

Лекция 5
 $O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (2)$$

где вектор \mathbf{n} теперь пробегает любые значения в \mathbb{R}^N . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Интеграл по \mathbf{n} — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left(i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right),$$

где $G(x, x'|\omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x'|\omega) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i\frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) = \frac{iV}{4\pi} \left(\omega_0 \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под знаком логарифма мы пренебрегли ω_0 в выражении $\omega_0 + \Lambda^2$ в первом слагаемом. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{Ng}\right). \quad (8)$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ следует устремить к нулю g таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (9)$$

Важно, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2} \rho(x)$:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Здесь G — оператор с ядром $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= V \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{V}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Мы видим, что скобка в самом деле обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно убедиться, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n} x \rho(x_1) G(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G(x_n, x_1). \quad (11)$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому пропагатор $D(x_1, x_2)$ поля $\rho(x)$ есть ядро оператора, обратного к оператору с ядром

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) G(x_2, x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель $(2/N)^{1/2}$ перед ρ . Он позволил избавиться от коэффициента $2/N$ в пропагаторе $D(x_1, x_2)$.

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k) = \text{-----} \overset{k}{\text{-----}} = - \left(\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Кроме того, оператор $G(x, x'|\omega)$, входящий в (5), тоже следует разложить по $\rho(x)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n,$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G(x_1, y_1)\rho(y_1)G(y_1, y_2) \dots \rho(y_n)G(y_n, x_2).$$

Изобразим $G(x_1, x_2)$ сплошной линией:

$$G_{ij}(p) = \overset{i}{\text{-----}} \overset{p}{\text{-----}} \overset{j}{\text{-----}} = G(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (13)$$

Если еще ввести вершину

$$\overset{i}{\text{-----}} \overset{j}{\text{-----}} = -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}, \quad (14)$$

можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (13) и вершин (14).
2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи g . Порядок диаграммы по $1/N$ равен $\frac{1}{2}V - L$, где V — число вершин, а L — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи g , массой m и параметром обрезания Λ можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке $1/N$ можно получить

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \quad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2 \log(\Lambda^2/m^2)}. \quad (15)$$

Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (2) член вида $\alpha \int d^2x \omega^2$, «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

Давайте теперь попробуем вычислить S -матрицу $O(N)$ -модели. Разберемся сначала с кинематикой. У нас имеется N частиц массы m . Пусть две такие частицы с импульсами p_1 и p_2 рассеиваются друг на друге, образуя две новые частицы той же массы с импульсами p'_1 и p'_2 . Импульсы p_a удобно параметризовать быстротами θ_a :

$$p_a = m \operatorname{sh} \theta_a, \quad p'_a = m \operatorname{sh} \theta'_a.$$

Тогда

$$m \operatorname{ch} \theta_1 + m \operatorname{ch} \theta_2 = m \operatorname{ch} \theta'_1 + m \operatorname{ch} \theta'_2,$$

$$m \operatorname{sh} \theta_1 + m \operatorname{sh} \theta_2 = m \operatorname{sh} \theta'_1 + m \operatorname{sh} \theta'_2.$$

Эти уравнения имеют ровно два решения: $\theta'_1 = \theta_1, \theta'_2 = \theta_2$ и $\theta'_1 = \theta_2, \theta'_2 = \theta_1$. Матрицу рассеяния двух частиц в две можно представить в виде

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p'_2 - p_1) \delta(p'_1 - p_2) S_{ij}^{j'i'}(\theta_1 - \theta_2).$$

Чтобы правильно нормировать, нужно преобразовать дельта-функции к стандартному виду дельта-функции по пространственно-временным импульсам:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) &= (2\pi)^2 \delta^{(2)}(P' - P) \frac{\text{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{ch } \theta_1 \text{ch } \theta_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) \\ &= (2\pi)^2 \delta^{(2)}(P' - P) \frac{4m^2 \text{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

где $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu, P'^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$. Следовательно, в стандартных обозначениях

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{M_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \text{sh}(\theta_1 - \theta_2)},$$

где амплитуды M_{ij} вычисляются по правилам Фейнмана.

Условие совместимости с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'} \delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i} \delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i} \delta_{i'j} S_3(\theta). \quad (16)$$

В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$\begin{aligned} 4m^2 \text{sh } \theta S_1(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \diagdown \quad \quad \diagup \quad p_1 \\ \quad \quad \quad \vdash \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdash \quad \quad \quad \\ p_2 \quad \diagup \quad \quad \diagdown \quad p_2 \end{array}, \\ 4m^2 \text{sh } \theta (S_2(\theta) - 1) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_1 \\ \quad \quad \quad \vdash \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdash \\ p_2 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_2 \end{array}, \\ 4m^2 \text{sh } \theta S_3(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_2 \\ \quad \quad \quad \vdash \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdash \\ p_2 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad p_1 \end{array}. \end{aligned}$$

Для вычисления этих диаграмм нам понадобится явная формула для $D(k)$. Она имеет вид

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2} + 1}}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2} - 1}}. \quad (17)$$

Эта громоздкая формула становится вполне элементарной в параметризации

$$k^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (18)$$

Отметим, что угол θ в этой параметризации совпадает с $\theta_1 - \theta_2$ в случае диаграммы для S_3 . Имеем

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\text{sh } \theta}{\theta}. \quad (19)$$

Подставляя эти выражения в диаграммы, получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \text{sh } \theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Литература

- [1] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
[2] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
[3] А. М. Цвельик, Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния.

Задачи

1. Получите формулы (17) и (19).
2. Модель Гросса—Невё для N -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp \left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

3. Постройте диаграммную технику для $1/N$ -разложения в модели Гросса—Невё. Найдите S -матрицу в древесном приближении.
4. Рассмотрите модель с ослабленным условием на \mathbf{n}^2 :

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x \left((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \frac{2\mu^2}{g} (\mathbf{n}^2 - 1)^2 \right), \quad (21)$$

где μ — постоянная размерности массы. Найдите массу возбуждений в модели (21) в главном порядке. Покажите, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ модель переходит в сигма-модель (1).

- 5*. Найдите массу возбуждений в модели из задачи 5 к лекции 4 в ведущем порядке по $1/N$.