Лекция 12
Задача Кондо: решение уравнений Бете

В прошлой лекции были получены уравнения Бете для sd-модели:

$$e^{ip_a L} = e^{iJS} \prod_{i=1}^{n} \frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}\right)^N \frac{v_i + iS + g^{-1}}{v_i - iS + g^{-1}} = -\prod_{j=1}^{n} \frac{v_i - v_j + i}{v_i - v_j - i}, \tag{2}$$

$$a = 1, \dots, N, \qquad i, j = 1, \dots, n,$$

причем

$$g = \frac{1}{S + 1/2} \operatorname{tg} J(S + 1/2). \tag{3}$$

Энергия системы равна[1]

$$E = \sum_{a=1}^{N} p_a. \tag{4}$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_a L = 2\pi I_a + JS - \sum_{i=1}^{n} (\pi + p(v_i)), \tag{5}$$

$$N p(v_i) + \delta_S(v_i) = 2\pi J_i + \sum_{j=1}^{n} \Phi(v_i - v_j), \tag{6}$$

$$p(v) = 2 \operatorname{arctg} 2v, \qquad \delta_S(v) = p((v + g^{-1})/2S), \qquad \Phi(v) = p(v/2), \tag{7}$$

$$I_a \in \mathbb{Z}, \qquad J_i \in \mathbb{Z} + \frac{N - n}{2}. \tag{8}$$

При этом все числа J_i должны быть попарно различны и все числа I_a тоже.

Полная энергия системы (4) разбивается на два вклада:

$$E = E_{\text{ch}} + E_{\text{sp}}, \tag{9}$$

$$E_{\text{ch}} = \frac{2\pi}{L} \sum_{a=1}^{N} I_a - \frac{\pi N^2}{2L}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{sp}} &= \frac{\pi N^2}{2L} + \frac{NJS}{L} - \frac{N}{L} \sum_{i=1}^{n} (\pi + p(v_i)) \\ &= -\frac{2\pi}{L} \sum_{i=1}^{n} J_i + \frac{\pi}{L} N \left(\frac{N}{2} - n\right) + \frac{NJS}{L} + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n} \delta_S(v_i), \end{aligned} \tag{11}$$

Слагаемое $-\pi N^2/2L$ добавлено к зарядовой энергии, чтобы при $J = 0$, $n = N/2$ отношение $E_{\text{sp}}/E_{\text{ch}}$ обращалось в ноль в термодинамическом пределе.

Найдем сначала основное состояние. Чтобы процедура минимизации энергии была корректно определена, следует ввести обрезание $-\epsilon_F$ для отрицательных импульсов. Именно, следует потребовать, чтобы в N-частичном основном состоянии все уровни отрицательного импульса (энергии) в интервале $[-\epsilon_F, 0]$ были бы заполнены. Поскольку плотность состояний по p_a равна $2\frac{L}{2\pi}$, имеем

$$N = \frac{L\epsilon_F}{\pi}. \tag{12}$$

[1] Мы приняли $v_F = 1$. Чтобы восстановить физические определения переменных, следует всюду сделать замену $E \to E/v_F$, $J \to J/v_F$.

Поэтому термодинамический предел определяется как

$$L \to \infty, \qquad N \to \infty, \qquad \frac{N}{L} = \frac{\epsilon_F}{\pi} = \text{const}\,,$$

Уровень Ферми ϵ_F следует рассматривать как параметр модели.

Числа I_a должны удовлетворять условию

$$I_a \gtrsim -\frac{\epsilon_F L}{2\pi} = -\frac{N}{2}.$$

В основном состоянии I_a пробегают значения примерно от $-N/2$ до $N/2$ и, следовательно, $\sum_a I_a \ll N^2$. Поэтому в термодинамическом пределе зарядовая энергия равна

$$E_{\text{ch}} = -\frac{\pi N^2}{2L} = -L\frac{{\epsilon_F}^2}{2\pi}. \tag{13}$$

Найдем допустимую область для чисел J_i. При $v_i \to +\infty$ из (6) имеем $J_i \to (N+2-n)/2$, а при $v_i \to -\infty$ имеем $J_i \to -(N+2-n)/2$. Поэтому

$$-\frac{N-n}{2} \le J_i \le \frac{N-n}{2}. \tag{14}$$

Чтобы найти минимум по спиновым состояниям электронов, предположим, что константа J достаточно мала, так что двумя последними членами в (11) можно пренебречь. Первый член в E_{sp} падает с ростом J_i, поэтому можно предположить, что основному состоянию соответствуют полное заполнение (полу)целых чисел достаточно большими значениями J_i. Следовательно, имеется некоторое значение $J_{\min}$, такое что в основном состоянии корням отвечают все

$$J_{\min} \le J_i \le \frac{N-n}{2}. \tag{15}$$

В переменных v_i это соответствует интервалу

$$-b \le v < +\infty \tag{16}$$

Полагая

$$J_i = \frac{N-n}{2} + 1 - i,$$

получим

$$J_{\min} = \frac{N-3n}{2} + 1, \tag{17}$$

а также

$$\sum_{i=1}^{n} J_i = n\left(\frac{N+1}{2} - n\right). \tag{18}$$

Отметим, что из (17) и (15) следует, что

$$n \le \frac{N+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad S^z \ge S - \frac{1}{2}, \tag{19}$$

где $S^z = N/2 + S - n$ — проекция полного спина системы.

Вычислим намагниченность и спиновую энергию системы в ведущем порядке по N^{-1}. В этом приближении вкладом примеси можно пренебречь, и мы получаем

$$M \equiv \frac{S^z}{N} \simeq \frac{1}{2} - \frac{n}{N}, \tag{20}$$

и

$$E_{\text{sp}} \approx 2\epsilon_F \frac{(S^z)^2}{N} = 2N\epsilon_F M^2. \tag{21}$$

Отсюда легко получить связь между S^z и магнитным полем H. Действительно, минимизацией функции $E_{\text{sp}}^{\text{el}}(H) = E_{\text{sp}}^{\text{el}} - HS^z$ по S^z находим

$$H = \frac{4\epsilon_F}{N} S^z. \tag{22}$$

Это просто вклад s-электронов в парамагнетизм Паули. Эта формула точна в нулевом порядке по $1/N$ и ее можно использовать в дальнейшем для вычисления связи между H и b. Чтобы получить (22) нам не потребовалось решать явно уравнения Бете (29). Однако решать их непременно придется, если мы захотим установить связь между b и n.

Вычисляя разность двух уравнений (6) с последовательными значениями i и деля на $v_{i-1} - v_i$, получим в термодинамическом пределе интегральное уравнение

$$\rho(v) = a_1(v) + \frac{1}{N} a_{2S}(v + g^{-1}) - \int_{-b}^{\infty} \frac{dv'}{2\pi}\, a_2(v - v')\rho(v'), \qquad -b \le v < \infty. \tag{23}$$

Здесь $\rho(v) = \frac{2\pi}{N}\frac{dJ}{dv}$, а

$$a_t(v) = \frac{4t}{4v^2 + t^2}. \tag{24}$$

При этом

$$n = N \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho(v). \tag{25}$$

Это значит, что суммарный спин равен

$$S^z = \frac{N}{2} + S - N \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho(v). \tag{26}$$

Спиновая энергия равна

$$E_{\text{sp}} = \frac{N\epsilon_F}{2} + \frac{\epsilon_F JS}{\pi} - \frac{N\epsilon_F}{\pi} \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho(v)(\pi + p(v)). \tag{27}$$

Разложим плотность по степеням $1/N$ до первого порядка

$$\rho(v) = \rho_0(v) + \frac{\rho_1(v)}{N}. \tag{28}$$

Уравнение для ρ_0

$$\rho_0(v) = a_1(v) - \int_{-b}^{\infty} \frac{dv'}{2\pi}\, a_2(v - v')\rho_0(v'), \qquad -b \le v < \infty, \tag{29}$$

совпадает с интегральным уравнением для XXX-модели. Вычитая (29) из (23), получим

$$\rho_1(v) = a_{2S}(v + g^{-1}) - \int_{-b}^{\infty} \frac{dv'}{2\pi}\, a_2(v - v')\rho_1(v'), \qquad -b \le v < \infty. \tag{30}$$

Намагниченность распадается на электронную и примесную части:

$$S^z = NM_{\text{el}} + M_{\text{im}}, \qquad M_{\text{el}} = \frac{1}{2} - \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho_0(v), \qquad M_{\text{im}} = S - \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho_1(v). \tag{31}$$

Спиновая энергия распадается на две части

$$E_{\text{sp}} = E_{\text{sp}}^{\text{el}} + E_{\text{im}}, \tag{32}$$

$$E_{\text{sp}}^{\text{el}} = \epsilon_F \left(\frac{N}{2} - n\right) - 2\epsilon_F \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, J_0(v)\rho_0(v), \tag{33}$$

$$E_{\text{im}} = \frac{\epsilon_F JS}{\pi} - \frac{\epsilon_F}{\pi} \int_{-b}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, \rho_1(v)(\pi + p(v)). \tag{34}$$

Электронную часть энергии нетрудно вычислить без решения интегрального уравнения и она совпадет с результатом (21). Чтобы учесть влияние примеси, придется решить интегральные уравнения.

Начнем со случая $b = \infty$. Интегральные уравнения (29) и (30) в этом случае можно решить методом Фурье. Легко проверить, что

$$\tilde{a}_t(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi}\, a_t(v) e^{ikv} = e^{-t|k|/2}. \tag{35}$$

Отсюда имеем

$$\tilde{\rho}_0(k) = e^{-|k|/2} - e^{-|k|}\tilde{\rho}_0(k), \qquad \tilde{\rho}_1(k) = e^{-S|k|-ik/g} - e^{-|k|}\tilde{\rho}_1(k).$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho}_0(k) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{k}{2}}, \qquad \tilde{\rho}_1(k) = \frac{e^{-(S-1/2)|k|-ik/g}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{k}{2}}. \tag{36}$$

Особый интерес представляет точка $k = 0$:

$$\tilde{\rho}_0(0) = \int \frac{dv}{2\pi}\, \rho_0(v) = \frac{1}{2}, \qquad \tilde{\rho}_1(0) = \int \frac{dv}{2\pi}\, \rho_1(v) = \frac{1}{2}. \tag{37}$$

Отсюда получаем

$$M_{\mathrm{el}} = 0, \tag{38a}$$

$$M_{\mathrm{im}} = S - 1/2. \tag{38b}$$

Первая формула (38a) означает, что случай $b = -\infty$ соответствует случаю нулевого электронного магнитного момента, т. е. нулевого внешнего магнитного поля. Более точно, это соответствует пределу $H \to 0^+$, поскольку конечным b соответствует положительное магнитное поле. Формула (38b) означает, что в слабом магнитном поле цепочка приобретает момент $S^z = S - 1/2$ в согласии с (19), то есть спин цепочки равен $S - 1/2$. Это значит, что спин примеси частично экранируется электронами и *основное состояние* $2S$*-кратно вырождено.*

Рассмотрим теперь случай

$$1 \ll b < \infty. \tag{39}$$

Условие $b \gg 1$ соответствует физически осмысленному режиму не слишком сильного магнитного поля $H \ll \epsilon_F$. Интегральные уравнения с одним конечным пределом решаются методом Винера—Хопфа. Изложим вкратце этот метод.

Пусть имеется уравнение

$$f(x) + \int_0^{\infty} \frac{dx'}{2\pi}\, K(x - x')f(x') = g(x), \qquad x > 0. \tag{40}$$

Можно произвольно продолжить данную функцию $g(x)$ в область отрицательных x и распространить уравнение на всю ось. При этом значения $f(x)$ при $x < 0$ несущественны, а решение $f(x)$ при $x > 0$ не зависит от этого продолжения.

Сделаем преобразование Фурье:

$$\tilde{f}_+(k) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2\pi}\, e^{ikx} f(x), \qquad \tilde{f}_-(k) = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2\pi}\, e^{ikx} f(x). \tag{41}$$

Функция $\tilde{f}_+(k)$ ($\tilde{f}_-(k)$) не имеет особенностей в верхней (нижней) полуплоскости. Здесь и ниже такое свойство будет предполагаться для всех функций с индексами $\pm$.

Уравнение (40) принимает вид

$$(1 + \tilde{K}(k))\tilde{f}_+(k) + \tilde{f}_-(k) = \tilde{g}(k). \tag{42}$$

Представим ядро $\tilde{K}(k)$ в виде

$$1 + \tilde{K}(k) = \frac{\tilde{K}_+(k)}{\tilde{K}_-(k)}. \tag{43}$$

Кроме того, положим

$$\tilde{K}_-(k)\tilde{g}(k) \equiv \tilde{q}(k) = \tilde{q}_+(k) + \tilde{q}_-(k). \tag{44}$$

Для достаточно «хорошей» функции $\tilde{q}(k)$ функции $\tilde{q}_\pm(k)$ явно находятся в виде

$$\tilde{q}_\pm(k) = \pm\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{2\pi i}\,\frac{\tilde{q}(k')}{k'-k\mp i0}. \tag{45}$$

Умножая (42) на $\tilde{K}_-(k)$, получаем

$$\tilde{K}_+(k)\tilde{f}_+(k) + \tilde{K}_-(k)\tilde{f}_-(k) = \tilde{q}_+(k) + \tilde{q}_-(k). \tag{46}$$

Перенесем все функции, не имеющие особенностей в верхней полуплоскости в левую часть:

$$\tilde{K}_+(k)\tilde{f}_+(k) - \tilde{q}_+(k) = \tilde{q}_-(k) - \tilde{K}_-(k)\tilde{f}_-(k).$$

Левая часть не имеет особенностей в верхней полуплоскости, а правая — в нижней. Таким образом, обе части этого уравнения не имеют особенностей. При некоторых дополнительных ограничениях на рост функций (которые надо проверять отдельно в каждом конкретном случае), отсюда следует, что

$$\tilde{K}_+(k)\tilde{f}_+(k) = \tilde{q}_+(k), \qquad \tilde{K}_-(k)\tilde{f}_-(k) = \tilde{q}_-(k). \tag{47}$$

Окончательно,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\tilde{q}_+(k)}{\tilde{K}_+(k)}e^{-ikx}, \qquad x>0. \tag{48}$$

Построение функций, аналитических в верхней или нижней полуплоскости составляет некоторое искусство, но для разумных функций, выражаемых через элементарные функции, это задача вполне решаемая (сводящаяся, более или менее, к подсчету полюсов и нулей).

В задаче, которую мы рассматриваем, уравнение лучше решать не совсем прямо. Это позволит упростить задачу при $b\gg 1$, что соответствует физическому условию $H\ll\epsilon_F$. Положим

$$f_i(x) = \rho_i(x-b).$$

Тогда

$$\tilde{K}(k) = e^{-|k|}, \qquad \tilde{g}_0(k) = e^{ikb-|k|/2}, \qquad \tilde{g}_1(k) = e^{ikb-ik/g-S|k|}. \tag{49}$$

Перепишем уравнение (42) в виде

$$\tilde{f}_{i+}(k) + \frac{\tilde{f}_{i-}(k)}{1+\tilde{K}(k)} = \frac{\tilde{g}_i(k)}{1+\tilde{K}(k)}, \tag{50}$$

а потом сделаем обратное преобразование Фурье:

$$f_i(x) + \int_{-\infty}^{0}\frac{dx'}{2\pi}\,R(x-x')f_i(x') = h_i(x), \tag{51}$$

где

$$\begin{gathered}R(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-ikx}\left(\frac{1}{1+\tilde{K}(k)}-1\right) = -\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{e^{-ikx}}{1+e^{|k|}},\\ h_0(x) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi(x-b)}, \qquad h_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-ik(x-b+g^{-1})}\frac{e^{-(2S-1)|k|/2}}{2\operatorname{ch}\frac{k}{2}}.\end{gathered} \tag{52}$$

При $b\gg 1$ для вычисления $f_0(x)$ при $x<0$ можно использовать приближение

$$h_0(x) \simeq 2\pi e^{\pi(x-b)}. \tag{53}$$

Значит, $\tilde{f}_{0-}(k)\sim e^{-\pi b}$. Так как $\tilde{K}(0)=\tilde{g}_i(0)=1$, имеем

$$2\tilde{f}_{i+}(0) + \tilde{f}_{i-}(0) = 1$$

Отсюда получаем

$$\frac{H}{4\epsilon_F} = M_{\rm el} = \frac12 - \int_{-b}^{\infty}\frac{dv}{2\pi}\,\rho_0(v) = \frac12 - \tilde{f}_{0+}(0) = \frac12\tilde{f}_{0-}(0) \sim e^{-\pi b}.$$

Точный ответ требует аккуратного решения уравнения методом Винера—Хопфа и дает

$$\frac{H}{2\epsilon_F} = e^{-\pi b}\left(\frac{2}{\pi e}\right)^{1/2}. \tag{54}$$

Получим еще один несложный результат при $S = 1/2$. Рассмотрим предел малых полей H, когда b велико, но все же не равно бесконечности. Тогда, помимо (53) мы имеем

$$h_1(x) \simeq 2\pi e^{\pi(x-b)+\pi/g}. \tag{55}$$

Отсюда немедленно находим

$$\frac{\tilde{f}_{1-}(k)}{\tilde{f}_{0-}(k)} = e^{\pi/g},$$

а значит для вклада примеси в магнитную восприимчивость имеем

$$\chi_{\rm im} = \frac{M_{\rm im}}{H} = \frac{e^{\pi/g}}{4\epsilon_F}, \quad \text{если } S = 1/2. \tag{56}$$

Я не буду приводить явных формул для решения уравнений (29), (30) методом Винера—Хопфа (подробно этот вывод изложен в [1]). Приведу лишь ответ. При конечном поле намагниченность дается формулой [2]

$$M_{\rm im}(H) = S - \frac{1}{2} + \frac{i}{4\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{H}{T_H}\right)^{-2i\omega}\frac{\Gamma(i\omega+1/2)}{\omega+i0}\left(\frac{-i\omega+0}{e}\right)^{-2iS\omega}\left(\frac{i\omega+0}{e}\right)^{i(2S-1)\omega}, \tag{57}$$

где переменная ω есть ни что иное как $k/2\pi$, а

$$T_H = \left(\frac{2\pi}{e}\right)^{1/2}\frac{2\epsilon_F}{\pi}e^{-\pi/g} \sim T_K. \tag{58}$$

Это выражение допускает разложения при $H \gg T_H$ (что можно сопоставить с рядами по теории возмущений) и при $H \ll T_H$ (что недостижимо по теории возмущений). В лидирующих асимптотиках имеем

$$M_{\rm im}(H) = S\left(1 - \frac{1}{\log(H/T_H)^2} - \frac{\log\log(H/T_H)^2}{\log^2(H/T_H)^2} + \cdots\right), \qquad H \gg T_H, \tag{59}$$

и

$$\begin{gathered} M_{\rm im}(H) = (S-1/2)\left(1 + \frac{1}{\log(T_H/H)^2} - \frac{\log\log(T_H/H)^2}{\log^2(T_H/H)^2} + \cdots\right), \qquad H \ll T_H, \quad S > 1/2; \\ M_{\rm im}(H) = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\frac{H}{T_H} + \cdots, \qquad H \ll T_H, \quad S = 1/2. \end{gathered} \tag{60}$$

Теперь кратко коснемся проблемы вычисления термодинамических характеристик при конечных температурах. Здесь есть несколько особенностей.

Прежде всего, в отличие от основного состояния, корни уравнений Бете v_i могут быть не только вещественными, но и комплексными. Именно, при $N \to \infty$ корни уравнений Бете образуют *p-струны* ($p = 1, 2, \ldots$):

$$v^p_{j,k} = v^p_j + \frac{i}{2}(p+1-2k) + O(e^{-\operatorname{const} N}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{61}$$

Вещественные корни соответствуют 1-струнам.

Можно показать, что если подставить струнное решение в уравнения Бете, то правая часть обратиться в нуль или бесконечность, в то время как левая будет стремиться к нулю или, соответственно, бесконечности при $N \to \infty$. Чтобы построить уравнения для вещественных частей v^p_j струн $v^p_{j,k}$, следует перемножить p уравнений Бете для всех значений k. После этого уравнения Бете примут вид

$$e^{ip_aL} = e^{iJS}\prod_{p=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n_p} e_p(v^p_j), \tag{62}$$

$$(e_p(v_j^p))^N e_{p,2S}(v_j^p+g^{-1}) = \prod_{p'=1}^{\infty}\prod_{j'=1}^{n_m} E_{pp'}(v_j^p - v_{j'}^{p'}), \tag{63}$$

где

$$e_p(v) = -e^{iP_p(v)} = \frac{v+ip/2}{v-ip/2}, \qquad e_{p,S}(v) = -e^{i\Delta_{p,S}(v)} = \prod_{k=1}^{p} \frac{v+\frac{i}{2}(p+1-2k)+iS}{v+\frac{i}{2}(p+1-2k)-iS},$$
$$E_{pp'}(v) = e^{i\Phi_{pp'}(v)} = e_{|p-p'|}(v)e^2_{|p-p'|+2}(v)\dots e^2_{p+p'-2}(v)e_{p+p'}(v). \tag{64}$$

Очевидно,

$$S^z = \frac{N}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} pn_p.$$

Как и раньше, уравнения следует прологарифмировать и перейти к непрерывному пределу. Однако при ненулевой температуре состояния заполняются неплотно, поэтому если в левой части интегральных уравнений возникают *плотности состояний* $\rho_p(v)$, то в правой (под интегралами) только *плотности частиц* $\rho_p^\bullet(v)$. Разность $\rho_p^\circ(v) = \rho_p(v) - \rho_p^\bullet(v)$ представляет собой *плотность дырок*. Плотности состояний однозначно определяются плотностями частиц:

$$\rho_p(v) = P_p(v) + \frac{1}{N}\Delta_{p,S}(v) + \sum_{p'} \int \frac{dv'}{2\pi}\, \Phi_{pp'}(v-v')\rho_{p'}^\bullet(v'). \tag{65}$$

Так как плотности не определяют состояний однозначно, с ними связана энтропия

$$S = \log \prod_{p,v} \frac{(N\rho_p(v)\frac{dv}{2\pi})!}{(N\rho_p^\bullet(v)\frac{dv}{2\pi})!(N\rho_p^\circ(v)\frac{dv}{2\pi})!}$$
$$= N\sum_{p=1}^{\infty} \int \frac{dv}{2\pi}\, (\rho_p(v)\log\rho_p(v) - \rho_p^\bullet(v)\log\rho_p^\bullet(v) - \rho_p^\circ(v)\log\rho_p^\circ(v)). \tag{66}$$

Правильная система уравнений на плотности частиц представляет собой условие минимума свободной энергии

$$F[\rho^\bullet] = E - TS - HS^z$$

Это дает систему нелинейных интегральных *уравнений Янга—Янга*:

$$\epsilon_p(v) + \sum_{p'} \int \frac{dv'}{2\pi} \Phi_{pp'}(v-v')\log(1+e^{-\epsilon_{p'}(v')}) = T^{-1}\left(P_p(v) + \frac{1}{N}\Delta_{p,S}(v) + pH\right), \tag{67}$$

где *псевдоэнергии* $\epsilon_p(v)$ определяются соотношением

$$\frac{\rho_p^\bullet(v)}{\rho_p(v)} = \frac{1}{e^{\epsilon_p(v)}+1}.$$

Эти уравнения можно решить аналитически в пределе низких или высоких температур или численно при конечных температурах. Термодинамические величины выражаются через псевдоэнергии.

Литература

[1] N. Andrei, K. Furuya, and J. H. Lowenstein, *Reviews of Modern Physics*, **55** (1983) 331.

[2] V. Fateev, P. Wiegmann, *Phys. Lett. A* **81** (1981) 179.

Задачи

1. Выведите формулу (21) из выражения (33).

2. Покажите, что $e^{-\pi|\omega|} = \left(\frac{i\omega+0}{e}\right)^{i\omega}\left(\frac{-i\omega+0}{e}\right)^{-i\omega}$. Затем решите уравнение (51) при $i=0$ в приближении (53) методом Винера—Хопфа и выведите (54). Убедитесь в сходимости интегралов.

3. Решите уравнение (30) методом Винера—Хопфа и выведите формулу (57) для примесной намагниченности. Убедитесь в сходимости интегралов.

4. Получите первые нетривиальные слагаемые в разложениях (59), (60).

5*. Получите уравнения Бете (62)—(64) для «струнных» решений.