

## Лекция 11

### Задача Кондо: вывод анзаца Бете

Начиная с 30-х годов наблюдался минимум в температурной зависимости сопротивления некоторых, казалось, чистых металлов (золота, серебра, меди) при низких температурах. Позднее оказалось, что аномалия связана с наличием малой концентрации примесных атомов переходных металлов (Mn, Fe, Cr, Co, Ce, Y). Джюн Кондо (1964) объяснил это явление рассеянием электронов на примесях, описываемом взаимодействием (*sd-модель*)

$$V = J \sum_i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (1)$$

В борновском приближении амплитуда рассеяния на одиночной примеси пропорциональна

$$J(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma}.$$

Так как  $J$  в несколько раз меньше  $\epsilon_F/n$  ( $n$  — концентрация электронов), эта амплитуда мала. Однако первая поправка к борновской амплитуде содержит логарифмические члены и сумма членов первого и второго порядка по  $J$  равна [1]

$$J(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma} \left( 1 + J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{\max(|\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F|, T)} \right), \quad (2)$$

где  $\rho(\epsilon)$  — плотность состояний. Эта поправка растет при  $T \rightarrow 0$  и при энергиях электрона, близких к  $\epsilon_F$ , и теория возмущений, в конце концов, становится непригодной. Характерная температура, при которой теория возмущений непригодна, называемая *температурой Кондо*, равна

$$T_K \sim \epsilon_F e^{-1/J\rho(\epsilon_F)}. \quad (3)$$

Эта температура является единственной характерной шкалой в эффекте Кондо.

Давайте приведем краткий вывод выражения (2). Двукратное рассеяние может происходить двумя способами. Во-первых, электрон в состоянии  $\mathbf{p}\sigma$  может перейти сначала в состояние  $\mathbf{p}''\sigma''$ , а затем в конечное состояние  $\mathbf{p}'\sigma'$ . Амплитуда этого процесса пропорциональна

$$J^2 \sum_{\sigma''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma''} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma'' \sigma} (1 - f(\mathbf{p}''))}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}},$$

где  $f(\mathbf{p})$  — функция распределения. Индексы, связанные с состоянием примеси, опущены. Во-вторых, сначала электрон из заполненного состояния  $\mathbf{p}''\sigma''$  переходит в состояние  $\mathbf{p}'\sigma'$ , а уже потом электрон из состояния  $\mathbf{p}\sigma$  переходит в состояние  $\mathbf{p}''\sigma''$ . Амплитуда этого перехода пропорциональна (с тем же коэффициентом пропорциональности)

$$-J^2 \sum_{\sigma''} \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma'' \sigma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma''} f(\mathbf{p}'')}{\epsilon_{\mathbf{p}''} - \epsilon_{\mathbf{p}'}}.$$

Знак минус связан с антисимметрией волновых функций электронов. Если бы спиновых множителей не было, вклады, содержащие  $f(\mathbf{p}'')$ , сократились бы, и логарифмически большого множителя не было бы. Но для спиновых множителей имеем:

$$\begin{aligned} \sigma^i S^i \sigma^j S^j &= S(S+1) - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}, \\ \sigma^i S^j \sigma^j S^i &= S(S+1) + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Мы получаем интеграл

$$J^2 \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \left( \frac{S(S+1) \delta_{\sigma' \sigma}}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}} + \frac{2f(\mathbf{p}'') - 1}{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}''}} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{S})_{\sigma' \sigma} \right).$$

Первый член не имеет особенности при  $\epsilon_{\mathbf{p}''} = \mu$  и дает конечный вклад вблизи поверхности Ферми. Второй член дает вклад, логарифмически расходящийся при нулевой температуре. Он и дает (2).

Удельное сопротивление в первом порядке равно

$$\rho = \rho_v + \rho_J^{(0)} \left( 1 + 2J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T} \right).$$

В случае ферромагнитного взаимодействия ( $J < 0$ ) вклад магнитных примесей падает при уменьшении температуры, в то время как в случае антиферромагнитного взаимодействия ( $J > 0$ ) — растет.

Оказывается, можно просуммировать логарифмические члены во всех порядках теории возмущений (Абрикосов, 1965; Сул, 1965):

$$\rho = \rho_v + \frac{\rho_J^{(0)}}{\left( 1 - J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T} \right)^2}.$$

Однако при  $T \sim T_K$  это выражение имеет особенность, так что ограничиться только логарифмическими поправками нельзя.

Были наблюдаемы также и аномалии в термодинамических характеристиках металлов с магнитными примесями, например, теплоемкости  $C$  и магнитной восприимчивости  $\chi$ . При больших температурах примесный вклад в эти величины с хорошей точностью описывается обратными степенями логарифма:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\ C_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\ \chi_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{T \log \frac{T}{T_K}}, \quad T \gg T_K. \end{aligned}$$

При  $T \rightarrow 0$  наблюдается другое поведение:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{imp}}(T) &= \rho_{\text{imp}}(0) \left( 1 - \kappa_R \left( \frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \\ C_{\text{imp}}(T) &= \gamma \frac{T}{T_K} \left( 1 - \kappa_C \left( \frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \\ \chi_{\text{imp}}(T) &= \chi_0 \left( 1 - \kappa_\chi \left( \frac{T}{T_K} \right)^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

где  $\kappa_R, \kappa_C, \kappa_\chi$  — величины порядка единицы.

Решение этой задачи при  $T \lesssim T_K$  кажется довольно безнадежным. Тем не менее, в некотором приближении эта задача сводится к задаче, точно решаемой с помощью анзаца Бете (Вигман 1980; Андрей, 1980). На эту тему есть хорошие обзоры [2, 3].

Запишем гамильтониан  $sd$ -модели в виде

$$H = H_0 + J\sigma(0)\mathbf{S}, \quad H_0 = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \epsilon_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\sigma}^+ c_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \sigma(0) = \sum_{\mathbf{p}'\sigma', \mathbf{p}\sigma} c_{\mathbf{p}'\sigma'}^+ \sigma_{\sigma'\sigma} c_{\mathbf{p}\sigma}. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что в системе имеется только одна примесь, изотропно взаимодействующая со свободными электронами. Кроме того, потенциальное рассеяние на примеси отсутствует. Будем также предполагать, что  $\epsilon_{\mathbf{p}}$  не зависит от направления импульса, а спектр вблизи ферми-сферы имеет вид

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_F + v_F(p - p_F). \quad (5)$$

Разложим теперь операторы рождения-уничтожения по сферическим функциям:

$$c_{\mathbf{p}\sigma}^+ = \sum_{lm} Y_{lm}(\mathbf{p}/p) c_{plm\sigma}^+. \quad (6)$$

В силу ортогональности сферических гармоник гамильтониан взаимодействия содержит только компоненты с  $l = m = 0$ :

$$H = \sum_{plm\sigma} \epsilon_p c_{plm\sigma}^+ c_{plm\sigma} + J \sum_{p'\sigma',p\sigma} c_{p'00\sigma'}^+ c_{p00\sigma} \sigma_{\sigma'\sigma} \mathbf{S}. \quad (7)$$

Электроны с  $l > 0$  не взаимодействуют с электронами с  $l = 0$  и друг с другом, и их вклад тривиален. Нетривиальная часть задачи состоит в исследовании вклада в гамильтониан электронов с  $l = 0$ . Будем отсчитывать энергию электронов от энергии Ферми, а квазиимпульс от  $p_F$ . Кроме того, положим для простоты  $v_F = 1$ . Получаем

$$H = \sum_{p\sigma} p c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + J \sum_{p'p\sigma'\sigma} c_{p'\sigma'}^+ c_{p\sigma} \sigma_{\sigma'\sigma} \mathbf{S}, \quad (8)$$

где  $c_{p\sigma} = c_{p_F+p,00\sigma}$ , а суммирование производится по всем вещественным  $p$ . Этот гамильтониан — одномерный. Более того, по существу, это гамильтониан, определенный на всей вещественной оси  $x$ , а не только на полуоси  $x < 0$ , поскольку отраженная и падающая волна не взаимодействуют друг с другом. При этом, однако, волны в системе могут двигаться только в одном (положительном) направлении. Циклическому граничному условию на интервале  $[-R, R]$  будет соответствовать условие отражения волны на сфере радиуса  $R$  в физическом пространстве. В координатном представлении гамильтониан имеет вид

$$H = \int dx (-ic^+(x) \partial_x c(x) + Jc^+(x) (\sigma \mathbf{S}) c(x) \delta(x)), \quad c(x) = \begin{pmatrix} c_+(x) \\ c_-(x) \end{pmatrix} = \sum_p e^{ipx} \begin{pmatrix} c_{p+} \\ c_{p-} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Гамильтониан  $H$  сохраняет число частиц в системе и суммарный спин. Состояние  $|\Psi_N\rangle$  системы с фиксированным числом частиц  $N$  можно представить в виде

$$|\Psi_N\rangle = \int dx_1 \dots dx_N \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s}(x_1, \dots, x_N) c_{\sigma_1}^+(x_1) \dots c_{\sigma_N}^+(x_N) (S^-)^{S-s} |\Omega\rangle, \quad (10)$$

где  $s = -S, -S+1, \dots, S$  — значение  $z$ -компоненты спина  $\mathbf{S}$ , а  $|\Omega\rangle$  — псевдовакуумное состояние, удовлетворяющее условиям

$$c_\sigma(x) |\Omega\rangle = S^+ |\Omega\rangle = 0. \quad (11)$$

Гамильтониан (9) действует на состояние  $|\Psi_N\rangle$  так:

$$\hat{H} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} = -i \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} + J \sum_{j=1}^N \sum_{\sigma'_j, s'} \delta(x_j) \sigma_{\sigma'_j \sigma_j} \mathbf{S}_{ss'} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma'_j \dots \sigma_N, s'} \quad (12)$$

Рассмотрим сначала одночастичное состояние. Мы будем искать решение в виде

$$\Psi_p^{\sigma, s}(x) = \begin{cases} A_p^{\sigma, s} e^{ipx}, & x < 0, \\ B_p^{\sigma, s} e^{ipx}, & x > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$A_p^{\sigma, s} = \sum_{\sigma', s'} R_{\sigma' s'}^{\sigma s} B^{\sigma', s'}, \quad R = e^{iJ\sigma \mathbf{S}}. \quad (14)$$

Теперь, казалось бы, можно элементарно построить волновую функцию произвольного состояния как антисимметризованное произведение волновых функций вида (13). Это, однако, не так. Дело в том, что в модели имеется дополнительная динамическая переменная  $s$ . Рассмотрим, например, область  $x_1, x_2 < 0$ . Предположим, что в этой области волновая функция непрерывна. Продолжим волновую функцию в область  $x_1 < 0 < x_2$ . Частица 2 рассеялась на примеси, поэтому волновая функция в этой области будет отличаться фактором рассеяния  $R_{20}$ . Продолжив в область  $0 < x_1 < x_2$ , мы получим фактор  $R_{20}R_{10}$ . Аналогично, продолжение сначала в область  $x_2 < 0 < x_1$ , а затем в область  $0 < x_2 < x_1$ , получим фактор  $R_{10}R_{20}$ . Но

$$R_{20}R_{10} \neq R_{10}R_{20}.$$

Отсюда следует, что на линии  $x_1 = x_2$  в области  $x_1, x_2 > 0$  волновая функция имеет разрыв.

Мы будем рассматривать решения, имеющие разрывы при  $x_1 = x_2$  как в области  $x_1, x_2 > 0$ , так и в области  $x_1, x_2 < 0$ . Посмотрим, какие разрывы совместны с уравнением Шредингера. Пусть, например,  $x_1, x_2 < 0$ . Согласно уравнению Шредингера, имеем

$$(\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\Psi^{\sigma_1\sigma_2,s}(x_1, x_2) = (\text{конечное при } x_1 = x_2 \text{ выражение}).$$

Это условие допускает произвольный разрыв волновой функции при  $x_1 = x_2$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots, \\ \partial_{x_2}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1, x_2 + 0) - \Psi(x_1, x_2 - 0)) + \dots \\ &= -\delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots \end{aligned}$$

Поэтому можно выбрать любой разрыв.

Мы будем искать решение уравнения Шредингера в виде анзаца Бете по переменным  $(\sigma_1, x_1), \dots, (\sigma_N, x_N), (s, 0)$ , причем коэффициенты матрица рассеяния для частицы  $j \neq 0$  с частицей 0 (примесью) будет даваться матрицей  $R$ , а рассеяние двух электронов  $j, j' \neq 0$  будет даваться некоторой матрицей  $S$ , которую мы найдем из условий ассоциативности (уравнения Янга–Бакстера):

$$S_{12}R_{10}R_{20} = R_{20}R_{10}S_{12}. \quad (15)$$

Очевидным решением этого уравнения является матрица перестановки

$$S_{12} = P_{12}, \quad P_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2} = \delta_{\sigma_2}^{\sigma'_1}\delta_{\sigma_1}^{\sigma'_2}. \quad (16)$$

Если обозначать частицы сплошными линиями, а примесь пунктиром, то графически это выглядит так:

$$R_{10} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \nearrow & \nearrow \\ & \text{---} & \text{---} \\ 1 & & 0 \end{array} \\ \end{array} = e^{J\sigma S}, \quad S_{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \nearrow & \nearrow \\ & \text{---} & \text{---} \\ 1 & & 2 \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 \end{array} \\ \end{array} = P_{12}.$$

В этих обозначениях доказательство (15) при  $S = P$  выглядит очевидно:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \text{---} & \\ \nearrow & & \nearrow \\ \text{---} & & \text{---} \\ 1 & & 2 \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \text{---} & \\ \text{---} & & \text{---} \\ & & \\ 1 & & 2 \end{array} \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & \text{---} & \\ \nearrow & & \nearrow \\ \text{---} & & \text{---} \\ 1 & & 2 \end{array} \\ \end{array}$$

Теперь наложим циклическое граничное условие

$$\Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \Psi(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N). \quad (17)$$

Введем оператор

$$T_j = P_{jj-1} \dots P_{j1} R_{j0} P_{jN} \dots P_{jj+1}. \quad (18)$$

Из циклического граничного условия (17) следует, что

$$e^{ip_j L} \Psi = T_j \Psi. \quad (19)$$

Это значит, что решение задачи сводится к совместной диагонализации операторов  $T_j$ . Легко видеть, что операторы  $T_j$  совпадают. Действительно, их можно записать в виде

$$T_j = T = \text{tr}_{\tilde{1}}(P_{\tilde{1}N} \dots P_{\tilde{1}1} R_{\tilde{1}0}), \quad (20)$$

где  $\tilde{1}$  — индекс вспомогательного пространства. Дополнительный оператор  $P_{\tilde{1}j}$  превращает произведение операторов в след.

Как диагонализировать трансфер-матрицу  $T$ ? Для этого надо повторно использовать анзац Бете (*вторичный анзац Бете*), причем удобнее воспользоваться алгебраическим анзацем. Но для этого необходимо построить семейство коммутирующих трансфер-матриц.

Давайте построим однопараметрические семейства  $R$ -матриц  $R(u)$ ,  $S(u)$ , удовлетворяющие следующим условиям.

1. Матрицы  $R(u)$  и  $S(u)$  удовлетворяют уравнению Янга—Бакстера:

$$S_{12}(u_1 - u_2)R_{10}(u_1 - u_0)R_{20}(u_2 - u_0) = R_{20}(u_2 - u_0)R_{10}(u_1 - u_0)S_{12}(u_1 - u_2), \quad (21a)$$

$$S_{12}(u_1 - u_2)S_{13}(u_1 - u_3)S_{23}(u_2 - u_3) = S_{23}(u_2 - u_3)S_{13}(u_1 - u_3)S_{12}(u_1 - u_2). \quad (21b)$$

2. В специальных точках матрицы  $S(u)$  и  $R(u)$  совпадают с  $S$  и  $R$ :

$$S(0) = P, \quad R(1) = R = e^{iJ\sigma S}. \quad (22)$$

3.  $R$ -матрицы удовлетворяют условию унитарности:

$$S_{12}(u)S_{21}(-u) = 1, \quad R_{10}(u)R_{10}(-u) = 1. \quad (23)$$

Решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_{12}(u) &= w_0(u) + w(u)\sigma_1\sigma_2, \\ R_{10}(u) &= w'_0(u) + 2w'(u)\sigma_1\sigma_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} a &= w_0 + w, & b &= w_0 - w, & c &= 2w, \\ a' &= w'_0 + w', & b' &= w'_0 - w', & c' &= 2w'. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом случае матрица  $S(u)$  имеет тот же вид, что и  $R$ -матрица XXZ-модели:

$$S(u) = \begin{pmatrix} a(u) & & & & \\ & b(u) & c(u) & & \\ & c(u) & b(u) & & \\ & & & & a(u) \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение Янга—Бакстера, находим

$$\begin{aligned} \frac{b(u)}{a(u)} &= \frac{b'(u)}{a'(u)} = \frac{u}{u + ig}, \\ \frac{c(u)}{a(u)} &= \frac{c'(u)}{a'(u)} = \frac{ig}{u + ig}, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е.  $S(u)$  совпадает (с точностью до изменения масштаба спектрального параметра и некоторого несложного несложного матричного преобразования, меняющего знаки) с  $R$ -матрицей для XXX-модели.

Условие унитарности требует чтобы

$$a(u)a(-u) = 1, \quad a'(u)a'(-u) = \frac{g^2 + u^2}{g^2(S + 1/2)^2 + u^2}. \quad (27)$$

Наконец условие (22) дает

$$a(0) = 1, \quad a'(1) = \frac{1 + ig}{2}(e^{iJS} + e^{-iJ(S+1)}) \quad (28)$$

и

$$g = \frac{1}{S + 1/2} \operatorname{tg} J(S + 1/2). \quad (29)$$

В остальном  $a(u)$ ,  $a'(u)$  — произвольные функции.

Далее, однопараметрическое семейство трансфер-матриц имеет вид

$$T(u) = \text{tr}_{\bar{1}} L_{\bar{1}}(u), \quad L_{\bar{1}}(u) = S_{\bar{1}N}(u) \dots S_{\bar{1}1}(u) R_{\bar{1}0}(u+1), \quad (30)$$

причем

$$T(0) = T, \quad [T(u), T(v)] = 0. \quad (31)$$

$L$ -операторы удовлетворяют соотношениям

$$S_{\bar{1}\bar{2}}(u_1 - u_2) L_{\bar{1}}(u_1) L_{\bar{2}}(u_2) = L_{\bar{2}}(u_2) L_{\bar{1}}(u_1) S_{\bar{1}\bar{2}}(u_1 - u_2). \quad (32)$$

Как и в случае XXZ-модели,  $L$ -оператор может быть представлен в виде

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

причем  $A(u), \dots, D(u)$  удовлетворяют соотношениям того же вида, что и в случае XXZ-модели, но с другими  $a(u), b(u), c(u)$ . Отсюда следует, что и решение будет примерно таким же.

Именно, псевдовакуум  $|\Omega_N\rangle$ , соответствующий всем спинам электронов, смотрящим вверх ( $\sigma_j = +$ ), и  $s = +S$ , определяется условием

$$C(u)|\Omega_N\rangle = 0. \quad (34)$$

Анзац Бете имеет вид

$$|u_1, \dots, u_n\rangle = B(u_1) \dots B(u_n)|\Omega_N\rangle, \quad S^z = N/2 + S - n, \quad (35)$$

причем

$$\begin{aligned} A(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_A(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_A(u) &= ((S+1/2)a'(u+1) - (S-1/2)b'(u+1))a^N(u), \\ D(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_D(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_D(u) &= ((S+1/2)b'(u+1) - (S-1/2)a'(u+1))b^N(u). \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения Бете записываются в стандартном виде

$$\frac{\Lambda_D(u_i)}{\Lambda_A(u_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a(u_j - u_i)b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i)a(u_i - u_j)}, \quad (37)$$

а собственные значения выражаются через корни уравнений Бете как

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_N) = \Lambda_A(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + \Lambda_D(u) \prod_{i=1}^n \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \quad (38)$$

Уравнение (19) принимает вид

$$e^{ip_j L} = \Lambda(0; u_1, \dots, u_N). \quad (39)$$

Подставляя в (37) и (38), (39) явные формулы для  $a(u)$  и  $b(u)$  и заменяя

$$u_j = g(v_j - i/2),$$

получим уравнения Бете в виде

$$\left( \frac{v_i + i/2}{v_i - i/2} \right)^N \frac{v_i + iS + g^{-1}}{v_i - iS + g^{-1}} = - \prod_{j=1}^n \frac{v_i - v_j + i}{v_i - v_j - i}, \quad (40)$$

и

$$e^{ip_j L} = e^{iJS} \prod_{i=1}^n \frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}. \quad (41)$$

Это сводит решение задачи Кондо к совместному решению уравнений (40) и (41).

## Литература

- [1] А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М., «Наука», 1987
- [2] А. М. Tsvelik and P. B. Wiegmann, *Exact results in the theory of magnetic alloys*, *Advances in Physics* **32** (1983) 453
- [3] P. B. Wiegmann, *An exact solution of the Kondo problem*, in: *Quantum Theory of Solids*, М., “Mir”, 1982

## Задачи

1. Выведите (14).
2. Покажите, что трансфер-матрицы  $T(u)$ , определенные (30), действительно образуют семейство коммутирующих трансфер-матриц.
3. Покажите, что матрицы  $S(u)$ ,  $R(u)$ , определенные в (24)—(26), удовлетворяют уравнениям Янга—Бакстера (21).
4. Выведите соотношения (27)—(29).
- 5\*. Постройте решения уравнений (21) с тригонометрической зависимостью от спектрального параметра  $u$ . Покажите, что такие решения отвечают задаче Кондо с анизотропным взаимодействием электронов с примесью.