Лекция 7
Модель Тирринга: решение методом анзаца Бете

Рассмотрим массивную модель Тирринга

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m_0)\psi-\frac{g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right),\tag{1}$$

причем

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix},\qquad \gamma^0=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix}=\sigma^2,\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix}=i\sigma^1,\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}=\sigma^3.\tag{2}$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H=\int dx\,\left(-i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi+m_0\psi^+\sigma^2\psi+2g\psi_+^+\psi_-^+\psi_-\psi_+\right)\tag{3}$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi^+_{\alpha'}(x')\psi_\alpha(x)+\psi_\alpha(x)\psi^+_{\alpha'}(x')=\delta_{\alpha'\alpha}\delta(x'-x),\tag{4}$$

причем импульс P и оператор фермионного числа Q имеют вид

$$P=-i\int dx\,\psi^+\partial_x\psi,\qquad Q=\int dx\,\psi^+\psi.\tag{5}$$

Давайте вспомним картину Дирака. Спектр $\epsilon^2-p^2=m^2$ имеет две ветви: $\epsilon=\pm\sqrt{p^2+m^2}$. Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Состояние системы, в котором все одночастичные состояния вакантны, мы будем называть «голым вакуумом» или *псевдовакуумом.* Если начать заполнять состояния с отрицательной энергией фермионами, энергия системы будет уменьшаться. Поэтому псевдовакуум не является основным состоянием системы. Основное состояние (физический вакуум) получится, когда мы заполним все состояния отрицательной энергии («море Дирака»). «Элементарные возбуждения» над псевдовакуумом бы будем называть *псевдочастицами.* Попробуем формализовать эту процедуру.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов $g=0$. Обозначим через $|\Omega\rangle$ состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle=0,\qquad \langle\Omega|\psi^+_\alpha(x)=0.\tag{6}$$

Введем волновую функцию состояния N псевдочастиц:

$$|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)\psi^+_{\alpha_N}(x_N)\ldots\psi^+_{\alpha_1}(x_1)|\Omega\rangle.\tag{7}$$

Состояния такого вида являются собственными векторами оператора Q:

$$Q|\chi_N\rangle=N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний $\mathcal{H}$ распадается в сумму по собственным значениям Q:

$$\mathcal{H}\simeq\bigoplus_{N=0}^{\infty}\mathcal{H}_N,\qquad v\in\mathcal{H}_N\Leftrightarrow Qv=Nv.\tag{8}$$

Оператор фермионного числа в этой картине становится оператором числа псевдочастиц.

Действие $\hat H_N$ гамильтониана на волновую функцию $\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)$, определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle=\int d^Nx\,(\hat H_N\chi)^{\alpha_1\ldots\alpha_N}(x_1,\ldots,x_N)\psi^+_{\alpha_N}(x_N)\ldots\psi^+_{\alpha_1}(x_1)|\Omega\rangle,$$

имеет вид

$$\hat H_N=\sum_{k=1}^{N}(-i\sigma^3_k\partial_{x_k}+m_0\sigma^2_k),$$

где σ_k^i действует на пространстве k-й частицы. При $N=1$ собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh}\lambda}. \tag{9}$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана дается слэтеровским детерминантом:

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(x_1,\ldots,x_N) = \sum_\sigma (-1)^\sigma \prod_{k=1}^N \chi^{\alpha_{\sigma_k}}_{\lambda_k}(x_{\sigma_k}). \tag{10}$$

Энергия N-частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{ch}\lambda_k. \tag{11}$$

Какие значения могут принимать параметры λ? Если система находится в ящике размера L с циклическими граничными условиями, «быстроты» λ_k являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \operatorname{sh}\lambda_k} = 1, \qquad k = 1,\ldots,N. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \qquad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что λ_k находится либо на вещественной оси $\mathbb{R}$, либо на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Последние решения соответствуют отрицательным энергиям. Очевидно, основным является состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим $\lambda_k = i\pi + \xi_k$. Чтобы определить энергию вакуума, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \xi_k < \Theta, \qquad \Theta \simeq \log\frac{\Lambda}{m_0}. \tag{13}$$

В термодинамическом пределе $L \to \infty$ энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi}\, \rho(\xi) m_0 \operatorname{ch}\xi, \qquad \rho(\xi) = \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dn}{d\xi}\right| = m_0 \operatorname{ch}\xi.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой θ соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \qquad \text{(частица)},$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta + i\pi \qquad \text{(античастица)}.$$

Поскольку корни уравнений (12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с $p = (m \operatorname{ch}\theta, m \operatorname{sh}\theta)$, подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (3) коммутирует с оператором числа псевдочастиц Q. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств $\mathcal{H}_N$:

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + g \sum_{k<l}^N \delta(x_k - x_l)(1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \tag{14}$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть

$$\frac{1}{2}(1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)^{\alpha_1'\alpha_2'}_{\alpha_1\alpha_2} = \delta^{\alpha_1'}_{\alpha_1} \delta^{\alpha_2'}_{\alpha_2} \delta_{\alpha_1,-\alpha_2}, \tag{15}$$

то есть взаимодействуют между собой только частицы противоположных спинов.

Член взаимодействия в гамильтониане (14) плохо определен. Действительно, уравнение на собственные функции является дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому дельта-функциональный член приводит к скачку волновой функции на поверхности $x_k = x_l$. В то же время действие гамильтониана зависит от значений волновой функции как раз на этой поверхности. Дельта-функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольной интегрируемой функцией $\delta_a(x)$ с носителем $[-a, a]$:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \qquad \int_{-a}^{a} dx\, \delta_a(x) = 1. \tag{16}$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)}.$$

При достаточно малых a вторым слагаемым можно пренебречь, и мы имеем

$$f(x) = \mathrm{const}\, e^{c\epsilon_a(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(+a) = e^{c(\epsilon_a(a)-\epsilon_a(-a))}f(-a) = e^c f(-a).$$

Отсюда в пределе $a \to 0$ получаем

$$f(+0) = e^c f(-0). \tag{17}$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при $x_1 = x_2$), при $x_1 \neq x_2$ волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса рассеяние безотражательно, и волновая функция имеет вид

$$\chi^{\alpha_1\alpha_2}_{\lambda_1\lambda_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_1}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_2}(x_2) - A_{21}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_2}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_1}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_1}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_2}(x_2) - A_{12}\chi^{\alpha_1}_{\lambda_2}(x_1)\chi^{\alpha_2}_{\lambda_1}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \tag{18}$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по (α_1, x_1), (α_2, x_2) и содержит (с точностью до нормировки) один свободный параметр A_{12}/A_{21}, который должен зависеть от константы связи g. Прямое вычисление с помощью (17) дает

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{\lambda - ig}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\lambda + ig}{2}}. \tag{19}$$

Функция $R(\lambda)$ имеет смысл матрицы рассеяния псевдочастиц. Фазу рассеяния $\Phi(\lambda)$ удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \tag{20}$$

считая, что разрезы лежат на лучах $(i(\pi - |g|), i\infty)$, $(-i(\pi - |g|), -i\infty)$. Величины λ_k естественно определены по модулю $2\pi i$.

Заметим, что функция $R(\lambda)$ периодична по g с периодом 2π. Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-\pi < g < \pi. \tag{21}$$

Теперь нетрудно построить общее N-частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_N}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma\tau} A_\tau \prod_{k=1}^{N} \chi^{\alpha_{\sigma_k}}_{\lambda_{\tau_k}}(x_{\sigma_k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \ldots < x_{\sigma_N}. \tag{22}$$

Коэффициенты A удовлетворяют соотношениям

$$A_{\ldots,i+1,i,\ldots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\ldots,i,i+1,\ldots}. \tag{23}$$

Наложим циклическое граничное условие

$$\chi(\ldots, x_k + L, \ldots) = \chi(\ldots, x_k, \ldots). \tag{24}$$

Получаем

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} R(\lambda_k - \lambda_l) = 1. \tag{25}$$

Эта система уравнений на параметры λ_k называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с N неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях $N \to \infty$. Тем не менее сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору (с точностью до перестановки) чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, удовлетворяющему (25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты λ_k решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \tag{26}$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ch} \lambda_i, \qquad P_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sh} \lambda_i. \tag{27}$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Общие комплексные корни могут располагаться парами симметрично относительно одной из прямых $\mathbb{R}$ и $i\pi + \mathbb{R}$. Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Уравнения Бете сопоставляют каждому решению $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ набор чисел $(n_1, \ldots, n_N)$, причем можно показать, что $n_k = n_l$, только если $\lambda_k = \lambda_l$. Из принципа Паули следует, что все λ_k должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k \neq n_l \qquad (k \neq l). \tag{28}$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями псевдочастиц, т. е. с $\operatorname{Im} \lambda_k = \pi$. Будем писать

$$\lambda_k = i\pi + \xi_k.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа n_k шли через единицу:

$$n_{k+1} - n_k = \pm 1, \tag{29}$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина ξ_k росла с k. Поэтому примем

$$n_k = k_0 - k$$

с некоторым k_0. Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi_k - \xi_l). \tag{30}$$

В термодинамическом пределе $L \to \infty$ расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по ξ_k. Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi')\rho(\xi'). \tag{31}$$

Здесь

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L}\frac{dk}{d\xi} \tag{32}$$

— спектральная плотность состояний, связанная с числом псевдочастиц N в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) = \frac{N}{L}. \tag{33}$$

При $\Theta \to \infty$ величина m_0 стремиться к нулю при $g > 0$ и к бесконечности при $g < 0$. При $g > 0$ можно показать, что $\rho(\xi)/m_0 \to \infty$. Поэтому следует искать формальное решение однородного уравнения, которое получается из (31) при $m_0 = 0$, $\Theta \to \infty$. Оно имеет вид

$$\rho(\xi) = \mathrm{const} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi\xi}{\pi + g}. \tag{34}$$

Коэффициент пропорциональности можно найти более аккуратным вычислением, и он оказывается конечным.

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками.[1] Для этого обобщим уравнение (30):

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi_k - \xi_l). \tag{35}$$

Далее, определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi(n) - \xi_l) \tag{36}$$

Определим плотность состояний $\rho(\xi)$ и плотность дырок $\rho^\circ(\xi) = \rho(\xi) - \rho^\bullet(\xi)$ следующим образом:

$$\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dn}{d\xi(n)}\right|, \qquad \rho^\bullet(\xi) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\xi_{k+1} - \xi_k|} \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi} = \left\langle \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dk}{d\xi_k}\right| \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi}. \tag{37}$$

В частности для одной дырки с параметром $\xi = \xi_0$ имеем $\rho^\circ(\xi) = 2\pi L^{-1}\delta(\xi - \xi_0)$. Тогда система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi')(\rho(\xi') - \rho^\circ(\xi')). \tag{38}$$

Обозначив через $\rho_0(\xi)$ решение уравнения (31) и вычтя это уравнение из (38), получим

$$\delta\rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi')\delta\rho(\xi') = \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi')\rho^\circ(\xi'). \tag{39}$$

Здесь

$$\delta\rho(\xi) = \rho(\xi) - \rho_0(\xi).$$

В пределе $\Theta \to \infty$ это уравнение легко решить методом Фурье. Действительно, пусть

$$\tilde\Phi'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \Phi'(\xi) e^{i\xi\omega}, \qquad \delta\tilde\rho(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \delta\rho(\xi) e^{i\xi\omega}, \qquad \tilde\rho^\circ(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^\circ(\xi) e^{i\xi\omega}.$$

[1] К сожалению, в первоначальной версии лекции была допущена ошибка при рассмотрении моря фермионов с одной дополнительной частицей. Я благодарен И. Протопопову, который заметил ее, решая задачу. Исследование дополнительной частицы, на самом деле, требует рассмотрения так называемых струнных решений уравнений Бете.

Применяя преобразование Фурье к уравнению (39), получаем алгебраическое уравнение

$$\delta\tilde{\rho}(\omega) + \tilde{\Phi}'(\omega)\delta\tilde{\rho}(\omega) = \Phi'(\omega)\tilde{\rho}^\circ(\omega).$$

Легко проверить, что

$$\tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} g\omega}{\operatorname{sh}\pi\omega}, \qquad \delta\tilde{\rho}(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} g\omega}{2\operatorname{sh}\frac{\pi-g}{2}\omega\operatorname{ch}\frac{\pi+g}{2}\omega}\tilde{\rho}^\circ(\omega). \tag{40}$$

Начнем исследование решения (40) с вычисления заряда возбуждения, отвечающего дырке. Казалось бы, заряд дырки должен быть равен $N - N_0 = -1$. Чтобы убедиться, что это не так, учтем ультрафиолетовое обрезание. Когда меняется плотность дырок, меняется и плотность состояний, так что число состояний под обрезкой, то есть, в интервале $-\Theta < \xi < \Theta$ тоже меняется. Нас будут интересовать две величины:

$$\begin{aligned} \Delta N &= -L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,\rho^\circ(\xi) = -L\tilde{\rho}^\circ(0), \\ \Delta Q &= L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,(\delta\rho(\xi) - \rho^\circ(\xi)). \end{aligned} \tag{41}$$

В первой строчке мы использовали предположение, что все дырки находятся под обрезкой, то есть $\rho^\circ(\xi) = 0$ при $|\xi| > \Theta$. Отношение

$$z^\circ = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} \tag{42}$$

дает заряд дырки. Вычисляя

$$\Delta Q = -L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,e^{-i\omega\xi}\frac{\operatorname{sh}\pi\omega}{2\operatorname{sh}\frac{\pi-g}{2}\omega\operatorname{ch}\frac{\pi+g}{2}\omega}\tilde{\rho}^\circ(\omega) \simeq \frac{\pi}{\pi-g}\Delta N, \tag{43}$$

находим

$$z^\circ = -\frac{\pi}{\pi - g}. \tag{44}$$

Мы видим, что заряд дырки не является целым числом в терминах псевдочастиц. Иными словами, заряд частиц перенормируется.

Эта перенормировка имеет существенное последствие. Чтобы понять его, вернемся к выводу гамильтониана (3). Мы формально выводили его по классическим правилам из классического действия. Квантовый эффект состоит в том, что одна физическая частица составляет $|z^\circ|$ псевдочастиц, определенных в (7):

$$Q = |z^\circ|\int dx\,\psi^+_{\text{phys}}\psi_{\text{phys}} + \text{const}\,, \tag{45}$$

где ψ_{phys} — физические поля, то есть именно те поля, которые обсуждались в лекции 2. Это значит, что

$$\psi = |z^\circ|^{1/2}\psi_{\text{phys}}. \tag{46}$$

Подставляя это в гамильтониан (3), мы видим, что физическая константа g_{phys} (которая была обозначена как g в лекции 2) связана с формальной константой g соотношением

$$g_{\text{phys}} = g|z^\circ| = \frac{g}{1 - g/\pi} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{g_{\text{phys}}} = \frac{1}{g} - \frac{1}{\pi}. \tag{47}$$

Если формальная константа связи меняется в пределах $-\pi \le g < \pi$, то физическая меняется в пределах $-\frac{\pi}{2} \le g_{\text{phys}} < \infty$ в согласии с результатами бозонизации.

Энергия $E[\rho^\circ]$ и импульс $P[\rho^\circ]$ системы являются функционалами плотности дырок ρ°, причем энергия возбуждений определяется как разность $E[\rho^\circ] - E[0]$. Имеем

$$\begin{aligned} E[\rho^\circ] - E[0] &= m_0 L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,(\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi))\operatorname{ch}\xi, \\ P[\rho^\circ] &= m_0 L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,(\rho^\circ(\xi) - \delta\rho(\xi))\operatorname{sh}\xi. \end{aligned}$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных g.

При $g < 0$ интегралы в этих выражениях сходятся при $\Theta \to \infty$. Но если мы положим $\Theta = \infty$, мы получим, что $E[\rho^\circ] - E[0] = P[\rho^\circ] = 0$, так как $\delta\tilde{\rho}(\pm i) = \tilde{\rho}^\circ(\pm i)$. Поэтому следует перенормировать затравочную массу m_0. Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции $\delta\tilde{\rho}(\omega)$ в точках $\omega = \pm\frac{i\pi}{\pi+g}$ дает

$$E[\rho^\circ] - E[0] = L\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi}\,\epsilon(\xi)\rho^\circ(\xi), \qquad P[\rho^\circ] = L\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi}\,p(\xi)\rho^\circ(\xi) \tag{48}$$

где

$$\epsilon(\lambda) = m\operatorname{ch}\frac{\pi\lambda}{\pi+g}, \qquad p(\lambda) = m\operatorname{sh}\frac{\pi\lambda}{\pi+g}, \qquad m = \frac{M}{g}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\pi-g}{\pi+g}\right), \tag{49}$$

а константа M определяется равенством

$$m_0 = M\exp\left(-\frac{g}{\pi+g}\Theta\right) \sim M\left(\frac{m_0}{\Lambda}\right)^{g/(\pi+g)}. \tag{50}$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\pi\xi}{\pi+g}. \tag{51}$$

Сравнивая (50) с нашей предыдущей оценкой

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \tag{52}$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, получаем соотношение

$$\frac{g}{\pi} = 1 - \beta^2.$$

Пересчитывая в физическую константу связи, получаем соотношение

$$\frac{g_{\text{phys}}}{\pi} = \beta^{-2} - 1,$$

приведенное в Лекции 2. Формальная константа связи g и физическая константа связи g_{phys} совпадают в первом порядке по теории возмущений, но различаются в высших порядках. Эту разницу нужно учитывать при интерпретации точных результатов.

При $g > 0$ ситуация несколько иная. Полюсы функции $\delta\tilde{\rho}(\omega)$ при $\omega = \pm i\pi/(\pi+g)$ становятся ближе к вещественной оси, чем точки $\pm i$. Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует $m_0 \to 0$. Строго говоря, требуется явное вычисление $\delta\rho(\xi)$ и затем интегралов для энергии и импульса возбуждений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области $g < 0$. Это значит, что формула для перенормировки массы (50) верна и в этом случае.

Что еще можно получить из формул (40)? Оказывается, из них немедленно извлекается матрица рассеяния дырок. Чтобы сделать это рассмотрим «бесспиновые» фермионы массы m с матрицей рассеяния $S(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Предположим, что эти фермионы живут в пространстве длины L с циклическими граничными условиями. Совершенно аналогично (25) получаем

$$e^{imL\operatorname{sh}\theta_k}\prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{N} S(\theta_l - \theta_k) = 1. \tag{53}$$

Прологарифмируем уравнения:

$$mL\operatorname{sh}\theta_k + \sum_{l=1}^{N}\Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \tag{54}$$

и сделаем термодинамический предел. Для этого определим $\theta(n)$ уравнением

$$mL\operatorname{sh}\theta(n)=\sum_{l=1}^{N}\Psi(\theta(n)-\theta_l)=2\pi n. \tag{55}$$

Затем расположим n_k по возрастанию и положим

$$\rho_*(\theta(n))=\frac{2\pi}{L|\theta(n+1)-\theta(n)|}\simeq\frac{2\pi}{L}\left|\frac{dn}{d\theta(n)}\right|,\qquad \rho_*^\bullet(\theta)=\left\langle\frac{2\pi}{L|\theta_{k+1}-\theta_k|}\right\rangle_{\theta_k\simeq\theta}=\left\langle\frac{2\pi}{L}\left|\frac{dk}{d\theta_k}\right|\right\rangle_{\theta_k\simeq\theta}. \tag{56}$$

Величина $\rho_*(\theta)$ имеет смысл плотности состояний, а величина $\rho_*^\bullet(\theta)$ имеет смысл плотности частиц. Тогда уравнение для плотности состояний примет вид

$$m\operatorname{ch}\theta+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta'}{2\pi}\,\Psi'(\theta-\theta')\rho_*^\bullet(\theta')=2\pi\rho_*(\theta). \tag{57}$$

При нулевой плотности частиц $\rho_*^\bullet$ имеем $\rho_{*0}(\theta)=m\operatorname{ch}\theta$. Полагая $\delta\rho_*=\rho_*-\rho_{*0}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta'}{2\pi}\,\Psi'(\theta-\theta')\rho_*^\bullet(\theta'). \tag{58}$$

Перейдем к фурье-образам

$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\delta\rho_*(\theta)e^{i\theta\omega}\quad\text{и т.д.}$$

Уравнение (58) принимает вид

$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\tilde\Psi'(\omega)\rho_*^\bullet(\omega). \tag{59}$$

Теперь предположим, что вспомогательные фермионы и есть наши дырки. С учетом (51) отождествляем

$$\delta\rho_*(\theta)=\alpha\delta\rho(\alpha\theta),\qquad \rho_*^\bullet(\theta)=\alpha\rho^\circ(\alpha\theta),\qquad \alpha=1+\frac{g}{\pi}=2-\beta^2. \tag{60}$$

Имеем

$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\delta\tilde\rho(\alpha^{-1}\omega),\qquad \tilde\rho_*^\bullet(\omega)=\tilde\rho^\circ(\alpha^{-1}\omega). \tag{61}$$

В этом предположении, сравнивая (61) с (40), получаем

$$\Psi(\theta)=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\omega}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh}\pi\omega\operatorname{sh}\frac{\pi p\omega}{2}}e^{-i\theta\omega}=2\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\omega}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh}\pi\omega\operatorname{sh}\frac{\pi p\omega}{2}}\sin\theta\omega, \tag{62}$$

где параметр p определен соотношением

$$\beta^2=2\frac{p}{p+1}.$$

Функция $S(\theta)=e^{i\Psi(\theta)}$ является на самом деле матрицей рассеяния только одного типа частиц — антифермионов в массивной модели Тирринга. Нужно найти S/матрицу в виде матрицы 4×4 в базисе $(++,+-,-+,--)$ («$+$» отвечает фермионам, а «$-$» — антифермионам):

$$S(\theta)=\left(S^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(\theta)\right)=\begin{pmatrix}a(\theta)&&&\\&b(\theta)&c(\theta)&\\&c(\theta)&b(\theta)&\\&&&a(\theta)\end{pmatrix}. \tag{63}$$

Здесь $a(\theta)=e^{i\Psi(\theta)}$ отвечает рассеянию частиц одного сорта и может быть также записан в виде

$$a(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(\theta)R_n(i\pi-\theta)}{R_n(0)R_n(i\pi)},\qquad R_n(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n-1}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \tag{64}$$

Отношения коэффициентов $b(\theta)/a(\theta)$ и $c(\theta)/a(\theta)$ можно найти, решив уравнение Янга—Бакстера совместно с уравнением кроссинг-симметрии. Ответ имеет вид

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}, \qquad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}. \tag{65}$$

Формула (64) позволяет легко найти особенности функций $a(\theta)$, $b(\theta)$ и $c(\theta)$ на мнимой оси. Особенность в интервале $(0, i\pi)$ (т.е. на физическом листе) отвечает связанному состоянию, если знак вычета по $i\theta$ в ней отрицателен. При $0 < p < 1$ $(0 < \beta^2 < 1)$ такие полюсы есть у $b(\theta)$ и $c(\theta)$:

$$\theta_n = i\pi - i\pi p n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor. \tag{66}$$

Это отвечает нейтральным связанным состояниям (бризерам в модели синус-Гордона) с массами

$$M_n = 2m \sin\frac{\pi p n}{2} \tag{67}$$

Литература

[1] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987

[2] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992

Задачи

1. Получите (3) из (1). Выведите (14).
2. Получите (9).
3. Выведите (19).
4. Получите соотношения (48)–(49).
5*. Методом анзаца Бете найдите волновую функцию системы N тождественных нерелятивистских бозонов, взаимодействующих через потенциал

$$U(x) = c\delta(x).$$

Найдите систему уравнений Бете для них. Получите спектр гамильтониана системы в двух пределах: $c \to \infty$ и $c \to +0$.