

Лекция 2 Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3)$$

В случае $m = 0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^\mu \psi = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu. \quad (4)$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

В этой модели имеется топологическое число

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)), \quad (6)$$

принимающее целые значения. Его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi(t, x). \quad (7)$$

Это позволяет определить ток, ответственный за топологический заряд:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (8)$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = 0$ в силу антисимметрии символа $\epsilon^{\mu\nu}$ и коммутативности производных.

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [2, 3], причем параметры двух моделей связаны соотношениями

$$g = \pi(\beta^{-2} - 1), \quad (9)$$

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (10)$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu. \quad (11)$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (11) играет ключевую роль в бозонизации.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (i\psi_1^+(\partial_0 + \partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 - x^0$, $\bar{z} = x^1 + x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+\bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+\partial\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j_z = -\psi_1^+\psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+\psi_2. \quad (12)$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение[1]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -ig\psi_2^+\psi_2\psi_1 \equiv -igj_{\bar{z}}\psi_1, \\ \partial\psi_2 &= ig\psi_1^+\psi_1\psi_2 \equiv -igj_z\psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$, ток j_μ является градиентом свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi}\partial_\mu\tilde{\phi}. \quad (14)$$

Нам удобно рассматривать поле $\tilde{\phi}$ как двойственное к другому полю ϕ , как это описано в предыдущей лекции. Оба эти поля удовлетворяют уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только z и \bar{z} соответственно. Коэффициент в (14) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (11), если отождествить поле ϕ с полем модели синус-Гордона.

Мы видим, что безмассовая модель Тирринга эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из соотношения (14) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1, \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2. \quad (16)$$

Если продолжать искать классическое решение, следует подставить эти функции в уравнения (13). Решая последние, находим

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2\pi}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2\pi}\varphi(z)} \quad (17)$$

с произвольными функциями F_i . Подставляя обратно в (16), получаем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi(z) = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z}) = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}), \quad (18)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение функции в предположении вещественности аргумента. Остается проинтегрировать эти уравнения и подставить результат в (17). В результате поля ψ_i выражаются через две функции F_i и две константы интегрирования.

Перейдем к квантовому случаю. Давайте искать решение уравнений (16) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{i\alpha_i\varphi(z)+i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1}\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{-i\alpha_i\varphi(z)-i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (19)$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i . Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1. \quad (20)$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Рассмотрим произведение

$$\psi_i(x') \psi_j(x) = \eta_i \eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Это выражение хорошо продолжается в эвклидову область. Из требования антикоммутируемости легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Из (21) видно, что произведения вроде $\psi_1^+ \psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим другое произведение:

$$\psi_1^+(x') \psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} (1 - i\alpha_1(z' - z) \partial \phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z}) \bar{\partial} \phi(x) + \dots). \quad (23)$$

Усредним это произведение по окружности $|z' - z|^2 = r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x) \psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (24)$$

Тогда первый и третий члены в разложении (23) при усреднении обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+ \psi_1$. Коэффициент N_1 должен быть мнимым для согласованности с эрмитовостью оператора $\psi^+ \psi$.

Сравнивая с (16), получаем

$$\beta = -i r_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (25)$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (26)$$

получим

$$\beta = -i r_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (13). Подставляя (16) и (19), получим

$$\begin{aligned} i\beta_1 \bar{\partial} \bar{\varphi} e^{i\alpha_1 \varphi + i\beta_1 \bar{\varphi}} &= -ig \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial} \bar{\varphi} e^{i\alpha_1 \varphi + i\beta_1 \bar{\varphi}}, \\ i\alpha_2 \partial \varphi e^{i\alpha_2 \varphi + i\beta_2 \bar{\varphi}} &= ig \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi e^{i\alpha_2 \varphi + i\beta_2 \bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2\pi}, \quad (28)$$

что, конечно же, согласуется с классическим решением.

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i , β_i , нужно самосогласованно определить массовый член таким образом, чтобы он коммутировал с фермионным током

$$Q = \int df_\mu j^\mu, \quad (29)$$

где $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu$ — элемент одномерной поверхности. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x') \psi_1(x) = -\eta_1 \eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1 \alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1 \beta_2} \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2) \varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2) \bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2, \quad (30)$$

что согласуется с (24–28) и дает

$$\alpha_1 = -\beta_2. \quad (31)$$

Усредняя по углам, получаем определения для произведений

$$\begin{aligned} \psi_2^+ \psi_1 &= -\eta_1 \eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}, \\ \psi_1^+ \psi_2 &= -\eta_2 \eta_1^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}. \end{aligned} \quad (32)$$

Проверим теперь, что так определенные операторы коммутируют с Q . Пусть $O(x)$ — локальный оператор. Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [O(0), Q] &= \oint df_\mu j^\mu(x) O(0) = \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(x) O(0) = -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \tilde{\phi}(x) O(0) \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\lambda \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \Delta \phi(x) O(0), \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $\Delta \phi(x)$ — приращение поля $\phi(x)$ при обходе x вокруг нуля против часовой стрелки. Теперь применим эту формулу к оператору $O(x) = e^{i\alpha\varphi(z) + i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$:

$$\begin{aligned} [e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}, Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Коммутатор $[Q, O(x)] = 0$, если $\alpha = \alpha'$ и, следовательно, $O(x) = e^{i\alpha\phi(x)}$. Если $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha' = \beta_1 - \beta_2$, это условие выполнено в силу (28), (31).

Теперь зафиксируем параметр β . Для этого положим $O(x) = \psi_i(x)$ в (34). Так как операторы ψ_i имеют фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1}, \quad (35)$$

откуда немедленно получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta \quad (36)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя ответ в (28), получаем (9).

Из (25), (27) находим

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (38)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы $e^{i\beta\phi}$ и $e^{-i\beta\phi}$ должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по $\varphi, \bar{\varphi}$. Поэтому множители $(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\pm 1}$ тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (40)$$

откуда находим (10).

Строго говоря, пока мы нашли точное решение только для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теории возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos \beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий [2, 3]. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \quad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (41)$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [4].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$. В то же время кинковые возбуждения можно порождать не только фермионными операторами но и бозонными. Рассмотрим операторы

$$e^{iJ\varphi} = e^{\frac{iJ}{2\beta}\tilde{\phi}}, \quad J \in \mathbb{Z}, \quad (42)$$

которые входили в корреляционные функции в прошлой лекции. Эти операторы, действуя на состояние, меняют топологическое число: $q \rightarrow q + J$. При $J = \pm 1$ их можно рассматривать как бозонные операторы рождения-уничтожения кинков.

Литература

- [1] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91
- [2] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088
- [3] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026
- [4] Al. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (4) сохраняется. Найдите дивергенцию этого тока при ненулевой массе.
2. В модели свободных безмассовых дираковских фермионов ($m = 0, g = 0$) найдите парные корреляционные функции фермионных полей $\langle \psi_i^+(x')\psi_j(x) \rangle$.
3. Получите все классические решения уравнения синус-Гордона $\phi(t, x)$ с конечной энергией, зависящие только от $x - vt$ с некоторой константой $v, |v| < 1$. Найдите топологические заряды этих решений.
4. Повторите рассуждения лекции в специальном случае свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$. Покажите, что бозонизация воспроизводит правильное коммутационное соотношение для свободных безмассовых фермионов.

5*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (41), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m \left(1 + \frac{g}{\pi} \log \frac{\Lambda}{m} \right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left(\bar{\psi} (i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g} A^\mu A_\mu \right).$$