

### Лекция 3

#### $O(3)$ -модель: генерация массы инстантонами

Рассмотрим  $O(3)$ -модель:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (1)$$

Найдем решения классических уравнений движения в евклидовом пространстве, такие что действие на этих решениях конечно. В квантовой механике эти решения должны отвечать туннельным процессам, амплитуда которых будет порядка  $e^{-S}$ , где  $S$  — значение действия для такого решения.

Из конечности действия следует, что решение должно стремиться к константе на бесконечности:

$$\mathbf{n}_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \mathbf{n}_0. \quad (2)$$

Таким образом, бесконечность можно рассматривать как точку на двумерной сфере  $S^2$ . Непрерывная функция  $\mathbf{n}(x)$ , удовлетворяющая условию (2), осуществляет непрерывное отображение

$$\mathbf{n} : S^2 \rightarrow S^2. \quad (3)$$

Такие отображения классифицируются *топологическим числом*  $q$ , таким что  $\mathbf{n}$  осуществляет  $|q|$ -листное накрытие сферы сферой. Если  $q > 0$ , отображение сохраняет ориентацию, а если  $q < 0$ , меняет ее. Представителем класса  $q$  может быть, например, отображение:

$$\theta' = \theta, \quad \varphi' = q\varphi, \quad (4)$$

где  $(\theta, \varphi)$  — полярные координаты на сфере.

Выразим топологическое число через поле  $\mathbf{n}$ . Будем считать его отображением сферы  $S^2$  на сферу  $S^2$ . Зададим на сфере  $S^2$  координаты  $x = (x^1, x^2)$ , а на сфере  $S^{2'}$  координаты  $x' = (x^{1'}, x^{2'})$  и метрику  $g'_{\mu\nu}$ . Метрика на сфере  $S^2$  несущественна. Пусть

$$S = \int_{S^{2'}} d^2x' \sqrt{g'}$$

— площадь сферы  $S^{2'}$ . Тогда топологическое число можно выразить через площадь, заматаемую отображением  $x'(x)$ , когда  $x$  заматает всю сферу  $S^2$ :

$$q = \frac{1}{S} \int_{x'(S^2)} d^2x' \sqrt{g'} = \frac{1}{S} \int_{S^2} d^2x \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \sqrt{g'}.$$

В сферических координатах

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\partial(\varphi', \theta')}{\partial(\varphi, \theta)} \sin \theta' = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{\partial(\varphi', \theta')}{\partial(x^1, x^2)} \sin \theta'.$$

Чтобы найти якобиан  $\partial(\varphi', \theta')/\partial(x^1, x^2) = (\partial\varphi'/\partial x^1)(\partial\theta'/\partial x^2) - (\partial\varphi'/\partial x^2)(\partial\theta'/\partial x^1)$ , перепишем сферические переменные через  $\mathbf{n}$  и  $x$ . Положим

$$\mathbf{n} = (\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'). \quad (5)$$

Можно проверить прямым вычислением, что

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu} = \frac{\partial(\varphi', \theta')}{\partial(x^1, x^2)} \sin \theta'. \quad (6)$$

Отсюда получаем

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}. \quad (7)$$

Моно вывести (7) еще проще. Вектор  $\partial_1 \mathbf{n} dx^1$  представляет собой маленький вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на  $(dx^1, 0)$  в  $x$ -пространстве. Аналогично  $\partial_2 \mathbf{n} dx^2$  представляет собой вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на  $(0, dx^2)$ . Оба вектора

перпендикулярны вектору  $\mathbf{n}$ . Тогда  $|\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} dx^1 dx^2| = \pm \mathbf{n} (\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n}) d^2 x$  есть площадь маленького параллелограмма на сфере. Знак «+» отвечает отображению, сохраняющему ориентацию, а знак «-» — отображению, меняющему ориентацию. Следовательно,

$$\int d^2 x \mathbf{n} (\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \int d^2 x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}$$

равно площади на сфере, заметаемой при интегрировании по всему  $x$ -пространству, равной  $4\pi q$ .

Из тождества

$$\int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} + \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2 = 2 \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 - 2 \int d^2 x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu} \quad (8)$$

получаем

$$S[\mathbf{n}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g} \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} + \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2. \quad (9)$$

Заменой  $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ ,  $q \rightarrow -q$  получим

$$S[\mathbf{n}] = -\frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g} \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} - \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2. \quad (10)$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$S[\mathbf{n}] \geq \frac{4\pi|q|}{g}. \quad (11)$$

Неравенство (11) превращается в равенство на решениях уравнения первого порядка (*уравнения самодуальности*)

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -\epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n} \quad (q > 0), \quad (12)$$

$$\partial_\mu \mathbf{n} = \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n} \quad (q < 0). \quad (13)$$

Решения этих уравнений минимизируют действие, поэтому составляют подкласс решений уравнений движения. Чтобы их явно решить, используем стереографическую проекцию на плоскость. При этом удобно использовать комплексную координату  $w$  на этой плоскости:

$$n_1 + in_2 = \frac{2w}{1 + |w|^2}, \quad n_3 = \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), (13), получим

$$\bar{\partial} w = 0 \quad (q > 0), \quad (15)$$

$$\partial w = 0 \quad (q < 0). \quad (16)$$

Рассмотрим случай  $q > 0$ . Функция  $w(z)$  должна быть мероморфной функцией на сфере, то есть единственными особенностями этой функции, включая особенность в бесконечности, могут быть только полюса. Количество нулей и полюсов такой функции должно быть конечно. Нулям отвечает точка  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , а полюсам  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ . Самое общее такое решение (15) имеет вид

$$w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z) = c \prod_{j=1}^q \frac{z - a_j}{z - b_j}, \quad (17)$$

где  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $a_j, b_j \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Легко найти топологическое число, соответствующее этому решению. Пусть  $w_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Тогда число решений уравнения  $w(z) = w_0$  с учетом кратностей не зависит от  $w_0$ . Положим  $w_0$  равным, например, бесконечности. Тогда очевидно, что число решений этого уравнения равно  $q$ . Это значит, что  $w(z)$  осуществляет  $q$ -листное накрытие и топологическое число равно  $q$ .

Аналогично, в случае топологического числа  $q < 0$  получаем:

$$w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; \bar{z}) = c \prod_{j=1}^{-q} \frac{\bar{z} - a_j}{\bar{z} - b_j}, \quad (18)$$

Решения (17) и (18) называются *(много)инстантонными решениями*.

Попробуем использовать инстантонные решения, чтобы приближенно вычислить функциональный интеграл для квантовой  $O(3)$ -модели. Мы будем интегрировать по многоинстантонным решениям и малым флуктуациям вблизи них.

Перепишем (9) и (10) через поле  $w(z, \bar{z})$ :

$$S[w, \bar{w}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \frac{\bar{\partial}w\partial\bar{w}}{(1+|w|^2)^2} \quad (19)$$

$$= -\frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \frac{\partial w\bar{\partial}\bar{w}}{(1+|w|^2)^2}. \quad (20)$$

Рассмотрим случай  $q \geq 0$ . Пусть

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = S[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + \varphi(z, \bar{z})), w^*(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + \bar{\varphi}(z, \bar{z}))]. \quad (21)$$

Легко видеть, что

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi\partial\bar{\varphi}. \quad (22)$$

Соответственно,  $q$ -инстантонный вклад в статсумму имеет вид

$$Z_q = \frac{e^{-4\pi q/g}}{(q!)^2} \int d\mu(\vec{a}, \vec{b}) Z[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)], \quad Z[w] = \int D\varphi D\bar{\varphi} \exp\left(-\frac{8}{g} \int d^2x \frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi\partial\bar{\varphi}\right). \quad (23)$$

Здесь  $\mu(\vec{a}, \vec{b})$  — мера интегрирования по  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , инвариантная относительно сдвигов, растяжений и инверсии. Такую меру легко найти:

$$\mu(\vec{a}, \vec{b}, c) = k^q f(c) d^2c \prod_{j=1}^q d^2a_j d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^4 |b_i - b_j|^4 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-4}. \quad (24)$$

Функцию  $f(c)$  и коэффициент  $k$  можно найти только прямым вычислением детерминанта. В частности,  $f(c) = (1 + |c|^2)^{-2}$ , так что интеграл по  $c$  дает просто конечный множитель.

Легко видеть, что интеграл  $Z[w]$  не зависит от константы связи  $g$ . Из-за вклада ультрафиолетового и инфракрасного обрезания этот интеграл не будет буквально инвариантен относительно конформных преобразований параметров  $a_j, b_j$ . Он будет преобразовываться по правилу:

$$Z[w] \rightarrow Z[w'] \prod_{j=1}^q \left| \frac{da'_j}{da_j} \right|^{2\alpha} \left| \frac{db'_j}{db_j} \right|^{2\alpha}$$

с некоторым  $\alpha$ . Отсюда следует, что

$$Z[w] \sim \prod_{i<j} |a_i - a_j|^{-4\alpha} |b_i - b_j|^{-4\alpha} \prod_{i \neq j} |a_i - b_j|^{4\alpha}.$$

Некоторыми достаточно сложными вычислениями можно показать, что  $\alpha = 1/2$ . Если поверить в это, то получится

$$Z_q \sim \frac{\lambda^q}{(q!)^2} \int \prod_{j=1}^q d^2a_j d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^2 |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2}, \quad (25)$$

где  $\lambda \sim e^{-4\pi/g}$ .

Легко проверить, что это плазма, описываемая моделью синус-Гордона с  $\beta^2 = 1$  или моделью Тирринга с  $g = 0$ , то есть свободным массивным фермионом. Это значит, что инстантоны в модели генерируют массу.

Дефект приведенных рассуждений состоит в том, что мы учитывали только инстантонные решения. Мы можем, конечно, учесть и антиинстантонные решения. Однако реалистичное описание

модели может быть только при использовании флуктуаций вблизи функций, содержащих как инстантоны, так и антиинстантоны. К сожалению, такое описание пока отсутствует.

Имеется одно важное следствие существования топологического числа (7). Дело в том, что действие  $O(3)$ -модели можно модифицировать:

$$S_\theta(\mathbf{n}) = S(\mathbf{n}) + i\theta q = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + i \frac{\theta}{8\pi} \int d^2x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}. \quad (26)$$

Последний член называют  $\theta$ -членом. Физические свойства модели существенно зависят от  $\theta$ , так как статсумма (и производящий функционал) записываются в виде

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\theta q} Z_q.$$

В частности, известно, что при  $\theta = \pi$   $O(3)$ -модель безмассова, но не масштабно-инвариантна.

## Литература

1. А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика*, Письма в ЖЭТФ 22 (1975) 503–506.

2. V. A. Fateev, I. V. Frolov, A. S. Shvarts, *Quantum Fluctuations of Instantons in the Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. B154 (1979) 1–20.

[Обе статьи имеются в сборнике "Инстантоны, струны и конформная теория поля под ред. А. А. Белавина, 2002].

## Задачи

1. С помощью подстановки (5) получите (6).
2. Выведите тождество (8).
3. Получите (15), (16) из (12), (13).