Лекция 2
Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m)\psi-\frac{g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right). \tag{1}$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat\partial=\gamma^\mu\partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\qquad \gamma^{\mu+}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi. \tag{3}$$

В случае $m=0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu=\bar\psi\gamma^3\gamma^\mu\psi=-\epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \tag{4}$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi]=\int d^2x\,\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi}+\mu\cos\beta\phi\right). \tag{5}$$

В этой модели имеется топологическое число

$$q=\frac{\beta}{2\pi}(\phi(t,+\infty)-\phi(t,-\infty)), \tag{6}$$

принимающее целые значения. Его можно записать в виде

$$q=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\partial_1\phi(t,x). \tag{7}$$

Это позволяет определить ток, ответственный за топологический заряд:

$$j^\mu_{\rm top}=-\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi. \tag{8}$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu j^\mu_{\rm top}=0$ в силу антисимметрии символа $\epsilon^{\mu\nu}$ и коммутативности производных.

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны[2, 3], причем параметры двух моделей связаны соотношениями

$$g=\pi(\beta^{-2}-1), \tag{9}$$
$$\mu\sim mr_0^{\beta^2-1}, \tag{10}$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu=j^\mu_{\rm top}. \tag{11}$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (11) играет ключевую роль в бозонизации.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,(i\psi_1^+(\partial_0+\partial_1)\psi_1+i\psi_2^+(\partial_0-\partial_1)\psi_2+im(\psi_1^+\psi_2-\psi_2^+\psi_1)-2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z=x^1-x^0$, $\bar z=x^1+x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,(2i\psi_1^+\bar\partial\psi_1-2i\psi_2^+\partial\psi_2+im(\psi_1^+\psi_2-\psi_2^+\psi_1)-2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j_z=-\psi_1^+\psi_1,\qquad j_{\bar z}=\psi_2^+\psi_2. \tag{12}$$

Рассмотрим случай $m=0$, который допускает точное решение[1]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned}\bar\partial\psi_1&=-ig\psi_2^+\psi_2\psi_1\equiv-igj_{\bar z}\psi_1,\\ \partial\psi_2&=ig\psi_1^+\psi_1\psi_2\equiv-igj_z\psi_2.\end{aligned} \tag{13}$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu j_\nu=\partial_\mu j_3^\mu=0$, ток j_μ является градиентом свободного поля:

$$j_\mu=-\frac{\beta}{2\pi}\partial_\mu\tilde\phi. \tag{14}$$

Нам удобно рассматривать поле $\tilde\phi$ как двойственное к другому полю ϕ, как это описано в предыдущей лекции. Оба эти поля удовлетворяют уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi=\partial_\mu\partial^\mu\tilde\phi=0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\varphi(z)+\bar\varphi(\bar z),\\ \tilde\phi(x)&=\varphi(z)-\bar\varphi(\bar z),\end{aligned} \tag{15}$$

где $\varphi(z)$ и $\bar\varphi(\bar z)$ — произвольные функции только z и $\bar z$ соответственно. Коэффициент в (14) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (11), если отождествить поле ϕ с полем модели синус-Гордона.

Мы видим, что безмассовая модель Тирринга эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из соотношения (14) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi=\psi_1^+\psi_1,\qquad \frac{\beta}{2\pi}\bar\partial\bar\varphi=\psi_2^+\psi_2. \tag{16}$$

Если продолжать искать классическое решение, следует подставить эти функции в уравнения (13). Решая последние, находим

$$\psi_1(z,\bar z)=F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2\pi}\bar\varphi(\bar z)},\qquad \psi_2(z,\bar z)=F_2(\bar z)e^{i\frac{g\beta}{2\pi}\varphi(z)} \tag{17}$$

с произвольными функциями F_i. Подставляя обратно в (16), получаем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi(z)=F_1(z)F_1^*(z),\qquad \frac{\beta}{2\pi}\bar\partial\bar\varphi(\bar z)=F_2(\bar z)F_2^*(\bar z), \tag{18}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение функции в предположении вещественности аргумента. Остается проинтегрировать эти уравнения и подставить результат в (17). В результате поля ψ_i выражаются через две функции F_i и две константы интегрирования.

Перейдем к квантовому случаю. Давайте искать решение уравнений (16) в виде

$$\psi_i(x)=\eta_i\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{i\alpha_i\varphi(z)+i\beta_i\bar\varphi(\bar z)},\qquad \psi_i^+(x)=\eta_i^{-1}\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{-i\alpha_i\varphi(z)-i\beta_i\bar\varphi(\bar z)}, \tag{19}$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i. Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \tag{20}$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Рассмотрим произведение

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j\frac{\sqrt{N_iN_j}}{2\pi}(z'-z)^{\alpha_i\alpha_j}(\bar z'-\bar z)^{\beta_i\beta_j}e^{i\alpha_i\varphi(z')+i\beta_i\bar\varphi(\bar z')+i\alpha_j\varphi(z)+i\beta_j\bar\varphi(\bar z)}. \tag{21}$$

Это выражение хорошо продолжается в эвклидову область. Из требования антикоммутативности легко получить, что

$$\alpha_i^2-\beta_i^2 \in 2\mathbb{Z}+1, \qquad \alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \tag{22}$$

Из (21) видно, что произведения вроде $\psi_1^+\psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим другое произведение:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi}(z'-z)^{-\alpha_1^2}\left(\bar z'-\bar z\right)^{-\beta_1^2}\left(1-i\alpha_1(z'-z)\,\partial\phi(x)-i\beta_1(\bar z'-\bar z)\,\bar\partial\phi(x)+\cdots\right). \tag{23}$$

Усредним это произведение по окружности $|z'-z|^2 = r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2-\beta_1^2 = 1. \tag{24}$$

Тогда первый и третий члены в разложении (23) при усреднении обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1 r_0^{-2\beta_1^2}\left(\frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi}\right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+\psi_1$. Коэффициент N_1 должен быть мнимым для согласованности с эрмитовостью оператора $\psi^+\psi$.

Сравнивая с (16), получаем

$$\beta = -ir_0^{-2\beta_1^2}N_1\alpha_1. \tag{25}$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2-\beta_2^2 = -1, \tag{26}$$

получим

$$\beta = -ir_0^{-2\alpha_2^2}N_2\beta_2. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (13). Подставляя (16) и (19), получим

$$i\beta_1\,\bar\partial\bar\varphi\,e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar\varphi} = -ig\frac{\beta}{2\pi}\bar\partial\bar\varphi\,e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar\varphi},$$
$$i\alpha_2\,\partial\varphi\,e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar\varphi} = ig\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi\,e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar\varphi}.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2\pi}, \tag{28}$$

что, конечно же, согласуется с классическим решением.

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i, β_i, нужно самосогласованно определить массовый член таким образом, чтобы он коммутировал с фермионным током

$$Q = \int df_\mu\, j^\mu, \tag{29}$$

где $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\,dx^\nu$ — элемент одномерной поверхности. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1}\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi}(z'-z)^{-\alpha_1\alpha_2}(\bar z'-\bar z)^{-\beta_1\beta_2}\left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar\varphi(\bar z)}+\cdots\right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \tag{30}$$

что согласуется с (24–28) и дает

$$\alpha_1 = -\beta_2. \tag{31}$$

Усредняя по углам, получаем определения для произведений

$$\begin{aligned} \psi_2^+\psi_1 &= -\eta_1\eta_2^{-1}\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1\alpha_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\phi}, \\ \psi_1^+\psi_2 &= -\eta_2\eta_1^{-1}\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1\alpha_2} e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)\phi}. \end{aligned} \tag{32}$$

Проверим теперь, что так определенные операторы коммутируют с Q. Пусть $O(x)$ — локальный оператор. Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [O(0), Q] &= \oint df_\mu\, j^\mu(x)\, O(0) = \oint dx^\nu\, \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(x) O(0) = -\frac{\beta}{2\pi}\oint dx^\nu\, \epsilon_{\mu\nu}\,\partial^\mu\tilde{\phi}(x)\, O(0) \\ &= -\frac{\beta}{2\pi}\oint dx^\nu\, \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\lambda}\,\partial_\lambda\phi(x)\, O(0) = \frac{\beta}{2\pi}\oint dx^\lambda\,\partial_\lambda\phi(x)\, O(0) = \frac{\beta}{2\pi}\Delta\phi(x)\, O(0), \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\Delta\phi(x)$ — приращение поля $\phi(x)$ при обходе x вокруг нуля против часовой стрелки. Теперь применим эту формулу к оператору $O(x) = e^{i\alpha\varphi(z)+i\alpha'\bar\varphi(\bar z)}$:

$$\begin{aligned} [e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar\varphi(0)}, Q] &= \frac{\beta}{2\pi}\Delta(\varphi(z)+\bar\varphi(\bar z))e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar\varphi(0)} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi}\Delta\left(\alpha\log\frac{1}{z}+\alpha'\log\frac{1}{\bar z}\right)e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar\varphi(0)} = \beta(\alpha-\alpha')e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar\varphi(0)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Коммутатор $[Q, O(x)] = 0$, если $\alpha = \alpha'$ и, следовательно, $O(x) = e^{i\alpha\phi(x)}$. Очевидно, это условие выполнено для операторов, определенных в (32).

Теперь зафиксируем параметр β. Для этого положим $O(x) = \psi_i(x)$ в (34). Так как операторы ψ_i имеют фермионный заряд -1, имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i)\psi_i(0) = \beta(\alpha_1+\alpha_2)\psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1}, \tag{35}$$

откуда немедленно получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta \tag{36}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right), \\ \alpha_2 &= -\beta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Подставляя ответ в (28), получаем (9).

Из (25), (27) находим

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2}+\frac{1}{2\beta^2}-1}\frac{2\beta^2}{\beta^2+1}, \tag{38}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+\psi_1 &= \frac{1}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1} r_0^{\beta^2-1}\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+\psi_2 &= \frac{1}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1} r_0^{\beta^2-1}\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{-1}e^{-i\beta\phi}. \end{aligned} \tag{39}$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы $e^{i\beta\phi}$ и $e^{-i\beta\phi}$ должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по φ, $\bar{\varphi}$. Поэтому множители $\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{\pm 1}$ тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \to e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1} r_0^{\beta^2-1}\cos\beta\phi, \tag{40}$$

откуда находим (10).

Строго говоря, пока мы нашли точное решение только для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теории возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos\beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий[2, 3]. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \qquad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \tag{41}$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [4].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$. В то же время кинковые возбуждения можно порождать не только фермионными операторами но и бозонными. Рассмотрим операторы

$$e^{iJ\varphi} = e^{\frac{iJ}{2\beta}\tilde{\phi}}, \qquad J \in \mathbb{Z}, \tag{42}$$

которые входили в корреляционные функции в прошлой лекции. Этот операторы, действуя на состояние, меняют топологическое число: $q \to q + J$. При $J = \pm 1$ их можно рассматривать как бозонные операторы рождения-уничтожения кинков.

Литература

[1] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91

[2] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088

[3] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026

[4] Al. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (4) сохраняется. Найдите дивергенцию этого тока при ненулевой массе.

2. В модели свободных безмассовых дираковских фермионов ($m = 0$, $g = 0$) найдите парные корреляционные функции фермионных полей $\langle\psi_i^+(x')\psi_j(x)\rangle$.

3. Получите все классические решения уравнения синус-Гордона $\phi(t, x)$ с конечной энергией, зависящие только от $x - vt$ с некоторой константой v, $|v| < 1$. Найдите топологические заряды этих решений.

4. Повторите рассуждения лекции в специальном случае свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$. Покажите, что бозонизация воспроизводит правильное коммутационное соотношение для свободных безмассовых фермионов.

5*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (41), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m\left(1 + \frac{g}{\pi}\log\frac{\Lambda}{m}\right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^{\mu}] = \int d^D x\, \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g}A^{\mu}A_{\mu}\right).$$