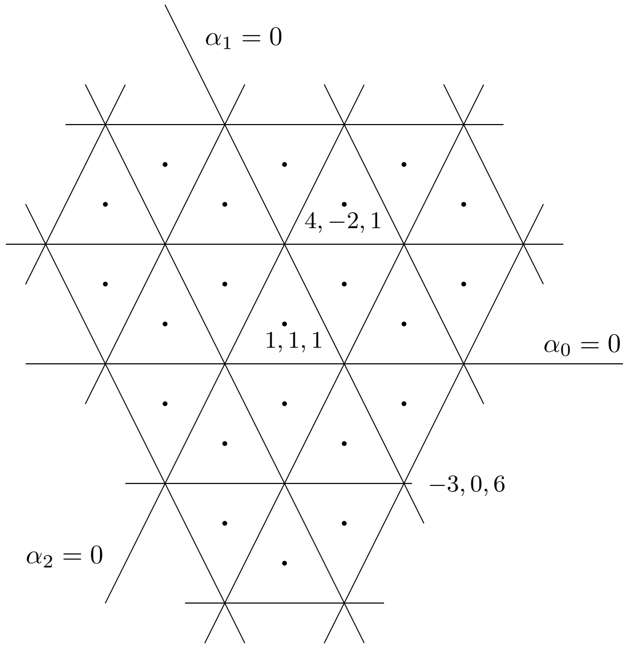


Рис. 7.1: Плоскость параметров и барицентрические координаты центров и вершин ячеек $\Delta_{l,m,n}$

то, что систем (7.2), по сравнению с уравнениями (7.5), в 2 раза больше, удобнее работать именно с ними, благодаря более простому виду как их самих, так и их дискретных преобразований. В пользу этого выбора говорит также наличие у системы (7.2) высших аналогов — систем (6.2) при $N > 3$.

Рассмотрим действие G на α_j. Прямые $\alpha_j = 0$ высекают на плоскости $\sum \operatorname{Re} \alpha_j = \alpha$ фундаментальную область $\Delta_{1,1,1}$ подгруппы $\widetilde{A}_2$, а их образы разбивают плоскость на треугольники $\Delta_{l,m,n}$ где $\frac{\alpha}{3}(l, m, n)$ — координаты центра треугольника, $l + m + n = 3$, $l \equiv m \equiv n \not\equiv 0 \pmod 3$. Действие B_k есть отражение относительно прямой $\alpha_k = 0$, S — поворот на $2\pi/3$, X_k — отражение, переводящее прямые $\alpha_{k+1} = 0$, $\alpha_{k-1} = 0$ друг в друга. Очевидно, что все преобразования из G действуют на множестве треугольников $\Delta_{l,m,n}$. В качестве фундаментальной области всей группы G можно взять какой-либо из 6 треугольников, высекаемых медианами треугольника $\Delta_{1,1,1}$. Иными словами, зная решения системы (7.2), (7.3) в области

$$0 \le \operatorname{Re} \alpha_0 \le \operatorname{Re} \alpha_1 \le \operatorname{Re} \alpha_2,$$

можно построить решения при любых α_j.

При $\alpha_0 = 0$ система (7.2), (7.3) обладает 1-параметрическим семейством решений, которые выражаются через функции Эрмита. Действительно, считая для удобства $\alpha = 2$ и полагая $g_0 = 0$, $g_2 = 2x - g_1$, находим, что $g_1 = y'/y$, где y удовлетворяет уравнению Эрмита

$$y'' - 2xy' - \alpha_1 y = 0.$$

Применяя преобразования из G, убеждаемся, что при значениях параметров, соответствующих прямым на рис. 7.1, система (7.2), (7.3) имеет частные решения, выражающиеся через функции Эрмита. В частности, узлам треугольной решетки соответствуют полиномы Эрмита и рациональные g_j. Оказывается, что, кроме того, рациональные решения существуют и для параметров, отвечающих центрам треугольных ячеек. Рациональные решения P_4 и условия, при которых они существуют, изучались в работах [5, 50, 51, 54]. В следующих двух разделах мы воспроизведем эти результаты в терминах системы (7.2), (7.3).

8 Рациональные решения P_4

При некоторых значениях параметров α_j система (7.2), (7.3) обладает рациональными решениями, например

$$g_j = \alpha x/3, \quad \alpha_j = \alpha/3, \quad j = 0, 1, 2, \tag{8.1}$$

$$g_0 = \alpha x, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad \alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{8.2}$$

Оказывается, что все рациональные решения получаются из этих двух под действием группы G. Для доказательства потребуются две легко проверяемые леммы, описывающие структуру решения в окрестности особых точек.

Лемма 8.1. *Лорановское разложение решения системы (7.2), (7.3) в окрестности полюса имеет вид*

$$g_l = -\alpha_l(x - x_0) + \dots, \quad g_{l\pm1} = \pm(x - x_0)^{-1} + \frac{\alpha x_0}{2} + \dots, \tag{8.3}$$

где $l = 0, 1$ или 2. ∎

Следствие 8.2. *Любое рациональное решение системы (7.2), (7.3) и потенциалы u_j, связанные с ним по формулам (7.1), (6.3) имеют вид*

$$g_j = P_j + \frac{Q'_{j-1}}{Q_{j-1}} - \frac{Q'_{j+1}}{Q_{j+1}}, \tag{8.4}$$

$$u_j = R_j - 2D^2(\ln Q_j), \tag{8.5}$$

где P_j, Q_j, R_j некоторые полиномы, причем Q_j попарно взаимно просты и не имеют кратных нулей. ∎

Если учесть, что уравнение P_4 не имеет конечных существенно особых точек, то очевидно также, что формулы (8.4), (8.5) верны для произвольного решения, с заменой полиномов на целые функции.

Лемма 8.3. *При любых α_j система (7.2), (7.3) допускает ровно 4 формальных решения в окрестности бесконечности. Одно из них имеет вид*

$$\begin{aligned} g_j = \alpha x/3 + (\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1})/(\alpha x) + \\ + (\alpha_j\alpha_{j+1} - 2\alpha_{j+1}\alpha_{j-1} + \alpha_{j-1}\alpha_j - 4\alpha_j^2 + 2\alpha_{j+1}^2 + 2\alpha_{j-1}^2)/(\alpha x)^3 + \dots \end{aligned} \tag{8.6}$$

где $j = 0, 1, 2$, а три других имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_{l-1} & = -\alpha_{l-1}/(\alpha x) + \alpha_{l-1}(2\alpha_{l-1} + \alpha_l - \alpha_{l+1})/(\alpha x)^3 + \ldots \\ g_l & = \alpha x + (\alpha_{l-1} - \alpha_{l+1})/(\alpha x) + \ldots \\ g_{l+1} & = \alpha_{l+1}/(\alpha x) + \alpha_{l+1}(2\alpha_{l+1} + \alpha_l - \alpha_{l-1})/(\alpha x)^3 + \ldots \end{array} \right. \tag{8.7}$$

где $l = 0, 1$ или 2, причем в каждом из 4 случаев все коэффициенты определяются однозначно. ∎

Пусть g_0, g_1, g_2 — рациональное решение системы (7.2), (7.3). Тогда g_j разложимы в окрестности бесконечности в ряд Лорана и следовательно совпадают с одним из разложений (8.6) или (8.7). Для получения ограничений на коэффициенты α_j, необходимых для существования рационального решения, воспользуемся формулами

$$\operatorname*{res}_{\infty} g_j = \deg Q_{j+1} - \deg Q_{j-1}, \tag{8.8}$$

$$\deg Q_j = \frac{1}{2} \operatorname*{res}_{\infty} \int u_j \, dx,$$

вытекающими из формул (8.4), (8.5). Пользуясь формулами (7.1), (6.3), последнюю формулу можно переписать в виде

$$\deg Q_j = -\operatorname*{res}_{\infty} \int g_{j-1} g_{j+1} \, dx. \tag{8.9}$$

Теперь мы можем доказать теорему о существовании и единственности рациональных решений.

Теорема 8.4. *Система (7.2), (7.3) имеет рациональное решение если и только если*

$$\alpha_j = \frac{\alpha}{3} n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad n_0 + n_1 + n_2 = 3, \quad n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \pmod 3 \tag{8.10}$$

(т.е. $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ лежит либо в центре, либо на вершине одного из треугольников $\Delta_{l,m,n}$), причем это решение единственно.

Доказательство. 1) Достаточность. Действуя группой G на решения (8.1), (8.2) можно получить решения для всех таких α_j. Действительно, G транзитивно действует на множествах центров и вершин треугольников $\Delta_{l,m,n}$.

2) Необходимость. Пусть g_j рациональное решение. Из формулы (8.8) видим, что коэффициенты при x^{-1} в разложениях (8.6), (8.7) должны быть целыми. Отсюда легко показать, что во всех четырех случаях должно выполняться условие (8.10).

3) Единственность. Для центров треугольников, то есть точек вида $\alpha_j = \frac{\alpha}{3} n_j$, $n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \not\equiv 0 \pmod 3$, единственность очевидна, так как разложения вида (8.7) в силу (8.8) невозможны.

Рассмотрим точки $\alpha_j = \alpha n_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$. Так как преобразования из G рациональны, доказательство сводится к случаю $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Здесь кроме решения (8.2), соответствующего разложению (8.7) при $l = 0$, имеется еще 3 формальных решения.

Разложение (8.7) при $l = 1$ дает

$$g_1 = \alpha x + \frac{1}{x} + \ldots, \quad g_2 = 0.$$

Допустив, что оно представляет рациональное решение, получаем $Q_0 = 0$ и, пользуясь формулой (8.8), приходим к противоречию:

$$-1 = \operatorname*{res}_{\infty} g_1 = \deg Q_2 \geq 0.$$

Аналогично, при $l = 2$ имеем

$$g_2 = \alpha x - \frac{1}{x} + \dots, \quad g_1 = 0,$$

откуда $Q_0 = 0$ и $1 = \operatorname{res} g_2 = -\deg Q_1 \leq 0$ — противоречие.

Рассмотрим, наконец, разложение (8.6). Имеем

$$g_0 = \frac{\alpha}{3}x - \frac{4}{\alpha x^3} + \dots, \quad g_1 = \frac{\alpha}{3}x - \frac{1}{x} + \frac{2}{\alpha x^3} + \dots,$$

откуда

$$\deg Q_2 = -\operatorname*{res}_{\infty} \int g_0 g_1 \, dx = -\frac{2}{3}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ∎

Замечание. Возникает вопрос, какие решения соответствуют формальным разложениям (8.6), (8.7) в общем случае. Допустим, что какой-то из рядов сходится в окрестности бесконечности. Тогда все особые точки g_j лежат в ограниченной области и, так как P_4 не имеет существенно особых точек, то их конечное число. Следовательно, мы получаем рациональное решение. Итак, значения α_j (8.10) — единственные случаи, когда ряды (8.6) или (8.7) сходятся.

Следствие 8.5. *Уравнение P_4 имеет рациональное решение если и только если его параметры a и b удовлетворяют условию*

$$b = -\frac{2}{9}(3a + 6m + s)^2, \quad a, m \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, 3. \quad ∎$$

Вопрос о числе полюсов рациональных решений, очевидно, сводится к определению степеней полиномов Q_j. Сначала рассмотрим вершины треугольников. Имеет место

Теорема 8.6. *Пусть g_j рациональное решение, отвечающее набору*

$$\alpha_j = \alpha n_j, \quad n_0 + n_1 + n_2 = 1, \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$

Определим номер l из условия

$$n_l = \min\{n_j : \ |n_j| = \max\{|n_j|\}\}. \tag{8.11}$$

Тогда полиномы P_j из разложения (8.4) есть

$$P_l = \alpha x, \quad P_{l\pm 1} = 0, \tag{8.12}$$

а полиномы Q_j имеют степени

$$\deg Q_l = n_{l-1} n_{l+1}, \quad \deg Q_{l\pm 1} = n_{l-1} n_{l+1} - n_{l\mp 1}. \tag{8.13}$$

Доказательство. Вычисляя g_j по формуле (8.7) и подставляя в формулу (8.9), получаем (8.13). Формула (8.12) следует непосредственно из (8.7). Осталось определить, чему равно l, то есть какое из трех разложений (8.7) представляет истинное решение. Это легко сделать из условия $\deg Q_j \geq 0$, при этом получаем (8.11). ∎

Для центров треугольников аналогично доказывается

Теорема 8.7. *Пусть g_j рациональное решение, отвечающее набору*

$$\alpha_j = \frac{\alpha}{3} n_j, \quad n_0 + n_1 + n_2 = 3, \quad n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Тогда полиномы P_j из разложения (8.4) есть

$$P_j = \frac{\alpha}{3} x, \tag{8.14}$$

а полиномы Q_j имеют степени

$$\deg Q_j = \frac{1}{9}(n_{j-1}^2 + n_{j-1}n_{j+1} + n_{j+1}^2 - 3). \quad \blacksquare \tag{8.15}$$

Рассмотрим теперь отдельно рациональные решения соответствующие центрам треугольников $\Delta_{l,m,n}$.

9 Случай центров

В этом пункте мы для удобства полагаем $\alpha = 3$. Рассмотрим рациональные решения при

$$\alpha_j = n_j \in \mathbb{Z}, \quad n_0 + n_1 + n_2 = 3, \quad n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \not\equiv 0 \pmod 3. \tag{9.1}$$

Преобразования B_k позволяют в принципе построить все такие решения, стартуя с решения (8.1), но эти преобразования удобны, в основном, лишь для численного счета. Для теоретического же исследования удобнее переписать преобразования B_k в терминах представления (8.4). Согласно Следствию 8.2 и Теореме 8.7, g_j имеют вид

$$g_j = x + Q'_{j-1}/Q_{j-1} - Q'_{j+1}/Q_{j+1}$$

где Q_j попарно взаимно простые полиномы без кратных нулей. Мы нормируем их, положив коэффициент при старшем члене равным 1. Кроме того, из Леммы 8.1 следует, что если $Q_l(x_0) = 0$, то $g_l(x_0) = 0$, откуда видно, что g_j можно записать также в виде

$$g_j = \frac{Y_j Q_j}{Q_{j-1}Q_{j+1}},$$

где полином Y_j взаимно прост с Q_1, Q_2, Q_3. Рассмотрим преобразование B_k. Так как $\widetilde{g}_k = g_k$, то $\widetilde{Q}_{k\pm1} = Q_{k\pm1}$, а $\widetilde{Q}_k$ определим из соотношений

$$\widetilde{g}_{k+1} = g_{k+1} + \frac{\alpha_k}{g_k} \;\Rightarrow\; \frac{\widetilde{Q}'_k}{\widetilde{Q}_k} = \frac{Q'_k}{Q_k} + \frac{n_k Q_{k-1}Q_{k+1}}{Y_k Q_k} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\widetilde{Q}'_k Q_k - \widetilde{Q}_k Q'_k) Y_k = n_k Q_{k-1} Q_{k+1} \widetilde{Q}_k.$$

Так как полиномы Y_k и $Q_{k-1}Q_{k+1}$ взаимно просты, то $Q_{k-1}Q_{k+1}$ делит $\widetilde{Q}'_kQ_k - \widetilde{Q}_kQ'_k$. Пользуясь формулой (8.15), легко показать, что

$$\deg \widetilde{Q}_k = \deg Q_k + nk, \quad \deg Q_{k-1} + \deg Q_{k+1} = 2\deg Q_k + n_k - 1,$$

откуда получаем

$$\widetilde{Q}'_kQ_k - \widetilde{Q}_kQ'_k = n_kQ_{k-1}Q_{k+1}, \quad Y_k = \widetilde{Q}_k.$$

Итак, собирая все вместе, находим, что B_k действует на полиномах Q_j следующим образом:

$$\widetilde{Q}_{k\pm1} = Q_{k\pm1}, \quad \widetilde{Q}_k = (xQ_{k-1}Q_{k+1} + Q'_{k-1}Q_{k+1} - Q_{k-1}Q'_{k+1})/Q_k. \tag{9.2}$$

Полиномиальность гарантирована построением.

Полученная формула гораздо более пригодна для практического вычисления рациональных решений, чем исходная формула (3.13). Приведем полиномы Q_j, получающиеся после нескольких первых шагов (в скобках указаны соответствующие коэффициенты α_j):

$$\begin{aligned}
(1,1,1):&\quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 1,\\
(-1,2,2):&\quad Q_0 = x, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 1,\\
(1,-2,4):&\quad Q_0 = x, \quad Q_1 = x^2+1, \quad Q_2 = 1,\\
(5,2,-4):&\quad Q_0 = x, \quad Q_1 = x^2+1, \quad Q_2 = x^4+2x^2-1,\\
(-5,7,1):&\quad Q_0 = x^6+5x^4+5x^2+5, \quad Q_1 = x^2+1, \quad Q_2 = x^4+2x^2-1,\\
(2,-7,8):&\quad Q_0 = x^6+5x^4+5x^2+5, \quad Q_1 = x^9+8x^7+14x^5-35x,\\
&\qquad Q_2 = x^4+2x^2-1,\\
(10,1,-8):&\quad Q_0 = x^6+5x^4+5x^2+5, \quad Q_1 = x^9+8x^7+14x^5-35x,\\
&\quad Q_2 = x^{12}+14x^{10}+65x^8+140x^6+175x^4+350x^2+175,\\
(-10,11,2):&\quad Q_0 = x^{16}+20x^{14}+140x^{12}+420x^{10}+350x^8-\\
&\qquad -980x^6-4900x^4-4900x^2+1225, \quad \dots,\\
(7,7,-11):&\quad Q_0 = x^{10}-5x^8-10x^6+50x^4-75x^2-25,\\
&\quad Q_1 = x^{10}+5x^8-10x^6-50x^4-75x^2+25,\\
&\quad Q_2 = x^{16}-60x^{12}+550x^8-5500x^4-1375.
\end{aligned}$$

Из приведенной таблицы видно, что, вообще говоря, может быть несколько различных полиномов Q_j одной и той же степени. С другой стороны, из (8.15) следует, что $\deg Q_j \not\equiv 3 \pmod 4$, то есть в ряду степеней есть пропуски. По индукции легко доказывается, что все полиномы Q_j четны либо нечетны и имеют целые коэффициенты.

Мы видим также, что при некоторых наборах параметров α_j существуют Q_j, не имеющие вещественных корней, так что соответствующие им потенциалы (8.5) регулярны; если же положительными оказываются сразу два полинома Q_{j-1} и Q_{j+1}, то регулярной на вещественной оси будет функция g_j и соответствующее ей решение P_4. Результаты 4-го раздела позволяют легко выделить эти случаи.

Действительно, применяя преобразования B_j в определенной последовательности, мы, очевидно, можем построить любое из рациональных решений, отвечающих параметрам (9.1), исходя из решения одевающей цепочки $f_j = x/2$, $b_j = j$, $j \geq 0$. Согласно замечанию в конце раздела 5, все рассматриваемые потенциалы имеют вид (5.14). Если потенциал u_0 регулярен, то, согласно разделу 5, его спектр имеет вид

$$3m,\ n_1 + 3m,\ n_1 + n_2 + 3m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 5.1 накладывает на числа n_1 и n_2 довольно жесткие ограничения. Элементарная проверка показывает, что верна следующая теорема.

Теорема 9.1. *Полином Q_0, отвечающий параметрам (9.1), не имеет вещественных нулей (и следовательно потенциал (8.5) регулярен) если и только если n_1 и n_2 принимают одно из следующих значений:*

$$n_1 = 3s \pm 1, \quad n_2 = \pm 1; \qquad n_1 = -3s \pm 1, \quad n_2 = 3s \mp 2;$$
$$n_1 = \pm 1, \quad n_2 = \mp 3s \pm 1,$$

где $s \geq 0$ целое число. ∎

На рис. 9.1 треугольники, центры которых удовлетворяют условию теоремы, помечены 0. Как видим, все они расположены вдоль 6 лучей, являющихся образами любого из них под действием преобразований B_1 и B_2. Так как B_1 и B_2 компоненту Q_0 не меняют, то по существу имеется лишь одна серия регулярных потенциалов u_j. Их спектр имеет с точностью до сдвига вид

$$0,\ 3,\ 6,\ \dots,\ 3s,\ 3s+1,\ 3s+2,\ \dots$$

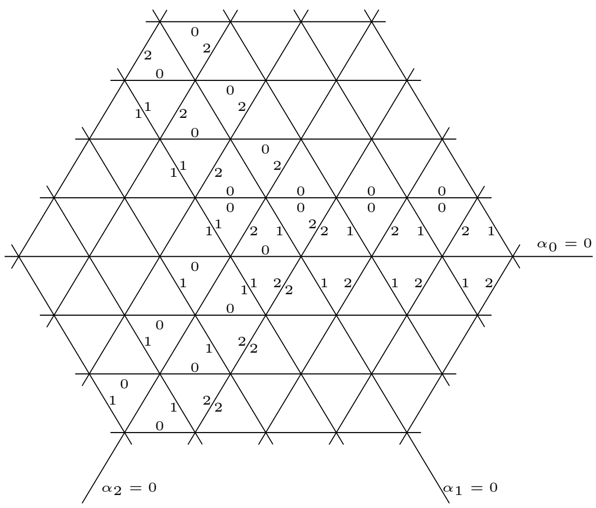


Рис. 9.1: Полином Q_j, соответствующий центру треугольника, содержащего число j, не имеет вещественных нулей.

Применяя преобразование S, находим, при каких значениях параметров не обращаются в ноль полиномы Q_1 и Q_2 (см. рис. 9.1). Это позволяет ответить на вопрос о регулярности g_j.

Теорема 9.2. *Компонента g_0 рационального решения, отвечающего параметрам (9.1), регулярна на вещественной оси если и только если*

$$n_0 = 1, \quad n_1 = 1 - 3s, \quad n_2 = 1 + 3s$$

либо

$$n_0 = -1, \quad n_1 = 2 - 3s, \quad n_2 = 2 + 3s,$$

где $s \geq 0$ целое число. ∎

Иными словами, рациональное решение уравнения P_4, отвечающее нецелым значениям b, не имеет вещественных полюсов, только если $b = -2/9$, $a \geq 0$.

10 Групповые свойства P_5

Рассмотрим теперь систему (6.2), (6.5) при $N = 4$:

$$\begin{gathered} f_1' + f_4' = f_1^2 - f_4^2 + \alpha_1, \quad f_2' + f_1' = f_2^2 - f_1^2 + \alpha_2, \\ f_3' + f_2' = f_3^2 - f_2^2 + \alpha_3, \quad f_4' + f_3' = f_4^2 - f_3^2 + \alpha_4, \end{gathered} \tag{10.1}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \frac{\alpha}{2}x. \tag{10.2}$$

Так как левые части уравнений (10.1) линейно зависимы, то мы не можем привести систему к нормальному виду, но зато получаем дополнительную связь

$$2(f_4^2 - f_3^2 + f_2^2 - f_1^2) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = A. \tag{10.3}$$

Используя это соотношение и первый интеграл (10.2), можно понизить порядок системы до 2. Обозначим

$$g_2 = f_2 + f_1, \quad g_3 = f_3 + f_2, \quad p = f_2 - f_1,$$

тогда второе и третье уравнения системы запишутся, как

$$g_2' = g_2 p + \alpha_2, \quad g_3' = g_3(g_3 - g_2 - p) + \alpha_3,$$

а связь (10.3) примет вид

$$\alpha x p + (2g_2 - \alpha x)(2g_3 - \frac{\alpha}{2}x) = A.$$

Исключение p приводит в терминах переменных g_2 и $h = 2g_3 - \frac{\alpha}{2}x$ к системе

$$\begin{aligned} g_2' &= \frac{g_2}{\alpha x}(A - h(2g_2 - \alpha x)) + \alpha_2, \\ h' &= \left(h + \frac{\alpha x}{2}\right)\left(\frac{2g_2 h - A}{\alpha x} - \frac{h}{2} + \frac{\alpha x}{4} - g_2\right) + 2\alpha_3 - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Замена

$$g_2(x) = \frac{\alpha x}{2(1 - y(x^2))}, \quad x h(x) = z(x^2)$$

приводит ее к виду

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{\alpha x}(y - 1) - \frac{zy}{2x} + \frac{\alpha_2}{\alpha x}(y - 1)^2, \\ z' &= \left(\frac{\alpha^2 x}{16} - \frac{z^2}{4x}\right)\frac{y + 1}{y - 1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{\alpha x}z + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}. \end{aligned}$$

Исключая z, получаем после несложных вычислений, что y удовлетворяет 5-му уравнению Пенлеве

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(ay + \frac{b}{y}\right) + c\frac{y}{x} + d\frac{y(y+1)}{y-1}$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты системы (10.1), (10.2) по формулам

$$a = \frac{\alpha_2^2}{2\alpha^2}, \quad b = -\frac{\alpha_4^2}{2\alpha^2}, \quad c = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{4}, \quad d = -\frac{\alpha^2}{32} \tag{10.4}$$

и подчиняются единственному ограничению $d \neq 0$. Оказывается, что случай $d = 0$ связан с преобразованиями Бэклунда для оператора Дирака; он будет рассмотрен отдельно в 22-м разделе.

Перейдем к изучению группы преобразований, действующих на уравнениях P_5. Действие растяжений (2.5) очевидно, и мы не будем их рассматривать. Дискретная группа G, порожденная преобразованиями (2.1), (2.6), (2.7), является группой Коксфера с тремя образующими B_1, R_0, R_1 и графом

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, dash, "6"] & R_0 \arrow[r, dash, "4"] & R_1 \end{tikzcd}$$

Аналогично случаю P_4, преобразования B_j порождают бесконечную подгруппу конечного индекса, изоморфную группе Коксфера $\widetilde{A}_3$. Выгоды от использования системы (10.1) вместо уравнения P_5 в данном случае еще более очевидны. Действительно, можно проверить, например, что преобразования B_1 и R_0 приводят соответственно к уже достаточно громоздким дифференциальным подстановкам

$$\widetilde{y} = y + \frac{8\alpha_1 y(y-1)^2}{4\alpha x y' + \alpha^2 x y - 4(y-1)(\alpha_4 + (2\alpha_1 + \alpha_2)y)},$$
$$\widetilde{y} = 1 + \frac{2\alpha^2 x y}{4\alpha x y' - \alpha^2 x y - 4(y-1)(\alpha_4 + \alpha_2 y)}.$$

Преобразования S^2 и R_1 приводят к точечному преобразованию

$$\widetilde{y} = \frac{1}{y}.$$

Преобразования Шлезингера для P_5 впервые были найдены в работе [49].

3 Принцип нелинейной суперпозиции как интегрируемое дискретное отображение

В первой главе было показано, что наличие у цепочки нетривиальной дискретной группы симметрий позволяет строить точные решения для нее, а также ассоциированных с ней интегрируемых уравнений в частных производных, то есть инфинитезимальных элементов непрерывной группы симметрий цепочки. В этой главе мы покажем, что, в свою очередь, наличие непрерывной группы приводит к интегрируемости дискретного отображения, возникающего из дискретной группы. Показывается также, что при некоторых дополнительных ограничениях это отображение допускает красивую геометрическую интерпретацию в виде задачи о перекройках многоугольника.

11 Интегрируемость по Лиувиллю

Исследованию динамики дискретных отображений посвящено много работ, см. напр. [7, 29, 31, 32, 43, 44]. Обобщение понятия интегрируемости по Лиувиллю для дискретных отображений было независимо дано в работах [7, 43]. Вслед за этими работами будем называть соответствие (то есть, вообще говоря, многозначное отображение) $\Phi: \ M \to M$ симплектическим, если оно сохраняет симплектическую структуру на M. Первым интегралом, или инвариантом, соответствия называется функция на M, сохраняющаяся под действием Φ. Симплектическое соответствие Φ, имеющее $n = \frac{1}{2}\dim M$ функционально независимых интегралов в инволюции, называется интегрируемым. Дискретная версия теоремы Лиувилля утверждает, что если общая поверхность уровня инвариантов интегрируемого соответствия Φ компактна, то она представляет собой несвязное объединение n-мерных торов, а соответствие Φ определяет на них многозначный сдвиг.

В несколько более общей ситуации вместо симплектических соответствий рассматривают соответствия, сохраняющие пуассонову структуру, которая может быть и вырожденной. При этом для интегрируемости требуется наличие достаточного числа интегралов в инволюции, функционально независимых на каждой общей поверхности уровня функций Казимира.

Мы покажем, что формулы нелинейной суперпозиции (2.1), при наложении условия периодичности

$$f_{j+N} = f_j, \quad \beta_{j+N} = \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

доставляют пример интегрируемого соответствия. На каждом шаге мы можем осуществить любое из преобразований $B_1, \dots, B_N$, поэтому рассматриваемое соответствие B является N-значным. Иначе можно сказать, что преобразования B_j задают некоторое нелинейное представление B группы Вейля $\widetilde{A}_{N-1}$, которая действует в пространстве $\mathbb{C}^{2N}$ переменных $f_1, \dots, f_N$, $\beta_1, \dots, \beta_N$. Возникает проблема исследования дискретного потока, определяемого этим действием. Сразу заметим, что, поскольку на переменных β_j динамика тривиальна, то удобно от преобразований B_j перейти к их комбинациям, оставляющим все β_j на своих местах. Из Следствия 2.4 легко показать, что подгруппа T, действующая на β_j тождественно, порождена

преобразованиями
$$T_j = (B_{j-N+1}\dots B_{j-1}B_j)^{N-1},$$
которые задают N-значное соответствие, действующее уже на $\mathbb{C}^N$. Индекс подгруппы T в B конечен, поэтому этот переход не меняет существенно динамики и заключается просто в отделении друг от друга различных ветвей отображения, отвечающих разным перестановкам β_j. Действительно, каждой перестановке β_j соответствует некоторое множество уровня первых интегралов системы

$$f'_{j+1} + f'_j = f^2_{j+1} - f^2_j + \beta_{j+1} - \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z}_N \tag{11.1}$$

полученной из (1.10) в результате периодического замыкания. Под действием преобразований B_j вектор $\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)$ переходит с одного уровня на другой, а при действии T_j остается на том же самом уровне. Можно показать, что подгруппа T коммутативна:

$$T_iT_j = T_jT_i,$$

(то есть $T \simeq \mathbb{Z}^N$) и, как мы увидим дальше, каждое из N преобразований T_j является просто сдвигом за единичное время в силу подходящей линейной комбинации системы (11.1) и ее симметрий. Таким образом, исходное соответствие B представляет собой некоторую комбинацию группы перестановок N элементов и N-значного сдвига.

Как известно [45, 64], система (11.1) определяет n-зонные потенциалы оператора Шредингера, где

$$N = 2n + 1 \quad \text{или} \quad N = 2n + 2.$$

Произведение $\widehat{W}_j = W_{j+N-1}\dots W_j$ матриц (1.12) удовлетворяет уравнению

$$\widehat{W}_{j,x} = [U_j, \widehat{W}_j], \tag{11.2}$$

откуда следует, что $\tau = \operatorname{tr}\widehat{W}_j$ есть производящая функция для первых интегралов системы. Сохраняется также алгебраическая кривая

$$\Gamma: \quad \det(\zeta I - \widehat{W}_j) = 0 \tag{11.3}$$

рода n. Гамильтоновы свойства системы (11.1) слегка различны в зависимости от четности N. При нечетном N эта система бигамильтонова. Первая гамильтонова структура задается скобкой Пуассона

$$\{f_i, f_j\} = (-1)^{i+j+1}, \quad j > i$$

и гамильтонианом
$$H = \sum_1^N \Big(\frac{1}{3}f_j^3 + \beta_j f_j\Big).$$

Вторую гамильтонову структуру удобнее записать в терминах переменных $g_j = f_j + f_{j-1}$. Она задается скобкой

$$\{g_j, g_{j+1}\}_2 = g_jg_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad \{g_i, g_j\}_2 = (-1)^{i+j+1}g_ig_j, \quad j > i + 1$$

и гамильтонианом

$$H_2 = \sum_{1}^{N} g_j.$$

Заметим, что обе скобки вырождены, например для первой функция Казимира есть $f_1 + \dots + f_N$.

При четном N известна только одна гамильтонова структура. В терминах переменных g_j скобка Пуассона есть

$$\{g_j, g_{j+1}\} = 1, \quad \{g_i, g_j\} = 0, \quad i \neq j \pm 1,$$

а гамильтониан с точностью до числового множителя равен коэффициенту при λ^{n-1} в разложении τ. Функции Казимира порождены $a_1 = g_1 + g_3 + \dots + g_{N-1}$, $a_2 = g_2 + g_4 + \dots + g_N$, причем система интегрируема на симплектических листах, определяемых связью $a_1 = a_2 = a \neq 0$.

Независимо от четности N в работе [45] показано, что τ доставляет ровно $n+1$ функционально независимых первых интегралов в инволюции относительно указанных скобок, так что система (11.1) интегрируема по Лиувиллю.

Теорема 11.1. *Соответствие T интегрируемо в смысле дискретного варианта теоремы Лиувилля [7, 45].*

Доказательство. В силу определения (2.2) преобразований B_j очевидно, что кривая Γ сохраняется под действием соответствия B, то есть первые интегралы системы (11.1) служат одновременно и инвариантами этого соответствия. Непосредственно проверяется, что преобразования B_j относительно всех указанных скобок являются пуассоновыми отображениями. Тогда каждое из преобразований T_j является пуассоновым отображением системы (11.1) в себя и, следовательно, интегрируемо в указанном смысле. ∎

Из вышесказанного следует способ использования преобразований B_j для качественного исследования системы (11.1). Действительно, ее фазовый портрет можно получить, просто итерируя одно из преобразований T_j. Поверхность уровня в компактном случае диффеоморфна n-мерному тору, причем точки заметают его регулярным образом (см. рис. 11.1a,b, где изображены двумерные проекции образов одного и того же начального вектора $\vec{f}$ под действием итераций двух разных T_j). В целом картина напоминает равномерную обмотку на торе и наглядно иллюстрирует интегрируемость по Лиувиллю. Поверхность уровня может оказаться и некомпактной, но регулярный характер отображения прослеживается и в этом случае (см. рис. 11.1c).

Как было показано в главе 2, ослабленное условие периодичности (6.1) приводит к уравнениям Пенлеве. Соответствующее дискретное отображение естественно считать их разностным аналогом (другие подходы к дискретизации уравнений Пенлеве см. напр. в [20, 21]). Оно, разумеется, уже не является интегрируемым по Лиувиллю, но, возможно к нему применим какой-либо разностный вариант метода изомонодромной деформации. На рис. 11.2b изображено поведение соответствия при $N = 3$, то есть разностное P_4. Для сравнения на рис. 11.2a приведена эволюция тех же начальных данных в интегрируемом случае (параметры α_j уменьшены на их среднее арифметическое).

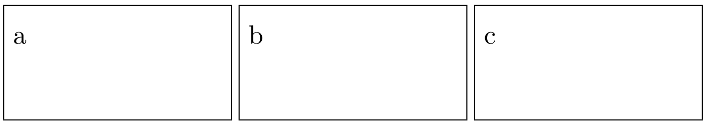


Рис. 11.1: a,b. Лиувиллев тор с двумя разными обмотками
c. Некомпактная поверхность уровня

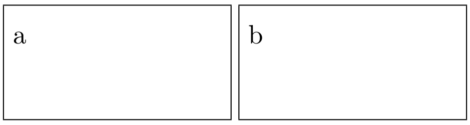


Рис. 11.2: Разностное P_4

12 Преобразование Абеля

Известно, что явная линеаризация системы (11.1) и ее высших симметрий, то есть переход к переменным действие-угол, осуществляется на многообразии Якоби кривой Г. Из коммутирования преобразований T_j с динамикой по x и всем временам немедленно следует, что на многообразии Якоби им отвечают сдвиги на постоянные векторы, то есть соответствие T также линеаризуется. В этом разделе мы приводим некоторые формулы, позволяющие в принципе вычислять эти сдвиги.

Из формул (1.5) – (1.7) или непосредственно из (11.3) легко получаем, что матрица $\widehat{W}_j = W_{j+N-1} \dots W_j$ имеет следующую структуру:

$$\widehat{W}_j = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(\tau - b'_j) & b_j \\ -\dfrac{1}{4b_j}(4R^2 + (b'_j)^2) & \dfrac{1}{2}(\tau + b'_j) \end{pmatrix},$$

где

$$4R^2 = 4\delta - \tau^2, \quad \delta = \det \widehat{W}_j, \quad \tau = \operatorname{tr} \widehat{W}_j$$

есть некоторые постоянные полиномы от λ, а b_j есть полином с переменными коэффициентами, удовлетворяющий уравнению

$$2b_j b''_j - b_j^2 - 4(u_j - \lambda) b_j^2 = 4R^2. \tag{12.1}$$

При этом $\deg R^2 = N$, $\deg b_j = n$ и старшие коэффициенты обоих полиномов единичные. Пусть

$$R^2 = (\lambda - e_1) \dots (\lambda - e_N),$$
$$b_j = \lambda^n + \lambda^{n-1} b_{j,1} + \dots + b_{j,n} = (\lambda - \rho_{j,1}) \dots (\lambda - \rho_{j,n}).$$

Переход к любому из наборов переменных $\rho_{j,1}, \dots, \rho_{j,n}$ есть просто некоторая замена переменных в системе (11.1). Действительно, если даны $f_1, \dots, f_N$, то, перемножая в нужном порядке матрицы W_j, мы находим $\widehat{W}_j$ и b_j. Наоборот, если дана матрица $\widehat{W}_j$, то, как в Теореме 1.2, мы последовательно и однозначно (при фиксированном порядке β_j) находим $f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+n-1}$. В частности, из равенства $(1, -f_j)^\top = \ker \widehat{W}_j(\lambda = \beta_j)$ имеем

$$f_j = \frac{1}{2b_j(\beta_j)}(\tau(\beta_j) - b_j'(\beta_j)). \tag{12.2}$$

Приведем также формулу для восстановления потенциала u, вытекающую из формулы (12.1):

$$u_j = \sum_1^N e_s - 2\sum_1^n \rho_{j,s}. \tag{12.3}$$

Пусть теперь j фиксировано. Полагая в равенстве (12.1) $\lambda = \rho_{j,s}$, получаем систему уравнений Дубровина [53]

$$\rho_{js}' = \frac{2iR(\rho_{j,s})}{\prod\limits_{r\neq s}(\rho_{j,s} - \rho_{j,r})}, \quad s = 1, \dots, n. \tag{12.4}$$

В силу вышесказанного она эквивалентна системе (11.1), хотя и имеет порядок в два раза меньше. Как известно, система (12.4) линеаризуется при помощи отображения Абеля из n-й симметрической степени римановой поверхности кривой Γ в ее многообразие Якоби

$$A : \Gamma^n/S_n \to Jac(\Gamma) = \mathbb{C}^n/\Lambda,$$

где Λ — решетка периодов в $\mathbb{C}^n$. Это отображение есть еще одна замена переменных, сопоставляющая неупорядоченному набору точек $\{\rho_{j,1}, \dots, \rho_{j,n}\}$ на Γ набор фаз $\varphi_j = (\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,n})$ по формулам

$$\varphi_{j,m} = \sum_1^n \int\limits_{\rho_0}^{\rho_{j,s}} \frac{\rho^{n-m}\,d\rho}{R(\rho)}, \quad m = 1, \dots, n, \tag{12.5}$$

где ρ_0 есть некоторая фиксированная точка на Γ. Нахождение обратного отображения составляет проблему обращения Якоби и осуществляется при помощи Θ-функций римановой поверхности Γ. Вычислим динамику в переменных φ. Имеем

$$\varphi_{j,m}' = 2i\sum_1^n \frac{\rho_{j,s}^{n-m}}{\prod\limits_{r\neq s}(\rho_{j,s} - \rho_{j,r})} = 2i\sum_1^n \operatorname*{res}_{\rho_{j,s}} \frac{\lambda^{n-m}}{b_j(\lambda)} =$$
$$= -2i \operatorname*{res}_{\infty} \frac{\lambda^{n-m}}{b_j(\lambda)} = \begin{cases} 2i, & m = 1, \\ 0, & m = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Легко проверить, что векторные поля, соответствующие системам

$$(\rho_{j,s})_{t_l} = \frac{2ib_j^l(\rho_{j,s})R(\rho_{j,s})}{\prod\limits_{r\neq s}(\rho_{j,s} - \rho_{j,r})}, \quad s, l = 1, \dots, n, \tag{12.6}$$

где $b_j^l(\lambda) = \lambda^{l-1} + \lambda^{l-2}b_{j,1} + \dots + b_{j,l-1}$ образуют n-мерную коммутативную алгебру Ли (причем $t_1 = x$, а остальные времена отвечают KdV и его высшим симметриям). Действительно, замена (12.5) приводит их к виду, в котором это очевидно:

$$(\varphi_{j,m})_{t_l} = -2i \operatorname*{res}_{\infty} \frac{b_j^l(\lambda)\lambda^{n-m}}{b_j(\lambda)} = 2i\delta_{m,l}, \quad m,l = 1,\dots,n.$$

Итак, в результате ряда сложных замен переменных мы пришли к набору систем с общим совместным решением

$$\varphi_{j,m} = 2it_m + c_{j,m}, \quad c_{j,m} = \mathrm{const}, \quad m = 1,\dots,n. \tag{12.7}$$

Выясним, теперь, что происходит при преобразовании Дарбу, то есть переходе от переменных с индексом j к переменным с индексом $j+1$. Из формулы $W_j\widehat{W}_j = \widehat{W}_{j+1}W_j$ получаем

$$b_{j+1} = b_j + (b_jf_j + \frac{1}{2}b_j')'/(\lambda-\beta_j), \tag{12.8}$$

$$2f_j = (b_{j+1}' + b_j')/(b_{j+1} - b_j). \tag{12.9}$$

Из (12.2) и (12.8) видим, что b_{j+1}, а следовательно и $\rho_{j+1,s}$ выражаются через $\rho_{j,s}$ и β_j. Осуществляя замену (12.5), видим, что фаза $\vec{\varphi}_{j+1}$ есть некоторая функция от $\vec{\varphi}_j$ и β_j. Здесь следует учесть, что преобразование Дарбу согласовано с иерархией KdV, в силу чего оно оставляет инвариантной не только систему (12.4), но также и системы (12.6). Тогда $\vec{\varphi}_{j+1}$ также имеет вид (12.7) и, следовательно, имеет место формула

$$\vec{\varphi}_{j+1} = \vec{\varphi}_j + \vec{\delta}(\beta_j), \tag{12.10}$$

то есть $c_{j+1,m} - c_{j,m} = \delta_m(\beta_j)$. Очевидно, что при этом выполняется соотношение

$$\vec{\delta}(\beta_1) + \vec{\delta}(\beta_2) + \dots + \vec{\delta}(\beta_N) \equiv 0 \bmod \Lambda. \tag{12.11}$$

Итак, при наложении условия периодичности преобразование Дарбу является сдвигом на многообразии Якоби. В работе [39] этот результат был получен для цепочки с нулевыми параметрами β_j.

Теперь мы можем легко понять, что происходит с фазами при преобразовании B_k. Так как из всех b_j при этом преобразовании меняется только b_k, то очевидно, что и среди фаз $\vec{\varphi}_j$ изменится только $\vec{\varphi}_k$. Далее, так как β_k и β_{k-1} меняются местами, то имеет место формула

$$\widetilde{\vec{\varphi}_k} = \vec{\varphi}_{k-1} + \vec{\delta}(\beta_k).$$

Закон для преобразования фаз можно переписать и в таком виде:

$$B_k: \quad \widetilde{\vec{\varphi}_k} = \vec{\varphi}_{k+1} - \vec{\varphi}_k + \vec{\varphi}_{k-1}, \quad \widetilde{\vec{\varphi}_j} = \vec{\varphi}_j, \quad j \ne k.$$

Отсюда легко находим, что действие преобразования T_k задается формулой

$$T_k: \quad \widetilde{\vec{\varphi}_j} = \vec{\varphi}_j + (N+1)\vec{\delta}(\beta_k). \tag{12.12}$$

По заданным начальным условиям f_j мы можем, в принципе, найти соответствующие начальные значения $\rho_{j,s}$ и, пользуясь формулой (12.5), вычислить величины $\vec{\delta}(\beta_k)$. После этого эволюция фаз при соответствии T легко вычисляется по формуле (12.12). Решая проблему обращения Якоби, находим полиномы b_j и, по формулам (12.2), (12.3) — переменные f_j, u_j. Таким образом, соответствие T можно считать проинтегрированным, хотя явные формулы выписать довольно сложно.

В качестве примера доведем до конца простейший однозонный случай $(n = 1, N = 3)$. Здесь

$$b_j = \lambda - \rho_j, \quad u_j = E - 2\rho_j, \quad 2f_j = (\rho'_{j+1} + \rho'_j)/(\rho_{j+1} - \rho_j),$$

где $E = e_1 + e_2 + e_3$, функции ρ_j удовлетворяют уравнению

$$-(\rho')^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3) \tag{12.13}$$

и связаны формулами

$$\rho_{j+1} + \rho_j = E - \beta_j - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho'_{j+1} + \rho'_j}{\rho_{j+1} - \rho_j}\right)^2. \tag{12.14}$$

Из уравнения (12.13) очевидно, что

$$\rho_j = \frac{1}{3}E - \wp(x + c_j),$$

где $\wp$ есть функция Вейерштрасса. При этом можно считать, что заданные начальные значения $u_j = u_{j,0}$ соответствуют значению $x = 0$, так что

$$2\wp(c_j) = u_{j,0} - \frac{1}{3}E,$$

откуда находим константы c_j. Соотношение (12.14) переходит в известную формулу сложения для $\wp$-функций, из которой мы получаем уравнение

$$\wp(\delta_j) = \frac{1}{3}E - \beta_j$$

для разности фаз $\delta_j = \delta(\beta_j) = c_{j+1} - c_j$. Окончательный ответ в терминах переменных u_j задается формулой

$$T_1^l T_2^m T_3^n(u_j) = \frac{1}{3}E + 2\wp(c_j + 4l\delta_1 + 4m\delta_2 + 4n\delta_3),$$

где константы c_j и δ_j выражаются через начальные условия и параметры задачи при помощи эллиптических интегралов.

13 Перекройки многоугольника

Пусть на комплексной плоскости заданы $N \geq 3$ точек $p_1, \dots, p_N$, занумерованных по модулю N. На каждом шаге можно отразить любую из них, например p_k, относительно серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему ее соседей p_{k-1}, p_{k+1}. Наглядно говоря, от многоугольника $p_1 \dots p_N$ отрезается один угол, переворачивается и приклеивается на место. Таким образом, определено некоторое N-значное отображение (соответствие) $R: \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Возникает задача исследования динамики вершин под действием таких перекроек. В качестве примера рассмотрим несколько тривиальных случаев, при малых N дающих полное описание динамики.

1) Если длины сторон совпадают, то вершины остаются неподвижными.

2) Вершины, лежащие на одной окружности или прямой (например, при $N = 3$, остаются лежать на ней. Если перекройки осуществлять циклически, то через $N-1$ шаг мы приходим к тому же многоугольнику, повернутому на некоторый постоянный угол.

3) Аналогично разбирается случай, когда число вершин четно и четные вершины лежат на одной, а нечетные на другой из двух концентрических окружностей или параллельных прямых (например, $N = 4$).

При $N \geq 5$ динамика приобретает более сложный характер. Вычислительный эксперимент показывает, что под действием группы перекроек вершины заметают 1 или 2 кольца с общим центром в некоторой точке E. Если перекройки осуществляются циклически, заметание происходит регулярным образом, на манер обмотки тора (см. рис. 13.1, где показана эволюция 4, 5 и 6-угольника). В исключительных случаях движение происходит по замкнутым кривым. При $N \approx 100$ в зволюции возмущенного в нескольких вершинах правильного N-угольника можно наблюдать отчетливо выраженные солитонные эффекты, то есть возмущения распространяются и проходят друг через друга с сохранением формы.

Отражение R_k вершины p_k задается формулой

$$R_k(p_k) = p'_k = p_k + \frac{l_k^2 - l_{k-1}^2}{\bar{p}_{k+1} - \bar{p}_{k-1}}, \quad R_k(p_j) = p_j, \quad j \neq k. \tag{13.1}$$

где $l_j^2 = (p_{j+1} - p_j)(\bar{p}_{j+1} - \bar{p}_j)$ есть квадрат длины стороны $p_{j+1}p_j$.

Назовем инвариантом функцию от вершин p_j, не меняющуюся при перекройках. Ряд инвариантов очевиден. Так как при каждом отражении длины сторон многоугольника переставляются, то произвольная симметрическая функция от l_j^2 является инвариантом. Если N четно, то сохраняется также сумма углов при четных вершинах. Инвариантны также величины

$$4iS = \sum_1^N (\bar{p}_j p_{j+1} - p_j \bar{p}_{j+1}),$$

$$4iSE = \sum_1^N p_j p_{j+1}(\bar{p}_j - \bar{p}_{j+1}),$$

$$J = \sum_1^N (2l_j^2 + \bar{p}_j p_{j+1} + p_j \bar{p}_{j+1})(\bar{p}_j p_{j+1} - p_j \bar{p}_{j+1}).$$

Инвариант S является площадью многоугольника, а инвариант E допускает следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим произвольную триангуляцию многоугольника $p_1 \dots p_N$ на $N-2$ треугольника и поместим в центры описанных около них окружностей массы, равные с учетом знака площадям соответствующих треугольников. Точка E есть центр масс полученной системы. Определение не зависит от триангуляции.

Неожиданным обстоятельством является существование тесной связи между соответствием R и теорией одевающей цепочки в форме (3.2). Сопоставляя формулы (13.1) и (3.4), видим, что они связаны соотношениями

$$v_{2j} = p_{2j}, \quad v_{2j+1} = \bar{p}_{2j+1}, \quad \beta_j = -l_j^2. \tag{13.2}$$

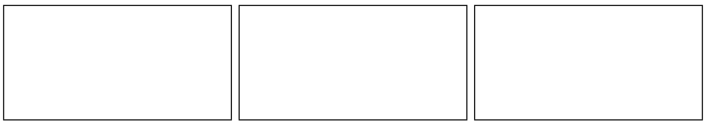


Рис. 13.1:

Заметим, что из-за присутствия в этой формуле комплексного сопряжения в случае нечетного N следует удваивать число переменных v_j, полагая $v_{j+N} = \bar{v}_j$. Таким образом, перекройкам многоугольника соответствуют отображения (3.4) при наложении условия периодичности с четным N и дополнительными условиями $\beta_j = -l_j^2$. Новые инварианты отображения (13.1) получаются при рассмотрении следа матрицы $\widehat{W}_N$, в которой $f_j = v_{j+1} - v_j$ и β_j заменены согласно формуле (13.2). Следует отметить, что инварианты S, E, J не могут быть получены таким образом. Повидимому, число функционально независимых инвариантов соответствия R равно $2N - 2$.

4 Примеры цепочек и их автопреобразований

В настоящую главу включены по возможности разнообразные примеры интегрируемых цепочек, порожденных преобразованиями Дарбу для различных дифференциальных операторов, как скалярных, так и матричных. Как и для оператора Шредингера, для них выводятся принципы нелинейной суперпозиции, позволяющие строить точные решения ассоциированных уравнений в частных производных и, с другой стороны, дающие новые примеры интегрируемых отображений. Общая схема изложена в разделе 14. В 15-м разделе более подробно разобран важный случай оператора Дирака, с которым связана нелинейная система Шредингера (NLS), а в разделе 16 — его скалярная редукция, вновь приводящая к уравнениям типа KdV. В работах [36, 37] изучались многополевые обобщения NLS, связанные с йордановыми парами, и соответствующие им цепочки преобразований Бэклунда. В разделе 17 показано, что принцип нелинейной суперпозиции также допускает многополевое обобщение. В 18-м разделе рассмотрены примеры цепочек, отвечающих операторам второго порядка типа оператора Дирака. Среди ассоциированных систем — модели магнетика Гейзенберга и Ландау-Лифшица. Результаты этого раздела были получены совместно с Р.И. Ямиловым в [4].

Другое применение аппарата цепочек заключается в построении точнорешаемых спектральных задач для исходного дифференциального оператора. Здесь, действуя как в главе 2, мы снова приходим к уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам, причем дискретная группа цепочки переходит в дискретную группу уравнения. Так как эти результаты могут иметь для теории уравнений Пенлеве самостоятельный интерес, то они излагаются отдельно в следующей главе.

14 Общая схема

Рассмотрим цепочку, обладающую представлением нулевой кривизны

$$W_{j,x} = U_{j+1}W_j - W_jU_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{14.1}$$

Для определенности мы будем считать, что матрицы имеют размер 2×2, причем $U_j = U(\lambda, u_j, v_j)$, $W_j = W(\lambda, u_j, v_{j+1}, \beta_j)$, где u_j, v_j — полевые переменные, λ — спектральный параметр, β_j — параметры цепочки. Утверждения этого раздела могут быть легко обобщены и для матриц другого вида.

Определим преобразование B_k соотношениями

$$B_k: \quad \widetilde{W}_k\widetilde{W}_{k-1} = W_kW_{k-1}, \quad \widetilde{W}_j = W_j, \quad j \neq k, k-1 \tag{14.2}$$

где $\widetilde{W}_j = W(\lambda, \widetilde{u}_j, \widetilde{v}_{j+1}, \beta_j)$. Эти соотношения представляют собой систему алгебраических уравнений относительно $\widetilde{u}_{k-1}, \widetilde{v}_k, \widetilde{u}_k, \widetilde{v}_{k+1}, \beta_{k-1}, \beta_k$. Как правило, эта система является весьма переопределенной, но она во всяком случае совместна, так как у нее всегда есть тождественное решение. В некоторых случаях это решение единственно, однако класс цепочек, допускающих и другие решения, является достаточно богатым. В дальнейшем под преобразованием (14.2) всегда понимается нетривиальное преобразование. Если оно нашлось, то обосновать его применение к цепочке (14.1) можно при помощи следующей теоремы. Пусть A есть матрица, зависящая от

λ и переменных $q_1, \dots, q_n$. Через $J(A; q_1, \dots, q_n)$ обозначим матрицу Якоби коэффициентов разложения Лорана по λ ее элементов по отношению к $q_1, \dots, q_n$.

Теорема 14.1. *Пусть матрицы W_j таковы, что*

$$\operatorname{rank} J(W_j; u_j, v_{j+1}) = 2, \quad \operatorname{rank} J(W_j W_{j-1}; u_j, v_{j+1}, u_{j-1}, v_j) = 4.$$

Тогда преобразование (14.2) переводит цепочку (14.1) в себя с точностью до изменения параметров.

Доказательство. Из определяющих цепочку формул (14.1) следуют соотношения

$$\begin{gathered} W_{j,x} = U_{j+1}W_j - W_jU_j, \quad j \neq k, k-1, \\ (W_kW_{k-1})_x = U_{k+1}W_kW_{k-1} - W_kW_{k-1}U_{k-1}. \end{gathered} \tag{14.3}$$

Из них, в силу условия теоремы, однозначно определяется динамика по x всех u_j, v_j, то есть формулы (14.1) и (14.3) эквивалентны. Преобразование (14.2) состоит в замене всех переменных u_j, v_j, β_j на $\widetilde{u}_j, \widetilde{v}_j, \beta_j$. Следовательно оно не меняет вид соотношений (14.3), а с ними и цепочку (14.1). ∎

В рассматриваемых нами примерах имеем $\operatorname{tr} U_j = 0$, откуда следует, что $\det W_j = \delta(\lambda, \beta_j)$ не зависит от x. Это позволяет получить закон преобразования параметров β_j из равенства $\det W_kW_{k-1} = \det \widetilde{W}_k\widetilde{W}_{k-1}$. В простейшей ситуации преобразование (14.2) приводит к перестановке параметров β_k и β_{k-1}. Это делает естественным выделение следующего условия на матрицы W_j, более жесткого, чем условие Теоремы 14.1.

Условие А. *Для любого целого $p \geq 0$: если*

$$\widetilde{W}_k \dots \widetilde{W}_{k-p} = W_k \dots W_{k-p} \tag{14.4}$$

то $\beta_k = \beta_{\sigma(k)}, \dots, \beta_{k-p} = \beta_{\sigma(k-p)}$, где σ некоторая перестановка.

Если σ тождественна, то $\widetilde{W}_k = W_k, \dots, \widetilde{W}_{k-p} = W_{k-p}$.

Выполняется следующая теорема.

Теорема 14.2. *Пусть цепочка (14.1) удовлетворяет условию А. Тогда*
1) преобразования (14.2) переводят ее в себя;
2) выполняются тождества

$$B_j^2 = (B_jB_{j+1})^3 = (B_iB_j)^2 = 1, \quad i \neq j \pm 1, \tag{14.5}$$

задающие код группы B, порожденной преобразованиями B_j;
3) любое преобразование, определенное соотношением (14.4) (предполагается, что $\widetilde{W}_j = W_j$, $j \neq k, \dots, k-p$) принадлежит B.

Доказательство. 1) При фиксированных β_k, β_{k-1} уравнение (14.2) разрешимо однозначно, следовательно условия Теоремы 14.1 выполнены.

2) Каждое из преобразований $B_j^2, (B_jB_{j+1})^3, (B_jB_i)^2$, удовлетворяет какому-нибудь из соотношений (14.4) и действует на множестве параметров β_j тождественно. В силу условия А, оно тождественно также на переменных u_j, v_j.

3) Любое преобразование (14.4) задает на множестве параметров β_j некоторую перестановку. Композиция этого преобразования с элементом группы B, приводящая к тождественной перестановке, также удовлетворяет одному из соотношений (14.4) и следовательно тождественна. ∎

Замечание. Если матрицы W_j обладают свойством A и допускают нетривиальные преобразования (14.2), то, согласно теореме 14.2, попытка обобщить их путем переразложения большего числа сомножителей не даст ничего нового: все преобразования будут являться их композицией. Тем не менее существуют примеры, когда преобразования (14.2) тождественны, и тогда для получения преобразований B_j приходится переразлагать произведение 3 матриц. Такой пример приведен в следующем разделе.

Пусть цепочка (14.1) допускает симметрию вида

$$W_{j,t} = V_{j+1}W_j - W_jV_j, \tag{14.6}$$

где $V_j = V(\lambda, \beta_j, u_j, v_j, u_{j,x}, v_{j,x}, \dots)$. В этом случае цепочка (14.1) определяет последовательность x-частей преобразования Бэклунда для системы уравнений в частных производных

$$U_t = V_x + [V, U]. \tag{14.7}$$

Если условия Теорем 14.1 или 14.2 выполнены, то преобразования (14.2) действуют также и на цепочке (14.6). Таким образом, размножая при помощи преобразований (14.2) совместные решения (14.1), (14.6), можно одновременно строить решения ассоциированнной системы (14.7). То же относится и к ее высшим симметриям.

Как и в случае оператора Шредингера, преобразования (14.2) доставляют примеры интегрируемых соответствий. Наложим условие периодического замыкания

$$u_{j+N} = u_j, \quad v_{j+N} = v_j, \quad \beta_{j+N} = \beta_j, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{14.8}$$

и рассмотрим N-значное соответствие B, определяемое преобразованиями $B_1, \dots, B_N$. Очевидно, что след матрицы $\widehat{W}_j = W_{j+N-1}\dots W_j$, является производящей функцией для инвариантов соответствия B. Кроме того, $\widehat{W}_j$ удовлетворяет уравнениям

$$\widehat{W}_{j,x} = [U_j, \widehat{W}_j], \quad \widehat{W}_{j,t} = [V_j, \widehat{W}_j]$$

из которых вытекает, что $\operatorname{tr}\widehat{W}_j$ есть производящая функция для первых интегралов системы (14.1), (14.8) и ее симметрий. Наличие коммутирующих непрерывных потоков и является механизмом, обеспечивающим интегрируемость соответствия B. В каждом конкретном случае остается установить гамильтонову структуру, показать, что отображения (14.8) являются пуассоновыми, а запас первых интегралов достаточно богат, после чего мы можем воспользоваться дискретной версией теоремы Лиувилля [7, 43].

15 Оператор Дирака

Проиллюстрируем схему из раздела 14 на примере оператора Дирака. Он отвечает матрице

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda & -v \\ u & \lambda \end{pmatrix} \tag{15.1}$$

с которой связано целое семейство интегрируемых уравнений, допускающих представление (14.7) — иерархия имени Захарова-Шабата-Абловица-Каупа-Ньюэла-Сигура (см. для ссылок [15]). Уравнения из этой иерархии имеют

вид
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_n} = \begin{pmatrix} D + 2uD^{-1}v & 2uD^{-1}u \\ -2vD^{-1}v & -D - 2vD^{-1}u \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$
В частности, при $t = t_2$ получаем нелинейную систему Шредингера
$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + 2u^2 v, \\ -v_t &= v_{xx} + 2v^2 u, \end{cases} \tag{15.3}$$
а при $t = t_3$ систему
$$\begin{cases} u_t &= u_{xxx} + 6vuu_x, \\ v_t &= v_{xxx} + 6uvv_x, \end{cases} \tag{15.4}$$
В отличие от иерархии KdV эта иерархия допускает преобразования Бэклунда трех различных типов. Первый из них получается при выборе матрицы W вида
$$W_j = \begin{pmatrix} 0 & -\exp(-q_j) \\ \exp(q_j) & 2\lambda - q_{j,x} \end{pmatrix}, \tag{15.5}$$
и приводит к цепочке Тоды
$$q_{j,xx} = \exp(q_{j+1} - q_j) - \exp(q_j - q_{j-1}), \tag{15.6}$$
где $u_j = \exp(q_j)$, $v_{j+1} = \exp(-q_j)$. Второй тип преобразований Бэклунда, соответствующий матрице
$$W_j = \begin{pmatrix} 1 & -v_{j+1} \\ u_j & 2\lambda - \beta_j - u_j v_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{15.7}$$
приводит к цепочке
$$\begin{cases} u_{j,x} &= u_{j+1} + \beta_j u_j + u_j^2 v_{j+1}, \\ -v_{j,x} &= v_{j-1} + \beta_{j-1} v_j + v_j^2 u_{j-1}. \end{cases} \tag{15.8}$$
Третий тип преобразования Бэклунда соответствует матрице
$$W_j = \begin{pmatrix} -2\lambda - \delta_j + R_j & -v_{j+1} - v_j \\ u_{j+1} + u_j & 2\lambda + \delta_j + R_j \end{pmatrix}, \tag{15.9}$$
где $R_j^2 = \gamma_j^2 - (u_{j+1} + u_j)(v_{j+1} + v_j)$, и приводит к цепочке
$$\begin{cases} (u_{j+1} + u_j)_x &= (u_{j+1} - u_j)R_j - \delta_j(u_{j+1} + u_j), \\ (v_{j+1} + v_j)_x &= (v_{j+1} - v_j)R_j + \delta_j(v_{j+1} + v_j). \end{cases} \tag{15.10}$$
Разберем перечисленные случаи по отдельности.

1) Легко убедиться, что в первом случае система (14.2) имеет лишь тождественное решение и, таким образом, наша схема не приводит к автопреобразованиям для цепочки Тоды. Тем не менее эти преобразования существуют, см. напр. [11].

2) Во втором случае формула (14.2) дает преобразование
$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_{k-1} - \beta_k)\dfrac{u_{k-1}}{1 - u_{k-1}v_{k+1}}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_k - \beta_{k-1})\dfrac{v_{k+1}}{1 - u_{k-1}v_{k+1}}, \\ \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \quad \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k. \end{cases} \tag{15.11}$$

Теорема 15.1. *Преобразования (15.11) действуют на множестве цепочек (15.8) и удовлетворяют тождествам (14.5).*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условия A). Первая часть этого условия очевидна, так как $\det W_j = 2\lambda - \beta_j$. При $2\lambda = \beta_{k-p}$ находим, что $\ker W_k \dots W_{k-p}$ натянуто на вектор $(v_{k-p+1}, 1)^\top$, откуда, в силу (14.4), следует $\widetilde{v}_{k-p+1} = v_{k-p+1}$. Далее, легко показать, что

$$W_k \dots W_{k-p+1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \alpha & (2\lambda)^p + \dots \end{pmatrix},$$

где $\deg \alpha < p$, а звездочка обозначает несущественные для нас элементы. Тогда

$$W_k \dots W_{k-p+1} W_{k-p} = \begin{pmatrix} * & * \\ (2\lambda)^p u_{k-p} + \dots & * \end{pmatrix},$$

откуда следует $\widetilde{u}_{k-p} = u_{k-p}$. Итак, $\widetilde{W}_{k-p} = W_{k-p}$, и доказательство сводится к случаю произведения меньшего числа матриц. ∎

Рассмотрим соответствие B, порождаемое преобразованиями (15.11) при периодическом замыкании (14.8). Как и в случае преобразований (2.1), удобно от преобразований B_j перейти к их комбинациям

$$T_j = (B_{j-N+1} \dots B_{j-1} B_j)^{N-1},$$

оставляющим β_j на своих местах и порождающим коммутативную подгруппу.

Теорема 15.2. *Система (15.8), (14.8) и соответствие, порожденное преобразованиями T_j интегрируемы по Лиувиллю.*

Доказательство. При периодическом замыкании цепочка (15.8) является гамильтоновой системой со скобкой Пуассона

$$\{u_i, v_j\} = \delta_{i,j-1}, \quad \{u_i, u_j\} = \{v_i, v_j\} = 0 \tag{15.12}$$

и гамильтонианом $H = \sum_1^N h_j$, где

$$h_j = u_j v_j + \beta_j u_j v_{j+1} + \frac{1}{2} u_j^2 v_{j+1}^2. \tag{15.13}$$

Легко проверить, что $H = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 + \mathrm{const}$, где

$$\operatorname{tr} \widehat{W}_j(\lambda) = (2\lambda)^N + (2\lambda)^{N-1} I_1 + \dots + 2\lambda I_{N-1} + I_N.$$

Инволютивность I_j проще всего доказывается при помощи r-матричного подхода (см. напр. [61]). Непосредственно проверяется, что скобка Пуассона (15.12) задается формулой

$$\{W_i(\lambda) \underset{,}{\otimes} W_j(\mu)\} = [r, W_i(\lambda) \otimes W_j(\mu)] \delta_{i,j},$$

где

$$r = \frac{1}{2(\lambda - \mu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Отметим, что эта же r-матрица возникает и в гамильтоновой теории нелинейной системы Шредингера и цепочки Тоды [61].) Отсюда легко вывести формулу

$$\{\widehat{W}_j(\lambda) \underset{,}{\otimes} \widehat{W}_j(\mu)\} = [r, \widehat{W}_j(\lambda) \otimes \widehat{W}_j(\mu)],$$

из которой следует $\{\operatorname{tr} \widehat{W}_j(\lambda), \operatorname{tr} \widehat{W}_j(\mu)\} = 0$.

Докажем, что I_j функционально независимы. Для этого положим $v_j = -1$ и покажем, что $\det(\partial I_i/\partial u_j) \not\equiv 0$. Действительно, из структуры W_j очевидно, что $I_i = \sigma_i + p_i$, где σ_j элементарные симметрические функции от u_j, а p_j полиномы младшей степени. Тогда $\det(\partial I_i/\partial u_j) = \det(\partial \sigma_i/\partial u_j) + P$, где первое слагаемое имеет большую степень.

Завершает доказательство непосредственная проверка того, что преобразования (15.11), а вместе с ними и T_j являются пуассоновыми отображениями. ∎

Вычислительный эксперимент показывает, однако, что поверхность уровня первых интегралов некомпактна. Кроме того, оказывается, что образы вектора $(\vec{u}, \vec{v})$ при итерациях стремятся к некоторому выделенному направлению. Причину этого легко понять. Кроме первых интегралов, система (15.8), (14.8) допускает еще понижение порядка на 1 за счет введения переменных

$$p_j = u_{j+1}/u_j, \quad q_j = u_j v_{j+1}. \tag{15.14}$$

В новых переменных цепочка имеет вид

$$\begin{cases} p_{j,x} &= p_j(p_{j+1} + q_{j+1} + \beta_{j+1} - p_j - q_j - \beta_j), \\ q_{j,x} &= p_j q_j - p_{j-1} q_{j-1}. \end{cases} \tag{15.15}$$

При нулевых параметрах β_j эта цепочка известна как релятивистская цепочка Тоды и рассматривалась в [6]. Если функции p, q уже найдены, то решение в переменных u, v находится простым интегрированием:

$$u_{j,x}/u_j = p_j + q_j + \beta_j, \quad -v_{j,x}/v_j = q_{j-1} + p_{j-2}q_{j-2}/q_{j-1} + \beta_{j-1}.$$

При $N = 2$ легко убедиться, что p, q есть эллиптические функции, откуда видим, что функции u, v в случае общего положения экспоненциально растут или убывают, что вполне согласуется с численным экспериментом. Оказывается, что система (15.3) и преобразования (15.11) также могут быть переписаны в новых переменных. Фактически замена (15.14) эквивалетна преобразованию Бэклунда

$$uv = pq - q_x, \quad u_x/u = p + q + \beta$$

между системой (15.3) и системой

$$p_t = p_{xx} + (p^2 + 2pq + 2\beta p)_x, \quad q_t = -q_{xx} + (q^2 + 2pq + 2\beta q)_x. \tag{15.16}$$

Эта система рассматривалась в [57]. Она, в отличие от системы Шредингера, явно содержит параметр β_j (ср. с уравнениями (3.6) и (3.8)). Преоб-

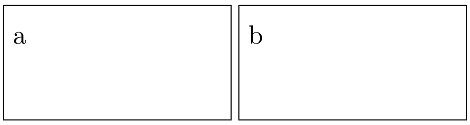


Рис. 15.1: Поверхность уровня первых интегралов в компактном и некомпактном случаях

разования B_k принимают вид

$$\begin{aligned}
&\widetilde{p}_{k-1} = p_{k-1}\left(1 - \frac{\alpha}{p_{k-1} - q_k}\right), &&\widetilde{p}_k = p_k\left(1 + \frac{\alpha}{p_{k-1} - q_k - \alpha}\right),\\
&\widetilde{q}_{k-1} = q_{k-1} + \frac{\alpha q_k}{p_{k-1} - q_k}, &&\widetilde{q}_k = q_k\left(1 - \frac{\alpha}{p_{k-1} - q_k}\right),\\
&\widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, &&\widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1},
\end{aligned} \tag{15.17}$$

где $\alpha = \beta_k - \beta_{k-1}$. Рассмотрим порождаемое ими дискретное соответствие.

Переписывая скобку (15.12) в переменных (15.14), убеждаемся, что периодически замкнутая цепочка (15.15) есть гамильтонова система, со скобкой Пуассона

$$\{p_j, q_j\} = -p_j, \quad \{p_j, q_{j+1}\} = p_j$$

(остальные скобки равны 0) и гамильтонианом

$$H = \sum_1^N \left(\frac{1}{2}q_j^2 + \beta_j q_j + p_j q_j\right).$$

Отметим, что новая пуассонова структура вырождена, с функцией Казимира $J = p_1 \dots p_N$. Можно показать, что $\operatorname{tr}\widehat{W}_j$ также может быть переписан в терминах p, q. Отсюда следует, что рассматриваемая система интегрируема по Лиувиллю. Преобразования B_j (15.17) являются пуассоновыми и сохраняют J, поэтому Теорема 15.2 верна и для них.

На приведенных графиках изображены проекции образов вектора $(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$ при $N = 3$ под действием итераций преобразования T_j на плоскость (p_1, q_1). Поверхность уровня и теперь может оказаться некомпактной, но асимптотического стремления к бесконечности уже нет (см. рис. 15.1b). В компактном случае поверхность уровня диффеоморфна $N-1$-мерному тору, причем точки заметают его регулярным образом (рис. 15.1a).

Отметим, что кроме приведенных выше представлений нулевой кривизны в терминах переменных u и v, цепочка (15.15) и система (15.16) допускают также самостоятельные представления, которые задаются матрицами

$$U = \begin{pmatrix} s-\lambda & -q \\ p & \lambda - s \end{pmatrix}, \quad V = 2(\lambda + s)U + \begin{pmatrix} (p-q)/2 & q \\ p & (q-p)/2 \end{pmatrix}_x,$$
$$W_j = p_j^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_j & -q_{j+1} \\ p_j & 2\lambda - \beta_{j+1} - q_{j+1} \end{pmatrix},$$

где $2s = p+q+\beta$. Легко убедиться, что уравнение (14.2) с такими матрицами W_j имеет лишь тождественное решение и не приводит к какому-либо преобразованию. Оказывается, чтобы получить формулы (15.17), мы должны переразложить произведение трех матриц: преобразование B_k определяется формулой

$$B: \quad \widetilde{W}_k\widetilde{W}_{k-1}\widetilde{W}_{k-2} = W_kW_{k-1}W_{k-2}, \quad \widetilde{W}_j = W_j, \quad j \neq k, k-1, k-2.$$

Таким образом, иногда общая схема из раздела 2 нуждается в модификациях.

3) Перейдем к цепочке (15.10). Определитель соответствующей матрицы W_j (15.9) имеет два корня:

$$\det W_j = -(2\lambda + \delta_j + \gamma_j)(2\lambda + \delta_j - \gamma_j).$$

Это приводит к тому, что дискретная группа этой цепочки гораздо богаче, чем во всех рассмотренных ранее примерах. Нетрудно убедиться, что переразложение (14.2) приводит к преобразованию вида

$$\left\{\begin{aligned} \widetilde{u}_k = \quad & u_k + \tfrac{1}{\Delta}\Big((\widetilde{\delta}_k - \widetilde{\delta}_{k-1})(\widetilde{\delta}_k - \delta_k)(u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}) + \\ & +(\widetilde{\gamma}_k^2 - \widetilde{\gamma}_{k-1}^2 - \gamma_k^2 + \gamma_{k-1}^2)(u_{k+1} - u_{k-1})/2 - \\ & -2(\widetilde{\delta}_k - \delta_k)(R_k(u_k + u_{k-1}) + R_{k-1}(u_{k+1} + u_k)\Big), \\ \widetilde{v}_k = \quad & v_k + \tfrac{1}{\Delta}\Big((\widetilde{\delta}_k - \widetilde{\delta}_{k-1})(\widetilde{\delta}_k - \delta_k)(v_{k+1} + 2v_k + v_{k-1}) + \\ & +(\widetilde{\gamma}_k^2 - \widetilde{\gamma}_{k-1}^2 - \gamma_k^2 + \gamma_{k-1}^2)(v_{k+1} - v_{k-1})/2 + \\ & +2(\widetilde{\delta}_k - \delta_k)(R_k(v_k + v_{k-1}) + R_{k-1}(v_{k+1} + v_k)\Big), \end{aligned}\right. \tag{15.18}$$

где

$$\Delta = (R_k + R_{k-1})^2 + (u_{k+1} - u_{k-1})(v_{k+1} - v_{k-1}) - (\widetilde{\delta}_k - \widetilde{\delta}_{k-1})^2$$

(остальные u_j, v_j не меняются). При этом каждая из 24 перестановок сомножителей в произведении

$$\det \widetilde{W}_k\widetilde{W}_{k-1} = \det W_kW_{k-1} =$$
$$= (2\lambda + \delta_k + \gamma_k)(2\lambda + \delta_k - \gamma_k)(2\lambda + \delta_{k-1} + \gamma_{k-1})(2\lambda + \delta_{k-1} - \gamma_{k-1})$$

приводит к новому набору параметров цепочки $\widetilde{\gamma}_k, \widetilde{\gamma}_{k-1}, \widetilde{\delta}_k, \widetilde{\delta}_{k-1}$. Однако вследствие инвариантности формулы (15.18) и цепочки (15.10) относительно перемены знаков γ_j из этих 24 преобразований лишь 6 существенно различны. Одно из них тождественно, четыре других получаются, когда $\det W_k$ и $\det W_{k-1}$ обмениваются одной парой корней:

$$\widetilde{\delta}_k + \varepsilon\widetilde{\gamma}_k = \delta_{k-1} + \sigma\gamma_{k-1}, \quad \widetilde{\delta}_{k-1} + \sigma\widetilde{\gamma}_{k-1} = \delta_k + \varepsilon\gamma_k,$$
$$\widetilde{\delta}_k - \varepsilon\widetilde{\gamma}_k = \delta_k - \varepsilon\gamma_k, \quad \widetilde{\delta}_{k-1} - \sigma\widetilde{\gamma}_{k-1} = \delta_{k-1} - \sigma\gamma_{k-1},$$

где $\varepsilon, \sigma = \pm$, то есть

$$\widetilde{\delta}_k = (\delta_k + \delta_{k-1} - \varepsilon\gamma_k + \sigma\gamma_{k-1})/2, \quad \widetilde{\delta}_{k-1} = (\delta_k + \delta_{k-1} + \varepsilon\gamma_k - \sigma\gamma_{k-1})/2,$$
$$\widetilde{\gamma}_k = \varepsilon(\delta_{k-1} - \delta_k + \varepsilon\gamma_k + \sigma\gamma_{k-1})/2,$$
$$tig_{k-1} = \sigma(\delta_k - \delta_{k-1} + \varepsilon\gamma_k + \sigma\gamma_{k-1})/2.$$

Если же $\det W_k$ и $\det W_{k-1}$ полностью меняются местами, то закон преобразоования коэффициентов имеет вид

$$\widetilde{\delta}_k = \delta_{k-1}, \quad \widetilde{\delta}_{k-1} = \delta_k, \quad \widetilde{\gamma}_k = \gamma_{k-1}, \quad \widetilde{\gamma}_{k-1} = \gamma_k.$$

Остальные преобразования не дают ничего нового. Например, в последней формуле можно положить также $\widetilde{\gamma}_k = -\gamma_{k-1}$, $\widetilde{\gamma}_{k-1} = -\gamma_k$, но это не приводит к новому преобразованию, поскольку как формула (15.18), так и сама цепочка (15.10) не меняются при перемене знаков γ_j.

Доказательство для преобразований (15.18) аналогов теорем 15.1 и 15.2 и анализ дискретной группы цепочки (15.10) не представляет принципиальных трудностей.

В заключение отметим, что, как и в случае иерархии KdV, замены в цепочках (15.6), (15.8), (15.10) порождают преобразования, связывающие уравнения иерархии (15.2) с другими интегрируемыми уравнениями (например, замена (15.14), приводящая к системе (15.16)). Полный их обзор занял бы слишком много места, и мы ограничимся рассмотрением системы (15.4), цепочки (15.10) и преобразований (15.18), на которые наложена одна из скалярных редукций

$$\delta = 0, \quad v = -1 \quad \text{или} \quad \delta = 0, \quad v = -u.$$

В первом случае система (15.4) переходит в уравнение KdV и мы получаем семейство уравнений и цепочек из раздела 3. Вторая редукция рассматривается в следующем разделе.

16 Преобразования Бэклунда для уравнений типа KdV. II

Положим

$$u = -v = f, \quad \gamma^2 = 4\alpha,$$

тогда система (15.4) перейдет в уравнение mKdV

$$f_t = f_{xxx} - 6f^2 f_x, \tag{16.1}$$

цепочка (15.10) в цепочку

$$(f_{j+1} + f_j)_x = (f_{j+1} - f_j)\sqrt{(f_{j+1} + f_j)^2 + 4\alpha_j} \tag{16.2}$$

и преобразования (15.18) в преобразования

$$B_k: \begin{cases} \widetilde{f}_k = f_k - \dfrac{4}{\Delta}(\alpha_k - \alpha_{k-1})(f_{k+1} - f_{k-1}), \quad \widetilde{f}_j = f_j,\ j \neq k, \\ \widetilde{\alpha}_k = \alpha_{k-1}, \quad \widetilde{\alpha}_{k-1} = \alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_j = \alpha_j, \quad j \neq k, k-1, \end{cases} \tag{16.3}$$

где

$$\Delta = \left(\sqrt{(f_{k+1} + f_k)^2 + 4\alpha_k} + \sqrt{(f_k + f_{k-1})^2 + 4\alpha_{k-1}}\right)^2 - (f_{k+1} - f_{k-1})^2.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение mKdV допускает два различных преобразования Бэклунда — цепочки (16.2) и (1.10). (То, что уравнение

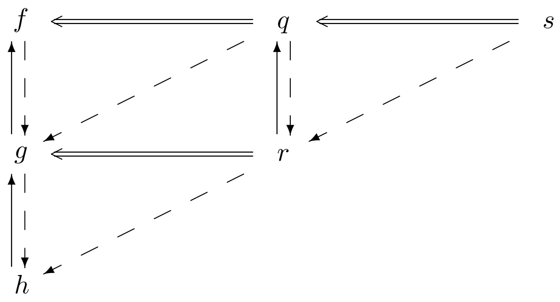


Рис. 16.1: Уравнения, связанные с mKdV

mKdV (3.6), в отличие от (16.1), содержит параметр β, не существенно, так как он убирается преобразованием Галилея.) Как и цепочка (1.10), цепочка (16.2) допускает ряд замен, приводящих к дифференциальным подстановкам из (16.1) в другие интегрируемые уравнения. Они схематически изображены на рис. 16.1. Обозначения — как в разделе 3.

Первая строка на этой диаграмме состоит из двух потенциирований

$$f = q', \quad e^{2q} = s'.$$

Уравнение (16.3), цепочка (16.2) и преобразование B_k (16.3), переписанные в переменных q_j принимают соответственно вид

$$q_t = q_{xxx} - 2q_x^3, \tag{16.4}$$
$$q'_{j+1} + q'_j = \exp(q_{j+1} - q_j) - \alpha_j \exp(q_j - q_{j+1}), \tag{16.5}$$
$$\widetilde{q}_k = q_k + \ln\left(\frac{e^{q_{k+1}-q_{k-1}} + \alpha_k}{e^{q_{k+1}-q_{k-1}} + \alpha_{k-1}}\right); \tag{16.6}$$

в переменных s_j — вид

$$s_t = s_{xxx} - \frac{3s_{xx}^2}{2s_x},$$
$$s'_{j+1}s'_j = (s_{j+1} - \alpha_j s_j)^2,$$
$$\widetilde{s}_k = \frac{s_{k+1}s_k + (\alpha_k - \alpha_{k-1})s_{k+1}s_{k-1} - \alpha_k^2 s_k s_{k-1}}{s_{k+1} - (\alpha_k - \alpha_{k-1})s_k - \alpha_{k-1}^2 s_{k-1}}.$$

(При этом параметры цепочек α_j меняются, как в формуле (16.3). Для краткости мы не выписываем те переменные, на которые B_k действует тождественно.)

Отметим, что если $\alpha_j \neq 0$, то цепочка (16.5), приведенная сдвигом $q_j \to q_j + c_j$ к виду

$$q'_{j+1} + q'_j = \gamma_j \operatorname{sh}(q_{j+1} - q_j),$$

задает преобразование Бэклунда для уравнения sh-Gordon [24]

$$q_{xy} = \operatorname{sh} 2q,$$

которое, как известно, является симметрией (16.4). (В качестве второй половины преобразования Бэклунда обычно принимают цепочку $(q_{j+1}-q_j)_y =$

$2\,\mathrm{sh}(q_{j+1}+q_j)/\gamma_j$.) При этом формула (16.6) после несложных преобразований приводит к известному принципу нелинейной суперпозиции [24]

$$\mathrm{th}\,\frac{1}{2}(q_{k+1}-q_{k-1})=\frac{\gamma_k+\gamma_{k-1}}{\gamma_k-\gamma_{k-1}}\,\mathrm{th}\,\frac{1}{2}(q_k-\widetilde{q}_k).$$

Замены $s\to r$, $q\to r$, $r\to q$ задаются соответственно формулами

$$2r_j=\ln(s_{j+1}-\alpha_j s_j),\quad 2r_j=q_{j+1}+q_j,\quad 2q=2r-\ln(r'+\sqrt{r'^2+\alpha}).$$

При этом на переменные r_j получаем

$$r_t=r_{xxx}-\frac{3r_x r_{xx}^2}{2(r_x^2+\alpha)}-2r_x^3,$$
$$\left(r'_{j+1}+\sqrt{r'^2_{j+1}+\alpha_{j+1}}\right)\left(r'_j+\sqrt{r'^2_j+\alpha_j}\right)=\exp(2r_{j+1}-2r_j),$$
$$\widetilde{r}_k=r_k+L,\quad \widetilde{r}_{k-1}=r_{k-1}+L,\quad 2L=\ln\left(\frac{e^{r_k-r_{k-1}}+\alpha_k}{e^{r_k-r_{k-1}}+\alpha_{k-1}}\right).$$

Замены $r\to g$, $q\to g$, $f\to g$, $g\to f$ задаются формулами

$$g-\alpha/g=2r',\quad g_j=\exp(q_{j+1}-q_j),$$
$$g-\alpha/g=f_{j+1}+f_j,\quad 2f=g-(g'+\alpha)/g.$$

На переменные g_j получаем

$$g_t=g_{xxx}-3\frac{g_x g_{xx}}{g}+\frac{3g_x^3}{2g^2}-\frac{3}{2}\Big(g-\frac{\alpha}{g}\Big)^2 g_x, \tag{16.7}$$
$$(g_{j+1}g_j)'=g_{j+1}g_j(g_{j+1}-g_j)-\alpha_{j+1}g_j+\alpha_j g_{j+1}, \tag{16.8}$$
$$\widetilde{g}_k=g_kG,\quad \widetilde{g}_{k-1}=g_{k-1}/G,\quad G=\frac{g_kg_{k-1}+\alpha_{k-1}}{g_kg_{k-1}+\alpha_k}.$$

Наконец, замены $r\to h$, $g\to h$, $h\to g$ имеют вид

$$h_{j+1}=\exp(2(r_{j+1}-r_j)),\quad h_{j+1}=g_{j+1}g_j,\quad 2g=(R+h')/(h+\alpha_{-1})$$

и на переменные h_j получаем

$$h_t=h_{xxx}-\frac{3h_x(h_{xx}+2\dot{P})^2}{2(h_x^2+4P)}+6(2h+\alpha+\alpha_{-1})h_x, \tag{16.9}$$
$$(R_{j+1}+h'_{j+1})(R_j+h'_j)=4h_{j+1}(h_{j+1}+\alpha_j)(h_j+\alpha_{j-1}), \tag{16.10}$$
$$\widetilde{h}_{k\pm1}=h_{k\pm1}\left(\frac{h_k+\alpha_k}{h_k+\alpha_{k-1}}\right)^{\pm1},$$

где

$$R_j^2=h'^2_j+4P_j(h_j),\quad P_j(h_j)=h_j(h_j+\alpha_j)(h_j+\alpha_{j-1}).$$

Отметим, что уравнение (16.7) совпадает, с точностью до преобразования Галилея, с уравнением (3.11), а соответствующие цепочки отличаются только знаком при одном из линейных членов. Если рассмотреть только одну пару соседних членов в этих цепочках, то легко убедиться, что фактически это одно и тоже преобразование Бэклунда. Тем не менее, структура этих двух цепочек совершенно различна, что видно уже из сравнения формул нелинейной суперпозиции. То же самое можно сказать про уравнения (16.9) и (3.14). Таким образом, экспоненциальное и эллиптическое уравнения Калоджеро имеют по две похожие цепочки, одна из которых унаследована от KdV, а другая от mKdV.

Оказывается, что, кроме того, уравнение (16.7) имеет и свое собственное преобразование Бэклунда. Соответствующая цепочка в переменных $\varphi = \ln g$ приводилась в [65]. Ее, и ее автопреобразования можно вывести по схеме из раздела 14, приняв за основу представление нулевой кривизны (14.7) для уравнения (16.7), где

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & g - \dfrac{\alpha\lambda}{g} \\ g - \dfrac{\alpha}{\lambda g} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = U_{xx} - \Big(\frac{3g_x^2}{2g^2} + \frac{1}{2}\Big(g - \frac{\alpha}{g}\Big)^2 + \frac{\alpha}{\lambda}(\lambda-1)^2\Big)U - \alpha\Big(\lambda - \frac{1}{\lambda}\Big)\frac{g_x}{2g}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вид матрицы W_j легко находится непосредственно из (14.1):

$$W_j = (g_{j+1}g_j)^{-1/2}\begin{pmatrix} Y_j & g_{j+1}g_j - \alpha\lambda \\ g_{j+1}g_j - \dfrac{\alpha}{\lambda} & Y_j \end{pmatrix},$$

$$Y_j = \sqrt{g_{j+1}^2 g_j^2 + 2\varepsilon_j g_{j+1}g_j + \alpha^2}.$$

При этом мы получаем цепочку

$$(g_{j+1}g_j)' = Y_j(g_{j+1} - g_j). \qquad (16.11)$$

Подчеркнем, что здесь, в отличие от цепочки (16.8), параметр α фиксирован, но зато появился новый параметр ε_j. Формула (14.2) в данном случае приводит к преобразованию

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{g}_k = g_k - \dfrac{2(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})g_k^2(g_{k+1} - g_{k-1})}{(Y_k + Y_{k-1})^2 - g_k^2(g_{k+1} - g_{k-1})^2}, \quad \widetilde{g}_j = g_j, \quad j \neq k, \\ \widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_{k-1}, \quad \widetilde{\varepsilon}_{k-1} = \varepsilon_k, \quad \widetilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j, \quad j \neq k, k-1 \end{cases} \qquad (16.12)$$

(ср. с (3.9) и (16.3)). Как и ранее, формулы (16.7), (16.11), (16.12) удается переписать еще в нескольких переменных. Так мы приходим к диаграмме, изображенной на рис. 16.2. Горизонтальная стрелка соответствует потенцированию $g = p'$, переводящему уравнение (16.7) в уравнение

$$p_t = p_{xxx} - \frac{3(p_{xx}^2 - \alpha^2)}{2p_x} - \frac{1}{2}p_x^3 + 3\alpha p_x,$$

цепочку (16.8) в цепочку

$$2p'_{j+1}p'_j = \exp(p_{j+1} - p_j) + (\varepsilon_j^2 - \alpha^2)\exp(p_j - p_{j+1}) - 2\varepsilon_j$$

и преобразование (16.11) в преобразование

$$\widetilde{p}_k = p_k + \ln\left(\frac{e^{p_{k+1}} + (\alpha^2 - \varepsilon_k^2)e^{p_{k-1}} + (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})e^{p_{k+1} - p_k + p_{k-1}}}{e^{p_{k+1}} + (\alpha^2 - \varepsilon_{k-1}^2)e^{p_{k-1}} - (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})e^{p_k}}\right).$$

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[d, dashed, shift left] & & p \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[dll, dashed] \\
h \arrow[u, shift left] & &
\end{tikzcd}$$

Рис. 16.2: Уравнения, связанные с экспоненциальным уравнением Калоджеро

Замены $p \to h, g \to h, h \to g$ имеют соответственно вид

$$g_{j+1}g_j = h_j + (\varepsilon_j^2 - \alpha^2)/(4h_j) - \varepsilon_j, \quad 2g = (R - h_x)/h$$

и на переменную h мы получаем

$$h_t = h_{xxx} - \frac{3h_x(h_{xx} + 2\dot{P})^2}{2(h_x^2 + 4P)} + 3(4h + \alpha - \varepsilon)h_x, \tag{16.13}$$

$$(R_{j+1} + h'_{j+1})(R_j + h'_j) = h_j(2h_{j+1} - \varepsilon_{j+1} - \alpha)(2h_j - \varepsilon_{j+1} + \alpha), \tag{16.14}$$

$$\widetilde{h}_k = h_k H, \quad \widetilde{h}_{k-1} = h_{k-1}/H,$$

где

$$R_j^2 = {h'}_j^2 + 4P_j(h_j), \quad P_j(h_j) = h_j(h_j - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_j + \alpha))(h_j - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_j - \alpha)),$$

$$H = \frac{4h_k h_{k-1} - 2(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})h_{k-1} - \varepsilon_{k-1}^2 + \alpha^2}{4h_k h_{k-1} + 2(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})h_k - \varepsilon_k^2 + \alpha^2}.$$

Как и в случае цепочек (3.12), (16.8), сравнение цепочек (3.15), (16.10) и (16.14) показывает, что они эквивалентны последовательностям из фактически одних и тех же преобразований Бэклунда для уравнения (16.13), только по разному сцепленых.

17 О многополевых нелинейных системах Шредингера

Известно, что система (15.2) допускает целый ряд интегрируемых многополевых обобщений вида

$$u_t = u_{xx} + 2\{uvu\}, \quad -v_t = v_{xx} + 2\{vuv\}, \tag{17.1}$$

где u, v векторы, возможно разной размерности, а $\{\ \}$ обозначает некоторое трилинейное произведение, то есть

$$\{uvu\}^i = \sum_{j,k,l} a^i_{jkl} u^j v^k u^l, \qquad \{vuv\}^i = \sum_{j,k,l} b^i_{jkl} v^j u^k v^l.$$

Первый пример появился в работе [56], а в [19] была установлена связь интегрируемых систем этого типа с эрмитовыми симметрическими пространствами. В работе [36] для систем вида (17.1) был найден чисто алгебраический критерий интегрируемости. Оказалось, что если система (17.1) неприводима (то есть не может быть приведена к блочно-треугольному виду линейной заменой переменных), то необходимым и достаточным для существования высших симметрий и законов сохранения является следующее условие: операция $\{\ \}$ удовлетворяет тождествам, определяющим некоторую алгебраическую структуру, называемую йордановой парой (см. определение ниже). Оказалось также, что это же условие необходимо и достаточно для наличия цепочки преобразований Бэклунда вида

$$\begin{cases} u_{j,x} &= u_{j+1} + \beta_j u_j + \{u_j v_{j+1} u_j\}, \\ -v_{j,x} &= v_{j-1} + \beta_{j-1} v_j + \{v_j u_{j-1} v_j\} \end{cases} \tag{17.2}$$

обобщающей цепочку (15.8) (см. [37], где рассматривалась цепочка (17.2) с нулевыми параметрами β_j). В этом разделе нас интересует вопрос о существовании аналогов преобразований (15.11) для этих цепочек. Рассмотрим сначала два характерных примера, для которых мы можем предъявить представление нулевой кривизны и построить автопреобразования согласно общей схеме.

1) Пусть u и v обозначают матрицы размера $m \times n$, а операция $\{\ \}$ задается формулой

$$\{uvp\} = (uv^\top p + pv^\top u)/2.$$

Тогда система (17.1) принимает вид

$$u_t = u_{xx} + 2uv^\top u, \quad -v_t = v_{xx} + 2vu^\top v$$

и имеет представление нулевой кривизны (14.7) с матрицами размера $(m+n) \times (m+n)$

$$U = \begin{pmatrix} -m\lambda I_n & -v^\top \\ u & n\lambda I_m \end{pmatrix}, \quad V = (m+n)\lambda U + \begin{pmatrix} -v^\top u & v_x^\top \\ u_x & uv^\top \end{pmatrix},$$

где I_n есть n-мерная единичная матрица. В частности, при $n = 1$, $m = 2$ получаем систему Манакова [56]

$$u_t = u_{xx} + 2\langle u, v\rangle u, \quad -v_t = v_{xx} + 2\langle u, v\rangle v$$

где $\langle\,,\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение. Цепочка преобразований Бэклунда задается матрицей

$$W_j = \begin{pmatrix} I_n & -v_{j+1}^\top \\ u_j & (m+n)\lambda I_m - \beta_j I_m - u_j v_{j+1}^\top \end{pmatrix}.$$

Сами цепочки в этом разделе мы не будем выписывать, так как все они имеют вид (17.2) и легко восстанавливаются по исходной системе. Формула (14.2) приводит к преобразованию

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_{k-1} - \beta_k) u_{k-1} (I_n - v_{k+1}^\top u_{k-1})^{-1}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_k - \beta_{k-1}) v_{k+1} (I_n - u_{k-1}^\top v_{k+1})^{-1}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}. \end{cases}$$

В частности, для системы Манакова имеем

$$\widetilde{u}_k = u_k + \frac{\beta_{k-1} - \beta_k}{1 - \langle u_{k-1}, v_{k+1}\rangle} u_{k-1}, \quad \widetilde{v}_k = v_k + \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{1 - \langle u_{k-1}, v_{k+1}\rangle} v_{k+1}.$$

При $m = n = 1$ все формулы переходят в соответствующие формулы для нелинейной системы Шредингера.

2) Пусть теперь u и v обозначают n-мерные векторы-столбцы,

$$\{uvp\} = \langle u, v\rangle p + \langle v, p\rangle u - \langle p, u\rangle v.$$

Соответствующая система (17.1) принимает вид

$$u_t = u_{xx} + 4\langle u, v\rangle u - 2\langle u, u\rangle v, \quad -v_t = v_{xx} + 4\langle u, v\rangle v - 2\langle v, v\rangle u.$$

Она рассматривалась в работе [59] и имеет представление (14.7) с матрицами размера $(n+2)\times(n+2)$

$$U = \begin{pmatrix} -\lambda & -2v^\top & 0 \\ u & 0 & 2v \\ 0 & -u^\top & \lambda \end{pmatrix}, \quad V = \lambda U + \begin{pmatrix} -2v^\top u & 2v_x^\top & 0 \\ u_x & 2uv^\top - 2vu^\top & -2v_x \\ 0 & -u_x^\top & 2u^\top v \end{pmatrix}.$$

Цепочка (17.2) задается матрицей

$$W_j = \begin{pmatrix} 1 & -2v_{j+1}^\top & -2v_{j+1}^\top v_{j+1} \\ u_j & (\lambda-\beta_j)I_n - 2u_j v_{j+1}^\top & 2(\lambda-\beta_j-u_j v_{j+1}^\top)v_{j+1} \\ -\frac{1}{2}u_j^\top u_j & u_j^\top(u_j v_{j+1}^\top - \lambda + \beta_j) & \begin{matrix}(\lambda-\beta_j)^2 - 2(\lambda-\beta_j)u_j^\top v_{j+1} + \\ + u_j^\top u_j v_{j+1}^\top v_{j+1}\end{matrix} \end{pmatrix},$$

а преобразования (14.2) имеют вид

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + \dfrac{(\beta_{k-1}-\beta_k)(u_{k-1} - \langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle v_{k+1})}{1 - 2\langle v_{k+1}, u_{k-1}\rangle + \langle v_{k+1}, v_{k+1}\rangle\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle}, \\ \widetilde{u}_k = v_k + \dfrac{(\beta_k-\beta_{k-1})(v_{k+1} - \langle v_{k+1}, v_{k+1}\rangle u_{k-1})}{1 - 2\langle v_{k+1}, u_{k-1}\rangle + \langle v_{k+1}, v_{k+1}\rangle\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}. \end{cases}$$

При $n = 1$ все формулы также переходят в соответствующие формулы для нелинейной системы Шредингера.

* * *

Приведем теперь некоторые сведения о йордановых парах (см. также [27, 36]). Йордановой парой называется прямая сумма $J = J^+ \oplus J^-$ векторных пространств над некоторым полем $\mathbb{F}$ (в нашем случае $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), наделенная трилинейной операцией

$$\{\ \}: \quad J^\pm \times J^\mp \times J^\pm \to J^\pm$$

удовлетворяющей тождествам

$$\{abc\} = \{cba\}, \tag{17.3}$$

$$\{ab\{cde\}\} - \{cd\{abe\}\} = \{\{abc\}de\} - \{c\{bad\}e\}. \tag{17.4}$$

Для удобства мы до конца этого раздела примем, что $u, p \in J^+$, а $v, q \in J^-$. Для любых p, q рассмотрим оператор

$$L(p,q): \ J \to J, \quad L(p,q)(u+v) = \{pqu\} - \{qpv\}, \tag{17.5}$$

а также операторы $L^\pm(p,q) = \pm L(p,q)|_{J^\pm}$,

$$L^\pm(p,q): \ J^\pm \to J^\pm, \quad L^+(p,q)(u) = \{pqu\}, \quad L^-(p,q)(v) = \{qpv\}.$$

Тождество (17.4) означает, что $L(u,v) \in \mathrm{Der}(J)$ и, кроме того, эквивалентно следующему коммутационному правилу:

$$[L(u,v), L(p,q)] = L(\{uvp\}, q) - L(p, \{vuq\}). \tag{17.6}$$

Дифференцирование (17.5) называется внутренним, и из (17.6) мы видим, что все внутренние дифференцирования образуют некоторую подалгебру Ли $\mathrm{Inder}(J) \subseteq \mathrm{Der}(J)$. Примером внешнего дифференцирования служит отображение

$$\sigma: \ J \to J, \quad \sigma(u+v) = u - v.$$

Далее нам понадобятся некоторые свойства решения линейной алгебраической системы

$$u + \{pvp\} = \alpha p, \quad v + \{quq\} = -\alpha q, \tag{17.7}$$

где u, v неизвестные, а p, q и $\alpha \in \mathbb{F}$ заданы. Подставляя одно уравнение системы в другое, получаем уравнение

$$(1 - S(p,q))(u+v) = \alpha(\sigma + L(p,q))(p+q),$$

где оператор $S(p,q)$ определен формулой

$$S(p,q)(u+v) = \{p\{quq\}p\} + \{q\{pvp\}q\}.$$

При помощи тождества (17.5) легко показать, что

$$S(p,q) = 2L^2(p,q) - L(\{pqp\}, q)\sigma.$$

Лемма 17.1. *Пусть операторы*

$$1 - S(p,q), \quad \sigma - L(p,q), \quad 1 - 2L(p,q)\sigma + S(p,q) \tag{17.8}$$

невырождены. Тогда система (17.7) имеет единственное решение u, v, которое задается формулой

$$u = \alpha(1 - L^{+}(p,q))^{-1}(p), \quad v = -\alpha(1 - L^{-}(p,q))^{-1}(q) \tag{17.9}$$

и для которого оператор

$$M = L(u,q) + L(p,v) \tag{17.10}$$

равен нулю.

Доказательство. Существование и единственность решения следуют из обратимости первого из операторов (17.8). Положим $\bar{u} = M(p)$, $\bar{v} = -M(q)$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{u} = \{uqp\} + \{pvp\} = \{(\alpha p - \{pvp\})qp\} - \{p(\alpha q + \{quq\})p\} = \\ = -\{p(\{vpq\} + \{quq\})p\} = -\{p\bar{v}p\}, \end{aligned}$$

и аналогично $\bar{v} = -\{q\bar{u}q\}$. Таким образом, $\bar{u}, \bar{v}$ служат решениями однородной системы (17.7) и, следовательно равны нулю, то есть

$$\{uqp\} + \{pvp\} = 0, \quad \{quq\} + \{vpq\} = 0. \tag{17.11}$$

В силу этих соотношений система (17.7) переписывается в виде

$$u - \{pqu\} = \alpha p, \quad v - \{qpv\} = -\alpha q,$$

что эквивалентно одному уравнению $(\sigma - L(p,q))(u+v) = \alpha(p+q)$. В силу невырожденности второго из операторов (17.8) решение этой системы существует, единственно и задается формулой (17.9).

Докажем, что оператор M нулевой. Пусть $\bar u = M(y)$, $y \in J^+$. Имеем

$$\begin{aligned} S(p,q)(\bar u) &= \{p\{q\{uqy\}q\}p\} + \{p\{q\{pvy\}q\}p\} = \\ &= \{p\{\{qyq\}yq\}p\} + \{p(2\{qy\{qpv\}\} - \{vp\{qyq\}\})p\} = \\ &= 2\{p\{qy(v+\alpha q)\}p\} - \{p\{(v+\alpha q)yq\}p\} + \{(u-\alpha p)\{qyq\}p\} = \\ &= \{p\{qyv\}p\} + \{p\{qyq\}u\} = \\ &= 2\{pv\{pqy\}\} - \{\{pvp\}qy\} - \{yq\{pqu\}\} + \\ &\quad + \{pq\{yqu\}\} + \{\{yqp\}qy\}. \end{aligned}$$

В силу (17.11) второй и третий члены в последнем выражении сокращаются. Продолжая цепочку равенств, имеем

$$\begin{aligned} S(p,q)(\bar u) &= 2\{\{pvp\}qy\} - 2\{p\{vpq\}y\} + 2\{pq\{pvy\}\} + \\ &\quad + 2\{pq\{yqu\}\} - \{p\{quq\}y\} + \{\{pqu\}qy\} = \\ &= 2L(p,q)(\bar u) + \{(\alpha p - u)qy\} - \{p\{v+\alpha q\}y\} = \\ &= 2L(p,q)(u) - \bar u. \end{aligned}$$

Аналогично, можно показать, что

$$(S(p,q) + 2L(p,q) + 1)M(z) = 0, \quad z \in J^-.$$

Используя невырожденность третьего из операторов (17.8), получаем отсюда требуемое утверждение. ∎

* * *

Вернемся теперь к системе (17.1), в предположении, что $\{\}$ есть умножение в йордановой паре. Уравнение (17.1) допускает представление нулевой кривизны в терминах структурной алгебры Ли йордановой пары J, то есть прямой суммы

$$\mathrm{strl}(J) = J \oplus \mathrm{Der}(J)$$

с коммутатором

$$[u+v+d, p+q+\delta] = (d(p) - \delta(u)) + (d(q) - \delta(v)) + L(u,q) - L(p,v) + [d,\delta].$$

Действительно, легко проверяется, что соотношение (14.7) в котором

$$U = u - 2v + \lambda\sigma, \quad V = u_x + 2v_x + 2L(u,v) + \lambda U$$

эквивалентно уравнению (17.1). В противоположность этому, для цепочки (17.2) такое инвариантное представление автору неизвестно, хотя, как мы видели в приведенных примерах, для конкретных йордановых пар удается найти матричные представления вида (14.1). По этой причине применить схему из раздела 14 в общем случае не удается. Тем не менее, автопреобразование цепочки (17.2) удается найти, просто сделав предположение, что оно имеет ту же структуру, что и в скалярном случае. Разумеется, для разобранных примеров новое преобразование совпадает с ранее найденными.

Теорема 17.2. *Цепочка (17.2) со скобкой, удовлетворяющей тождествам (17.3), (17.4), допускает следующее автопреобразование:*

$$\begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_{k-1} - \beta_k)(1 - L^+(u_{k-1}, v_{k+1}))^{-1} u_{k-1}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_k - \beta_{k-1})(1 - L^-(u_{k-1}, v_{k+1}))^{-1} v_{k+1}, \\ \widetilde{u}_j = u_j, \quad \widetilde{v}_j = v_j, \quad j \neq k, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \quad \widetilde{\beta}_j = \beta_j, \quad j \neq k-1, k. \end{cases} \tag{17.12}$$

Доказательство. Будем искать преобразование цепочки той же структуры, что и (15.11), то есть не меняющее u_j, v_j при $j \neq k$ и переставляющие местами параметры β_k и β_{k-1}. Для такого преобразования должны выполняться соотношения

$$u_{k-1,x} = u_k + \beta_{k-1} u_{k-1} + \{u_{k-1} v_k u_{k-1}\} = \widetilde{u}_k + \beta_k u_{k-1} + \{u_{k-1} \widetilde{v}_k u_{k-1}\},$$
$$-v_{k+1,x} = v_k + \beta_k v_{k+1} + \{v_{k+1} u_k v_{k+1}\} = \widetilde{v}_k + \beta_{k-1} v_{k+1} + \{v_{k+1} \widetilde{u}_k v_{k+1}\},$$

из которых получаем для нахождения $\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k$ систему

$$\begin{cases} \widetilde{u}_k - u_k + \{u_{k-1}(\widetilde{v}_k - v_k) u_{k-1}\} = (\beta_{k-1} - \beta_k) u_{k-1}, \\ \widetilde{v}_k - v_k + \{v_{k+1}(\widetilde{u}_k - u_k) v_{k+1}\} = (\beta_k - \beta_{k-1}) v_{k+1}, \end{cases} \tag{17.13}$$

Это система вида (17.7), где $p = u_{k-1}$, $q = v_{k+1}$ и т.д.. Согласно Лемме 17.1 ее решение задается формулой (17.12). При этом предположение относительно обратимости операторов (17.8) справедливо, по крайней мере когда u_{k-1}, v_{k+1} лежат в окрестности нуля. Для завершения доказательства осталось проверить, что соотношения (17.13) совместны с остальными уравнениями цепочки (17.2). Дифференцируя, например, первое из уравнений (17.13) в силу цепочки, получаем после сокращений соотношение

$$\{(\widetilde{u}_k - u_k) v_{k+1} (\widetilde{u}_k + u_k)\} + \{u_{k-1}(\widetilde{v}_k - v_k)(\widetilde{u}_k + u_k)\} = 0,$$

которое верно, так как в силу Леммы 17.1 оператор $L(\widetilde{u}_k - u_k, v_{k+1}) + L(u_{k-1}, \widetilde{v}_k - v_k)$ нулевой. ∎

18 Модель Ландау-Лифшица и другие примеры

Результаты, полученные для цепочки (15.6), могут быть перенесены и на цепочки, рассматриваемые в этом разделе. Все они имеют гамильтонову структуру

$$\begin{pmatrix} u_j \\ v_{j+1} \end{pmatrix}_x = \Delta_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta h_j / \delta u_j \\ \delta h_j / \delta v_{j+1} \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

где $\delta h_j / \delta u_j = \sum_k \partial h_k / \partial u_j$, $\delta h_j / \delta v_{j+1} = \sum_k \partial h_k / \partial v_{j+1}$. Заметим, что структурную функцию $\Delta_j = \Delta(u_j, v_{j+1})$ точечной заменой всегда можно превратить в 1, но это может привести к усложнению вида рассматриваемых цепочек. Для цепочки (15.6) $\Delta_j = 1$, h_j имеет вид (11).

Для каждой цепочки приводится ассоциированная система в частных производных и преобразования (14.2). Приводятся также матрицы, задающие представления (14.1) и (14.7).

Пример 1. Система

$$u_t = u_{xx} + (2uv + \beta) u_x, \quad v_t = -v_{xx} + (2uv + \beta) v_x,$$

при $\beta = 0$ рассматривалась в работе [10]. Представление нулевой кривизны (14.7) задается матрицами

$$U = \begin{pmatrix} r & \lambda u \\ \lambda v & -r \end{pmatrix}, \quad V = (2r+\beta)U + \begin{pmatrix} (vu_x - uv_x)/2 & \lambda u_x \\ -\lambda v_x & (uv_x - vu_x)/2 \end{pmatrix},$$

где $r = (uv - \lambda^2)/2$, а матрица W равна

$$W_j = (u_j v_{j+1} + \beta_j)^{-1/2} \begin{pmatrix} u_j v_{j+1} + \beta_j - \lambda^2 & \lambda u_j \\ \lambda v_{j+1} & \beta_j \end{pmatrix}.$$

Цепочка (14.1) имеет вид

$$u_{j,x} = (u_j v_{j+1} + \beta_j)(u_{j+1} - u_j), \quad v_{j,x} = (v_j u_{j-1} + \beta_{j-1})(v_j - v_{j-1}),$$

и может быть записана в гамильтоновом виде (18.1), где

$$\Delta_j = u_j v_{j+1} + \beta_j, \quad h_j = (u_{j+1} - u_j) v_{j+1}.$$

Преобразования (14.2) имеют вид

$$B_k : \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_k - \beta_{k-1}) \dfrac{u_{k-1} - u_k}{\beta_k + u_{k-1} v_{k+1}}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_{k-1} - \beta_k) \dfrac{v_{k+1} - v_k}{\beta_{k-1} + u_{k-1} v_{k+1}}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}. \end{cases}$$

Пример 2. Система

$$u_t = u_{xx} + 2(u+v)u_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2(u+v)v_x$$

эквивалентна системе Каупа [23]. Матрицы U, V и W есть

$$U = \begin{pmatrix} (u-v)/2 & (u+\lambda)(v+\lambda) \\ 1 & (v-u)/2 \end{pmatrix},$$

$$V = (u+v-2\lambda)U + \begin{pmatrix} (u_x+v_x)/2 & \lambda(u_x - v_x) + vu_x - uv_x \\ 0 & -(u_x+v_x)/2 \end{pmatrix},$$

$$W_j = (u_j + v_{j+1})^{-1/2} \begin{pmatrix} u_j - \lambda & u_j v_{j+1} + (\lambda - \beta_j)(u_j + v_{j+1}) + \lambda^2 \\ 1 & v_{j+1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Цепочка (14.1) имеет вид

$$u_{j,x} = (u_j + v_{j+1})(u_{j+1} - u_j + \beta_j), \quad v_{j,x} = (v_j + u_{j-1})(v_j - v_{j-1} - \beta_{j-1}),$$

а ее гамильтонова структура (18.1) определяется функциями

$$\Delta_j = u_j + v_{j+1}, \quad h_j = (u_{j+1} - u_j) v_{j+1} + \beta_j (u_j + v_{j+1}).$$

Преобразования цепочки задаются формулой

$$B_k : \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_{k-1} - \beta_k) \dfrac{u_k + v_{k+1}}{u_{k-1} + v_{k+1} - \beta_{k-1}}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_k - \beta_{k-1}) \dfrac{v_k + u_{k-1}}{u_{k-1} + v_{k+1} - \beta_k}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}. \end{cases}$$

Оставшиеся примеры посвящены системам вида

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} - \dfrac{2}{u+v}(u_x^2 + P(u)) + \dfrac{1}{2}P'(u), \\ -v_t &= v_{xx} - \dfrac{2}{u+v}(v_x^2 + P(-v)) - \dfrac{1}{2}P'(-v) \end{cases} \tag{18.2}$$

где P полином не выше 4 степени. Хорошо известно (см. например [57]), что модель Ландау-Лифшица

$$S_\tau = S \times S_{xx} + S \times JS, \quad S \in \mathbb{R}^3, \quad \langle S, S\rangle = 1, \quad J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3),$$

приводится к этому виду при помощи стереографической проекции

$$S_1 = \frac{1+uv}{u+v}, \quad S_2 = -i\frac{1-uv}{u+v}, \quad S_3 = \frac{u-v}{u+v}$$

и замены $t = i\tau$, причем $P(u) = \varepsilon u^4 + \delta u^2 + \varepsilon$, $2\delta = J_1 + J_2 - 2J_3$, $4\varepsilon = J_2 - J_1$. При $P = 0$ получаем случай магнетика Гейзенберга, при $\varepsilon = 0$ или $\delta = \pm 2\varepsilon$ легкоосное вырождение модели Ландау-Лифшица.

При дробно-линейных заменах

$$\widetilde{u} = \frac{au+b}{cu+d}, \quad \widetilde{v} = \frac{-av+b}{cv-d}$$

вид системы (18.2) не меняется, а полином P меняется также, как в уравнении $u_x^2 = P(u)$. Легко убедиться, что это позволяет свести изучение системы к рассмотрению 3 случаев: $P(u) = \varepsilon$, $P(u) = \delta u^2$, $P(u) = u^3 + au + b$, причем в последнем случае корни $P(u)$ могут быть и кратными.

Система (18.2) допускает цепочку преобразований Бэклунда, которая может быть записана в гамильтоновом виде (18.1), где

$$\Delta_j = r_j, \quad h_j = \ln(u_j + v_j) - \frac{1}{2}\ln r_j.$$

Функция r_j будет ниже уточняться для каждого случая. Коэффициенты $\varepsilon, \delta, a, b$ многочлена $P(u)$ не зависят от номера j.

Пример 3. Рассмотрим сначала случай $P(u) = \varepsilon$. Представления (14.1), (14.7) задаются матрицами

$$U = \frac{\lambda}{u+v}\begin{pmatrix} (u-v)/2 & uv - \varepsilon\lambda^{-2} \\ 1 & (v-u)/2 \end{pmatrix},$$

$$V = -\lambda U + \frac{\lambda}{(u+v)^2}\begin{pmatrix} (uv)_x & v^2u_x - u^2v_x + \dfrac{\varepsilon}{\lambda^2}(u_x - v_x) - \dfrac{2\varepsilon}{\lambda}(u+v) \\ v_x - u_x & -(uv)_x \end{pmatrix},$$

$$W_j = r_j^{-1/2}\begin{pmatrix} \lambda v_{j+1} - \beta_j(u_j + v_{j+1}) & -\lambda u_j v_{j+1} + \varepsilon/\lambda - \varepsilon/\beta_j \\ -\lambda & \lambda u_j - \beta_j(u_j + v_{j+1}) \end{pmatrix},$$

где $r_j = -\beta_j(u_j + v_{j+1})^2 - \varepsilon/\beta_j$. Преобразования (14.2) определяются формулой

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = u_k + (\beta_k - \beta_{k-1})\dfrac{(u_k + v_{k+1})(u_{k-1} - u_k) - \varepsilon/\beta_k\beta_{k-1}}{\beta_k(u_k + v_{k+1}) + \beta_{k-1}(u_{k-1} - u_k)}, \\ \widetilde{v}_k = v_k + (\beta_{k-1} - \beta_k)\dfrac{(v_k + u_{k-1})(v_{k+1} - v_k) - \varepsilon/\beta_k\beta_{k-1}}{\beta_{k-1}(v_k + u_{k-1}) + \beta_k(v_{k+1} - v_k)}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}. \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ все формулы сохраняют смысл и соответствуют модели магнетика Гейзенберга.

Пример 4. Системе (18.2) при $P(u) = \delta u^2$ соответствует легкоосное вырождение модели Ландау-Лифшица. Представления нулевой кривизны задаются матрицами

$$U = \frac{1}{u+v}\begin{pmatrix} \lambda(u-v)/2 & uv \\ \lambda^2+\delta & \lambda(v-u)/2 \end{pmatrix},$$

$$V = -\lambda U + \frac{1}{(u+v)^2}\begin{pmatrix} \lambda(uv)_x + \dfrac{\delta}{2}(v^2-u^2) & v^2u_x - u^2v_x \\ (\lambda^2+\delta)(v_x-u_x) & -\lambda(uv)_x - \dfrac{\delta}{2}(v^2-u^2) \end{pmatrix},$$

$$W_j = r_j^{-1/2}\begin{pmatrix} (\lambda-\beta_j)v_{j+1}+\gamma_j u_j & -u_jv_{j+1} \\ -\lambda^2-\delta & \lambda u_j - \beta_j u_j + \gamma_j v_{j+1} \end{pmatrix},$$

где $r_j = \gamma_j u_j^2 - 2\beta_j u_j v_{j+1} + \gamma_j v_{j+1}^2$, $\gamma_j^2 - \beta_j^2 = \delta$. Преобразования цепочки имеют вид

$$B_k : \quad \begin{cases} \widetilde{u}_k = \dfrac{(\beta_{k-1}-\beta_k)u_{k-1}v_{k+1} + u_k(\gamma_k u_{k-1} + \gamma_{k-1}v_{k+1})}{(\beta_{k-1}-\beta_k)u_k + \gamma_{k-1}u_{k-1} + \gamma_k v_{k+1}}, \\ \widetilde{v}_k = \dfrac{(\beta_k-\beta_{k-1})u_{k-1}v_{k+1} + v_k(\gamma_k u_{k-1} + \gamma_{k-1}v_{k+1})}{(\beta_k-\beta_{k-1})v_k + \gamma_{k-1}u_{k-1} + \gamma_k v_{k+1}}, \\ \widetilde{\beta}_{k-1} = \beta_k, \quad \widetilde{\beta}_k = \beta_{k-1}, \quad \widetilde{\gamma}_{k-1} = \gamma_k, \quad \widetilde{\gamma}_k = \gamma_{k-1}. \end{cases}$$

При $\delta = 0$ и выборе $\gamma_j = -\beta_j$ мы вновь получаем случай магнетика Гейзенберга.

Пример 5. В случае общего положения полином P дробно-линейными преобразованиями приводится к виду $P(u) = u^3 + au + b$. Матрицы, задающие представление (14.7) для системы (18.2) в этом случае имеют вид

$$U = \frac{1}{u+v}\begin{pmatrix} \mu & uv - \lambda(u-v)/2 - \lambda^2 - a \\ (u-v)/2 - \lambda & -\mu \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{1}{(u+v)^2}\begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} e &= (v^2 - \lambda v + \lambda^2 + a)u_x - (u^2 + \lambda u + \lambda^2 + a)v_x + \mu(u+v)(u-v+\lambda), \\ f &= (v+\lambda)u_x + (u-\lambda)v_x + \mu(u+v), \\ h &= \mu(v_x-u_x) + (u+v)(uv + \lambda(u-v) + 2\lambda^2 + a)/2. \end{aligned}$$

Матрица W_j имеет вид

$$W_j = r_j^{-1/2}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
A &= (\mu+\beta_j)s_j + (\lambda-\gamma_j)(\lambda+\gamma_j-v_{j+1}),\\
B &= (\mu+\beta_j)(\lambda+u_j-v_{j+1}) - (\lambda-\gamma_j)(\lambda+2\gamma_j)s_j - 2\beta_j(\lambda-\gamma_j),\\
C &= \mu+\beta_j-(\lambda-\gamma_j)s_j,\\
D &= -(\mu+\beta_j)s_j - (\lambda-\gamma_j)(\lambda+\gamma_j+u_j),\\
r_j &= 2\beta_j(s_j^2+u_j-v_{j+1}+\gamma_j),\\
s_j &= (u_jv_{j+1}+\gamma_j(u_j-v_{j+1})+a+2\gamma_j^2)/2\beta_j,
\end{aligned}$$

параметры μ и λ, β_j и γ_j связаны соотношениями

$$\mu^2+P(\lambda)=0, \quad \beta_j^2+P(\gamma_j)=0.$$

Преобразование B_k задается формулой

$$\widetilde{u}_k = \frac{Ku_k-L}{Mu_k+N}, \quad \widetilde{v}_k = \frac{Kv_k+L}{-Mv_k+N},$$

где

$$\begin{aligned}
K-N &= 2c_2u_{k-1}v_{k+1} - (ac_1+c_3)(u_{k-1}-v_{k+1}) - 2ac_2 - 4bc_1,\\
K+N &= (u_{k-1}+v_{k+1})[\gamma_k\gamma_{k-1}(ac_0+3c_2)+4bc_1+3ac_2+c_4]/(\gamma_{k-1}-\gamma_k),\\
L &= c_3u_{k-1}v_{k+1} + (ac_2+2bc_1)(u_{k-1}-v_{k+1}) + 4bc_2 - a^2c_1,\\
M &= c_1u_{k-1}v_{k+1} + c_2(u_{k-1}-v_{k+1}) - c_3,
\end{aligned}$$

и через c_s обозначены величины $c_s = \beta_k\gamma_{k-1}^{s-1} + \beta_{k-1}\gamma_k^{s-1}$.

5 Трансформационные свойства уравнений Пенлеве

Во второй главе было показано, что 4-е и 5-е уравнения Пенлеве обладают представлениями в виде периодически замкнутой цепочки преобразований Дарбу для оператора Шредингера. Здесь приводятся аналогичные представления для уравнений P_2, P_3, P_6 и вырожденного случая P_5, пропущенного ранее. Уравнение P_2 представлено при помощи преобразования Дарбу для скалярного дифференциального оператора 3-го порядка, а остальные — при помощи различных преобразований Дарбу для оператора Дирака. Использование принципа нелинейной суперпозиции позволяет вывести преобразования Шлезингера для уравнений Пенлеве и исследовать их групповые свойства.

19 Калибровочные преобразования

Целью данной главы является представление уравнений Пенлеве при помощи цепочек преобразований Дарбу для какой-либо вспомогательной линейной задачи

$$\Psi' = U\Psi, \tag{19.1}$$

подобно тому, как это было сделано ранее для уравнения Шредингера. Напомним, что уравнения P_4 и P_5 возникали при наложении на одевающую цепочку (1.10) условия инвариантности относительно преобразования $S^N K_\alpha$ из ее дискретной группы. Здесь S есть циклическая перестановка, а K_α — калибровочное преобразование, сдвигающее спектральный параметр в уравнении Шредингера:

$$\widetilde{u} = u - \alpha, \quad \widetilde{\lambda} = \lambda - \alpha.$$

Этот прием приводит к успеху и в случае других цепочек, но общая схема несколько усложняется из-за того, что, вообще говоря, калибровочное преобразование может иметь более сложный вид. В общем случае оно задается формулой

$$\widetilde{U} = A'A^{-1} + AUA^{-1}, \tag{19.2}$$

и если для оператора Шредингера матрица A единичная, так что калибровочное преобразование сводится к простому переобозначению, то, например, в случае оператора Дирака, соответствующего матрице (15.1), она имеет вид

$$A = \mathrm{diag}(e^{\alpha x}, e^{-\alpha x}),$$

и приводит к преобразованию

$$\widetilde{u} = ue^{-2\alpha x}, \quad \widetilde{v} = ve^{2\alpha x}, \quad \widetilde{\lambda} = \lambda - \alpha.$$

Поэтому приходится рассматривать комбинацию преобразования Дарбу и калибровочного. Расмотрим уравнение

$$\Psi_{j+1}(x, \lambda - \alpha_{j+1}) = A_{j+1}(x) W_j(x, \lambda) \Psi_j(x, \lambda),$$

где α_j некоторые параметры, тогда условие совместности с (19.1) есть

$$(A_{j+1}W_j)' = U_{j+1}(\lambda - \alpha_{j+1}) A_{j+1} W_j - A_{j+1} W_j U_j(\lambda). \tag{19.3}$$

После наложения периодического условия система (19.3) становится конечномерной, как и в отсутствии калибровочных преобразований, но при $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N \neq 0$ она определяет некоторый новый класс потенциалов. Матрица

$$\widehat{W}_j(\lambda) = A_{j+N} W_{j+N-1}(\lambda - \alpha_{j+N-1} - \dots - \alpha_{j+1}) \dots A_{j+1} W_j(\lambda)$$

удовлетворяет соотношению

$$\widehat{W}_j'(\lambda) = U_j(\lambda - \alpha)\widehat{W}_j(\lambda) - \widehat{W}_j(\lambda) U_j(\lambda)$$

которое можно рассматривать, как матричную версию (6.4) и дискретный аналог уравнения метода изомонодромной деформации

$$V' = U_\lambda + [U, V].$$

(Мы не будем рассматривать здесь связей с этим методом, а также гамильтонову теорию уравнеий Пенлеве. Несомненно, она может быть развита на основе гамильтоновых структур соответствующих цепочек, см. [45].)

Определение принципа нелинейной суперпозиции по существу не меняется. Преобразование B_k задается формулой

$$\begin{aligned} A_{k+1} W_k(\lambda - \beta_k) A_k W_{k-1}(\lambda - \beta_{k-1}) A_{k-1} = \\ = \widetilde{A}_{k+1} \widetilde{W}_k(\lambda - \beta_k) \widetilde{A}_k \widetilde{W}_{k-1}(\lambda - \beta_{k-1}) \widetilde{A}_{k-1} \end{aligned} \tag{19.4}$$

где $\beta_k - \beta_{k-1} = \alpha_k$.

20 Второе уравнение Пенлеве

Рассмотрим линейное уравнение $L\Psi = \lambda\Psi$ где $L = D^3 - uD - v$. По аналогии с преобразованием Дарбу (4.4) для оператора Шредингера определим преобразование

$$L_j = (D^2 - f_j D - g_j)(D + f_j), \quad L_{j+1} = (D + f_j)(D^2 - f_j D - g_j) - \alpha_{j+1}.$$

Исключение u_j и v_j приводит к цепочке преобразований Бэклунда

$$\begin{cases} 2f_{j+1}' + f_j' = f_{j+1}^2 - f_j^2 + g_{j+1} - g_j \\ f_{j+1}'' - f_{j+1}' f_{j+1} + g_j' = f_{j+1} g_{j+1} - f_j g_j - \alpha_{j+1}. \end{cases} \tag{20.1}$$

Она имеет представление (19.3) с матрицами $A_j = 1$,

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda + v_j & u_j & 0 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} f_j & 1 & 0 \\ f_j' & f_j & 1 \\ \lambda + f_j f_j' + f_j g_j & f_j^2 + g_j & f_j \end{pmatrix}.$$

Переразложение (19.4) дает формулу нелинейной суперпозиции

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_k = f_k + Q, \quad \widetilde{f}_{k-1} = f_{k-1} - Q \\ \widetilde{g}_k = g_k - (f_k + f_{k-1})Q, \\ \widetilde{g}_{k-1} = g_{k-1} - Q' + (f_k + f_{k-1})Q, \\ \widetilde{\alpha}_k = -\alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\pm1} + \alpha_k, \end{cases} \tag{20.2}$$

где обозначено $Q=\alpha_k/(f_{k-1}f_k+f_k^2-g_{k-1}-f_k')$.

Рассмотрим цепочку (20.1), замкнутую с периодом 2. Мы имеем переопределенную систему

$$\begin{cases} f_1'=-f_2'=f_1^2-f_2^2+g_1-g_2 \\ f_1''-f_1f_1'+g_2'=f_1g_1-f_2g_2-\alpha_1, \\ f_2''-f_2f_2'+g_1'=f_2g_2-f_1g_1-\alpha_2, \end{cases} \tag{20.3}$$

обладающую двумя первыми интегралами

$$f_1+f_2=C_1, \quad (f_1^2+f_2^2)/2-g_1-g_2=(\alpha_1+\alpha_2)x+C_2.$$

Для удобства положим $f_2=-f_1$. (Как можно проверить, общий случай сводится к этому.) Тогда система (20.3) упрощается до системы

$$f_1'=g_1-g_2, \quad g_1'=2f_1g_1-\alpha_1, \quad g_2'=-2f_1g_2-\alpha_2.$$

Линейное преобразование переменных приводит последнюю к виду

$$\begin{cases} 2f'=g_+-g_-, \\ g_+'=2fg_++\alpha_+, \\ g_-'=-2fg_-+\alpha_-, \end{cases} \tag{20.4}$$

с нормировкой

$$g_++g_--2f^2=x, \quad \alpha_++\alpha_-=1. \tag{20.5}$$

Система (20.4), (20.5) и задает искомое представление P_2. Действительно, $f''=f(g_++g_-)+(\alpha_+-\alpha_-)/2$ и в силу (20.5) получаем, что f удовлетворяет P_2:

$$f''=2f^3+xf+a, \quad a=(\alpha_+-\alpha_-)/2. \tag{20.6}$$

Заметим, что переменные g_+,g_- удовлетворяют уравнению P-типа

$$g_\pm''=\frac{(g_\pm')^2}{2g_\pm}+2g_\pm^2-xg_\pm-\frac{\alpha_\pm^2}{2g_\pm}$$

(уравнение XXXIV в списке Айнса [42]). Система (20.4), (20.5) дает известные дифференциальные подстановки, связывающие его с P_2:

$$\pm f=\frac{g_\pm'-\alpha_\pm}{2g_\pm}, \quad g_\pm=f^2\pm f'+x/2.$$

Формула нелинейной суперпозиции (20.2) для $k=1,2$, переписанная в терминах системы (20.4), (20.5), принимает вид

$$B_\pm: \begin{cases} \widetilde{f}=f\pm\dfrac{\alpha_\pm}{g_\pm}, \quad \widetilde{g}_\pm=g_\pm, \quad \widetilde{g}_\mp=g_\mp\pm\dfrac{4\alpha_\pm f}{g_\pm}+\dfrac{2\alpha_\pm^2}{g_\pm^2}, \\ \widetilde{\alpha}_\pm=-\alpha_\pm, \quad \alpha_\mp=\alpha_\mp+2\alpha_\pm. \end{cases} \tag{20.7}$$

Отметим изменение в формуле для α_j, появляющееся при замыкании с периодом 2. Новая формула следует из того же правила перестановки корней $\beta_k=\beta_{k-1}$, $\beta_{k-1}=\beta_k$ в произведении детерминантов $\det W_j$.

В терминах уравнения (20.6) преобразования $B_\pm$ имеют вид

$$\widetilde{f}=f\pm\frac{2a\pm1}{2f'\pm2f^2\pm x}, \quad \widetilde{a}=\pm1-a.$$

Эта формула впервые была установлена в работе [55]. Преобразования $B_\pm$ порождают группу, изоморфную аффинной группе Вейля $\widetilde{A}_1$. Кроме того, система (20.4), (20.5) допускает также преобразования

$$R: \quad \widetilde{f}(x) = \varepsilon f(\varepsilon x), \quad \widetilde{g}_\pm(x) = \varepsilon^2 g_\pm(\varepsilon x), \quad \widetilde{\alpha}_\pm = \alpha_\pm, \quad \varepsilon^3 = 1,$$
$$S: \quad \widetilde{f} = -f, \quad \widetilde{g}_\pm = g_\mp, \quad \widetilde{\alpha}_\pm = \alpha_\mp.$$

Очевидны тождества

$$R^3 = S^2 = B_\pm^2 = 1, \quad B_+ = SB_-S, \quad RS = SR, \quad RB_\pm = B_\pm R.$$

Следует признать, что цепочка (20.1) дает достаточно неуклюжее представление для P_2. Возможно, существуют и более простые цепочки, приводящие к той же цели. Заметим, что одно и то же уравнение Пенлеве может возникнуть из разных цепочек. Например, если мы возьмем вместо $L = D^3 - uD - v$ оператор 4-го порядка, то при замыкании с периодом 2 мы снова получим P_2. Аналогично, уравнение P_4, полученное ранее из цепочки для оператора Шредингера, возникает также и при рассмотрении цепочки (20.1); в обоих случаях период равен 3.

21 Вырождение третьего уравнения Пенлеве

Обратимся теперь к изучению оператора Дирака

$$U_j = \begin{pmatrix} -\lambda & -v_j \\ u_j & \lambda \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

Как мы видели в главе 4, для этого оператора существуют три существенно различных преобразования Бэклунда, в зависимости от степени по λ полинома $\det W_j$. Оставшаяся часть этой главы посвящена изучению этих трех случаев. Матрица калибровочного преобразования во всех случаях равна

$$A_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & 0 \\ 0 & \varepsilon_j^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_j' = \alpha_j \varepsilon_j$. Рассмотрим сначала случай $\det W_j = \mathrm{const}$. Матрица W_j есть

$$W_j = \begin{pmatrix} 0 & -\exp(-q_j) \\ \exp(q_j) & 2\lambda - q_j' \end{pmatrix}, \tag{21.2}$$

где $u_j = \exp(q_j)$, $v_j = \varepsilon_j^2 \exp(-q_{j-1})$. Уравнение (19.3) приводит к следующему обобщению цепочки Тоды:

$$q_j'' = \varepsilon_{j+1}^2 \exp(q_{j+1} - q_j) - \varepsilon_j^2 \exp(q_j - q_{j-1}). \tag{21.3}$$

После периодического замыкания $A_{j+2} = A_j$, $W_{j+2} = W_j$ функция $f = q_2 - q_1$ удовлетворяет уравнению

$$f'' = 2\varepsilon_1^2 \exp(-f) - 2\varepsilon_2^2 \exp(f).$$

Пусть $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \neq 0$. Подстановка

$$y(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1} \exp(f(x))$$

приводит к уравнению

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} - \frac{2}{\alpha^2 x}(y^2 - 1),$$

являющемуся частным случаем P_3.

Переразложение (19.4) для данных матриц A_j, W_j приводит лишь к тождественному преобразованию. Таким образом, в данном случае наш метод не позволяет найти преобразование Шлезингера.

22 Третье и вырожденное пятое уравнения Пенлеве

Второму типу преобразования Бэклунда для оператора Дирака отвечает матрица

$$W_j = \begin{pmatrix} 1 & -g_{j+1} \\ f_j & 2\lambda - f_j g_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{22.1}$$

где $f_j = u_j$, $v_j = \varepsilon_j^2 g_j$. В этом случае уравнение (19.3) приводит к цепочке

$$\begin{cases} f_j' &= \varepsilon_{j+1}^2 f_{j+1} + f_j^2 g_{j+1}, \\ -g_j' &= \varepsilon_{j-1}^2 g_{j-1} + g_j^2 f_{j-1}, \\ \varepsilon_j' &= \alpha_j \varepsilon_j \end{cases} \tag{22.2}$$

а формула (19.4) к преобразованию

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_k = \varepsilon_k^2 (f_k - 2\alpha_k f_{k-1}/H), \quad \widetilde{f}_{k-1} = \varepsilon_k^{-2} f_{k-1}, \\ \widetilde{g}_k = \varepsilon_k^2 (g_k + 2\alpha_k g_{k+1}/H), \quad \widetilde{g}_{k+1} = \varepsilon_k^{-2} g_{k+1}, \\ \widetilde{\alpha}_k = -\alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_{k\pm1} = \alpha_{k\pm1} + \alpha_k, \\ \widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k^{-1}, \quad \widetilde{\varepsilon}_{k\pm1} = \varepsilon_{k\pm1}\varepsilon_k, \end{cases} \tag{22.3}$$

где $H = \varepsilon_k^2 - f_{k-1} g_{k+1}$.

Рассмотрим цепочку (22.2), замкнутую с периодом 2, и нормированную условием $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Полученная система ОДУ

$$\begin{aligned} f_1' = \ & \varepsilon_2^2 f_2 + f_1^2 g_2, \quad -g_1' = \ & \varepsilon_2^2 g_2 + g_1^2 f_2, \\ f_2' = \ & \varepsilon_1^2 f_1 + f_2^2 g_1, \quad -g_2' = \ & \varepsilon_1^2 g_1 + g_2^2 f_1, \end{aligned} \tag{22.4}$$

допускает понижение порядка двумя различными способами. Обозначим

$$s = f_1 g_2 + f_2 g_1, \quad r = f_1 g_2 - f_2 g_1, \quad Y = -\varepsilon_2^{-2} f_1 g_1, \quad Z = \varepsilon_1 f_1 / \varepsilon_2 f_2. \tag{22.5}$$

Тогда s есть первый интеграл системы (22.4), а Y, r и Z, r удовлетворяют соответственно системам

$$Y' = r(Y+1) - 2\alpha_2 Y, \quad r' = 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 Y + (r^2 - s^2)/2Y$$

и

$$Z' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - Z^2) + (\alpha_1 - \alpha_2 + r) Z, \quad r' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \big((r - s) Z + (r + s)/Z\big).$$

Замены

$$\begin{aligned} Y(x) = 1/(y(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2) - 1), \quad r(x) = \varphi(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2), \\ Z(x) = z(\varepsilon_1 \varepsilon_2), \quad r(x) = \psi(\varepsilon_1 \varepsilon_2), \end{aligned} \tag{22.6}$$

переводят эти системы в

$$y' = \frac{y-1}{2x}(2\alpha_2 - y\varphi), \quad \varphi' = \frac{1}{y-1} + \frac{y-1}{4x}(\varphi^2 - s^2),$$

и

$$z' = 1 - z^2 + \frac{z}{x}(\alpha_1 - \alpha_2 + \psi), \quad \psi' = (\psi - s)z + \frac{1}{z}(\psi + s)$$

соответственно.

Исключение φ из первой системы приводит к вырожденному случаю P_5

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y+1}\right)(y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(ay + \frac{b}{y}\right) - \frac{y}{2x} \tag{22.7}$$

где

$$a = s^2/8, \quad b = -\alpha_2^2/2,$$

а исключение ψ из второй системы приводит к P_3

$$z'' = \frac{(z')^2}{z} - \frac{z'}{x} + \frac{1}{x}(Az^2 + B) + z^3 - \frac{1}{z} \tag{22.8}$$

где

$$A = -s - 2\alpha_1, \quad B = s + 2\alpha_2.$$

Заметим, что при помощи растяжения можно заменить коэффициенты при последнем члене уравнения (22.7) и двух последних членах в уравнении (22.8) на произвольные ненулевые константы.

Итак, мы показали, что цепочка (22.2) дает представление сразу для двух уравнений Пенлеве. Это приводит к существованию скрытой связи между этими двумя уравнениями. Используя формулы (22.5), (22.6), можно легко получить дифференциальную подстановку из P_3 в P_5

$$y(x^2) = 1 + \frac{2x}{x(z'(x) - 1 + z^2(x)) + (\alpha_2 - \alpha_1 - s)z(x)}$$

и наоборот из P_5 в P_3

$$z(x) = \frac{2xy(x^2)}{(2\alpha_2 - sy(x^2))(y(x^2) - 1) - 2x^2y'(x^2)}.$$

Впервые эта связь между P_3 и P_5 была обнаружена Громаком в [47]. Он нашел также и преобразования Шлезингера для этих уравнений. Перейдем к их выводу из дискретных симметрий системы (22.4).

Для полноты заметим, что система (22.4) допускает группу, порожденную непрерывными преобразованиями

$$P_{\mu,\nu}: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_1 = \mu f_1, \quad \widetilde{f}_2 = \nu f_2, \quad \widetilde{g}_1 = g_1/\nu, \quad \widetilde{g}_2 = g_2/\mu, \\ \widetilde{\alpha}_j = \alpha_j, \quad \widetilde{\varepsilon}_1 = \sqrt{\nu/\mu}\,\varepsilon_1, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 = \sqrt{\mu/\nu}\,\varepsilon_2, \end{cases}$$

$$Q_{x_0}: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_j(x) = f_j(x + x_0), \quad \widetilde{g}_j(x) = g_j(x + x_0), \\ \widetilde{\alpha}_j = \alpha_j, \quad \widetilde{\varepsilon}_j = \exp(\alpha_j x_0)\varepsilon_j. \end{cases}$$

Дискретная же группа порождена преобразованиями (22.3), которые после наложения условия периодичности принимают вид

$$B_k: \quad \begin{cases} \widetilde{f}_k = \varepsilon_k^2(f_k - 2\alpha_k f_{k+1}/H), \quad \widetilde{f}_{k+1} = \varepsilon_k^{-2} f_{k+1}, \\ \widetilde{g}_k = \varepsilon_k^2(g_k + 2\alpha_k g_{k+1}/H), \quad \widetilde{g}_{k+1} = \varepsilon_k^{-2} g_{k+1}, \\ \widetilde{\alpha}_k = -\alpha_k, \quad \widetilde{\alpha}_{k+1} = \alpha_{k+1} + 2\alpha_k, \quad \widetilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k^{-1}, \quad \widetilde{\varepsilon}_{k+1} = \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k^2, \end{cases}$$

где $H=\varepsilon_k^2-f_{k+1}g_{k+1}$, $k=1,2$, а также преобразованиями

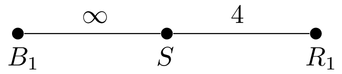
$$R_k:\quad\left\{\begin{array}{c}\widetilde{f}_k=-g_k,\quad \widetilde{f}_{k+1}=g_{k+1},\quad \widetilde{g}_k=-f_k,\quad \widetilde{g}_{k+1}=f_{k+1},\\ \widetilde{\alpha}_j=\alpha_j,\quad \widetilde{\varepsilon}_j=\varepsilon_j,\end{array}\right.$$

$$S:\quad \widetilde{f}_j=f_{j+1},\quad \widetilde{g}_j=g_{j+1},\quad \widetilde{\alpha}_j=\alpha_{j+1},\quad \widetilde{\varepsilon}_j=\varepsilon_{j+1},$$

Эти преобразования удовлетворяют соотношениям

$$B_j^2=R_j^2=S^2=1,\quad B_1S=SB_2,\quad R_1S=SR_2,$$
$$B_iR_j=R_jB_i,\quad R_1R_2=R_2R_1$$

и порождают группу Кокстера с графом



Рассмотрим действие этих преобразований на уравнениях (22.8). Легко проверяется, что оба преобразования R_1 и R_2 приводят к одной и той же дифференциальной подстановке

$$\widetilde{z}=z+\frac{(2+A-B)z^2}{x(z'-1+z^2)+(B-1)z},\quad \widetilde{A}=B-2,\quad \widetilde{B}=A+2.$$

Преобразования B_1 и B_2 приводят к аналогичным подстановкам

$$B_1:\quad \widetilde{z}=z+\frac{(2-A-B)z^2}{x(z'-1-z^2)+(B-1)z},\quad \widetilde{A}=2-B,\quad \widetilde{B}=2-A,$$
$$B_2:\quad \widetilde{z}=z+\frac{(2+A+B)z^2}{x(z'+1+z^2)-(B+1)z},\quad \widetilde{A}=-2-B,\quad \widetilde{B}=-2-A.$$

Наконец, преобразование S порождает точечную замену

$$\widetilde{z}=1/z,\quad \widetilde{A}=-B,\quad \widetilde{B}=-A.$$

На уравнении (22.7) преобразования R_1,R_2,B_2 действуют тождественно, а преобразования S и B_1 приводят соответственно к преобразованиям Шлезингера

$$\widetilde{y}=1+\frac{xy^2(y-1)}{2ay^2(y-1)^2-(\alpha_2(y-1)-xy')^2},\quad \widetilde{a}=a,\quad \widetilde{b}=-\alpha_1^2/2$$

и

$$\widetilde{y}=1+\frac{(y-1)h^2}{h^2-2\alpha_1(y-1)\varphi h+\alpha_1^2(\varphi^2-8a)(y-1)^2},\quad \widetilde{a}=a,\quad \widetilde{b}=-(1+\alpha_1)^2/2,$$

где

$$\alpha_2=\sqrt{-2b},\quad \alpha_1=1-\alpha_2,\quad h=x-(y-1)(\varphi^2/4-2a),\quad \varphi=\frac{2}{y}\left(\alpha_2-\frac{xy'}{y-1}\right).$$

23 Шестое уравнение Пенлеве

Рассмотрим случай $\det W_j = 4\lambda^2 - \gamma_j^2$. Матрица W_j имеет вид

$$W_j = \begin{pmatrix} -2\lambda + r_j & -g_j \\ f_j & 2\lambda + r_j \end{pmatrix}$$

где $r_j^2 = \gamma_j^2 - f_j g_j$. Уравнение (19.3) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} f_j = \varepsilon_{j+1}^2 u_{j+1} + u_j, \quad g_j = \varepsilon_{j+1}^{-2} v_{j+1} + v_j, \\ f_j' = r_j(\varepsilon_{j+1}^2 u_{j+1} - u_j), \quad g_j' = r_j(\varepsilon_{j+1}^{-2} v_{j+1} - v_j), \quad \varepsilon_j' = \alpha_j \varepsilon_j. \end{gathered} \tag{23.1}$$

После замыкания с периодом 2 и исключения переменных u_j, v_j получаем систему четвертого порядка

$$\begin{aligned} f_1' &= \frac{r_1}{1-E}(2\varepsilon_2^2 f_2 - (1+E)f_1), \quad g_1' = \frac{r_1}{1-E}((1+E)g_1 - 2\varepsilon_1^2 g_2), \\ f_2' &= \frac{r_2}{1-E}(2\varepsilon_1^2 f_1 - (1+E)f_2), \quad g_1' = \frac{r_2}{1-E}((1+E)g_2 - 2\varepsilon_2^2 g_1), \end{aligned} \tag{23.2}$$

где $E = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$, причем мы не теряя общности можем положить

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1/2, \quad E' = E.$$

Эта система и задает искомое представление P_6. Чтобы убедиться в этом, заметим, что она обладает первым интегралом

$$r_1 + r_2 = s = \mathrm{const}$$

и допускает понижение порядка за счет введения переменной

$$F = \frac{f_2}{\varepsilon_1^2 f_1}.$$

Переменные F и r_1 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} F' = & -2\alpha_1 F + \dfrac{1}{1-E}\big(2(s-r_1) + (1+E)(2r_1 - s)F - 2Er_1F^2\big), \\ r_1' = & \dfrac{1}{1-E}\big(E(r_1^2 - \gamma_1^2)F - ((r_1-s)^2 - \gamma_2^2)F^{-1}\big). \end{cases}$$

Подстановка

$$y(E^{-1}) = F(x), \quad \varphi(E^{-1}) = r_1(x) \tag{23.3}$$

приводит ее к виду

$$\begin{cases} y' = & 2\varphi\dfrac{(y-x)(y-1)}{x(x-1)} - \dfrac{2s}{x-1} + 2\alpha_1\dfrac{y}{x} + s\dfrac{x+1}{x(x-1)}y, \\ \varphi' = & \dfrac{1}{x(x-1)}\Big(\big(\dfrac{x}{y} - y\big)\varphi^2 - 2s\dfrac{x\varphi}{y} + (s^2 - \gamma_2^2)\dfrac{x}{y} + \gamma_1^2 y\Big). \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем

$$\varphi = \frac{x(x-1)}{2(y-x)(y-1)}\left(y' - 2\alpha_1\frac{y}{x} + \frac{2s}{x-1} - s\frac{x+1}{x(x-1)}y\right) \tag{23.4}$$

и после исключения φ получаем P_6:

$$y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)(y')^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)y'+\\ +\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(a+b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}+d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right) \qquad (23.5)$$

где

$$a=2\gamma_1^2,\quad b=-2\gamma_2^2,\quad 2c=(2\alpha_1-s)^2,\quad 2d=1-(2\alpha_2-s)^2.$$

Найдем преобразования Шлезингера для уравнения (23.5). В принципе их можно получить из формул (15.18), но проще провести некоторые вычисления заново. Перемножая матрицы, находим, что величины

$$s_k=r_k+r_{k-1},$$
$$I_k=(2\beta_{k-1}+r_{k-1}-(2\beta_k-r_k)F_k)/(1-F_k),$$
$$J_k=(2\beta_k+r_k)(2\beta_{k-1}+r_{k-1})+F_k(r_k^2-\gamma_k^2),$$

где $F_k=f_{k-1}/\varepsilon_k^2 f_k$, не меняются при преобразовании (19.4):

$$\widetilde{s}_k=s_k,\quad \widetilde{I}_k=I_k,\quad \widetilde{J}_k=J_k.$$

Исключение $\widetilde{r}_k$ и $\widetilde{r}_{k-1}$ из этих трех равенств приводит к формуле

$$\widetilde{F}_k=F_k\frac{\big((2\alpha_k-s_k)/(F_k-1)-r_k\big)^2-\gamma_k^2}{\big((2\alpha_k-s_k/(F_k-1)-r_k+2\beta_k-2\widetilde{\beta}_k\big)^2-\widetilde{\gamma}_k^2}, \qquad (23.6)$$

Здесь новые значения γ_k и β_k можно получить, рассмотрев действие преобразования B_k на детерминанты матриц W_k, W_{k-1}, причем, как уже отмечалось в примере 3) раздела 15, преобразование (23.6) оказывается многозначным. Кроме того, следует помнить, что при замыкании с периодом 2 формулы для пересчета коэффициентов α_j должны быть слегка модифицированы (ср. с разделом 20). Например, если B_k переставляет 1-й и 3-й множители в произведении

$$\dots(2\lambda-2\beta_k+\gamma_k)(2\lambda-2\beta_k-\gamma_k)(2\lambda-2\beta_{k-1}+\gamma_{k-1})(2\lambda-2\beta_{k-1}-\gamma_{k-1})\dots$$

то

$$\widetilde{\beta}_k=\frac{1}{2}(\beta_k+\beta_{k-1})+\frac{1}{4}(\gamma_k-\gamma_{k-1}),\qquad \widetilde{\beta}_{k-1}=\frac{1}{2}(\beta_k+\beta_{k-1})-\frac{1}{4}(\gamma_k-\gamma_{k-1}),$$
$$\widetilde{\gamma}_k=\beta_k-\beta_{k-1}+\frac{1}{2}(\gamma_k+\gamma_{k-1}),\qquad \widetilde{\gamma}_{k-1}=\beta_{k-1}-\beta_k+\frac{1}{2}(\gamma_k+\gamma_{k-1}),$$

причем при замыкании с периодом 2 имеем

$$\widetilde{\alpha}_1=\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2),\quad \widetilde{\alpha}_2=1-\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2).$$

При $k=1$ получаем из (23.6), в силу (23.3), искомое преобразование Шлезингера для P_6

$$B_1:\quad \widetilde{y}=y\frac{((2\alpha_1-s)/(y-1)-\varphi)^2-\gamma_1^2}{((2\alpha_1-s)/(y-1)-\varphi+2\beta_1-2\widetilde{\beta}_1)^2-\widetilde{\gamma}_1^2},$$

где φ задается формулой (23.4). Аналогичная подстановка B_2 получается из (23.6) при $k=2$. Она сопряжена с B_1 циклическим сдвигом

$$S: \quad \widetilde{f}_j = f_{j+1}, \quad \widetilde{g}_j = g_{j+1}, \quad \widetilde{\alpha}_j = \alpha_{j+1}, \quad \widetilde{\gamma}_j = \gamma_{j+1},$$

котрый в терминах P_6 приводит к точечной замене

$$\widetilde{y} = x/y, \quad \widetilde{a} = -b, \quad \widetilde{b} = -a, \quad \widetilde{c} = \frac{1}{2} - d, \quad \widetilde{d} = \frac{1}{2} - c.$$

Система (23.2) инвариантна также относительно преобразований

$$\begin{aligned} R: &\quad \widetilde{f}_j(x) = f_j(-x), \quad \widetilde{g}_j(x) = g_j(-x), \quad \widetilde{\alpha}_j = \alpha_{j+1}, \quad \widetilde{\gamma}_j = \gamma_j, \\ T: &\quad \widetilde{f}_j = g_j, \quad \widetilde{g}_j = f_j, \quad \widetilde{r}_j = -r + j, \quad \widetilde{\alpha}_j = \alpha_{j+1}, \quad \widetilde{\gamma}_j = \gamma_j, \quad \widetilde{s} = -s. \end{aligned}$$

Первое из них порождает точечное преобразование P_6

$$\widetilde{y}(x) = xy(1/x), \quad \widetilde{a} = a, \quad \widetilde{b} = b, \quad \widetilde{c} = \frac{1}{2} - d, \quad \widetilde{d} = \frac{1}{2} - c,$$

а второе приводит к дифференциальной подстановке

$$\widetilde{y} = \frac{x}{y}\frac{(\varphi - s)^2 - \gamma_2^2}{\varphi^2 - \gamma_1^2},$$
$$\widetilde{a} = a, \quad \widetilde{b} = b, \quad 2\widetilde{c} = (1 - \sqrt{2c})^2, \quad 2\widetilde{d} = 1 - (1 - \sqrt{1 - 2d})^2$$

где φ задано формулой (23.4) и $s = 1 - \sqrt{2c} - \sqrt{1 - 2d}$. Заметим, что знаки корней можно выбирать произвольно, так что последняя формула определяет фактически 4 разных преобразования.

С другой стороны, известное преобразование P_6

$$Q: \quad \widetilde{y}(x) = 1 - y(1 - x), \quad \widetilde{a} = a, \quad \widetilde{b} = -c, \quad \widetilde{c} = -b, \quad \widetilde{d} = d$$

не выводится из дискретных симметрий системы (23.2). В этом случае редуцированная система приобретает по сравнению с исходной дополнительную симметрию.

Выполняются следующие тождества

$$B_j^2 = Q^2 = R^2 = S^2 = T^2 = (RS)^2 = (ST)^2 = (TR)^2 = (QR)^3 = (QS)^4 = 1,$$
$$B_{j+1} = SB_jS = RB_jR = TB_jT,$$

где для простоты рассматривается только одна ветвь многозначных преобразований B_j, T. Преобразования Шлезингера для P_6 впервые были найдены в [18], см. также [51].

Список литературы

[1] Ablowitz M J and Fokas A S, On a unified approach to transformations and elementary solutions of Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **23:11** (1982) 2033–2042 5

[2] Adler M and Moser J, On a class of polynomials connected with the Korteweg–de Vries equation, *Commun. Math. Phys.* **61** (1978) 1–30 21

[3] Adler V E, Nonlinear chains and Painlevé equations, *Physica D* **73** (1994) 335–351 5, 14

[4] Adler V E and Yamilov R I, Explicit auto-transformations of integrable chains, *J. Physics A* **27** (1994) 477–492 6, 50

[5] Airault H, Rational solutions of Painlevé equations, *Stud. Appl. Math.* **61:1** (1979) 33–54 5, 33

[6] Bruschi M and Ragnisco O, Lax representation and complete integrability for the periodic relativistic Toda lattice, *Phys. Let. A* **134** (1989) 365–370 55

[7] Bruschi M, Ragnisco O, Santini P M and Tu Gui Zhang, Integrable symplectic maps, *Physica D* **49** (1991) 273–294 4, 6, 41, 43, 52

[8] Calogero F and Degasperis A, Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, *preprint Instituto di Fisica G.Markoni – Univ.di Roma* **151** (1979) 1–37 17

[9] Calogero F and Degasperis A, Spectral transforms and solitons, Amsterdam: North-Holland, 1982 (перевод: Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны, М.: Мир, 1985) 14, 17

[10] Chen H H, Lee Y C and Liu C S, Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method, *Physica Scr.* **20** (1979) 490–492 68

[11] Chen H H and Liu C S, Bäcklund transformation solutions of the Toda lattice equation, *J. Math. Phys.* **16:7** (1975) 1428–1430 53

[12] Crum M M, Associated Sturm-Liouville systems, *Quart. J. Math. Oxford (2)* **6** (1955) 121–127 4, 6, 22, 23, 25, 28

[13] Darboux G, , *C.R. Acad. Sci. Paris* **94** (1882) 1456 4

[14] Deift P A, Applications of a commutation formula, *Duke Math. Journ.* **45** (1978) 267 22

[15] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D and Morris H C, Solitons and nonlinear wave equations, London: Academic Press, 1982 (перевод: Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения, М.: Мир, 1988) 14, 52

[16] Flaschka H, Newell A, Monodromy and spectrum preserving deformations, *Comm. Math. Phys.* **76** (1980) 67–116 29

[17] Fokas A S and Mũgan U, Schlesinger transformations of Painleve II-V, *J. Math. Phys.* **33:6** (1992) 2031–2045 5

[18] Fokas A S and Yortsos Y C, The transformation properties of the sixth Painlevé equation and one-parameter families of solutions, *Lett. Nuovo Cim.* **30:17** (1981) 539–544 5, 81

[19] Fordy A P and Kulish P P, Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras, *Commun. Math. Phys.* **89:3** (1983) 427–443 6, 62

[20] Grammaticos B, Hietarinta J and Ramani A, Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Let.* **67:14** (1991) 1829–1832 5, 43

[21] Grammaticos B, Nijhoff F W, Papageorgiou V G and Ramani A, Isomonodromic deformation problem for discrete analogues of Painlevé equations, *INS preprint no.* **178** (1991) 5, 43

[22] Infeld L and Hull T E, The factorization method, *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) 21–68 4

[23] Kaup D J, Finding eigenvalue problems for solving nonlinear evolution equations, *Progr. of Theor. Phys.* **54:1** (1975) 72–78 68

[24] Lamb G L, jr., Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium, *Rev. Mod. Phys.* **43:2** (1971) 99–124 4, 59, 60

[25] Lamb G L, jr., Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **15:12** (1974) 2157–2165 4, 14

[26] Levi D, Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations, *Journal of Physics A* **14** (1981) 1083–1098

[27] Loos O, Jordan pairs, *Lecture Notes in Math.* **480** (1975) 64

[28] Miura R M, ed., Bäcklund transformations, *Lect. Notes in Math.* **515** (1976) 4, 14

[29] Moser J and Veselov A P, Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials, *Commun. Math. Phys.* **139** (1991) 217–243 4, 41

[30] Okamoto K, *Math. Ann.* **275** (1986) 221 5

[31] Papageorgiou V G, Nijhoff F W and Capel H W, Integrable mappings and nonlinear integrable lattice equations, *Phys. Let. A* **147:2,3** (1990) 106–114 4, 41

[32] Quispel G R W, Roberts J A G and Thompson C J, Integrable mappings and soliton equations, *Phys. Lett. A* **126** (1988) 419–421 4, 41

[33] Rogers C and Shadwick W F, Bäcklund transformations and their applications, New York: Academic Press, 1982 4, 14

[34] Shabat A B, The infinite–dimensional dressing dynamical system, *Inverse problems* **8** (1992) 303 14

[35] Shabat A B and Yamilov R I, Lattice representations of integrable systems, *Phys. Lett. A* **130:4,5** (1988) 271–275

[36] Svinolupov S I, Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs, *Commun. Math. Phys.* **143** (1992) 559–575 6, 50, 62, 64

[37] Svinolupov S I and Yamilov R I, The multi-field Schrödinger lattices, *Phys. Lett. A 160* **1991** (548–552) 6, 50, 63

[38] Wahlquist H D and Estabrook F B, Bäcklund transformations for solutions of the Korteweg - de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1386–1390 4, 14

[39] Weiss J, Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the Korteweg - de Vries equation, *J. Math. Phys.* **27:11** (1986) 2647–2656 4, 14, 46

[40] Yamilov R I, On the construction of Miura type transformations by others of this kind, *Phys. Lett. A* **173:1** (1993) 53–57 15

[41] Адлер В.Э., Перекройка многоугольников, *Функц. анализ и прилож.* **27:2** (1993) 79–82 4, 5, 6, 14, 29

[42] Айнс Е.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков: ДНТВУ, 1939 74

[43] Веселов А.П., Интегрируемые отображения, *Успехи мат. наук* **46:5** (1991) 3–45 4, 6, 41, 52

[44] Веселов А.П., Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов, *Функц. анализ и прилож.* **25:2** (1991) 38–49 4, 41

[45] Веселов А.П., Шабат А.Б., Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера, *Функц. анализ и прилож.* **27:2** (1993) 1–21 4, 5, 6, 14, 29, 42, 43, 73

[46] Воробьев А.П., О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве, *Дифф. ур.* **1:1** (1965) 79–81

[47] Громак В.И., О решениях третьего уравнения Пенлеве, *Дифф. ур.* **9:11** (1973) 2082–2083 5, 77

[48] Громак В.И., *Дифф. ур.* **11:3** (1975) 373–376 5

[49] Громак В.И., О решениях пятого уравнения Пенлеве, *Дифф. ур.* **12:4** (1976) 740–742 5, 40

[50] Громак В.И., Лукашевич Н.А., Специальные классы решений уравнений Пенлеве, *Дифф. ур. 18:3* **1982** (419–429) 5, 33

[51] Громак В.И., Лукашевич Н.А., Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве, Минск: Университетское, 1992 5, 6, 31, 33, 81

[52] Дубов С.Ю., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Об эквидистантных спектрах ангармонических осцилляторов, *ЖЭТФ* **102:3:9** (1992) 814–826 28

[53] Дубровин Б.А., Тэта-функции и нелинейные уравнения, *Успехи мат. наук* **36:2** (1981) 11–80 4, 45

[54] Лукашевич Н.А., К теории четвертого уравнения Пенлеве, *Дифф. ур.* **3:5** (1967) 771–780 5, 31, 33

[55] Лукашевич Н.А., К теории второго уравнения Пенлеве, *Дифф. ур.* **7:6** (1971) 1124–1125 5, 75

[56] Манаков С.В., К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн, *ЖЭТФ* **65:2** (1973) 505–516 6, 62, 63

[57] Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И., Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений, *Успехи мат. наук* **42:4** (1987) 3–53 55, 69

[58] Новиков С.П., Периодическая задача Кортевега–де Фриза, *Функц. анализ и прилож.* **8** (1974) 54–66 4

[59] Свинолупов С.И., Соколов В.В., Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений, *ТМФ* (1993) 64

[60] Свинолупов С.И., Соколов В.В., Ямилов Р.И., О преобразованиях Бэклунда для интегрируемых эволюционных уравнений, *ДАН СССР* **271:4** (1983) 802–805 17

[61] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д., Гамильтонов подход в теории солитонов, М.:Наука, 1986 54, 55

[62] Флюгге З., Задачи по квантовой механике, т.1, М.:Мир, 1974 27

[63] Шабат А.Б., О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения, *Динамика сплошной среды* **5** (1970) 130–145 17

[64] Шабат А.Б., Ямилов Р.И., Симметрии нелинейных цепочек, *Алгебра и анализ* **2:2** (1990) 183 4, 42

[65] Ямилов Р.И., Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Бэклунда, *ТМФ* **85:3** (1990) 368–375 6, 15, 61