

## Лекция 1

### Геометрия и физика специальной теории относительности

Специальная теория относительности основана на геометрии пространства-времени Минковского  $M^4 \cong \mathbb{R}^{1,3}$  или, более общо,  $M^d \cong \mathbb{R}^{1,d-1}$ .<sup>1</sup> Это пространство-время представляет собой аффинное пространство с заданной на нем плоской метрикой сигнатуры  $(1, d - 1)$ . Чтобы разобраться в этом, начнем с векторных (линейных) пространств.

Пусть  $V$  —  $d$ -мерное линейное пространство. С каждым таким пространством связано  $d$ -мерное *двойственное пространство*  $V^*$ , то есть пространство линейных функций (форм) на пространстве  $V$ . Предположим, что на пространстве  $V$  задана невырожденная симметричная билинейная форма  $g : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$  (или, что то же самое,  $g \in V^* \otimes V^*$ ), то есть такое билинейное симметричное отображение  $g(u, v) = g(v, u)$  ( $u, v \in V$ ), что для любого вектора  $u \neq 0$  существует хотя бы один вектор  $v$ , такой что  $g(u, v) \neq 0$ . Форму  $g$  можно также понимать как отображение  $\bar{g} : V \rightarrow V^*$ , сопоставляющее каждому вектору  $u \in V$  линейную форму  $g(u, \cdot) \in V^*$ . Невырожденность формы  $g$  означает существование обратного отображения  $\bar{g}^* : V^* \rightarrow V$ , которое по тому же принципу задает билинейную форму  $g^* : V^* \otimes V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть бивектор  $g^* \in V \otimes V$ .

Изучим вопрос о знакоопределенности формы  $g$ . Предположим, что  $g(u, u) \geq 0$  для любого  $u \neq 0$ . Тогда из невырожденности формы  $g$  следует, что  $g(u, u) > 0$ . Действительно, пусть есть такой ненулевой вектор  $u$ , что  $g(u, u) = 0$ . В силу невырожденности  $g$  существует такой вектор  $v$ , что  $g(u, v) \neq 0$  и, по условию,  $g(v, v) \geq 0$ . Тогда для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  имеем

$$0 \leq g(u + \alpha v, u + \alpha v) = 2\alpha g(u, v) + \alpha^2 g(v, v).$$

Очевидно, это неравенство не может быть соблюдено в некоторой окрестности точки  $\alpha = 0$  в силу того, что  $g(u, v) \neq 0$ . Таким образом, любая неотрицательная форма положительно определена.

Но это значит, что если существует «нулевой» вектор  $u$ , то есть вектор, такой что  $g(u, u) = 0$ , то существуют и такие два вектора  $v_+, v_-$ , что  $g(v_+, v_+) > 0$ ,  $g(v_-, v_-) < 0$  и при этом  $g(u, v_{\pm}) \neq 0$ . Более того, любой «нулевой» вектор  $u$  может быть представлен как линейная комбинация двух таких векторов с разными знаками формы. Пусть имеется вектор  $v_+$ , такой что  $g(v_+, v_+) = 1$ ,  $g(u, v_+) \neq 0$ . Тогда для вектора  $v_- = u - g(u, v_+)v_+$  имеем  $g(v_-, v_-) = -(g(u, v_+))^2$ . Ни множество векторов  $\mathcal{C}_+$  с  $g(u, u) > 0$ , ни множество векторов  $\mathcal{C}_-$  с  $g(u, u) < 0$ , ни множество векторов  $\mathcal{J}$  с  $g(u, u) = 0$  не образуют векторных пространств. Но тот факт, что «нулевые» векторы раскладываются в пару «положительных» и «отрицательных» векторов, позволяет предположить, что и само векторное пространство  $V$  распадается в сумму  $V = V_+ \oplus V_-$  пространств с положительно- и отрицательно-определенной формой  $g$ .

Чтобы в этом убедиться, построим базис в  $V_-$ . Пусть  $v_1$  — вектор с  $g(v_1, v_1) < 0$ . Тогда множество ортогональных ему векторов, то есть векторов  $u$ , таких что  $g(v_1, u) = 0$  образует линейное пространство  $V^{(1)}$ . В пространстве  $V^{(1)}$  форма  $g$  может быть положительно определена. Тогда  $V_+ = V^{(1)}$ , а  $V_- = \text{span}(v_1)$ . Если же нет, выберем вектор  $v_2 \in V^{(1)}$  такой, что  $g(v_2, v_2) < 0$  и определяем пространство  $V^{(2)}$  как подпространство ортогональных ему векторов в  $V^{(1)}$ . Продолжаем процедуру, пока на пространстве  $V^{(d-)}$  форма  $g$  не будет положительно определена. Тогда  $V_+ = V^{(d-)}$  размерности  $d_+ = d - d_-$ , а  $V_- = \text{span}(v_1, \dots, v_{d-})$ . Заодно мы получили ортогональный базис в  $V_-$ , который легко превратить в ортонормированный, если выбирать векторы  $v_i$  условием  $g(v_i, v_i) = -1$ . Мы будем говорить, что форма  $g$  имеет *сигнатуру*  $(d_+, d_-)$ . В теории относительности нас будут интересовать формы сигнатуры  $(1, 3)$ .<sup>2</sup> Одномерное пространство  $V^+$  отвечает времени, а трехмерное пространство  $V^-$  — физическому пространству. Векторы из  $\mathcal{C}^+$  (с положительной нормой) называют *временеподобными*, векторы из  $\mathcal{C}^-$  (с отрицательной нормой) — *пространственноподобными*. Векторы из  $\mathcal{J}$  (с нулевой нормой) называют *светоподобными* или *изотропными*. Само множество  $\mathcal{J}$  называют *световым конусом*, причем  $\mathcal{C}^+$  считается внутренностью светового конуса, а  $\mathcal{C}^-$  — его внешней областью. В теории

<sup>1</sup>Нас, конечно, будет интересовать прежде всего случай  $d = 4$ , однако там, где это не будет заметно усложнять рассуждения, мы будем рассматривать общие  $d > 1$ .

<sup>2</sup>Можно было бы рассматривать формы сигнатуры  $(3, 1)$ . В некоторых отношениях такой выбор удобнее, а в чем-то менее удобен, так что это дело вкуса.

относительности времениподобный базисный вектор принято обозначать  $e_0$ , а три пространственноподобных —  $e_1, e_2, e_3$ . Во всех векторных и матричных формулах будем принимать, что значения индексов расположены в порядке 0, 1, 2, 3.

Вернемся к общему случаю. Рассмотрим произвольный базис  $e_\mu, \mu = 1, \dots, d$  в пространстве  $V$ . Любой вектор  $u \in V$  записывается в виде  $u = u^\mu e_\mu$ , где мы предполагаем суммирование по повторяющемуся индексу. Тогда числа  $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$  образуют симметричную матрицу  $G = (g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^d$ . При этом, очевидно,  $g(u, v) = g(u^\mu e_\mu, v^\nu e_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$ . Замена базиса  $e_\mu = V_\mu^\nu e'_\nu$  отвечает преобразованию  $g_{\mu\nu} = V_\mu^\rho V_\nu^\sigma g'_{\rho\sigma}$  или  $G = V G' V^T$ . Тот факт, что пространство  $V$  распадается в сумму  $V_+ \oplus V_-$  означает, что таким преобразованием мы можем привести матрицу  $G$  к виду

$$G = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{d_+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{d_-}) \equiv (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^d \equiv \mathbb{H}^{(d_+, d_-)}. \quad (1.1)$$

Матрицы  $V$ , сохраняющие этот вид формы  $G$ , то есть

$$\mathbb{H}^{(d_+, d_-)} = V \mathbb{H}^{(d_+, d_-)} V^T,$$

образуют группу псевдоортогональных матриц  $O(d_+, d_-)$ . Те, которые при этом имеют положительный (равный единице) определитель, образуют группу  $SO(d_+, d_-)$ . Группа  $SO(1, 3)$  (и ее обобщение  $SO(1, d-1)$  в гипотетическом пространстве-времени размерности  $d$ ) называется *группой Лоренца*. В теории относительности будем писать  $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$ .

Пусть  $\omega \in V^*$ , то есть  $\omega$  — линейная форма на  $V$ . Тогда мы можем ввести компоненты  $\omega_\mu = \omega(e_\mu)$ . Это значит, что мы можем записать форму в виде  $\omega = \omega_\mu e^\mu$ , где  $e^\mu$  — базисные формы, определяемые соотношением

$$e^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (1.2)$$

Бивектор  $g^*$ , очевидно, можно записать в виде  $g^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$ , то есть  $g^*(\omega, \sigma) = g^{\mu\nu} \omega(e_\mu) \sigma(e_\nu) = g^{\mu\nu} \omega_\mu \sigma_\nu$ . Коэффициенты  $g^{\mu\nu}$  образуют матрицу  $G^{-1}$ :

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.3)$$

Использование индексных обозначений компактно, но имеет один недостаток: мы заменяем реальные инвариантные объекты (тензоры) их компонентами, зависящими от выбора базиса. В то же время безындексная запись математически корректна, обща, но громоздка. Поэтому мы часто будем пользоваться *методом формальных индексов*. Рассмотрим тензорное произведение  $V \otimes V \otimes V \otimes \dots$  и перенумеруем входящие в него пространства натуральными числами по порядку. Будем соответствующим числом жирным шрифтом указывать, в каком пространстве расположен или на какое пространство действует объект. Например,  $u^k$  — это вектор  $u$ , расположенный в  $k$ -й тензорной компоненте, а  $\omega_k$  — 1-форма, действующая на  $k$ -ю компоненту. Тогда  $\omega_1 u^1 = u^1 \omega_1 = \omega u = \omega(u)$ . Здесь от формального индекса, вроде бы, нет никакой пользы. Но вот  $g_{12} u^1 v^2 = g(u, v)$  и  $g_{12} u^1 = (\bar{g}(u))_2$  записать с формальными индексами уже удобней. И все четыре объекта  $g, \bar{g}, g^*, \bar{g}^*$  можно теперь обозначать одной буквой  $g$ . Действительно,

$$g^{13} g_{32} = \delta_2^1 \quad (1.4)$$

формально похоже на (1.3), но выражает инвариантный факт, что  $\bar{g}^* = \bar{g}^{-1}$ . На общих многообразиях запись с формальными индексами позволит упростить вывод многих формул по сравнению с выводом в компонентах.

Нам часто удобно будет отождествлять вектор  $u \in V$  с формой  $\bar{g}(u) \in V^*$  и, наоборот, форму  $\omega \in V^*$  с вектором  $\bar{g}^*(\omega) \in V$ . Чтобы подчеркнуть разницу мы будем писать верхний формальный индекс у объекта из  $V$  и нижний у объекта из  $V^*$ . Если не будет необходимости указывать конкретную «цифру», но нужно будет подчеркнуть, какому пространству принадлежит объект, мы будем вместо индекса ставить жирную точку, например,  $u^\bullet = u$ ,  $u_\bullet = \bar{g}(u)$  (то есть  $u_1 = g_{12} u^2$ ).

Теперь перейдем к аффинным пространствам. Аффинное пространство  $\mathcal{A}(V)$  отличается от линейного  $V$  только отсутствием выделенного нуля. То есть это множество точек, такое что каждой паре точек  $A, B$  отвечает вектор в линейном пространстве  $V$ , обозначаемый  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ , а для любых трех

точек  $A, B, C$  выполняется правило треугольника  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ . Форма  $g$  определяет метрику на аффинном пространстве, то есть расстояние  $|AB|$  между точками  $A$  и  $B$  задается формулой

$$|AB|^2 = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}).$$

Понятно, что определенное таким образом расстояние может быть как вещественным, так и мнимым. В специальной теории относительности пространство-время является аффинным пространством  $M^4 = \mathcal{A}(V)$ , где  $V$  — векторное пространство, на котором задана метрика сигнатурой  $(1, 3)$ . Точки в этом пространстве называются *событиями*. Расстояние  $|AB|$  между двумя событиями называется *собственным временем*, отвечающим отрезку  $[AB]$ .

В аффинном пространстве точки можно задать координатами. Если мы выделим «начальную» точку  $O$  и базис  $\{e_\mu\}$  в пространстве  $V$ , то координаты  $x_A^\mu$  точки  $A$  задаются уравнением

$$\overrightarrow{OA} = x_A^\mu e_\mu.$$

С одной стороны, это отождествляет аффинное пространство с пространством  $\mathbb{R}^d$ , которое, в случае метрики  $g = \eta_{\mu\nu} e^\mu e^\nu$  обозначается как  $\mathbb{R}^{d+, d-}$ . С другой стороны, это вводит на аффинном пространстве структуру многообразия. Понятно, что аффинное пространство покрывается одной картой, но специальная теория относительности имеет смысл на многообразиях с разной топологией. Главное, чтобы матрицы перехода между картами с (псевдо)декартовыми координатами задавались бы псевдоортогональными матрицами. Обозначения и понятия, связанные со структурой многообразия мы разберем в следующей лекции, посвященной более общей геометрии.

В теории относительности мы иногда будем пользоваться обозначениями  $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ . Скорость света мы будем всюду принимать равной единице. Соответственно, квадрат расстояния (собственного времени) между событиями в специальной теории относительности равен

$$|AB|^2 = (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2. \quad (1.5)$$

Для бесконечно-малых расстояний собственное время обозначается  $ds$  и равно

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.6)$$

Обсудим группу Лоренца  $SO(1, 3)$  и ее физическую интерпретацию. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$  и связанные с ними системы пространственных координат  $x^i$  и  $x'^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Выберем эти системы координат специальным образом. Во-первых, примем, что оси времени пересекаются в точке  $t = t' = 0$ . Эти оси лежат в одной двумерной плоскости. Векторы  $e_0, e'_0$ , очевидно, направлены вдоль этих осей. Затем выберем базисные векторы  $e_1, e'_1$  в этой плоскости ортогонально  $e_0, e'_0$  соответственно и по одну сторону от осей времени. В подпространстве ортогональном плоскости временных осей выберем  $e_2 = e'_2, e_3 = e'_3$ . Положим, что система  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $v$ , то есть прямая вдоль вектора  $e'_0$  задается уравнениями  $x = vt, y = z = 0$ . Тогда преобразование Лоренца

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.7)$$

принадлежит группе Лоренца. Параметр  $v$  есть скорость системы  $K'$  в системе отсчета  $K$ . Действительно, прямые вдоль вектора  $e'_0$  задаются уравнениями  $x = vt + \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$ . Три вращения и преобразование Лоренца порождают всю группу Лоренца  $SO(1, 3)$ .<sup>3</sup> Преобразования Лоренца, также как и все остальные факты релятивистской кинематики, полностью выводятся из следующего основного постулата: *квадрат собственного времени  $|AB|^2$  для двух событий  $A$  и  $B$ , определенный формулой (1.5), не зависит от системы отсчета.*

<sup>3</sup>Это означает, что любой элемент группы Лоренца может быть представлен в виде произведения некоторого количества этих специальных элементов. Можно показать, что любой элемент можно представить как произведение шести таких элементов (аналогично трем поворотам Эйлера в трехмерном пространстве) и поэтому группа Лоренца четырехмерного пространства является шестимерной группой Ли.

Полезно ввести *быстроту*  $\theta$  уравнением  $v = \text{th } \theta$ . Тогда преобразование Лоренца принимает вид

$$t' = t \text{ch } \theta - x \text{sh } \theta, \quad x' = -t \text{sh } \theta + x \text{ch } \theta, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (1.8)$$

напоминающий вращение в евклидовом пространстве. Легко проверить, что оно прямо переходит во вращение евклидова пространства после *викова поворота*  $t = -i\tau$  времени в комплексной плоскости. Тогда угол поворота совпадает с  $-i\theta$ .

Рассмотрим теперь динамику специальной теории относительности. Нас будет интересовать поведение частиц в геометрии Минковского.

**1. Свободная частица.** Движение частицы описывается *мировой линией*, то есть линией  $x^\bullet(t) = (t, \mathbf{r}(t)) = te_0 + x^i(t)e_i$ , где  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x^i(t)e_i$  — закон движения частицы. Свободная частица согласно первому закону Ньютона движется равномерно и прямолинейно. То есть, если имеются два события  $A$  и  $B$ , то мировая линия свободной частицы, в момент  $t_A$  находящейся в точке  $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ , а в момент  $t_B$  — в точке  $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ , будет отрезком  $[AB]$ . Такая линия минимизирует действие

$$S[x] = -m \int_A^B ds = -m \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}. \quad (1.9)$$

В нерелятивистском пределе  $v \ll 1$  действие сводится к интегралу от кинетической энергии

$$S[x] \simeq -m \int_{t_A}^{t_B} dt \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \text{const} + \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{m\mathbf{v}^2}{2}. \quad (1.10)$$

Уравнение движения, отвечающее действию (1.9), очевидно, имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}} = 0. \quad (1.11)$$

Тем не менее, полезно найти импульсы и гамильтониан системы:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \quad H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{v}\mathbf{p} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (1.12)$$

Таким образом, в гамильтоновой форме уравнение движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}} = 0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \quad E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (1.13)$$

Энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$  образуют 4-импульс<sup>4</sup>

$$\mathbf{p}^\bullet = (E, \mathbf{p}) \equiv Ee_0 + p^i e_i = m\mathbf{u}^\bullet, \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{u}$  — 4-скорость

$$\mathbf{u}^\bullet = \frac{d\mathbf{x}^\bullet}{ds} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \right). \quad (1.15)$$

Величины

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad (1.16)$$

тоже сохраняются и образуют пространственно-временной момент импульса. Его чисто пространственные компоненты  $J^{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) совпадают с компонентами трехмерного момента импульса:

$$J^{ij} = \epsilon^{ijk} J_k, \quad (1.17)$$

где  $\epsilon^{ijk}$  — полностью антисимметричный символ, такой что  $\epsilon^{123} = 1$ . Временные компоненты  $J^{0i}$  не порождают независимых сохраняющихся величин.

<sup>4</sup>Греческие буквы из середины алфавита  $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \dots$  будут всюду использоваться для пространственно-временных индексов, пробегающих значения  $0, 1, \dots, d-1$ . Латинские буквы из середины алфавита  $i, j, k, l, \dots$  будут использоваться для пространственных индексов и пробегать значения  $1, \dots, d-1$ .

**2. Частица в электромагнитном поле.** Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом  $A_\bullet = (\varphi, -\mathbf{A}) \equiv \varphi e^0 - A^i e^i$  или, более точно, 1-формой  $A(x) = A_\mu(x)e^\mu = A_\mu(x) dx^\mu$ . Движение частицы заряда  $e$  описывается действием

$$S[x] = \int_A^B (-m ds - eA) = \int_A^B (-m ds - eA_\mu dx^\mu) = \int_{t_A}^{t_B} dt \left( -m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} + e\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \right). \quad (1.18)$$

Уравнение движения можно написать в гамильтоновой форме. Имеем для импульсов

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad (1.19)$$

и для гамильтониана

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{v}\mathbf{P} - L = \sqrt{m^2 + (\mathbf{P} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2} + e\varphi(\mathbf{r}). \quad (1.20)$$

Уравнение движения

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad (1.21)$$

нетрудно привести к стандартному виду

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.22)$$

В более инвариантном виде уравнение движения можно записать как

$$m \frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (1.23)$$

где тензор электромагнитного поля определяется как

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA, \quad (1.24)$$

или

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.25)$$

Этот тензор выражается через компоненты напряженности поля

$$F_{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Обратите внимание, что в левой части (1.23) дифференцирование выполняется по лоренц-инвариантному собственному времени.

### Задачи

**1.** Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия (1.9), то есть максимум собственного времени  $s = \int_A^B ds$ . Приведите примеры мировых линий, отвечающих *наименьшему* собственному времени. Чему равно это время?

**2.** В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu).$$

Покажите, что сохранение компонент  $J^{0i}$  эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_s E_s \mathbf{r}_s}{\sum_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью.

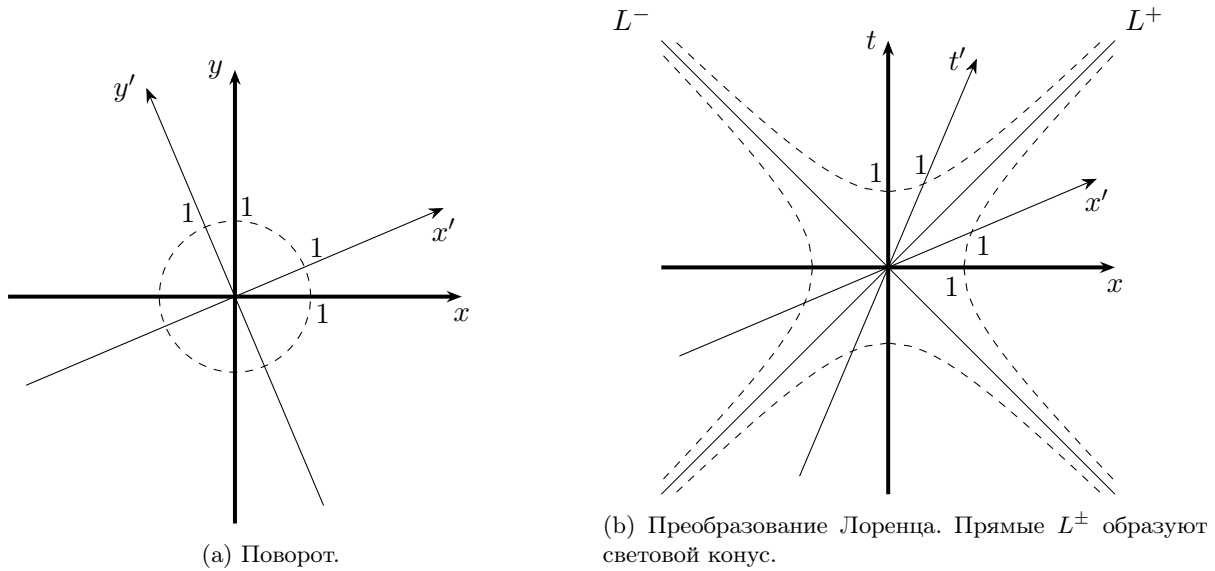


Рис. 1.1. Поворот и преобразование Лоренца в двумерном пространстве-времени. Пунктирные линии содержат точки, удаленные на единичное (по модулю) расстояние от начала координат.

3. Покажите, что при калибровочном преобразовании

$$A \rightarrow A + d\chi,$$

где  $\chi(x)$  — произвольное скалярное поле, действие (1.18) преобразуется как

$$S \rightarrow S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B)).$$

Объясните, почему отсюда следует, что уравнение движения частицы не меняется при калибровочных преобразованиях.

4. Выведите уравнение (1.23).

5\*. Рассмотрите незаряженную частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой  $m(x)$  в действии (1.18), зависящей от точки в пространстве-времени. Получите уравнения движения такой частицы. Найдите гамильтониан и обобщенные импульсы. Покажите, что если  $m(x) = m_0 + U(x)$ ,  $U(x) \ll m_0$  и если  $U(x)$  меняется со временем  $x^0$  достаточно (насколько?) медленно, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле  $U(x)$ .

## Семинар 1

### Преобразования Лоренца, координаты светового конуса, диаграмма Пенроуза

Для простоты мы будем рассматривать двумерное пространство-время.

1. Графическое представление преобразований Лоренца в двух измерениях (Рис. 1.1).
2. Координаты Риндлера и равноускоренное движение. Введем координаты  $\tau$  и  $\xi$  уравнениями:

$$t = \xi \operatorname{sh} \tau, \quad x = \xi \operatorname{ch} \tau.$$

Метрика в этих координатах принимает вид

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2.$$

Координаты Риндлера определены в во внешней области светового конуса:  $|x| < |t|$  (Рис. 1.2). Линии постоянной координаты  $\xi$  отвечают мировым линиям наблюдателей с инвариантным ускорением  $\xi^{-1}$ , причем собственное время такой частицы равно  $\xi\tau + \text{const}$ .

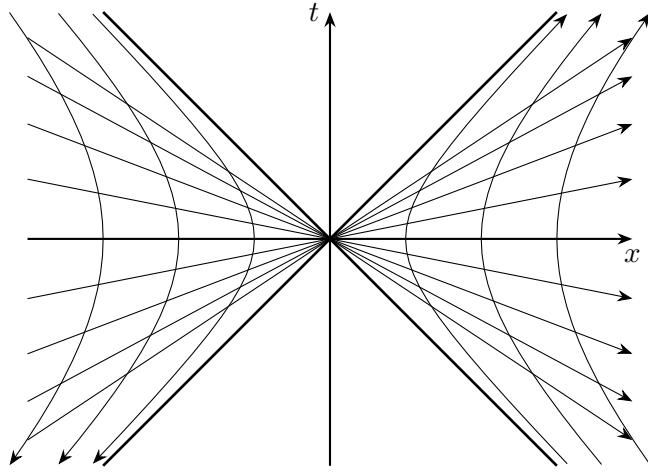


Рис. 1.2. Координаты Риндлера. Гиперболы отвечают линиям постоянной координаты  $\xi = -3, -2, \dots, 3$ , а прямые — линиям постоянного времени  $\tau = -0.8, -0.6, \dots, 0.8$ .

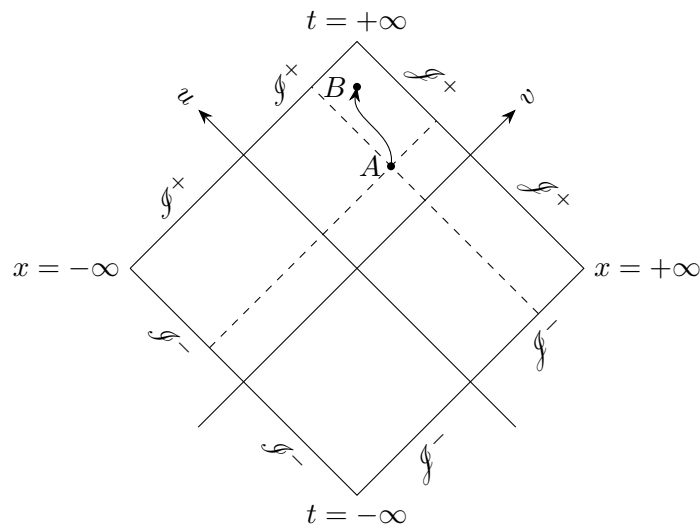


Рис. 1.3. Диаграмма Пенроуза для пространства Минковского. Граница  $\mathcal{I}^+$ ,  $\mathcal{I}^-$  отвечает бесконечному будущему, а граница  $\mathcal{S}^+$ ,  $\mathcal{S}^-$  — бесконечному прошлому.

Важной особенностью риндлеровских наблюдателей является наличие горизонта событий. События вне правого (при  $\xi > 0$ ) или левого (при  $\xi < 0$ ) клина для них ненаблюдаемы. Другое полезное наблюдение: твердый стержень не может ускоряться так, чтобы все его точки ускорялись с одним и тем же ускорением. Задний конец должен иметь большее ускорение («парадокс» Белла).

3. Координаты светового конуса и причинная диаграмма (диаграмма Пенроуза) пространства Минковского.

Введем координаты

$$u = t - x, \quad v = t + x.$$

В этих координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = du dv.$$

В отличие от риндлеровских координат эти координаты глобально определены на всем двумерном пространстве-времени. Используя их можно «сжать» пространство-время, чтобы изобразить его на конечном листе:

$$u = 2 \operatorname{tg} u', \quad v = 2 \operatorname{tg} v', \quad ds^2 = \frac{4 du' dv'}{\cos^2 u' \cos^2 v'}.$$

Тогда пространство-время примет вид, изображенный на Рис. 1.3. Диаграмма Пенроуза описывает причинную структуру пространства-времени. Световой конус любого события на этой диаграмме изображается двумя прямыми, наклоненными под углом  $45^\circ$  к горизонту.



## Лекция 2

### Основные понятия дифференциальной геометрии и пространство-время

В специальной теории относительности мир представлял собой плоское (аффинное) пространство, и у нас не было принципиальной необходимости вводить криволинейные координаты на нем. Законы физики удобно было связывать с плоскими координатами, причем временная координата отвечала некоторой инерциальной системе отсчета, а пространственные координаты были произвольными координатами в одновременном слое. В общей теории относительности инерциальные системы отсчета никак не выделены. Более того, мир описывается как некоторое многообразие с (псевдоримановой) метрикой, и законы физики должны быть сформулированы так, чтобы их можно было записать в произвольных координатах. В этой и следующей лекции я введу основные геометрические понятия, которые нам будут нужны на протяжении всего курса.

Дадим сначала определения. Пусть на множестве  $M$  задано множество его подмножеств  $\mathcal{T}$ , удовлетворяющее трем условиям:

1. Объединение элементов произвольного подмножества множества  $\mathcal{T}$  принадлежит  $\mathcal{T}$ .
2. Пересечение элементов произвольного *конечного* подмножества  $\mathcal{T}$  принадлежит  $\mathcal{T}$ .
3.  $\emptyset, M \in \mathcal{T}$ .

Тогда  $\mathcal{T}$  называется *топологией* на множестве  $M$ , элементы  $U \in \mathcal{T}$  — *открытыми* множествами, а пара  $(M, \mathcal{T})$  — *топологическим пространством*.

Для пары топологических пространств  $(M, \mathcal{T})$  и  $(M', \mathcal{T}')$  отображение  $f : M \rightarrow M'$  называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт:  $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ .

Отображение  $f : M \rightarrow M'$  называется *гомеоморфизмом* топологических пространств, если оно взаимно-однозначно и оба отображения  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны.

Если любой элемент множества  $\mathcal{T}$  можно получить объединением элементов некоторого его подмножества  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ , то такое подмножество называется *базой топологии*.

Открытое множество  $U$ , содержащее точку  $x$ , называют *открытой окрестностью* точки  $x$ . Топологическое пространство  $(M, \mathcal{T})$  (для простоты будем писать  $M$ ) называется *хаусдорфовым* если топология удовлетворяет *сильной аксиоме отделимости*: для любой пары точек имеются непересекающиеся окрестности:

$$\forall x, y \in M, x \neq y : \exists U, V \in \mathcal{T}, x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset.$$

Примером хаусдорфова топологического пространства является пространство  $\mathbb{R}^d$ , база топологии которого состоит из всех открытых шаров  $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| < r\}$  ( $\forall x, r$ ). На самом деле можно построить базу из счетного множества открытых шаров, так что это топологическое пространство со счетной базой.

Если у каждой точки  $x_0 \in M$  хаусдорфова топологического пространства  $M$  со счетной базой топологии имеется окрестность  $U$ , гомеоморфная пространству  $\mathbb{R}^d$ , то есть существует непрерывное вместе со своим обратным взаимно-однозначное отображение  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , то топологическое пространство  $M$  будем называть *топологическим многообразием* размерности  $d$ . Пару  $(U, \phi)$  называют *картой* на многообразии  $M$ . Совокупность функций  $\phi^\mu(x)$  дает *систему координат* на открытом множестве  $U$ . Если мы изучаем многообразие только в окрестности точки  $x$ , то вместо  $\phi^\mu(x)$  часто пишут просто  $x^\mu$ . Мы тоже будем так часто делать, а если у нас будут две системы координат в одной области, то будем различать их какими-нибудь дополнительными значками, например, штрихом:  $x^\mu = \phi^\mu(x)$ ,  $x'^\mu = \phi'^\mu(x)$ .

Предположим, что на  $M$  имеется множество карт  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ , удовлетворяющее условиям:

1. Карты  $U_\alpha$  покрывают все многообразие:  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .
2. Для любых  $\alpha, \beta \in A$ , таких что  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , отображение *склейки*  $\phi_\alpha^\beta = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  является  $C^k$ -гладким во всей области его определения.

Тогда мы будем говорить, что  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  образуют  $C^k$ -гладкий атлас на  $M$ . Два  $C^k$ -гладких атласа считаются эквивалентными, если их объединение тоже является  $C^k$ -гладким атласом. Класс эквивалентности  $C^k$ -гладких атласов образует  $C^k$ -гладкую структуру. Многообразие  $M$  с заданной на ней  $C^k$ -гладкой структурой называется  $C^k$ -гладким многообразием. Функцию  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  мы будем называть  $C^l$ -гладкой ( $l \leq k$ ) если функции  $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  являются  $C^l$ -гладкими.

В дальнейшем мы будем считать  $k$  достаточно большим для того, чтобы все выражения, которые мы будем писать, были хорошо определены, и просто говорить о «гладком многообразии». Обычно нам будет достаточно  $k = 2$ .

Отметим, что систему координат  $\phi$  можно определить не как взаимно-однозначное отображение на все пространства  $\mathbb{R}^d$ , а как взаимно-однозначное отображение на какое-нибудь его открытое (в смысле  $\mathbb{R}^d$ ) подмножество, гомеоморфное  $\mathbb{R}^d$ . Это удобно в практических вычислениях, потому что позволяет брать более «естественные» функции  $\phi^\mu$ . Мы всегда будем понимать карты и системы координат в таком более общем виде.

Понятие многообразия фундаментальное, но само по себе слишком бедное. В сущности, можно сказать, что это топологическое пространство, локально гомеоморфное пространству  $\mathbb{R}^d$ . В этой лекции мы введем две дополнительные структуры, которые мы будем использовать во всем курсе — аффинную связность и метрику.

Для начала давайте вспомним понятие касательного пространства. Рассмотрим гладкое многообразие  $M$ . Нас будут интересовать только локальные свойства многообразия, поэтому мы ограничимся одной картой  $U \subset M$  с координатами  $x^\mu = \phi^\mu(x)$ . Пусть  $x_0 \in U$ . Рассмотрим пространство  $C^1(U)$  гладких вещественнозначных функций на  $U$ . Рассмотрим гладкую параметрическую кривую  $x = \varphi(\tau)$ , такую что  $x_0 = \varphi(0)$ . Гладкость кривой означает, что функции  $\varphi^\mu(\tau) \equiv \phi^\mu(\varphi(\tau))$  параметра кривой являются гладкими. Тогда дифференцирование  $\dot{\varphi}(0)$  вдоль кривой в точке  $\tau = 0$  представляет собой оператор из  $C^1(U)$  в  $\mathbb{R}$ :

$$\forall f \in C^1(U) : \dot{\varphi}(0)f \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{df(\varphi(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \right|_{x=\varphi(0)} \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}.$$

Легко понять, что совокупность всех операторов  $\dot{\varphi}$ , связанных со всеми возможными кривыми, проходящими через точку  $x_0$ , образуют векторное пространство. Действительно, для двух кривых  $\varphi$  и  $\chi$  операторы  $\dot{\varphi}(0)$  и  $\dot{\chi}(0)$  совпадают, если  $(\varphi^\mu)'(0) = (\chi^\mu)'(0)$ , так что любой оператор  $\dot{\varphi}(0)$  может быть однозначно записан в виде  $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , где  $a^\mu = (\varphi^\mu)'(0)$ . И наоборот, для любого оператора  $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  существует кривая  $\varphi(\tau)$  с координатами  $\varphi^\mu(\tau) = x^\mu + a^\mu \tau$ , для которой это уравнение выполняется. Для любого набора чисел  $a^\mu$  определим оператор  $a = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Структура линейного пространства задается очевидным равенством

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a^\mu + \beta b^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Легко проверить, что оно не зависит от выбора координат. Линейное пространство  $TM_{x_0} = T^1M_{x_0}$  таких операторов называется касательным пространством к многообразию  $M$  в точке  $x_0$ . Совокупность касательных пространств со структурой многообразия на них образует касательное расслоение  $TM = T^1M$ . На языке расслоений векторные поля представляют собой гладкие сечения касательного расслоения. Мы будем говорить, что сечение  $a$   $C^k$ -гладкое, если соответствующие функции  $a^\mu(x)$  являются  $C^k$ -гладкими на каждой карте. Пространство таких сечений мы будем обозначать  $C^k(TM)$ . Векторные поля  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  на карте  $U$  задают координатные базисы в касательных пространствах  $TM_x$ ,  $x \in U$ .

Векторы в касательном пространстве можно представлять себе как бесконечно малые сдвиги. Действительно, пусть  $a \in TM_x$ , а  $f \in C^1(M)$ . В любой системе координат мы можем написать

$$f(x^\bullet + \varepsilon a^\bullet) = f(x) + \varepsilon a^\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} + o(\varepsilon) = f(x) + \varepsilon a f(x) + o(\varepsilon).$$

Рассмотрим пространство двойственное к  $TM_{x_0}$ , то есть пространство линейных форм на  $TM_{x_0}$ . Если у нас выбраны координаты  $x^\mu$ , то с каждой координатой связана форма  $dx^\mu$ , определенная уравнением

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu,$$

то есть базис  $\{dx^\mu\}$  представляет собой базис в пространстве форм, двойственный к базису  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$  в касательном пространстве. Это пространство называется *кокасательным пространством*  $T^*M_{x_0} = T_1^*M_{x_0}$ , а совокупность кокасательных пространств образует *кокасательное расслоение*  $T^*M = T_1^*M$ . Поля 1-форм представляют собой гладкие сечения кокасательного расслоения, образующие пространство  $C^k(T_1^*M)$ . Более общо, тензорное произведение  $T_n^m M_{x_0} = TM_{x_0}^{\otimes m} \otimes T^*M_{x_0}^{\otimes n}$  представляет собой пространство тензоров с  $m$  верхними и  $n$  нижними индексами (у компонент) в точке  $x_0$ . Соответствующие тензорные поля определяются как сечения расслоения  $T_n^m M$ .

Вместо символа  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  мы часто будем использовать символ  $\partial_\mu$ . Оба этих символа мы будем применять как для обозначения базисного вектора в касательном пространстве (то есть оператора на пространстве функций на многообразии), так и для обозначения дифференцирования функции нескольких переменных (оператора на пространстве функций в  $\mathbb{R}^d$ ), в том числе отвечающих функциям на многообразии в системе координат  $\{x^\bullet\}$ . Кроме того, для функции  $d$  переменных  $f(x^\bullet) = f(x^0, x^1, \dots, x^{d-1})$  мы будем писать  $f_{,\mu} = \partial_\mu f$ .

Теперь возникает вопрос о том, как «склеить» слои касательного расслоения  $TM$  друг с другом. В аффинном пространстве все слои касательного расслоения естественным образом отождествляются с «подлежащим» векторным пространством  $V$  и, таким образом, между собой. На произвольном многообразии такого естественного способа не существует. Если мы проведем на многообразии некоторую  $C^1$ -гладкую незамкнутую и несамопересекающуюся кривую, можно отождествить касательные пространства (т.е. построить взаимно-однозначные отображения между ними) в точках кривой каким-нибудь способом. Мы хотим, чтобы

- этот способ был локален, то есть правило было задано в каждой точке многообразия  $M$  и зависело только от направления  $\dot{\varphi}(\tau)$ , в котором кривая проходит через эту точку;
- этот способ уважал структуру линейного пространства на  $TM_x$ , то есть задавал линейное отображение одного слоя в другой;
- этот способ был гладким, то есть компоненты «постоянного» вектора вдоль гладкой кривой являлись гладкими функциями параметра кривой.

Предположим, мы хотим перенести вектор  $a$  из точки  $x_0$  вдоль кривой  $\varphi(\tau)$ ,  $\varphi(0) = x_0$ . Пусть  $a(\tau)$  есть результат такого переноса. Иными словами,  $a(\tau)$  есть постоянный по отношению к переносу вектор. Пусть также  $b(\tau) = \dot{\varphi}(\tau)$ . Мы хотим построить такой оператор  $\nabla_b$ , что

$$\nabla_{b(\tau)} a(\tau) = 0. \quad (2.1)$$

Этот оператор мы будем называть *ковариантной производной*, а вектор  $a(\tau)$ , удовлетворяющий этому условию, — *ковариантно-постоянным* вдоль кривой  $\varphi(\tau)$ . В силу условия локальности оператор может зависеть только от точки  $x = \varphi(\tau)$ , но не от самого параметра  $\tau$ . В частности, это значит, что репараметризация  $\tau = p(\lambda)$  не изменит этого условия. Направляющий вектор к кривой  $\varphi(p(\lambda))$  равен  $p'(\lambda)b(p(\lambda))$ . Отсюда следует, что условие  $\nabla_{\alpha(\tau)b(\tau)} a(\tau) = 0$  должно выполняться для любой функции  $\alpha(\tau)$ . Очевидно, что для аффинного пространства за оператор  $\nabla_b$  можно принять действие вектора  $b$  на компоненты  $a^\mu$  в линейных координатах. Поэтому постулируем, что оператор  $\nabla_b$  линеен по  $b$  и является дифференциальным оператором первого порядка:

$$\nabla_{fb} a = f \nabla_b a, \quad (2.2)$$

$$\nabla_b (fa) = (bf)a + f \nabla_b a \quad (\forall f \in C^1(M), a \in C^1(TM), b \in C^0(TM)). \quad (2.3)$$

Последнее условие представляет собой правило Лейбница. Оно связывает параллельный перенос вектора с параллельным переносом скаляра и нормирует его. Первое условие означает, что существует оператор (*ковариантный дифференциал*)  $\nabla : C^k(TM) \rightarrow C^{k-1}(T_1^*M)$ , такой что  $\nabla_b a = b^1 \nabla_1 a = b^\mu \nabla_\mu a$ , где  $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu}$ . Иными словами,  $\nabla = dx^\mu \otimes \nabla_\mu$ . Мы будем говорить, что ковариантный дифференциал задает *аффинную связность* на многообразии  $M$ .<sup>1</sup> Найдем общий вид оператора  $\nabla$  в координатах.

<sup>1</sup>Вообще говоря, связность задается на *расслоении*. Аффинная связность является связностью на *касательном* расслоении  $TM$ , и индуцирует согласованные с ней связности на всех тензорных расслоениях  $T_n^m M$ , которые также называют аффинными (см. ниже).

Условие (2.3) переписывается в виде

$$\nabla(fa) = df a + f\nabla a \quad (2.3a)$$

или, в компонентах,

$$\nabla_\mu(fa) = \partial_\mu f a + f\nabla_\mu a. \quad (2.3b)$$

Применим эту формулу к  $\nabla_\mu a = \nabla_\mu(a^\nu \partial_\nu)$ , подставив вместо  $f$  компоненту  $a^\nu$ , а вместо  $a$  базисный вектор  $\partial_\nu$ :

$$\nabla_\mu(a^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu a^\nu) \partial_\nu + a^\nu \nabla_\mu \partial_\nu. \quad (2.4)$$

Левую часть разложим по базису

$$\nabla_\mu(a^\nu \partial_\nu) = (\nabla_\mu a)^\lambda \partial_\lambda, \quad (2.5)$$

В правой части (2.4) первый член уже разложен по базису, а для второго члена имеем

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda. \quad (2.6)$$

Коэффициенты разложения  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  называются *символами Кристоффеля*. Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получаем

$$(\nabla_\mu a)^\lambda = \partial_\mu a^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda a^\nu. \quad (2.7)$$

Набор символов Кристоффеля (как функций точки) однозначно задает связность на данном многообразии. Заметим, что для краткости часто пишут  $\partial_\mu a^\lambda = a^{\lambda, \mu}$ ,  $(\nabla_\mu a)^\lambda = a^{\lambda, \mu}$ .

Говоря о существовании оператора  $\nabla$ , я сделал небольшую подмену. Дело в том, что оператор  $\nabla_b$  в (2.1) не требует, чтобы векторное поле  $a$  было определено в некоторой области пространства. Достаточно, чтобы оно было определено на кривой  $\varphi(\tau)$ . Поэтому следует оговориться, что условие (2.1) может быть определено через ковариантную производную  $\nabla$  для произвольного гладкого продолжения  $a(\tau)$  на окрестность кривой. В силу того, что  $\dot{\varphi}^\mu \partial_\mu = d/d\tau$ , мы можем записать его в виде

$$\dot{a}^\lambda(\tau) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \dot{\varphi}^\mu(\tau) a^\nu(\tau) = 0. \quad (2.8)$$

Аффинная связность может быть легко обобщена на общее тензорное расслоение  $T_n^m M$ . Действительно, для функций на многообразии ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_b f = bf, \quad f \in C^1(M). \quad (2.9)$$

Тогда легко определить связность на кокасательном расслоении через правило Лейбница:

$$(\nabla_b \omega)(a) + \omega(\nabla_b a) = b\omega(a), \quad \omega \in C^1(T^*M), \quad a \in C^1(TM). \quad (2.10)$$

Явно получаем

$$(\nabla_\mu \omega)_\kappa = \partial_\mu \omega_\kappa - \Gamma_{\kappa\mu}^\nu \omega_\nu. \quad (2.11)$$

Наконец, для общего тензорного поля  $t \in C^1(T_n^m M)$  ковариантная производная определяется через правило Лейбница для свертки  $t^{1\dots m}_{m+1, \dots, m+n} \omega_1^{(1)} \dots \omega_m^{(m)} a_{(1)}^{m+1} \dots a_{(n)}^{m+n}$  тензорного поля с  $m$  1-формами  $\omega^{(i)}$  и  $n$  векторами  $a_{(j)}$ . В координатном базисе ковариантная производная тензора  $t$  выглядит так

$$(\nabla_\mu t)^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\kappa_1 \dots \kappa_n} = \partial_\mu t^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\kappa_1 \dots \kappa_n} + \sum_{i=1}^m \Gamma_{\nu_i \mu}^{\lambda_i} t^{\lambda_1 \dots \nu_i \dots \lambda_m}_{\kappa_1 \dots \kappa_n} - \sum_{j=1}^n \Gamma_{\kappa_j \mu}^{\nu_j} t^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\kappa_1 \dots \nu_j \dots \kappa_n}. \quad (2.12)$$

Теперь зададимся вопросом: как переносится касательный к кривой вектор? Вообще говоря, после переноса он перестает быть касательным.  $C^2$ -Гладкая кривая, касательный вектор к которой ковариантно-постоянен вдоль нее в некоторой параметризации, называется *геодезической*. Иными словами, геодезическая удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\dot{\varphi}(\tau)} \dot{\varphi}(\tau) = 0. \quad (2.13)$$

В силу (2.8) в координатах это уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{\varphi}^\mu \dot{\varphi}^\nu = 0. \quad (2.14)$$

Обратим внимание, что это уравнение фиксирует не только саму кривую, но и специальную параметризацию на ней. Параметр, определенный этим уравнением называется *аффинным параметром* геодезической. Уравнение (2.14) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, так что геодезическая однозначно задается начальной точкой  $\varphi(0)$  и направляющим вектором  $\dot{\varphi}(0)$  в ней. При этом достаточно задать направляющий вектор с точностью до множителя: замена  $\dot{\varphi}(0) \rightarrow \lambda \dot{\varphi}(0)$  эквивалентна репараметризации  $\tau \rightarrow \lambda^{-1}\tau$  с постоянным  $\lambda$ .

Геодезические будут играть большую роль. Как мы увидим ниже, они дают мировые линии легких (пробных) частиц, свободно падающих в гравитационном поле, причем в случае массивных частиц аффинный параметр  $\tau$  пропорционален собственному времени частицы.

Важно заметить, что символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  не являются компонентами какого-либо тензорного поля. Это легко понять хотя бы из того, что символы Кристоффеля естественной связности в аффинном пространстве тождественно равны нулю в плоских координатах и не равны нулю в криволинейных координатах, в то время как полный набор компонент тензор не может обращаться или не обращаться в нуль в зависимости от базиса. Нетрудно показать, что при преобразовании координат  $x^\mu = x^\mu(x'^\bullet)$  символы Кристоффеля преобразуются по закону

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda'} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^{\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\kappa}}. \quad (2.15)$$

В то же время *разность* двух связностей является тензором. Пусть  $\nabla, \tilde{\nabla}$  — две связности, а  $\Gamma, \tilde{\Gamma}$  — соответствующие символы Кристоффеля. Тогда, очевидно, разности  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  преобразуются как компоненты тензора. По-другому: из определения (2.2), (2.3) немедленно следует, что

$$\begin{aligned} (\nabla_{fb} - \tilde{\nabla}_{fb})a &= f(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)a, \\ (\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)(fa) &= f(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b)a. \end{aligned}$$

Это значит, что разность связностей в точке  $x$  является линейным отображением  $TM_x \otimes TM_x \rightarrow TM_x$ , то есть тензором из  $T_2^1 M_x$ .

Другая тензорная величина, связанная со связностью, это *кручение*:

$$T(a, b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a, b] \quad (\forall a, b \in C^1(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.16)$$

Легко видеть, что для  $T_{\mu\nu}^\lambda$  второе слагаемое в (2.15) сокращается и, таким образом, кручение является тензором.

До сих пор мы вводили аффинную связность аксиоматически, как самостоятельный объект. В общей теории относительности возникает связность специального вида: связность, определяемая метрикой. Чтобы ее определить, введем метрику на многообразии  $M$ . Многообразие  $M$  называется *псевдоримановым многообразием*, если на нем задано поле симметричной невырожденной формы  $g \in C^2(T_2 M)$ ,  $g_x(a, b) = g_x(b, a)$ . Такая форма называется *метрикой*. В силу непрерывности и невырожденности сигнатура метрики на связном псевдоримановом многообразии постоянна. В рамках ОТО нас будут интересовать многообразия с сигнатурой  $(1, 3)$  (или, более общо,  $(1, d-1)$ ).

Связность  $\nabla$  называется *согласованной с метрикой*, если в ней метрика ковариантно-постоянна:

$$\nabla_c g = 0 \quad (\forall c \in C^0(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \quad (2.17)$$

Связность  $\nabla$  называется *связностью без кручения*, если она удовлетворяет условию

$$T_{\bullet\bullet} = 0. \quad (2.18)$$

Имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Такая связность называется *связностью Лёви-Чивиты*. Явно символы Кристоффеля для связности Лёви-Чивиты записываются как

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \quad (2.19)$$

Метрика позволяет связывать объекты разной тензорной природы, попросту говоря, поднимать и опускать индексы. Например, вектору  $a = a^\mu \partial_\mu$  можно сопоставить форму  $\bar{g}(a) = g_{\mu\nu} a^\nu dx^\mu = a_\mu dx^\mu$ . Наоборот, форме  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  можно сопоставить вектор  $\bar{g}^*(\omega) = g^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu = \omega^\mu \partial_\mu$ .

## Задачи

1. Рассмотрим две системы координат  $\{x^\bullet\}$  и  $\{x'^\bullet = f^\bullet(x^\bullet)\}$  в некоторой области многообразия  $M$ . Пусть  $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$ . Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu. \quad (2.20)$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле:  $\partial_\nu x'^\mu = f^{\mu, \nu}(x^\bullet)|_{x^\bullet=x_0^\bullet}$ . Пусть  $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\mu dx'^\mu \in T^*M_{x_0}$ . Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu. \quad (2.21)$$

Частные производные здесь понимаются в смысле  $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^{\nu, \mu}(f^\bullet(x^\bullet))|_{x^\bullet=x_0^\bullet}$ . Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора  $a \in T_n^m M_{x_0}$ .

2. Рассмотрим двумерное аффинное пространство. На этом пространстве имеется естественная связность, в которой  $\nabla_\mu = \partial_\mu$  в линейных координатах. Найдите символы Кристоффеля этой связности в полярных координатах  $r, \varphi$ :  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$ .

3. Проверьте эквивалентность определений в (2.16).

4. Получите символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты (2.19).

5\*. Выведите закон преобразования символов Кристоффеля (2.15).

## Семинар 2

### Физическая интерпретация метрики

Системы отсчета в общей теории относительности существуют только локально, поэтому каждой системе координат соответствует семейство систем отсчета в каждой точке пространства-времени. Мы разберем физическую интерпретацию геометрических данных.

Измерить расстояние между двумя близко расположенными неподвижными в данной системе координат частицами можно следующим образом. На одной частице (с координатами  $x^i + dx^i$ ) расположим источник сигнала, распространяющегося со скоростью света, а на другой (с координатами  $x^i$ ) — зеркало. Испустим из первой частицы сигнал в сторону второй частицы. Сигнал отразится от второй частицы и вернется к первой. На первой частице произведем измерение времени испускания  $t_1$  и приема  $t_2$  сигнала, а на второй — момента отражения  $t'_0$ . Также будем считать, что моменту координатного времени  $t_i$  отвечает момент собственного времени  $\tau_i$ , то есть физического времени, измеренного наблюдателем, находящимся на первой частице. Тогда за расстояние между частицами примем величину  $l = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)$ , а за момент времени на первой частице, синхронный с  $t'_0$  на второй частице — момент  $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ .

Мы покажем, что:

1. Интервалы времени в системе отсчета, связанной с данной системой координат, даются формулой  $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ .

2. Пространственные расстояния между близкими точками даются метрикой

$$dl^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k, \quad \gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \Leftrightarrow \gamma^{ik} = -g^{ik}. \quad (2.22)$$

3. События в расположенных поблизости точках одновременны в локальной системе отсчета, связанной с данной системой координат, если

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i. \quad (2.23)$$

Отметим, что на римановом многообразии на достаточно малой карте можно ввести *синхронную систему координат* с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik} dx^i dx^k. \quad (2.24)$$

Временные линии в этой системе координат являются геодезическими, а пространственные слои ортогональны им в каждой точке. Локальную систему координат можно построить, решая некоторое уравнение Гамильтона—Якоби. Это мы изучим подробнее на другом семинаре.

### Лекция 3

#### Риманова кривизна. Преобразования тензорных полей

В этой лекции мы рассмотрим два важных вопроса дифференциальной геометрии: вопрос об инвариантном описании связности и вопрос о преобразованиях тензорных полей, порождаемых заменами координат.

Первый вопрос сформулируем так: нельзя ли подходящей заменой координат вообще обратить символы Кристоффеля в нуль на всем многообразии или хотя бы на каком-то открытом подмножестве? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно ввести тензорную величину, которая выражалась бы через связность и равнялась нулю для нулевых символов Кристоффеля. Мы построим такую величину — риманову кривизну. Если риманова кривизна не равна нулю, невозможно обратить символы Кристоффеля в нуль заменой координат. Верна и обратная теорема: если риманова кривизна равна нулю на некоторой карте, на ней существует такая система координат (плоские координаты), в которой символы Кристоффеля равны нулю.

Чтобы ввести риманову кривизну, рассмотрим параллельный перенос вдоль замкнутого контура  $\varphi(\tau)$ ,  $\varphi(1) = \varphi(0)$ . Если  $a(\tau)$  — ковариантно постоянный вдоль контура вектор, то, тем не менее, нет никакой гарантии, что  $a(1)$  окажется равным  $a(0)$ . Будем в координатах решать уравнение (2.8) на маленькой петле размера порядка  $\varepsilon$  (в данной системе координат) во втором порядке по  $\varepsilon$ . При этом важно понимать, что символы Кристоффеля и компоненты вектора  $a(\tau)$  меняются вдоль петли медленно, в то время как компоненты вектора  $\dot{\varphi}(\tau)$  малы ( $\sim \varepsilon$ ), но меняются быстро. Будем решать уравнение (2.8) итерациями, получая результат в виде суммы

$$a^\mu(\tau) = a_0^\mu(\tau) + a_1^\mu(\tau) + a_2^\mu(\tau) + o(\varepsilon^2).$$

В нулевом порядке  $a_0^\mu(\tau) = a^\lambda$ . В первой итерации имеем:

$$\begin{aligned} a_1^\kappa(\tau) &= - \int_0^\tau d\tau_1 \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x^\bullet + \delta\varphi^\bullet(\tau_1)) \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) a^\lambda \\ &= - \int_0^\tau d\tau_1 (\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x) + \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x) \delta\varphi^\mu(\tau_1) + o(\varepsilon)) \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) a^\lambda \\ &= -\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \delta\varphi^\nu(\tau) a^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa \int_0^\tau d\tau_1 \delta\varphi^\mu(\tau_1) \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) a^\lambda + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где  $\delta\varphi^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau) - \varphi^\mu(0) = \varphi^\mu(\tau) - x^\mu$ ,  $\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa = \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa(x)$ . Правая часть содержит как член первого порядка по  $\varepsilon$ , так и член второго порядка. Вторые производные от символов Кристоффеля дадут уже члены порядка выше второго, которыми мы пренебрегаем. Во второй итерации имеем

$$\begin{aligned} a_2^\kappa(\tau) &= -a_1^\kappa(\tau) - \int_0^\tau d\tau_1 \Gamma_{\rho\nu}^\kappa(x^\bullet + \delta\varphi^\bullet(\tau_1)) \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) (a^\rho + a_1^\rho(\tau_1)) \\ &= -\Gamma_{\rho\nu}^\kappa \int_0^\tau d\tau_1 \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) a_1^\rho(\tau_1) + o(\varepsilon^2) \\ &= \Gamma_{\rho\nu}^\kappa \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \int_0^\tau d\tau_1 \dot{\varphi}^\nu(\tau_1) \delta\varphi^\mu(\tau_1) a^\lambda + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Собирая вместе, с точностью  $o(\varepsilon^2)$  получаем

$$\delta a^\kappa \equiv a^\kappa(1) - a^\kappa(0) = a_1^\kappa(1) + a_2^\kappa(1) = -(\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - \Gamma_{\rho\nu}^\kappa \Gamma_{\lambda\mu}^\rho) a^\lambda f^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

где

$$f^{\mu\nu} = \int_0^1 d\tau \delta\varphi^\mu(\tau) \dot{\varphi}^\nu(\tau) = \int_0^1 d\tau \delta\varphi^\mu(\tau) \delta\dot{\varphi}^\nu(\tau).$$

Легко убедиться, что тензор  $f^{\mu\nu}$  антисимметричен. Действительно,

$$f^{\mu\nu} + f^{\nu\mu} = \int_0^1 d\tau (\delta\varphi^\mu \delta\dot{\varphi}^\nu + \delta\dot{\varphi}^\mu \delta\varphi^\nu) = \int_0^1 d\tau \frac{d}{d\tau} (\delta\varphi^\mu \delta\varphi^\nu) = 0,$$

так как  $\delta\varphi^\mu(1) = \delta\varphi^\mu(0) = 0$ . Отсюда заключаем, что

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d\tau (\delta\varphi^\mu \delta\dot{\varphi}^\nu - \delta\dot{\varphi}^\mu \delta\varphi^\nu). \quad (3.2)$$

Если мы выберем контур в виде «параллелограмма» на карте со сторонами  $\varepsilon b^\mu$  и  $\varepsilon c^\mu$ , то нетрудно проверить, что

$$f^{\mu\nu} = \varepsilon^2 (b^\mu c^\nu - b^\nu c^\mu), \quad (3.3)$$

что представляет собой координатный элемент площади «параллелограмма». Антисимметризованное выражение в скобках в (3.1) представляет собой *тензор кривизны Римана*  $R \in C(T_3^1 M)$ :

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}. \quad (3.4)$$

С его помощью выражение (3.1) может быть записано как

$$\delta a^\kappa = -\frac{1}{2} R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} a^\lambda f^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

В случае бесконечно малого контура площадку  $f^{\mu\nu}$  превращается в форму

$$df^{\mu\nu} = dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu.$$

Мы видим, что тензор  $R$  можно рассматривать как форму по двум последним индексам и оператор на  $TM_x$  по двум первым:

$$R^1{}_2 = \frac{1}{2} R^1{}_{2\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (3.6)$$

Определение (3.4) имеет один недостаток: это определение дано в координатном базисе. Используя закон преобразования символов Кристоффеля (2.15), можно показать, что это выражение действительно определяет тензор. Хотелось бы иметь какое-нибудь безиндексное определение, не зависящее от базиса или системы координат. Будем обозначать через  $R(a, b)$  оператор на  $TM_x$ , получаемый как действие формы кривизны на пару векторов. Тогда тензор кривизны можно записать прямо через ковариантную производную:

$$R(b, c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b, c]}a. \quad (3.7)$$

Квадратные скобки здесь обозначают коммутатор соответствующих операторов (векторные поля тоже понимаются как операторы). Операторы в правой части действуют на векторные поля  $a, b, c$ , однако замечательное свойство этого выражения состоит в том, что действие дифференциальных операторов сокращается, так что результат зависит только от значений векторов в точке  $x$ .

Поскольку в координатном базисе базисные векторы коммутируют:  $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ , это определение имеет простой вид в компонентах<sup>1</sup>

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} a^\lambda = (\nabla_\mu \nabla_\nu a)^\kappa - (\nabla_\nu \nabla_\mu a)^\kappa. \quad (3.8)$$

Тем не менее надо отметить, что обратный вывод, то есть (3.7) из (3.8), не так очевиден.

На *римановом многообразии*, то есть на многообразии с метрикой и связностью Леви-Чивиты, мы можем использовать метрический тензор  $g$  и обратный к нему тензор  $g^*$  (точнее, соответствующие отображения  $\bar{g}, \bar{g}^*$ ) чтобы опускать и поднимать индексы. Например, мы можем описывать кривизну тензором с четырьмя нижними индексами

$$R_{1234} = g_{11'} R^{1'}{}_{234}. \quad (3.9)$$

Введем еще три важных объекта, связанных с тензором кривизны. Во-первых, свертка тензора Римана по первому и третьему индексам дает *тензор Риччи*:

$$R_{12} = R^3{}_{132}. \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Для связности без кручения эта формула может быть записана еще компактней:  $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} a^\lambda = a^\kappa{}_{;\nu\mu} - a^\kappa{}_{;\mu\nu}$ . См. Пояснение А.



Во-вторых, на римановом многообразии тензор Риччи можно свернуть по оставшимся индексам с помощью обратного метрического тензора. В результате получается *скаляр Риччи*:

$$R = R(g^*) = R_{12}g^{12}. \quad (3.11)$$

Наконец, *тензор Вейля*

$$W_{1234} = R_{1234} - \frac{2}{d-2}(g_{1[3}R_{4]2} - g_{2[3}R_{4]1}) + \frac{2}{(d-1)(d-2)}Rg_{1[3}g_{4]2} \quad (3.12)$$

представляет собой такую комбинацию тензора Римана, тензора Риччи и скаляра Риччи, которая преобразуется при *преобразовании Вейля*  $g(x) = \Omega(x)g'(x)$  по простому правилу:

$$W_{1234}(x) = \Omega(x)W'_{1234}(x) \quad (3.13)$$

Квадратные скобки здесь обозначают антисимметризацию:

$$t_{[\mu_1 \dots \mu_k] \nu_1 \dots} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma t_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_k} \nu_1 \dots}$$

При  $d \leq 3$  тензор Вейля тождественно обращается в нуль, и потому тензор Римана однозначно определяется тензором Риччи. При  $d = 2$  тензор Римана полностью определяется скаляром Риччи:

$$R_{1234} = \frac{R}{2}(g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23}), \quad (3.14)$$

причем величина  $R/2$  совпадает с гауссовой кривизной.

Перечислим основные свойства тензора кривизны. Во-первых, это чисто алгебраические свойства симметрии. Кроме простого свойства

$$R^1{}_{234} = -R^1{}_{243}, \quad (3.15)$$

в случае связности без кручения тензор Римана удовлетворяет также *алгебраическому тождеству Бьянки*:

$$R^1{}_{234} + R^1{}_{342} + R^1{}_{423} = 0. \quad (3.16)$$

На римановом многообразии добавляется еще одно свойство:

$$R_{1234} = R_{3412}. \quad (3.17)$$

Во-вторых, это *дифференциальное тождество Бьянки*:

$$R^1{}_{234;5} + R^1{}_{245;3} + R^1{}_{253;4} = 0, \quad (3.18)$$

которому также удовлетворяет тензор Римана для связности без кручения.

До сих пор мы дифференцировали тензорные поля, используя некоторую дополнительную структуру: связность. На самом деле есть способ дифференцировать поля без помощи дополнительных структур, если только мы зададим направление дифференцирования некоторым вектором. Это так называемая *производная Ли*. Мы введем производную Ли естественным для физиков способом: изучая преобразование полей при малом преобразовании координат  $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu(x'^\bullet)$ , которое задается векторным полем  $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ . Отличие производной Ли от преобразований компонент тензоров, таких как (2.20) и (2.21), состоит в том, что мы будем сравнивать значения компонент в *разных точках многообразия*, отвечающих *одинаковым значениям координат*.

Рассмотрим для начала скалярное поле  $\varphi(x)$ . Пусть  $\varphi(x^\bullet)$  обозначает соответствующее поле на области в  $\mathbb{R}^d$  с использованием координат  $x^\mu$ . Определим новое поле  $\varphi'(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet)$ . Нас будет интересовать разность этих полей, если мы подставили в них одни и те же значения координат. Имеем

$$\delta_\xi \varphi(x) = \varphi'(x'^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \varphi(x^\bullet) - \varphi(x'^\bullet) = \partial_\mu \varphi(x) \xi^\mu = \nabla_\xi \varphi(x).$$

Операция  $\delta_\xi$  «малого изменения» тензора и есть производная Ли.<sup>2</sup> Важно, что для любых тензоров она может быть выражена непосредственно через действие вектора  $\xi$  и не зависит от связности на многообразии. Тем не менее, нам понадобится ее выражение через ковариантные производные для связности без кручения.

Для векторного поля  $a$  мы должны положить  $a'^\mu(x'^\bullet)\partial'_\mu = a^\mu(x^\bullet)\partial_\mu$ , то есть  $a'^\mu(x'^\bullet) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet)$ . Находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a^\mu &= a'^\mu(x'^\bullet) - a^\mu(x^\bullet) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda(x^\bullet) - a^\mu(x^\bullet) = \partial_\lambda a^\mu \xi^\lambda - a^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu \\ &= \nabla_\lambda a^\mu \xi^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu a^\nu \xi^\lambda - a^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu = (\nabla_\xi a)^\mu - (\nabla_a \xi)^\mu\end{aligned}$$

или

$$\delta_\xi a = \nabla_\xi a - \nabla_a \xi, \quad a \in C(TM). \quad (3.19)$$

Здесь мы воспользовались симметрией символов Кристоффеля, то есть отсутствием кручения. Заметим, что первая строчка выражает производную Ли через уже известный нам коммутатор векторных полей:

$$\delta_\xi a = [\xi, a]. \quad (3.20)$$

Аналогично для формы  $a_\mu$  находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi a_\mu &= a'_\mu(x'^\bullet) - a_\mu(x^\bullet) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} a_\lambda(x^\bullet) - a_\mu(x^\bullet) = \partial_\lambda a_\mu \xi^\lambda + a_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda \\ &= \nabla_\lambda a_\mu \xi^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu a_\nu \xi^\lambda + a_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda = (\nabla_\xi a)_\mu + a(\nabla_\mu \xi).\end{aligned}$$

Правую часть не очень удобно писать в безындексных обозначениях, но мы все же хотим записать ее как утверждение о тензорах, а не о компонентах. Поэтому воспользуемся формальными индексами:

$$\delta_\xi a_1 = \nabla_\xi a_1 + a_1 \nabla_1 \xi^1, \quad a \in C(T^*M) \quad (3.21)$$

Этот результат легко обобщить на произвольные тензорные поля:

$$\delta_\xi t^{1\dots k}_{k+1\dots l} = \nabla_\xi t^{1\dots k}_{k+1\dots l} - \sum_{i=1}^k t^{1\dots i' \dots k}_{k+1\dots l} \nabla_{i'} \xi^i + \sum_{i=k+1}^l t^{1\dots k}_{k+1\dots i' \dots l} \nabla_i \xi^{i'}. \quad (3.22)$$

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что производная Ли — объект, более фундаментальный, чем связность. Он определен на любом гладком многообразии без всяких дополнительных структур.

Производная Ли метрического тензора особенно просто выражается через связность Леви-Чивиты. Из ковариантного постоянства метрического тензора получаем

$$\delta_\xi g_{12} = g_{11'} \nabla_2 \xi^{1'} + g_{22'} \nabla_1 \xi^{2'} = \nabla_2 \xi_1 + \nabla_1 \xi_2 = \xi_{1;2} + \xi_{2;1}, \quad (3.23)$$

где  $\xi_1 = g_{12} \xi^2$  — форма, получаемая «опусканием индексов» из вектора  $\xi$ . В координатах имеем

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \quad (3.24)$$

Производная Ли обладает двумя важными свойствами. Во-первых, производная Ли от тензорного произведения удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к тензорному произведению:

$$\delta_\xi(t \otimes s) = \delta_\xi t \otimes s + t \otimes \delta_\xi s. \quad (3.25)$$

Во-вторых, коммутатор производных Ли является производной Ли коммутатора

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]t = \delta_{[\xi, \eta]}t. \quad (3.26)$$

Наконец, последний важный математический вопрос. В будущем нам понадобится интегрировать различные величины (например, плотность лагранжиана) по всему многообразию. Такой интеграл должен быть инвариантен по отношению к преобразованиям координат общего вида (*общековариантен*).

<sup>2</sup>Строго математически производная Ли  $\mathcal{L}_\xi$  определяется как предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \delta_\varepsilon$ . Но нам удобно будет думать о ней в более «физических» терминах, рассматривая «малые» векторы  $\xi$ .

Для этого, прежде всего, нам нужно иметь инвариантную форму объема. Хорошо известно, что форма  $d^d x = \bigwedge_{\mu} dx^{\mu}$ , определенная в координатах  $x^{\bullet}$ , связана с формой  $d^d x' = \bigwedge_{\mu} dx'^{\mu}$ , определенной в координатах  $x'^{\bullet}$ , согласно

$$d^d x = J d^d x', \quad J = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \det \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \right). \quad (3.27)$$

Множитель  $J$  называется *якобианом* преобразования. С другой стороны, метрический тензор преобразуется по правилу

$$g_{\mu\nu} = g'_{\kappa\lambda} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}.$$

В силу того что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, имеем

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(g'_{\mu\nu}) J^{-2}. \quad (3.28)$$

Мы будем пользоваться общепринятым обозначением

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (3.29)$$

Мы видим, что величина

$$dV = \sqrt{|g|} d^d x \quad (3.30)$$

инвариантна относительно преобразований координат. Точнее говоря, она инвариантна относительно преобразований координат, сохраняющих ориентацию. В случае преобразований, меняющих ориентацию, формально говоря,  $dV = -dV'$ . Тем не менее, коль скоро мы интересуемся интегралами, вместе с изменением знака элементом объема меняет ориентацию и область, по которой ведется интегрирование, так что  $\int d^d x f(x) = \int |J| d^d x' f(x(x'))$  и мы можем рассматривать элемент объема  $dV$  как инвариантную величину.

Инвариантность  $dV$  значит, что величина  $\sqrt{|g|}$  является не скаляром, а общим множителем компонент тензора, называемого *формой объема*:

$$dV = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_d} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{d-1},$$

где  $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$  — единственный полностью антисимметричный символ степени  $d$ , нормированный равенством  $\varepsilon_{01 \dots d-1} = 1$ . Легко проверить, что

$$(\sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d})_{;\lambda} = \left( \partial_{\lambda} \sqrt{|g|} - \sqrt{|g|} \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} \right) \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$$

Из матричного тождества  $\text{tr}(G^{-1} \partial G) = \partial \log \det G$  немедленно находим

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} \log \sqrt{|g|} \quad (3.31)$$

и

$$(\sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d})_{;\lambda} = 0. \quad (3.32)$$

Из (3.31) следует соотношение, которое понадобится нам ниже:

$$\sqrt{|g|} a^{\lambda}_{;\lambda} = (\sqrt{|g|} a^{\lambda})_{,\lambda}. \quad (3.33)$$

Для производной Ли формы объема имеется простая формула

$$\delta_{\xi} \log |g| = g^{\mu\nu} \delta_{\xi} g_{\mu\nu} = 2\xi^{\mu}_{;\mu}. \quad (3.34)$$

### Задачи

1. Выведите (3.3) и покажите, что тензор  $f^{\mu\nu}$  определяет площадь этого параллелограмма.
2. Получите (3.4) из (3.7). Покажите, что риманов тензор кривизны действительно является тензором.
3. Выведите алгебраические тождества (3.15), (3.16). Докажите, что для связности Леви-Чивиты выполняется тождество (3.17).
4. Покажите, что в случае связности без кручения в окрестности любой точки  $x_0$  многообразия можно выбрать систему координат, в которой все символы Кристоффеля в этой точке обращаются в нуль:  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x_0) = 0$ . Затем докажите, что в точке  $x_0$  выполняется дифференциальное тождество Бьянки (3.18).
- 5\*. Докажите тождества (3.25) и (3.26).

### Семинар 3

#### Симметрии и векторные поля Киллинга

Важный вопрос состоит в том, как инвариантным образом описать симметрии метрических пространств, не прибегая к конкретному виду метрики. На этом семинаре мы рассмотрим *векторные поля Киллинга*, то есть векторные поля  $\xi$ , удовлетворяющие уравнению

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \quad (3.35)$$

Эти векторные поля реализуют потоки, отвечающие действию групп симметрии метрических пространств. Мы покажем, что векторные поля Киллинга образуют алгебры Ли. Соответствующие потоки образуют группы Ли. Мы изучим несколько примеров симметрических пространств и векторных полей Киллинга в них:

- 1) эвклидово пространство и пространство Минковского;
- 2) сферы и пространства де Ситтера;
- 3) стационарные метрики в ОТО;
- 4) сферически симметричные метрики в ОТО.

## Лекция 4

### Частицы в искривленном пространстве-времени

Общая теория относительности отличается от специальной, во-первых, тем, что пространство-время общей теории относительности представляет собой псевдориманово многообразие общего вида  $M$  сигнатуры  $(1, d - 1)$ , а, во-вторых, тем, что сама структура многообразия имеет динамику, зависящую от движения вещества. Разберемся сначала с первой частью — движением *пробных* частиц в заданном искривленном пространстве-времени. Под пробной частицей мы будем понимать частицу настолько легкую, что влиянием ее собственного гравитационного поля на пространство-время и через него на ее собственное движение можно пренебречь.

Прежде всего, метрика в пространстве-времени, также как и в специальной теории относительности, определяет собственное время частицы. Элемент собственного времени  $ds$  не зависит от системы координат и определяется как

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.1)$$

Можно предположить, что действие свободной частицы выражается через собственное время так же, как и в специальной теории относительности:

$$S[x] = -m \int_A^B ds = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \quad (4.2)$$

Параметр  $\tau$ , параметризующий кривую  $x(\tau)$ , вообще говоря, произволен. Достоинство лагранжева формализма состоит в том, что с его помощью нетрудно получить уравнение движения в произвольной параметризации. Действие (4.2) *репараметризационно-инвариантно*, то есть инвариантно относительно преобразований

$$\tau = \alpha(\tau'), \quad (4.3)$$

где  $\alpha$  произвольная гладкая взаимно-однозначная вещественная функция. Физический смысл этой инвариантности состоит в том, что физическим объектом является не функция  $x(\tau)$ , а мировая линия, то есть кривая на многообразии  $M$ . Репараметризации (4.3) являются примером так называемых *калибровочных преобразований*, связывающих математически разные функции, описывающие одну и ту же физическую реальность. Чтобы выбрать какое-нибудь одно решение  $x(\tau)$  из бесконечного количества решений, отвечающих одной и той же мировой линии, нужно наложить на эту функцию какое-то условие или, как говорят физики, *зафиксировать калибровку*. Удобно наложить следующее условие:

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0 \quad (4.4)$$

Полагая

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = C^2, \quad (4.5)$$

получим, что этой калибровке  $s = C\tau + C_1$ , то есть параметр  $\tau$  и есть, с точностью до множителя и выбора начального момента, собственное время. Оставшиеся свободными две константы  $C$  и  $C_1$  связаны с *остаточной калибровочной симметрией* после фиксации калибровки.

Общее лагранжево уравнение для  $x(\tau)$  довольно сложное, но в калибровке (4.4) оно упрощается и совпадает с приведенным в Лекции 2 *уравнением геодезической*

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (4.6)$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  суть символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты (2.19). То есть мировой линией частицы, свободно падающей в гравитационном поле, является геодезическая. Теперь важно проверить согласованность условия фиксации калибровки (4.4) с решением (4.6). Иными словами, надо проверить, что (4.4) выполняется на *каждом* решении (4.6). Это нетрудно сделать.

Сохранение  $g(\dot{x}, \dot{x})$  имеет важное следствие для геометрии геодезических. Из него немедленно следует следующая теорема. Все геодезические делятся на три класса:

- 1) времениподобные геодезические, для которых  $g(\dot{x}, \dot{x}) > 0$  на всем протяжении;

- 2) светоподобные (*изотропные*) геодезические, для которых  $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$ ;  
 3) пространственноподобные геодезические, для которых  $g(\dot{x}, \dot{x}) < 0$ .

Действие (4.2) дает времениподобные геодезические, так что мы можем положить  $C = 1$  в (4.5) и отождествить параметр  $\tau$  с собственным временем  $s$ . Светоподобные геодезические не могут быть получены из действия (4.2). Однако физически их можно рассматривать как предел времениподобных мировых линий при  $m \rightarrow 0$ . Это следует из того, что в любых процессах взаимодействия частицы малой массы будут чаще всего вылетать с большими скоростями  $dx^i/dx^0$ , так что в пределе нулевой массы они будут всегда вылетать со скоростью света, что соответствует  $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$ . Пространственноподобные геодезические могут быть формально получены из действия  $\mu \int d\tau \sqrt{-g(\dot{x}, \dot{x})}$ , но исключаются как мировые линии частиц из соображений причинности.<sup>1</sup>

Чтобы прояснить связь с ньютоновской механикой, запишем действие нерелятивистской частицы в виде

$$S = \int dt \left( -m + \frac{mv^2}{2} - m\phi(t, \mathbf{r}) \right), \quad (4.7)$$

где первый член  $-m$  добавлен просто для согласованности с релятивистским действием, а  $\phi(t, \mathbf{r})$  — ньютоновский гравитационный потенциал. Сравнивая с (4.2), мы получим

$$ds = \left( 1 - \frac{v^2}{2} + \phi \right) dt.$$

Считая второе и третье слагаемое малым и учитывая, что  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , получаем

$$ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - d\mathbf{r}^2. \quad (4.8)$$

Мы видим, что в данном приближении

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}. \quad (4.9)$$

Это связывает гравитационный потенциал с метрическим тензором. В дальнейшем, изучая нерелятивистский предел уравнений Эйнштейна (лекция 7), мы увидим, как получить ньютоновскую форму гравитационного потенциала  $\phi(t, \mathbf{r}) = -G \sum_i m_i / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|$  для системы медленно движущихся тел с массами  $m_i$  в точках  $\mathbf{r}_i(t)$ . Мы увидим также, что приближение (4.9) не согласуется с уравнениями Эйнштейна, поскольку при выводе мы пренебрегли в  $g_{ij}$  членами, дающими малый (порядка  $\phi v^2$ ) вклад в действие для частицы, но сравнимый с  $g_{00}$  (порядка  $\partial_i \partial_j \phi$ ) вклад в кривизну. Тем не менее, важно запомнить, что мировая линия нерелятивистской частицы отклоняется от прямой не в силу искривления пространства, а в силу *изменения скорости течения времени*.

Рассмотрим теперь лагранжеву формулировку уравнений движения частицы в чуть более общем виде — в присутствии электромагнитного поля:

$$S[x] = \int_A^B (-m ds - e A_\mu dx^\mu) = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau (-m \sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})} - e A(\dot{x})). \quad (4.10)$$

Если мы наложим калибровочное условие (4.5) с  $C = 1$  (то есть  $\tau = s$ ), мы получим уравнение движения

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{e}{m} F^\lambda{}_\kappa \dot{x}^\kappa, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим теперь гамильтоново описание движения частиц в гравитационном поле. Забудем о фиксации калибровки и будем считать «время»  $\tau$  произвольным параметром. Этот произвол ведет в гамильтоновом подходе к возникновению *связи*. Это значит, что фазовая траектория частицы всегда лежит в некотором подмногообразии пространства канонических переменных. Действительно, нетрудно проверить, что матрица  $\partial^2 L / \partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu$  вырождена и имеет ранг 3. Следовательно, имеется по крайней

<sup>1</sup>В квантовой теории поля частицы с мнимой массой  $m = i\mu$  исключаются по другой причине. Таким частицам отвечают конфигурации полей вблизи максимума, а не минимума потенциальной энергии, так что появление мнимой массы означает абсолютную неустойчивость «вакуумной» конфигурации. Решения же с вещественной массой не допускают распространения возмущений вне светового конуса.

мере одна связь между обобщенными координатами  $x^\mu$  и импульсами  $P_\mu = \partial L / \partial \dot{x}^\mu$ . Это отражает тот факт, что на самом деле частица имеет три степени свободы, а не четыре. Действительно, имеем<sup>2</sup>

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})}} - eA_\mu. \quad (4.12)$$

Отсюда немедленно получаем *связь* между каноническими переменными

$$\chi(x, P) \equiv g^{\mu\nu}(P_\mu + eA_\mu)(P_\nu + eA_\nu) - m^2 = 0 \quad (4.13)$$

Для гамильтониана имеем

$$H_0(x, P) = P_\mu \dot{x}^\mu - L(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.14)$$

Как показал Дирак, наличие связи означает, что мы имеем право модифицировать гамильтониан, добавив связь  $\chi$ :

$$H_\alpha(x, P) = H_0(x, P) + \alpha(x, P)\chi(x, P) = \alpha(x, P)(g^{\mu\nu}(P_\mu + eA_\mu)(P_\nu + eA_\nu) - m^2). \quad (4.15)$$

где  $\alpha(x, P)$  — произвольная гладкая функция канонических переменных без особенностей. Очевидно,

$$\dot{\chi} = \{H_\alpha, \chi\} = \alpha\{\chi, \chi\} + \{\alpha, \chi\}\chi = 0$$

на уравнении связи  $\chi = 0$ . Это значит, что условие согласованности связи с эволюцией системы не накладывает никаких дополнительных связей на систему. Стандартным образом получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= -\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\mu} = -\alpha \left( \partial_\mu g^{\lambda\nu} (P_\lambda + eA_\lambda) + 2eg^{\lambda\nu} \partial_\mu A_\lambda \right) (P_\nu + eA_\nu), \\ \dot{x}^\mu &= \frac{\partial H_\alpha}{\partial P_\mu} = 2\alpha g^{\mu\nu} (P_\nu + eA_\nu). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Если мы наложим условие  $\alpha = \text{const}$ , мы (после подходящего перемасштабирования параметра  $\tau$ ) опять получим уравнение движения (4.11).

Связь (4.13) дает возможность немедленно получить уравнение Гамильтона—Якоби для частицы в гравитационном поле. Рассмотрим действие  $S$  на решении  $x(\tau)$  уравнений движения как функцию конечного значения «времени»  $\tau = \tau_B$  и конечного положения частицы  $x = x_B$  при постоянном начальном «времени»  $\tau_A$  и начальном положении  $x_A$  частицы

$$S(\tau_B, x_B) = \int_A^B d\tau L(x^\bullet, \dot{x}^\bullet) = \int_A^B d\tau (P_\mu \dot{x}^\mu - H_0) = \int_A^B (P_\mu dx^\mu - H_0 d\tau). \quad (4.17)$$

Отсюда имеем

$$dS(\tau, x) = P_\mu dx^\mu - H_0 d\tau. \quad (4.18)$$

Поскольку  $H_0 = 0$ , действие вообще не зависит от  $\tau$ , как и должно быть в силу репараметризационной инвариантности. Имеем

$$dS(x) = P_\mu dx^\mu \quad \Leftrightarrow \quad P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}. \quad (4.19)$$

Подставляя это в уравнение связи (4.13), получаем

$$g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu \right) - m^2 = 0. \quad (4.20)$$

Полученное *уравнение Гамильтона—Якоби* не зависит от параметризации кривой и в этом смысле калибровочно-инвариантно. Это уравнение имеет очевидный предел при  $m \rightarrow 0$ , и дает в этом пределе уравнение для действия на светоподобных кривых. Если также  $A = 0$ , эти кривые являются светоподобными геодезическими, а действие представляет собой аффинный параметр на этих кривых.

<sup>2</sup>Обращу ваше внимание, что при таком определении пространственные компоненты  $P_i$  имеют правильный знак, а временная компонента — противоположный:  $P_0 = -E$ . В литературе по квантовой теории поля и теории элементарных частиц чаще всего выбирают противоположный знак.

Как с помощью уравнения Гамильтона—Якоби можно решить задачу о движении частицы? Предположим, что нам удалось найти семейство решений  $S(x, \alpha)$ , зависящих от параметра  $\alpha$ . Рассмотрим эволюцию во «времени» производной  $\partial S(x, \alpha)/\partial \alpha$ :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial S(x(\tau), \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (P_\mu \dot{x}^\mu) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (P_\mu \dot{x}^\mu - H_0) = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \alpha} = 0.$$

Значит,

$$\frac{\partial S(x(\tau), \alpha)}{\partial \alpha} = \beta,$$

где  $\beta$  — новая константа. Это — алгебраическое уравнение на  $x^\mu$ . Теперь, если нам удалось найти решение, зависящее от  $d - 1$  параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ , такое что всюду

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial \alpha_j} \neq 0,$$

мы имеем  $d - 1$  алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta^i, \quad i = 1, \dots, d - 1, \quad (4.21)$$

позволяющих найти  $d - 1$  переменных  $x^1, \dots, x^{d-1}$  как функции времени  $x^0$ . Такое решение называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона—Якоби.  $2(d - 1)$  констант  $\alpha_i, \beta^i$  являются параметрами решения. Переменные  $\alpha_i$  и  $\beta^i$  представляют собой особые (стационарные) канонические переменные в фазовом пространстве системы, а формулы (4.19) и (4.21) задают каноническое преобразование от переменных  $P_i, x^i$  к переменным  $\alpha_i, \beta^i$ .

Заметим, что статических переменных ровно столько, сколько должно быть начальных данных в задаче  $(x^i, \frac{dx^i}{dx^0})$ . В самом деле, мы можем получать семейства решений, меняя начальную точку. Если мы положим  $\alpha_i = x_A^i$ , то немедленно получим  $\beta^i = -P_{Ai}$ . Это доказывает существование полного интеграла движения в окрестности точки  $x_A$ . Так как точка  $x_A$  произвольна, можно утверждать, что полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби существует в некоторой окрестности любой точки.

Описанный способ построения полного интеграла удобен при численных расчетах. Однако для аналитического решения задач использовать начальные данные в качестве параметров решения затруднительно. В аналитических вычислениях используется метод разделения переменных, который мы обсудим на семинаре. Если все переменные разделяются, и разделенные переменные хорошо определены, решение существует глобально. В таком случае механическую систему называют *интегрируемой*. Хотя большинство задач не являются интегрируемыми, интегрируемые системы играют большую роль в качестве нулевого приближения. Мы продемонстрируем мощь метода разделения переменных в конкретных задачах движения частиц в гравитационном поле в следующих лекциях.

### Задачи

1. Получите (4.11) из действия (4.10) при условии (4.4). В обратную сторону покажите, что на любых решениях уравнения (4.11) выполняется условие (4.4).

2. Найдите матрицу  $A_{\mu\nu} = (\partial^2 L / \partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu)$  для действия (4.10) и покажите, что она вырождена в направлении вектора  $\dot{x}$ :  $A_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0$ .

3. Покажите, что при  $\alpha = \text{const}$  из (4.16) следует уравнение (4.11).

4. Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве-времени, заданную гладкой функцией  $x = \varphi(\tau, \sigma)$  двух вещественных параметров. При каждом данном значении  $\sigma$  функция  $\varphi$  задает кривую  $\varphi(\cdot, \sigma)$ , а при каждом значении  $\tau$  — кривую  $\varphi(\tau, \cdot)$ . Обозначим через  $\dot{\varphi}(\tau, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi^\mu(\tau, \sigma) \partial_\mu$ ,  $\varphi'(\tau, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \varphi^\mu(\tau, \sigma) \partial_\mu$  касательные к двум семействам кривых — при данных  $\sigma$  и при данных  $\tau$ . Покажите, что для связности Леви-Чивиты

$$\nabla_{\dot{\varphi}} \varphi' = \nabla_{\varphi'} \dot{\varphi}.$$

5\*. Приливные силы. В условиях предыдущей задачи предположим, что кривые первого сорта являются геодезическими с собственным временем  $\tau$ :  $\nabla_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} = 0$ . Можно сказать, что вектор  $\varphi'(\tau, \sigma) d\sigma$  соединяет две соседние геодезические в данный момент собственного времени  $\tau$ . Таким образом, вторая



ковариантная производная по  $\tau$  будет давать относительное ускорение соответствующих материальных точек. Докажите, что

$$\nabla_{\dot{\varphi}}^2 \varphi' = R(\dot{\varphi}, \varphi') \dot{\varphi}. \quad (4.22)$$

## Семинар 4

### Уравнение Гамильтона—Якоби

Рассмотрим систему с действием  $S[q] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q, \dot{q}, t)$ , где  $q = (q^1, \dots, q^n)$ . Обобщенные импульсы и гамильтониан равны

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \quad H(q, p, t) = p_a \dot{q}^a - L(q, \dot{q}, t).$$

Задача состоит в решении уравнений движения

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}.$$

Рассмотрим действие как функцию  $S = S(q, t)$  конечного времени  $t = t_B$  и значений координат  $q^a = q^a(t_B)$  на решениях уравнений движения с некоторыми начальными условиями  $t_0 = t_A$ ,  $q_0^a = q^a(t_A)$ . Тогда

$$dS = d \int dt L = d \int dt (p_a \dot{q}^a - H) = p_a dq^a - H(q, p, t) dt.$$

Следовательно,

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q^a}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Отсюда находим *уравнение Гамильтона—Якоби*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

#### 1. Метод разделения переменных и интегрируемость.

Предположим, что заменой переменных мы смогли найти такие переменные  $q, p$ , что уравнение Гамильтона—Якоби приняло вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^1, \dots, q^{n-1}, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^{n-1}}, f\left(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right)\right) = 0.$$

Решим уравнение

$$f\left(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right) = \alpha_n \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial q^n} = g_n(\alpha_n, q^n, t),$$

где  $\alpha_n$  — константа. Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и решается в квадратурах:

$$S(q, t) = \int^{q^n} dx g_n(\alpha_n, x, t) + S_{n-1}(q_1, \dots, q_{n-1}, \alpha_n, t).$$

Легко показать, что величина

$$\beta^n = \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} \quad (4.23)$$

сохраняется, то есть (4.23) является алгебраическим уравнением на переменную  $q_n$ .

Если процедуру можно продолжить  $n$  раз, то мы получаем систему алгебраических уравнений

$$\beta^a = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_a},$$

выражающую  $q$  через  $t$ . В этом случае систему называют *интегрируемой*.

Теорема Лиувилля об интегрируемости относится к консервативным системам, в которых лагранжиан (и гамильтониан) явно не зависит от времени  $t$ . Если в такой системе имеется  $n$  независимых интегралов движения *в инволюции*, то есть

$$\{I_a, I_b\} = 0 \quad (\forall a, b = 1, \dots, n),$$

то при некоторых условиях невырожденности система допускает разделение переменных. При этом на многообразии  $M_\alpha = \{(q, p) \mid I_a(q, p) = \alpha_a\}$  можно ввести переменные  $\varphi^a$ , уравнения движения на которых имеет вид

$$\dot{\varphi}^a = \omega^a(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Если многообразие  $M_\alpha$  компактно, то оно является тором, причем можно выбрать переменные так, чтобы  $\varphi_a + 2\pi \sim \varphi_a$ , а  $I_a$  были канонически сопряженными им переменными. Тогда переменные  $I_a$  называются *переменными действия*, а  $\varphi^a$  — *переменными угла*.

Далее мы разберем несколько примеров.

2. Свободная частица в плоском пространстве-времени: декартовы, цилиндрические и сферические координаты.
3. Частица в ньютоновском потенциале.

## Лекция 5

### Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

В этой лекции мы обсудим такой фундаментальный объект как *тензор энергии-импульса*. Дело в том, что общая теория относительности является теорией поля, и взаимодействие гравитации с веществом естественнее всего описывать в терминах теории поля. Мы начнем с теории поля, но потом увидим, что соответствующие объекты достаточно хорошо определены и для более привычных вам точечных частиц.

Начнем со специальной теории относительности. Пусть  $\phi^a(x)$  ( $a = 1, \dots, N$ ) — набор вещественных полей. Теория поля описывается обычно действием вида

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi). \quad (5.1)$$

Функция  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$  называется *плотностью лагранжиана*. Довольно широкий класс систем представляют системы с плотностью лагранжиана вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} G_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b - U(\phi), \quad (5.2)$$

где  $G_{ij}(\phi)$  — симметричная матрица.

Уравнение движения записывается через плотность лагранжиана в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} = 0. \quad (5.3)$$

Это совершенно аналогично лагранжевым уравнениям движения для частицы в нерелятивистской классической механике.

Чтобы лучше понять смысл этих уравнений, рассмотрим простой пример. Пусть  $N = 1$ , а действие имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2). \quad (5.4)$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (5.5)$$

называется *уравнением Клейна—Гордона*. Это — простейшее волновое уравнение в физике. Легко построить его решения в виде плоских волн. Подставляя

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \text{Re} e^{-ikx+i\alpha},$$

легко находим<sup>1</sup>

$$k^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow k^0 = \pm \omega_k \equiv \pm \sqrt{\omega_0^2 + \mathbf{k}^2}. \quad (5.6)$$

В силу инвариантности решения относительно замены  $k \rightarrow -k$ ,  $\alpha \rightarrow -\alpha$  можно выбрать знак «+». В силу линейности уравнения (5.5) любая линейная комбинация этих решений тоже является решением. Более того, построенная система решений полна: любое ограниченное решение уравнения Клейна—Гордона раскладывается по плоским волнам. Более того, она, очевидно, избыточна. Можно ограничиться двумя различными по модулю  $\pi$  значениями  $\alpha$ , например  $\alpha = 0, \pi/2$ .

Теперь вернемся к лагранжиану общего вида. Изучим преобразование действия при сдвигах  $x = x' + \xi$ . В силу трансляционной инвариантности действие в некоторой конечной области  $U$  не должно меняться:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>Обратите внимание на сходство этого закона дисперсии с законом  $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$  для частицы. На самом деле в квантовой теории поля уравнение Клейна—Гордона действительно описывает частицу массы  $m = \hbar\omega_0$ .

Последнее слагаемое связано с изменением области интегрирования при сдвиге. Операция  $\delta_\xi$ , примененная к полям — это уже знакомая нам производная Ли. В аффинном пространстве в случае постоянного поля  $\xi$  эта производная тривиальна:

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \quad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \xi^\mu \phi_{,\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \quad (5.8)$$

где

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^a)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu{}^{\nu\lambda}, \quad f_\mu{}^{\nu\lambda} = -f_\mu{}^{\lambda\nu}, \quad (5.9)$$

называется *каноническим тензором энергии-импульса*. Добавка  $f_\mu{}^{\nu\lambda}$  обычно выбирается таким образом, чтобы тензор  $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} T_\lambda{}^\nu$  был симметричен:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (5.10)$$

Канонический тензор энергии-импульса является сохраняющимся током для 4-импульса  $P^\mu$  системы. Действительно, на решениях уравнения движения (5.3) первое слагаемое в (5.8) исчезает. В силу произвольности вектора  $\xi$  и области  $U$ , интеграл обращается в нуль при условии

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.11)$$

Компоненты *4-импульса*

$$P^\mu = \int d^{d-1} x T^{\mu 0}. \quad (5.12)$$

являются сохраняющимися зарядами,

$$\dot{P}^\mu = 0. \quad (5.13)$$

если интеграл берется по всему пространству (или, точнее, по области пространства, где происходит динамика поля  $\phi$ ). При этом величина  $\mathcal{H}(\phi, \pi) = P_0$  как функция конфигурации полей  $\phi^a(\mathbf{r})$  и обобщенных импульсов  $\pi_a(\mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta \phi^a(\mathbf{r})} \int d^{d-1} x \mathcal{L}$  в данный момент времени  $t$  является гамильтонианом системы.

Другая сохраняющаяся величина, связанная с тензором энергии-импульса — это момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1} x (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}), \quad (5.14)$$

$$j^{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Его сохранение следует из возможности сделать тензор энергии-импульса симметричным (5.10).

Рассмотрим по отдельности различные компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \quad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \quad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \dots, d-1). \quad (5.16)$$

Величина  $W$  имеет смысл плотности энергии. Компоненты  $S^i$  образуют пространственный вектор  $\mathbf{S}$  с двойным смыслом: плотности импульса и плотности потока энергии. Вообще говоря, эти две плотности могли бы не совпадать. Их совпадение является следствием сохранения момента импульса. Величины  $\sigma^{ik}$  образуют пространственный тензор, который называется *тензором напряжений* и имеет смысл плотности потока импульса.

Хорошим физическим примером поля является электромагнитное поле. Аналогом полей  $\phi$  для него являются компоненты 4-потенциала  $A_\mu$ . Действие электромагнитного поля (в системе Хевисайда) имеет вид

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4 x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \int F \wedge *F, \quad (5.17)$$

где  $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$ . Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu}{}^{\nu} = -F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} + \frac{\delta_{\mu}^{\nu}}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}. \quad (5.18)$$

В компонентах имеем

$$\rho = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \sigma^{ij} = E_i E_j + H_i H_j - \rho \delta_{ij}. \quad (5.19)$$

Величина  $\mathbf{S}$  в случае электромагнитного поля называется *вектором Пойнтинга*, а  $\rho$  и  $\sigma^{ij}$  — плотностью электромагнитной энергии, и электромагнитным тензором напряжений.

Теперь перейдем к теории поля на многообразии. В этом случае действие (5.1) зависит также от метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi|g, \partial_{\bullet}g, \dots). \quad (5.20)$$

Пока что мы будем рассматривать метрику не как поле, а как функциональный параметр. Чтобы подчеркнуть это, мы отделили ее от полей вертикальной чертой. Очевидно, что такое действие уже не является трансляционно-инвариантным. Тем не менее, можно ввести тензор, который будет переходить в канонический тензор энергии-импульса (5.9) в пределе  $g = \eta$ .

Нас будут интересовать *общековариантные* функционалы действия, то есть такие, которые не меняются при замене координат. Лагранжианы для таких функционалов действия (их мы тоже будем называть общековариантными) несложно построить. Например, все лагранжианы вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{ab}(\phi)\partial_{\mu}\phi^a\partial_{\nu}\phi^b - U(\phi) - RV(\phi) \quad (5.21)$$

являются общековариантными. Большой класс общековариантных лагранжианов можно построить из лоренц-инвариантных лагранжианов заменой

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}. \quad (5.22)$$

Получаемые таким способом лагранжианы называются лагранжианами с *минимальной* связью материи с гравитацией. Иными словами, лагранжиан с минимальной связью имеет вид

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi|g, \partial_{\bullet}g, \dots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_{\bullet}\phi|g, 0, \dots, 0). \quad (5.23)$$

Например, лагранжиан (5.21) будет лагранжианом с минимальной связью, если  $V(\phi) = 0$ . В дальнейшем мы будем ограничиваться случаями минимальной связи.

Лагранжиан электромагнитного поля почти не меняется:

$$\mathcal{L}_{EM}(A, dA) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}.$$

Это связано с тем, что тензор напряженностей электромагнитного поля  $F = dA$  получается операцией внешней производной  $d$ , которая не зависит от связностей. Отсюда следует, что лагранжиан электромагнитного поля тоже является лагранжианом с минимальной связью.

Для простоты рассмотрим лагранжианы для полей  $\phi^a$  с какой-то тензорной структурой, такие что лагранжиан зависит только от компонент  $g_{\mu\nu}$  и их первых производных. Это верно, например, для лагранжианов (5.21) с  $V = 0$ . Мы будем также пользоваться кратким обозначением  $a_{,\mu} = \partial_{\mu}a$ . Вариация *общековариантного* действия при преобразовании  $\delta_{\xi}$  должна обратиться в нуль:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_{\xi}S &= \int_U d^d x \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} \delta_{\xi}\phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_{\xi}\phi_{,\lambda} \right) \\ &+ \int_U d^d x \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_{\xi}g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_{\xi}g_{\mu\nu,\lambda} \right) - \int_U d^d x \partial_{\mu}(\xi^{\mu}\sqrt{|g|}\mathcal{L}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Последнее слагаемое обобщает последнее слагаемое в (5.7) и связано с тем, что одна и та же область интегрирования на многообразии  $M$  отображается в разные области в  $\mathbb{R}^d$  в разных системах координат.

Здесь возникает некоторый вопрос, который не вызывал проблем в случае трансляций в плоском пространстве: как понимать выражение  $\delta_\xi \phi_{,\lambda}$  для какого-то набора тензорных компонент  $\phi$ ? Что мы делаем вначале, дифференцируем по  $\lambda$  или берем производную Ли вдоль  $\xi$ ? Чтобы понять это, разберемся с тем, как мы понимаем вариацию лагранжиана. Правильное понимание состоит в том, что мы заменяем не переменную  $x$  на  $f_\xi(x) = x + \xi(x)$ , а функции  $\phi(x)$  преобразуем согласно их тензорной структуре. Именно в этом месте важно, чтобы действие было общековариантным: оно будет инвариантно относительно именно таких преобразований.

Более явно, рассмотрим преобразование

$$\phi(x) \rightarrow (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)), \quad \delta_\xi \phi(x) = (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x) = \xi\phi(x) + K_\xi(x)\phi(x),$$

где  $K_\xi(x)$  — оператор, отвечающий преобразованию компонент тензора, линейно (при  $\xi \rightarrow 0$ ) зависящий от векторного поля  $\xi$  и его производных. Например для скалярных полей  $K_\xi\phi = 0$ , а для векторных  $(K_\xi\phi)^\lambda = -\phi^\mu \xi^\lambda_{,\mu}$ . Поэтому мы должны сначала применять производную Ли, а потом дифференцировать по координатам

$$\delta_\xi \phi_{,\lambda}(x) = ((1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x))_{,\lambda} = (\delta_\xi \phi)_{,\lambda}(x).$$

Ниже нам будет удобно слегка изменить запись для производной Ли, «перекинув» часть оператора  $K_\xi$  в ковариантную производную:

$$\delta_\xi \phi = \xi\phi + K_\xi\phi = \nabla_\xi \phi + \tilde{K}_\xi\phi.$$

Например, для скалярных полей  $\tilde{K}_\xi\phi = 0$ , а для векторных полей  $(\tilde{K}_\xi\phi)^\lambda = -(\nabla_\phi \xi)^\lambda = -\phi^\mu \xi^\lambda_{,\mu}$ .

Теперь мы можем вернуться к вычислению вариации. Прежде всего, распишем сумму первого и третьего слагаемых в (5.24). При этом второй член в скобках в первом интеграле возьмем по частям и слегка перегруппируем слагаемые:

$$(I) + (III) = \int_U d^d x \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi \phi + \int_U d^d x \partial_\lambda \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Выражение в скобках в первом интеграле представляет собой левую часть уравнения движения:

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \quad (5.25)$$

В случае скалярного поля  $\phi$  нетрудно записать его через ковариантную производную. Используя (3.33), получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \quad (5.26)$$

Таким образом, первый интеграл на уравнениях движения для поля  $\phi$  обращается в нуль, а оставшееся выражение можно записать в виде:

$$(I) + (III) = \int_{\partial U} df_\lambda \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} (\xi^\mu \nabla_\mu \phi + \tilde{K}_\xi\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

где  $\partial U$  — граница области  $U$ , а  $df_\mu = \frac{1}{(d-1)!} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{d-1}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{d-1}}$  — элемент поверхности границы. Перегруппировав слагаемые, получаем

$$(I) + (III) = \int_{\partial U} df_\lambda \left( \sqrt{|g|} \tilde{T}^\lambda{}_\kappa \xi^\kappa + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \tilde{K}_\xi\phi \right),$$

где

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu = \nabla_\nu \phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu \quad (5.27)$$

— канонический тензор энергии-импульса, определенный аналогично (5.9).<sup>2</sup> Однако в отличие от СТО действие не трансляционно-инвариантно, что приводит к появлению второго слагаемого в (5.24). Для последнего имеем

$$\begin{aligned} (\text{II}) &= \int_U d^d x \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right) \\ &= \int_U d^d x \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \int_{\partial U} df_\lambda \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left( \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \dots \right), \quad (5.28)$$

где многоточие изображает члены со старшими производными от компонент метрики, если таковые есть. По причине, которая сейчас будет ясна, мы будем называть эту величину *метрическим тензором энергии-импульса*. На практике довольно часто удобнее варьировать по обратной метрике. Так как  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} \delta g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu}$ , имеем

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (5.29)$$

Используем теперь формулу для производной Ли от метрики:  $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ . Имеем

$$(\text{II}) = - \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2 \int_{\partial U} df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Используя тождество

$$\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \sqrt{|g|} (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu = (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu,$$

получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu + \int_{\partial U} df_\nu \sqrt{|g|} \left( (\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) \xi_\mu + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\xi \phi \right). \quad (5.30)$$

Рассмотрим сначала такие векторные поля  $\xi$ , которые обращаются в нуль на границе вместе со всеми своими производными. Тогда второе слагаемое в (5.30) исчезает и мы получаем тождество

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (5.31)$$

которое верно для любого общековариантного действия вида (5.20). Поскольку мы можем произвольно выбирать область интегрирования, мы заключаем, что это равенство верно *на уравнениях движения* во всем пространстве. Мы будем говорить, что тензор  $T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$  *ковариантно сохраняется*. Следует обратить внимание, что вывод уравнения ковариантного сохранения (5.31) на самом деле не использует никаких специальных свойств лагранжиана и верен для любых тензорных полей материи и любой зависимости лагранжиана от метрики и любых ее производных.

Теперь рассмотрим общее векторное поле  $\xi$ , не обращающееся в нуль на границе. В силу доказанного равенства (5.31) в выражении (5.30) остается только второе слагаемое, которое сводится к поверхностному интегралу. В случае *минимальной связи* для *скалярного* поля действие не содержит производных от компонент метрики, а  $\tilde{K}_\xi = 0$ . Поэтому второе и третье слагаемые под интегралом обращаются в нуль. Так как поверхность произвольна, отсюда следует, что метрический и канонический тензоры энергии-импульса совпадают:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

<sup>2</sup>Строго говоря, тензор  $\tilde{T}^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes dx^\nu$  не зависит от системы координат только для моделей с минимальной связью.

В общем случае моделей с минимальной связью, когда полями материи являются произвольные тензорные поля,<sup>3</sup> второе слагаемое в поверхностном интеграле в (5.24) выражается через производные по полям материи:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} \frac{\partial \phi_{,\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

так как производные от метрики входят только через символы Кристоффеля, входящие в ковариантные производные. В правой части этого равенства лагранжиан понимается как функция полей, их ковариантных производных и метрики, так же как в правой части (5.23). При этом симметричная по  $\mu, \nu$  часть этого второго слагаемого под интегралом сокращается с третьим слагаемым. Можно (хотя и в общем виде непросто) показать, что в этом случае

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2} \partial_\lambda (|g|^{1/2} \psi^{\mu\nu\lambda}), \quad (5.33)$$

где  $\psi$  — антисимметричный тензор третьего ранга.

Это значит, что уравнение (5.31) в системе с минимальной связью переходит в закон сохранения энергии, импульса и момента импульса в плоском пространстве. Поэтому мы будем *определять* тензор энергии-импульса формулой (5.28) для любой физической теории.

Как и следовало ожидать, энергия и импульс не сохраняются в отсутствие однородности (трансляционной инвариантности) пространства-времени, а момент импульса — в отсутствие изотропии. Физически это означает обмен энергией, импульсом и моментом импульса с гравитационным полем. Позже мы обсудим это более подробно.

В заключение найдем тензор энергии-импульса для точечной частицы. Запишем действие (4.10) в виде

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left( -m \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)} - e A_\mu(x) \dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Дифференцируя по метрике, получаем в калибровке  $\tau = s$ :

$$T^{\mu\nu} = \int ds \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x, y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}. \quad (5.34)$$

Поэтому окончательно получаем

$$T^{\mu\nu} = \int ds \delta_g(x, x(s)) m \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s). \quad (5.35)$$

### Задачи

**1.** Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса (5.10) следует сохранение момента импульса (5.15).

**2.** С помощью формулы (5.28) получите общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и для скалярного поля с  $V = 0$ .

**3.** Покажите, что величины  $\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-1/2} \partial_\lambda (|g|^{1/2} \psi^{\mu\nu\lambda})$  с антисимметричным тензором  $\psi$  обладают свойством  $\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , откуда следует, что канонический тензор энергии импульса для модели с минимальной связью ковариантно сохраняется.

**4.** На концы тонкого стержня длиной  $2a$  нулевой массы насажены точечные массы  $m$ . Центр стержня неподвижен с лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается с угловой скоростью  $\omega$ , причем скорость концов  $\omega a$  не предполагается малой. Найдите тензор энергии-импульса для стержня и точечных масс.

**5\*.** Для действия, зависящего от одного векторного поля материи  $\phi = \phi^\mu \partial_\mu$ , минимально связанного с гравитацией, докажите (5.33).

<sup>3</sup>В этом курсе мы не рассматриваем случай спинорных полей, для определения которых требуется более сложная техника — *реперный* (или *тетрадный*) формализм.



## Семинар 5

### Тензор энергии-импульса разных физических систем

Источником гравитационного поля, как мы увидим в следующей лекции, является тензор энергии-импульса материи. На семинаре мы будем вычислять тензор энергии-импульса для нескольких физических систем:

1. Движущаяся пылевидная материя.
2. Движущаяся жидкость с плотностью  $\rho$  и давлением  $p$ . Нерелятивистский и ультрарелятивистский идеальные газы.
3. Задача о движущемся конденсаторе.

## Лекция 6

### Уравнения гравитационного поля и законы сохранения

До сих пор мы считали геометрию пространства-времени заданной. Теперь мы хотим ответить на вопрос, как эта геометрия зависит от материи, которая в ней живет. Согласно общей теории относительности, геометрия пространства-времени определяется плотностью энергии, плотностью импульса и плотностью потока импульса в системе, то есть *тензором энергии-импульса*. Как мы видели, в общей теории относительности удобно определять тензор энергии-импульса как вариационную производную от действия по метрике. Такое определение совпадает с каноническим в случаях моделей с минимальной связью материи и гравитации, но обладает универсальностью и не связано с однородностью и изотропией пространства-времени. Мы могли бы определять тензор энергии-импульса, используя другую симметрию — инвариантность действия относительно замен координат в пространстве-времени. Преобразования координат, как мы говорили, являются симметриями действия. С симметриями обычно связаны законы сохранения (теорема Нётер). Однако, как мы увидим ниже, связанные с этой симметрией токи тождественно обращаются в нуль на уравнениях движения, что означает, что данная симметрия является *калибровочной*. Собственно, требование обращение в нуль таких токов и составляет систему уравнений движения гравитационного поля — уравнения Эйнштейна. В первой половине лекции мы выведем уравнения Эйнштейна из некоторой гипотезы для действия гравитационного поля. Во второй половине лекции мы разберемся, как определить энергию, импульс и момент импульса в асимптотически плоском пространстве-времени.

С этого момента мы будем рассматривать метрику как динамическую переменную. Для этого в действии вида (5.20) не хватает членов. Действительно, обращение в нуль вариации действия материальных полей по метрике означало бы обращение в нуль тензора энергии-импульса материи, что явно нефизично. Давайте посмотрим, какого рода члены можно добавить. Мы будем обсуждать простейший случай, когда действие разбивается в сумму

$$S_{\text{общ}}[\phi, g] = S_{\text{мат}}[\phi|g] + S_{\text{грав}}[g], \quad (6.1)$$

где  $S_{\text{мат}}$  — действие материи, минимально связанной с гравитацией, а вся динамика гравитационного поля содержится в гравитационном действии  $S_{\text{грав}}$ ,<sup>1</sup> не содержащем полей материи. Уравнение движения для метрики при этом будет иметь вид

$$\frac{\delta S_{\text{общ}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\text{общ}})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\text{общ}})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \dots = 0, \quad (6.2)$$

что эквивалентно тому, что на решениях уравнений движения суммарный тензор энергии-импульса материи и гравитации в точности равен нулю:

$$T^{\mu\nu} + T_{\text{грав}}^{\mu\nu} = 0. \quad (6.3)$$

То есть формально энергия и импульс не могут распространяться в пространстве, а только переходят их гравитационной формы в «материальную» и обратно. Это противоречит физической интуиции, и говорит о том, что энергию и импульс гравитационного поля следует определить как-то по-другому. Мы обсудим этот вопрос в конце лекции.

Теперь найдем вид действия  $S_{\text{грав}}$ . Соответствующий лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{грав}}$  должен быть скалярной величиной. Мы предположим, что он содержит первые производные метрики не более чем во второй степени, а вторые производные — не более чем в первой степени. Это значит, что компоненты метрики являются правильными динамическими переменными (обобщенными координатами), а набор компонент метрики и их первых производных по времени определяет начальные условия в задаче Коши. Из известных нам величин только единица и скаляр Риччи  $R$  удовлетворяют этому условию. Скаляры более общего вида  $f(R, R_{12}R^{12}, R_{1234}R^{1234}, R_{12}R^1{}_3R^{23}, \dots)$  будут содержать высшие производные, что означало бы появление дополнительных степеней свободы. Поэтому действие запишем в виде

$$S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{|g|}(R + 2\Lambda), \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Можно рассматривать и более сложный вид действия материи, содержащий неминимальные вклады вроде  $RV(\phi)$ , но в этом случае могут возникнуть дополнительные степени свободы, связанные с гравитацией. Модели такого рода требуют отдельного рассмотрения, и мы будем считать их выходящими за рамки собственно общей теории относительности.

где  $G > 0$  и  $\Lambda$  — две постоянные. Действие такого вида называется *действием Эйнштейна—Гильберта*. Второе слагаемое (так называемый *лямбда-член*) не содержит производных и может быть отнесено к материи. Действительно, положим

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G \sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

Тогда лямбда-член можно интерпретировать как действие для вещества с уравнением состояния  $p = -\varepsilon = -\Lambda/8\pi G$ . Если  $\Lambda > 0$  плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Если же  $\Lambda < 0$ , все наоборот. Мы не знаем такого рода материи, однако в некоторых модельных теориях поля имеются метастабильные состояния с такими свойствами.<sup>2</sup> Экспериментально лямбда-член слишком мал, чтобы играть роль во взаимодействиях даже на галактических масштабах, и его следует принимать во внимание только в космологических задачах, когда речь идет об эволюции Вселенной в целом. Итак, в дальнейшем лямбда-член мы будем опускать.

Действие (6.4) содержит вторые производные от компонент метрики. Обычно высшие производные в лагранжиане означают наличие дополнительных степеней свободы в системе. Однако в общей теории относительности таких дополнительных степеней свободы нет. Дело в том, что добавлением члена с полной дивергенцией действие можно привести к виду

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{R}(g, \partial \bullet g), \quad (6.6)$$

где  $\mathcal{R}$  является функцией метрики и ее первых производных:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\lambda}). \quad (6.7)$$

Более явно,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu, \rho} g_{\kappa\lambda, \sigma} \left( g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu} g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma} \right). \quad (6.8)$$

Важно отметить, что величина  $\mathcal{R}$ , в отличие от скалярной кривизны  $R$ , зависит от системы координат, то есть не задает однозначно скалярную функцию на многообразии.

Найдем теперь уравнение движения для метрики. Проварьируем гравитационное действие:

$$\begin{aligned} \delta \int d^d x \sqrt{|g|} R &= \delta \int d^d x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \int d^d x \left( \delta \sqrt{|g|} R + \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^d x \left( \sqrt{|g|} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Оказывается, последний член под интегралом является полной дивергенцией,

$$\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} (\sqrt{|g|} w^{\lambda}) = \sqrt{|g|} w^{\lambda}_{;\lambda}, \quad w^{\lambda} = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\lambda\mu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}, \quad (6.9)$$

и, таким образом, дает нулевой вклад, если вариация равна нулю на поверхности. Отсюда получаем *уравнения Эйнштейна* для метрики

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Таким образом, роль источника гравитационного поля в общей теории относительности играет тензор энергии-импульса материи. Следует обратить внимание на два отличия от ньютоновской теории. Во-первых, источником гравитации является не только плотность массы (или плотность энергии), но и плотность импульса (или плотность потока энергии) и даже плотность потока импульса (тензор напряжений). Конечно, в солнечной системе вклады потоков энергии и импульса ничтожно малы. Однако в случае объектов, состоящих из быстро движущихся тел, либо в случае полей их надо учитывать. Во-вторых, гравитационное поле в ОТО обладает динамическими степенями свободы, так что источники

<sup>2</sup>Кроме того, таким свойством должно обладать основное состояние (вакуум) в квантовой теории поля. Однако найти плотность энергии вакуума удается только для интегрируемых моделей в двумерном плоском пространстве-времени.

не могут однозначно задавать конфигурацию поля. Это видно хотя бы из того, что при  $d > 3$  тензор Римана не определяется однозначно тензором Риччи. Конечно, в отличие от электромагнитного поля, уравнения гравитационного поля нелинейны, так что решение нельзя разбить в сумму вынужденного и свободного поля. Тем не менее, задача Коши должна содержать не только начальное состояние материи, но и начальное состояние гравитационного поля, а малые возмущения гравитационного поля распространяются как волны. Чуть ниже мы обсудим это свойство.

Теперь свернем уравнение (6.10) с обратной метрикой  $g^{\mu\nu}$ . Мы легко находим

$$\frac{d-2}{2}R = -8\pi GT, \quad T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \quad (6.11)$$

Подставляя это в (6.10), получаем альтернативный вид уравнений Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2}T \right). \quad (6.12)$$

В частности, в отсутствие материи уравнения Эйнштейна записываются как

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.13)$$

Рассмотрим уравнения Эйнштейна как уравнения эволюции гравитационного поля. Для этого выделим члены со вторыми производными по времени ( $x^0$ ) в тензоре Риччи. Нетрудно проверить, что

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{00}, \quad R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0j}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{0i}, \quad R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{ij}. \quad (6.14)$$

Точки над буквами здесь означают производные по времени. Через  $\bar{R}_{\mu\nu}$  обозначены члены, содержащие не более чем первые производные по времени. Мы видим, что компоненты тензора Риччи вообще не содержат вторых производных по времени от компонент  $g_{0\mu}$ . Этот результат будет еще выразительнее, если мы поднимем первый индекс и вычтем след:

$$\begin{aligned} R_0^0 - \frac{1}{2}R &= \bar{R}_0^0 - \frac{1}{2}\bar{R}, & R_i^0 &= \bar{R}_i^0, \\ R_j^i - \frac{\delta_j^i}{2}R &= \frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l} - g^{00}g^{kl})(\delta_k^i\ddot{g}_{jl} - \delta_j^i\ddot{g}_{kl}) + \bar{R}_j^i - \frac{\delta_j^i}{2}\bar{R}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

То есть, мы видим, что  $d$  уравнений, в левую часть которых входит  $R_\mu^0$ , являются *связями*, а не динамическими уравнениями. Динамическими являются  $\frac{d(d-1)}{2}$  уравнений для пространственных компонент. Формально это означает, что, чтобы задать эволюцию метрики, мы должны задать на пространственно-подобной поверхности  $S_0$  начальные значения  $g_{ij}, \dot{g}_{ij}, g_{0\mu}$  — всего  $d^2$  переменных. На самом деле число переменных меньше. Мы забыли о том, что все физические величины должны быть инвариантны по отношению к общим заменам координат. Формально замены координат описываются  $d$  функциями переменных  $x^0, x^i$ . Однако с динамической точки зрения ситуация сложнее. Чтобы ее описать, давайте для любого решения выберем синхронную систему координат, что будет соответствовать некоторой фиксации калибровки. Синхронная система координат, вообще говоря, не может быть определена во всем пространстве, но нам будет достаточно, что ее можно выбрать в окрестностях любой регулярной точки пространства-времени. В синхронной системе компоненты  $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$  фиксированы. Остается  $V = d(d-1)$  начальных данных на пространственно-подобной поверхности. Уравнения, содержащие  $R_\mu^0$ , дают  $C = d$  связей на эти величины. Кроме того, синхронная система координат не фиксирует калибровку полностью. Она сохраняет свойство синхронности при преобразованиях вида (3.23), если  $\delta_\xi g_{0\mu} = 0$ , то есть

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}.$$

Это значит, что временные производные величин  $\xi_\mu$  полностью определяются их значениями и пространственными производными на какой-нибудь пространственноподобной гиперповерхности. Таким образом, «остаточная» калибровочная свобода на начальной поверхности  $S_0$  описывается  $G = d$  функциями пространственных координат. Значит, начальные данные гравитационного поля описываются

$$V - C - G = d(d-1) - d - d = d(d-3) \quad (6.16)$$

функциями координат. Немного вольно можно сказать, что число собственных степеней свободы (половина размерности фазового пространства) гравитационного поля составляет  $\frac{d(d-3)}{2}$  в каждой точке. Мы это установим более строго, когда будем изучать гравитационные волны.

Мы говорили, что уравнения Эйнштейна формально означают обращение в нуль суммарного тензора энергии-импульса материи и гравитации (уравнение (6.3)). Это, разумеется, не нарушает законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, но делает их бессодержательными: все эти величины для любой области пространства просто равны нулю. Гравитационная (да и любая другая) волна в такой картине не переносит энергию и импульс, а просто передает сигнал: превратить такое-то количество энергии, импульса и момента гравитации в такой-то точке пространства в энергию, импульс и момент материи. Хотелось бы переопределить гравитационные энергию и импульс таким образом, чтобы вернуть смысл обычной физической интуиции.

Первым этим вопросом озаботился Эйнштейн. Он предложил вычислять тензор энергии-импульса гравитационного поля по стандартной формуле для канонического тензора энергии-импульса (5.9) в теории поля через усеченный лагранжиан  $-\frac{1}{16\pi G}\mathcal{R}$ , рассматривая метрику как поле в пространстве-времени, отвечающем некоторой выделенной системе координат:

$$\sqrt{|g|}\tilde{t}_\mu{}^\nu = -\frac{1}{16\pi G} \left( g_{\alpha\beta,\mu} \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta_\mu^\nu \sqrt{|g|}\mathcal{R} \right). \quad (6.17)$$

Этот объект не совпадает с тензором энергии-импульса  $T_{\text{грав}}^{\mu\nu}$ . Более того, он не является тензором. Действительно, величина  $\mathcal{R}$  не является скаляром — она зависит от системы координат, да и величины  $g_{\alpha\beta,\mu}$  не являются компонентами тензора. Величина  $\tilde{t}_\mu{}^\nu$  называется *псевдотензором энергии-импульса Эйнштейна*.

Повторяя стандартный вывод (5.7)–(5.11), из инвариантности действия относительно сдвигов координат получаем

$$\left( \sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu) \right)_{,\nu} = 0, \quad (6.18)$$

так что вектор

$$\tilde{P}_\mu = \int d^{d-1}x \sqrt{|g|}(T_\mu{}^0 + \tilde{t}_\mu{}^0) \quad (6.19)$$

сохраняется:  $\tilde{P}_{\mu,0} = 0$ .

Неинвариантность псевдотензора  $\tilde{t}_\mu{}^\nu$  означает, что понятие энергии и импульса гравитационного поля зависит от системы отсчета. По сути, определение (6.17) привязано к «фоновой» плоской метрике. Покажем, что если массы сосредоточены в конечной области и настоящая метрика  $g_{\mu\nu}$  достаточно быстро стремится к плоской на больших расстояниях от этой области, энергия и импульс системы определены однозначно. Действительно, равенство нулю дивергенции суммарного псевдотензора энергии-импульса в односвязном пространстве эквивалентно существованию так называемого *суперпотенциала*  $\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}$ , такого что

$$\sqrt{|g|}(T_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu) = \sqrt{|g|}(-T_{\text{грав}})_\mu{}^\nu + \tilde{t}_\mu{}^\nu = \partial_\lambda \tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}, \quad \tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = -\tilde{\tau}_\mu{}^{\lambda\nu}. \quad (6.20)$$

Суперпотенциал определен неоднозначно. Его можно найти явно, например, в виде

$$\tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho}, \quad (6.21)$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}). \quad (6.22)$$

Отсюда получаем, что вектор импульса равен<sup>3</sup>

$$\tilde{P}_\mu = \int df_\nu \partial_\lambda \tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \oint df_{\nu\lambda} \tilde{\tau}_\mu{}^{\nu\lambda}. \quad (6.23)$$

<sup>3</sup>Элемент  $(d-k)$ -мерной поверхности определяется как  $df_{\mu_1\dots\mu_k} = \frac{1}{(d-k)!} \epsilon_{\mu_1\dots\mu_d} dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$ . Подробно теорема Остроградского–Гаусса на многообразии разбирается в Пояснении В.

Первый интеграл представляет собой интеграл по пространственноподобной гиперповерхности, а второй — по ее  $(d - 2)$ -мерной границе. Таким образом, энергия и импульс системы оказываются не зависящими от систем координат вблизи гравитирующих масс, но зависят только от асимптотик метрики на больших расстояниях, в асимптотически плоской области. В этой области мы можем выбрать ортогональные координаты с метрикой Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ , и тогда числа  $\tilde{P}^\mu = \eta^{\mu\nu} \tilde{P}_\nu$  будут вести себя как компоненты вектора по отношению к преобразованиям Лоренца.

Недостаток псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна состоит в том, что он несимметричен, и это не позволяет определить момент импульса и центр инерции системы. Этот недостаток был исправлен Ландау и Лифшицем в работе 1947 года. Они предложили свой псевдотензор энергии-импульса, основываясь на следующем рассуждении. Давайте рассмотрим окрестность точки  $x$  в «свободно падающей» системе отсчета, то есть в системе координат, в которой символы Кристоффеля в данной точке обращаются в нуль:  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) = 0$ . Это значит, что первые производные метрики тоже равны нулю:  $g_{\mu\nu,\lambda}(x) = 0$ . В этой системе отсчета гравитационное поле локально (в данной точке) отсутствует, поэтому естественно считать, что в ней энергия и импульс гравитационного поля равны нулю. Это согласуется с тем, что в данной точке тензор энергии-импульса в этой системе координат удовлетворяет уравнению непрерывности:  $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ . Псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна в этой точке тоже равен нулю. Поэтому

$$|g|T^{\mu\nu}(x) = -|g|T_{\text{грав}}^{\mu\nu}(x) = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda}(x), \quad (6.24)$$

где  $\tau^{\mu\nu\lambda}$  — суперпотенциал Ландау–Лифшица:

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = -\tau^{\mu\lambda\nu} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}. \quad (6.25)$$

Здесь мы использовали тот факт, что первые производные метрики в точке  $x$  равны нулю, и мы можем выносить компоненты метрики из-под однократной производной  $\partial_\lambda$ . В правой и левой частях второго равенства в (6.24) остаются только члены с двукратными производными метрики.

В произвольной системе координат псевдотензор энергии-импульса Ландау–Лифшица определяется равенством

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T_{\text{грав}}^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \quad (6.26)$$

Соответственно, на решениях уравнений Эйнштейна имеем

$$|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}. \quad (6.27)$$

В силу антисимметричности суперпотенциала по второй паре индексов имеет место закон сохранения

$$(|g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})){}_{,\nu} = 0. \quad (6.28)$$

Энергия и импульс системы в конечном объеме даются выражением

$$P^\mu = \int df_\nu |g|(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint df_{\nu\lambda} \tau^{\mu\nu\lambda}. \quad (6.29)$$

В бесконечной асимптотически плоской системе они образуют вектор по отношению к (асимптотическим) преобразованиям Лоренца. Не совсем правильно говорить, что энергия и импульс гравитационного поля не локализованы. В конце концов, мы можем их определить в любом конечном объеме и определить их потоки через поверхность. Точнее будет сказать, что локализация энергии и импульса зависит от выбора пространственноподобной поверхности и совокупности систем отсчета в каждой ее точке.

В силу симметрии символов  $\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$  по отношению к перестановке  $\mu$  и  $\nu$  псевдотензор Ландау–Лифшица симметричен и позволяет определить сохраняющийся момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda |g| \left( x^\mu (T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}) \right). \quad (6.30)$$

Момент импульса тоже можно определить через метрику системы на границе пространственно-подобной поверхности:

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \oint df_{\alpha\beta} (x^\mu \tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu \tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu}). \quad (6.31)$$

Центр инерции системы в данной системе координат определяется формулой

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x |g|(T^{00} + t^{00})x^i}{\int d^{d-1}x |g|(T^{00} + t^{00})} \quad (6.32)$$

В асимптотически плоском пространстве центр инерции движется с постоянной скоростью  $V^i = P^i/P^0$  в любой системе координат, однако само его определение зависит от системы координат.

Определяя энергию, импульс и момент импульса системы, мы предполагали, что на больших расстояниях от гравитирующих масс пространство-время является асимптотически плоским. Хотя при изучении отдельных массивных объектов такое приближение довольно хорошо работает, в целом это предположение находится в противоречии с наблюдательными данными. В силу относительной равномерности распределения массы во Вселенной, а также плохо изученного фактора, называемого темной энергией (вклад которой напоминает вклад космологической постоянной), пространство-время не является асимптотически плоским. В связи с этим изучаются модификации данной конструкции, в которых вместо плоского пространства рассматривается произвольная «фоновая» метрика, а энергия и импульс приписываются только отклонениям геометрии пространства-времени от «фона».

### Задачи

1. Докажите (6.9).
2. Проверьте формулы (6.14), (6.15).
3. Покажите, что в асимптотически плоском пространстве, где метрика ведет себя как  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{3-d})$  вдали от гравитирующих тел ( $r$  — пространственное расстояние от источника гравитации), векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау—Лифшица совпадают. Покажите, что при преобразованиях Лоренца в асимптотической области величины  $P^\mu$  преобразуются как компоненты вектора.
4. Выведите выражение (6.31) для момента импульса через интеграл по поверхности.
- 5\*. Покажите, что действие Эйнштейна—Гильберта (6.4) (с  $\Lambda = 0$ , как мы условились) можно привести к виду (6.6) с лагранжианом (6.7)

### Семинар 6

#### Синхронная система отсчета

В лекции уже упоминалась *синхронная система отсчета*, то есть система координат, в которой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (6.33)$$

Это значит, что также  $g^{00} = 1$ . В этой системе координат время является собственным временем некоторой времениподобной геодезической. Действительно, символы Кристоффеля в такой системе координат равны

$$\Gamma_{0\mu}^0 = \Gamma_{00}^\mu = 0, \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \quad \Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \quad \Gamma_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i,$$

где  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$  — пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике  $\gamma_{ij}$ . Отсюда уравнения геодезических имеют вид

$$\ddot{x}^0 + \Gamma_{ij}^0 \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad \ddot{x}^i + 2\Gamma_{j0}^i \dot{x}^j \dot{x}^0 + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (6.34)$$

Поэтому, если  $\dot{x}^i = 0$ , а  $\dot{x}^0 = 1$  в некоторый момент времени, то это условие выполняется и во все остальные моменты времени на карте, покрываемой этой системой координат. Это означает, что кривые  $x^i = \text{const}$  образуют конгруэнцию времениподобных геодезических, параметризованную пространственными координатами  $x^i$ . Значит такая система координат ограничена точками пересечения кривых конгруэнции. Сужая область значений  $x^i$  можно продлить интервал времени, на котором определена система координат, но не дальше чем до *каустик* или *фокальных гиперповерхностей*, то есть гиперповерхностей, образованных фокальными точками конгруэнции. Фокальные точки дают абсолютный предел продолжения синхронной системы координат и являются препятствием к интегрируемости уравнений геодезических. Внутри синхронной системы координат фокальные точки находятся из условия

$$\det(\gamma_{ij}) = 0. \quad (6.35)$$

Каустики являются гиперповерхностями, огибающими семейство кривых.

Покажем теперь, что в окрестности любой точки пространственно-временного многообразия можно построить синхронную систему координат. Пусть  $\{x^\mu\}$  — произвольная система координат в некоторой достаточно малой области пространства-времени  $U$ . Тогда собственное время  $\tau$ , которое связано с действием  $S$  свободно падающей частицы соотношением  $\tau = -S/m$ , как функция конечной точки  $x$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1. \quad (6.36)$$

При этом

$$\tau_{,\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (6.37)$$

Уравнение (6.36) имеет полный интеграл, зависящий от  $d$  параметров, причем один из этих параметров можно выбрать аддитивной константой, которую можно исключить. Поэтому оставим только  $d - 1$  параметр  $y^1, \dots, y^{d-1}$ :

$$\tau = f(y^1, \dots, y^{d-1}; x). \quad (6.38)$$

Геодезические определяются теперь системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i, \quad (6.39)$$

где  $z_1, \dots, z_{d-1}$  — новые константы. Давайте *выберем* эти константы равными нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \quad (6.40)$$

Этого всегда можно добиться, взяв решение уравнений (6.39) с произвольными  $z_i$  и переопределив функцию  $f \rightarrow f + z_i y^i$  (суммирование подразумевается). Такое переопределение переводит решение уравнения (6.36) в решение и эквивалентно сдвигу начального значения аффинного параметра  $\tau$  по отдельности для каждой геодезической.

Тогда равенства (6.38), (6.40) дают систему  $d$  уравнений, позволяющих выразить  $x^\mu$  через  $y^0 = \tau, y^1, \dots, y^{d-1}$  и наоборот. Рассмотрим бесконечно малый интервал  $dx^\mu$  и соответствующий ему интервал  $dy^\mu$ . Продифференцировав (6.38) и используя (6.40), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = dy^0.$$

Выражая дифференциал  $dx^\mu$  через частные производные по  $y_i$  при постоянных  $y^0, y^j$  ( $j \neq i$ ), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} = 0. \quad (6.41)$$

Далее с помощью (6.37) получаем

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= g_{\mu\nu} \left( g^{\mu\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^i \right) \left( g^{\nu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dy^0 + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= (dy^0)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} dy^0 dy^i + g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} dy^i dy^j. \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль в силу (6.41), и мы получаем

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \gamma_{ij} dy^i dy^j, \quad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}. \quad (6.42)$$

То есть действительно  $\{y^\mu\}$  дает синхронную систему отсчета, а система (6.38), (6.40) погружает ее в систему координат  $\{x^\mu\}$  общего вида.



## Лекция 7

### Слабое гравитационное поле

В этой лекции мы рассмотрим предел слабого гравитационного поля, то есть теорию гравитации в почти плоском пространстве. Такая задача возникает в двух случаях:

1. Когда компоненты тензора энергии-импульса малы, то есть, грубо говоря, в системах с малой плотностью вещества. К этому случаю относится и нерелятивистский предел, когда, помимо малости кривизны, еще и скорости частиц достаточно малы.
2. Когда мы изучаем гравитационное поле достаточно далеко от гравитирующих тел. В этом случае представляют интерес асимптотические разложения для метрики и кривизны. Мы увидим, как с их помощью можно узнать общую массу и момент импульса источника гравитации.

Кроме того, мы увидим, что уравнения слабого гравитационного поля содержат свободную динамическую часть, которая приводит к новому по сравнению с ньютоновской теорией эффекту — гравитационным волнам.

Приближение слабого гравитационного поля, вообще говоря, не предполагает малых скоростей движения частиц и наблюдателей. Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (7.1)$$

Тогда в первом приближении уравнения Эйнштейна можно считать линейными. Иными словами, гравитационное поле настолько слабо, что его самодействие пренебрежимо мало. Для этого, разумеется, тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \quad (7.2)$$

где  $l$  — характерные масштабы, на которых меняется метрика. На самом деле, это не значит, что компоненты тензора энергии-импульса должны удовлетворять этому условию во всем пространстве. Линеаризованные уравнения мы можем использовать достаточно далеко от областей с большой концентрацией масс, рассматривая области больших масс и сильного поля как «черные ящики», создающие определенное поле на своих границах.

Есть еще один важный момент. Если вещество имеет низкую плотность, но занимает область большого размера  $L$ , отклонения метрики от плоской будут расти к границам области. Так что мы должны потребовать

$$G|T^{\mu\nu}|L^2 \ll 1. \quad (7.3)$$

Что делать, если масштаб  $L$  не удовлетворяет этому условию? Тогда надо разбить пространство-время на области, в которых это условие удовлетворено, и на каждой из этих областей выбрать карту так, чтобы компоненты метрики на ней мало отклонялись от  $\eta_{\mu\nu}$ .

В линейном приближении удобно поднимать и опускать индексы с помощью фоновой метрики  $\eta_{\mu\nu}$ . Чтобы избежать путаницы, мы будем рисовать черточку над соответствующими индексами:  $h_{\nu}^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu}$  и т.д. В первом порядке по  $h_{\mu\nu}$  имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad |g| = 1 + h, \quad h = h_{\mu}^{\bar{\mu}}. \quad (7.4)$$

Для тензора Риччи в первом порядке получаем

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( -\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{,\mu\nu} \right), \quad (7.5)$$

где скобки означают симметризацию:  $a_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$ .

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} T \right) \quad (7.6)$$

выглядят пока еще довольно устрашающе. Дело не столько в его сложности, сколько в том, что он содержит существенную проблему. Представим выражение (7.5) в виде

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} h_{\lambda\kappa}, \quad (7.7)$$

где  $K$  — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2} \left( -\delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\nu}^{\kappa} \square + \delta_{\mu}^{\lambda} \eta^{\kappa\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\nu} + \delta_{\nu}^{\kappa} \eta^{\lambda\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\mu} - \eta^{\lambda\kappa} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right), \quad (7.8)$$

действующий на симметричных тензорах в пространстве Минковского. Здесь

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \quad (7.9)$$

— лапласиан в пространстве-времени Минковского (иногда его называют *даламбертианом*). Проблема состоит в том, что оператор  $K$  вырожден. Легко видеть, что любой тензор вида  $\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$  является его собственной функцией с нулевым собственным значением (*нулевой модой*). Это означает, что оператор  $K$  необратим, и метрика не определяется однозначно тензором Риччи или, в силу уравнений Эйнштейна, тензором энергии-импульса материи. На самом деле в этом нет ничего удивительного. Как мы уже не раз говорили, геометрия пространства-времени не меняется при произвольном преобразовании координат. Рассмотрим малое преобразование:  $x^{\mu} = x'^{\mu} + \xi^{\mu}$ . Метрика при таком преобразовании меняется как  $\delta_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$ . Близость метрики к плоской не фиксирует однозначно систему координат: остается свобода относительно преобразований той же малости, что и тензор  $h$ . В первом порядке имеем

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu}. \quad (7.10)$$

Полагая  $\varphi_{\mu} = \xi_{\bar{\mu}}$ , мы видим, что именно малые преобразования координат и вырождают оператор  $K$ . Чтобы снять это вырождение, нужно как-то ограничить класс допустимых решений или, как говорят физики, зафиксировать калибровку. Для этого нужно наложить дополнительные условия таким образом, чтобы общее решение получалось из решений, удовлетворяющих этим условиям, преобразованием (7.10). Наложим  $d$  условий

$$\psi_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}} = 0, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h. \quad (7.11)$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2} \psi, \quad \psi = \psi_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} = -\frac{d-2}{2} h. \quad (7.12)$$

При этих условиях все слагаемые в (7.5), кроме первого, сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}. \quad (7.13)$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (7.11) имеют вид волнового уравнения с распределенным источником:

$$\square \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (7.14)$$

Условия согласованности калибровки с этим уравнением

$$0 = \square \psi_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}} = -16\pi G T_{\bar{\nu},\mu}^{\bar{\mu}}$$

совпадает с уравнением непрерывности для тензора энергии-импульса в лидирующем порядке. Это значит, что эффекты обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и материей являются эффектами второго порядка по  $h_{\mu\nu}$  и лежат за пределами линейного приближения.

Рассмотрим теперь в рамках приближения слабого поля нерелятивистский предел, определяемый условиями:

- 1) скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам, большим чем характерные масштабы рассматриваемых областей;
- 2) плотность энергии совпадает с плотностью массы:  $T^{00} = \rho$ , а плотности импульса и напряжения малы:  $|T^{0i}|, |T^{ij}| \ll \rho$ .

Первое условие означает также, что мы можем пренебречь производными по времени от метрики и решать задачу как статическую:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_{00}(t, \mathbf{r}) &= 16\pi G\rho(t, \mathbf{r}), \\ \Delta\psi_{0i}(t, \mathbf{r}) &= \Delta\psi_{ij}(t, \mathbf{r}) = 0.\end{aligned}\tag{7.15}$$

Здесь  $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2$  — пространственный лапласиан. Время  $t$  в этом уравнении играет роль параметра. Решение уравнения Лапласа, стремящееся к нулю на бесконечности, хорошо известно:

$$\psi_{00}(t, \mathbf{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-3}}, \quad \psi_{0i}(t, \mathbf{r}) = \psi_{ij}(t, \mathbf{r}) = 0,\tag{7.16}$$

где  $S_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2} + 1)$  — площадь поверхности единичной гиперболы в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Это решение, очевидно, удовлетворяет калибровочному условию (7.11) с той же точностью, с какой мы можем пренебречь плотностью потока массы. Из (7.12) получаем  $h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}$  и  $h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}$ . Следовательно,

$$h_{00}(t, \mathbf{r}) = (d-3)h_{ii}(t, \mathbf{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-3}}.\tag{7.17}$$

Из формулы (4.8) мы знаем, что ньютоновский гравитационный потенциал равен  $\phi = \frac{1}{2}h_{00}$ . Однако пространственная часть метрики (7.17) не согласуется с (4.8), поскольку согласно этой формуле компоненты  $h_{ii}$  должны равняться нулю. На самом деле для нерелятивистской пробной частицы ( $v^2 \ll 1$ ), движущейся в слабом гравитационном поле ( $\phi \ll 1$ ), вклад  $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$  в действие является превышением точности. Действительно, для нерелятивистского действия частицы в гравитационном поле имеем

$$S = \int dt \left( -m + \left( 1 - \frac{2\phi(t, \mathbf{r})}{d-3} \right) \frac{mv^2}{2} - m\phi(t, \mathbf{r}) \right).$$

Очевидно, поправка к лагранжиану — порядка  $m\phi v^2 \ll m\phi, mv^2$ , то есть мала по сравнению с остальными членами. Иными словами, вклад  $h_{ii}$  пренебрежимо мал, поскольку в нерелятивистском пределе вклад в квадрат собственного времени, пропорциональный  $d\mathbf{r}^2$ , сам по себе мал по сравнению с  $dt^2$ . Если же мы хотим изучать движение релятивистской частицы в слабом гравитационном поле (даже созданном нерелятивистскими объектами), этим вкладом пренебрегать нельзя.

Итак, нерелятивистский потенциал системы масс  $m_i$  в точках  $\mathbf{r}_i$  равен

$$\phi(t, \mathbf{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|^{d-3}}.\tag{7.18}$$

При  $d = 4$  мы получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(t, \{\mathbf{r}_a\}) = \frac{1}{2} \sum_a \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_a} m_a \left( \phi(t, \mathbf{r}') + G \frac{m_a}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_a(t)|} \right) = -\sum_{a < b} G \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)|}.\tag{7.19}$$

Отсюда заключаем, что константа  $G$  в действии Эйнштейна—Гильберта равна гравитационной постоянной Ньютона.

Изучим теперь стационарные (не зависящие от времени) решения вне гравитирующих масс.<sup>1</sup> Мы не будем предполагать малости масс или нерелятивистских скоростей их движения, но будем считать, что гравитационное поле слабо в силу удаленности от источника. Кроме того, мы будем предполагать источник автономным, не находящимся под действием внешних по отношению к системе полей. В этом случае тензор  $\psi_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_i\psi_{0i} = 0, \quad \partial_i\psi_{ij} = 0.\tag{7.20}$$

Чтобы найти связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующих тел, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса  $\tau^{\mu\nu\lambda}$  и  $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$  через асимптотики решений. Отметим,

<sup>1</sup>Нестационарные решения мы будем изучать в следующих двух лекциях.

что условие  $\psi_{\mu,\nu}^{\bar{\nu}} = 0$  не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (7.10) не нарушает это условие, если

$$\square \xi^\mu = 0, \quad (7.21)$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta \xi^\mu = 0. \quad (7.22)$$

Такие преобразования мы будем называть *остаточными* калибровочными преобразованиями.

Будем искать решение уравнения Лапласа двух лидирующих порядков по  $r^{-1}$ . Функция  $r^{3-d}$  сама является решением уравнения Лапласа. Решения, которые спадают быстрее, даются просто производными этого решения. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \psi_{00} &= Ar^{3-d} + B^k \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \\ \psi_{0i} &= A^i r^{3-d} + B^{ik} \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \\ \psi_{ij} &= A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk} \partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik}. \end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{aligned} A^i \partial_i r^{3-d} &= A^{ij} \partial_j r^{3-d} = 0, \\ B^{ik} \partial_i \partial_k r^{3-d} &= B^{ijk} \partial_j \partial_k r^{3-d} = 0. \end{aligned}$$

Первая строчка немедленно дает  $A^i = A^{ij} = 0$ . Из второй строчки получаем, что<sup>2</sup>

$$B^{ik} = B^{[ik]} + C \delta^{ik}, \quad B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i \delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j \delta^{ik}.$$

Члены с символами Кронекера разрешены потому, что соответствующий вклад в левую часть калибровочного условия пропорционален функции  $\Delta r^{3-d} = 0$ .

Из последнего равенства нетрудно доказать, что  $B^{ijk} = 0$ ,  $C^i = 0$  и, таким образом,  $\psi_{ij} = 0$ . Выражения для  $\psi_{00}$  и  $\psi_{0i}$  можно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (7.22). Действительно, преобразованием<sup>3</sup>  $\xi^i = -B^i/A$ ,  $\xi^0 = 0$  можно устранить второй член в выражении для  $\psi_{00}$ , а преобразованием  $\xi^i = 0$ ,  $\xi^0 = -Cr^{3-d}$  устранить симметричную часть в  $B^{ik}$ .

Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \quad \psi_{0i} = B^{ik} \partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \quad \psi_{ij} = 0. \quad (7.23)$$

Осталось связать константы  $A$  и  $B^{ik}$  с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины  $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ , входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами  $\chi^{\mu 0kl}$ .

В компоненту  $\chi^{00kl}$  вносит вклад как  $\psi_{00}$ , так и  $\psi_{0i}$ , но, поскольку на больших расстояниях  $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$ , достаточно сохранить только вклад  $\psi_{00}$ . Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{00} g^{kl} - g^{0k} g^{0l}).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки  $\psi_{00}$ , а второй — только  $\psi_{0i}$ . Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Первая поправка в  $|g|$  также содержит  $\psi_{00}$ , так что членами, содержащими  $\psi_{0i}$  пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G} (1 - Ar^{3-d}), \quad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \quad (7.24)$$

Подставляя в (6.29) получаем полную массу гравитирующей системы

$$M = P^0 = \oint df_{0i} \tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} \oint \frac{df_{0i} x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \quad (7.25)$$

<sup>2</sup>Квадратные скобки означают антисимметризацию:  $a_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S^n} (-1)^\sigma a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$ .

<sup>3</sup>Обратим внимание, что это преобразование не является малым в указанном выше смысле.

Вклад  $\psi_{0i}$  в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \quad (7.26)$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (7.16). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \quad (d=4). \quad (7.27)$$

Теперь вычислим  $\chi^{i0kl}$ :

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{0i} g^{kl} - g^{ik} g^{0l}).$$

Оба слагаемых содержат множитель вида  $g^{0i} = -h^{\bar{0}i} = h_{0i} = \psi_{0i}$ , поэтому мы можем положить  $|g| = 1$ ,  $g^{ik} = -\delta^{ik}$ . Находим

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{(\delta^{kl} B^{im} - \delta^{ik} B^{lm}) x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{B^{im} (\delta^{km} r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Так как  $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$  интеграл по поверхности для  $P^i$  обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0, \quad (7.29)$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (6.31) дает

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}} J^{ij}. \quad (7.30)$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \quad (d=4). \quad (7.31)$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов»  $h_{\mu\nu}$  на больших расстояниях мы можем узнать общие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

### Задачи

1. Покажите, что для оператора  $K$ , определенного в (7.8),  $Kh = 0$ , если  $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$ .
2. Выведите формулы (7.24), (7.28).
3. Найдите усредненную по времени асимптотику метрики на большом расстоянии от системы двух тел масс  $m_1$  и  $m_2$ , вращающихся вокруг общего центра масс, если дана относительная скорость тел  $v_{\text{II}} \ll 1$  в точке наибольшего сближения и расстояние  $r_{\text{II}}$  между ними в этой точке.

4. Выведите формулу (7.30).

5\*. Рассмотрим сферически симметричную тонкую сферу массы  $M$  и радиуса  $R$ , вращающуюся как твердое тело с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ ,  $\Omega R \ll 1$ . В предположении применимости линейного приближения ( $GM \ll l \ll R$ , где  $l$  — толщина сферы) найдите создаваемое сферой гравитационное поле (метрику) в линейном приближении в первом порядке по  $\Omega R$  и покажите, что метрика внутри сферы может быть описана как плоская метрика, вращающаяся с угловой скоростью

$$\omega = \frac{4}{3} \frac{GM\Omega}{R}.$$

(Для этого вам надо будет в сферических координатах сделать замену координат  $\varphi = \varphi' + \omega t$  и подобрать  $\omega$  так, чтобы метрика приобрела плоский вид  $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi'^2)$ .)

## Семинар 7

### Полная энергия стационарной системы

Пусть псевдориманово пространство имеет времениподобное векторное поле Киллинга  $\xi$ , то есть векторное поле, удовлетворяющего условию  $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$ , времениподобное во всех точках. Мы можем выбрать координаты так, чтобы время текло вдоль этого вектора Киллинга:  $\xi = \partial_0$  (т.е.  $\xi^0 = 1, \xi^i = 0$ ). В этой системе координат метрика стационарна:  $g_{\mu\nu,0} = 0$ .

Для стационарной метрики можно показать, что

$$\sqrt{|g|}R_0^0 = \partial_i(\sqrt{|g|}g^{0\mu}\Gamma_{0\mu}^i). \quad (7.32)$$

Предположим, что поле создается массами, расположенными в конечном объеме, так что на достаточно большом расстоянии поле становится слабым. Из (7.32) следует, что пространственный интеграл  $\int d^{d-1}x \sqrt{|g|}R_0^0$  сводится к поверхностному интегралу. Подставляя в него асимптотическое выражение (7.23) и учитывая (7.26), получаем, что этот интеграл выражается через массу. Согласно уравнениям Эйнштейна,  $R_0^0$  выражается через тензор энергии-импульса. Окончательно получаем, что полная энергия (=масса) вещества и гравитационного поля может быть выражена через интеграл от тензора энергии-импульса материи по пространственному объему:

$$M = \int d^{d-1}x \sqrt{|g|} \left( T_0^0 - \frac{1}{d-3} T_i^i \right). \quad (7.33)$$

В частности, в системе координат в которой  $g_{0i} = 0$  в четырехмерном пространстве-времени для неподвижной (в данной системе координат) газообразной среды имеем

$$M = \int d^3x \sqrt{|g|}(\rho + 3p),$$

где  $\rho$  — плотность энергии, а  $p$  — давление.

Все это верно, конечно, только в том случае, если гиперповерхность  $x^0 = \text{const}$  является гладким многообразием, гладко вложенным в пространство-время и топологически изоморфным  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Как мы увидим ниже, это условие не выполняется в случае черной дыры, где эта поверхность имеет полость, из-за чего нельзя воспользоваться теоремой Гаусса. Черная дыра может быть даже полностью вакуумным решением, которое, тем не менее, ведет себя как объект конечной массы.

## Лекция 8

### Гравитационные волны

До сих пор мы рассматривали специальное решение линейной системы (7.14), (7.11). Мы рассмотрели стационарный случай, в котором само условие стационарности и условие достаточно быстрого убывания на бесконечности ( $\sim r^{3-d}$ ) выделяло определенное решение. В следующей лекции мы рассмотрим специальное решение, определенное условиями запаздывания и убывания. Но мы знаем, что общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого специального решения и общего решения однородной системы. Последнее мы и рассмотрим в этой лекции. В случае линеаризованного уравнения Эйнштейна однородная система состоит из волнового уравнения и условия калибровки:

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0, \quad \psi_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}} = 0. \quad (8.1)$$

Мы ослабим ограничения и разрешим решения этого уравнения во всем пространстве, которые не спадают на бесконечности. Сначала найдем комплексные решения в виде плоских волн, а потом наложим условие вещественности на их комбинации. Именно, подставляя функции  $\psi_{\mu\nu}$  в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu} e^{-ikx}, \quad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \quad (8.2)$$

в волновое уравнение, получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm \sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm |\mathbf{k}|, \quad \mathbf{k} = k^{\bar{i}} \partial_i, \quad (8.3)$$

а подставляя в условие калибровки, получаем уравнение пространственно-временной поперечности

$$k^{\bar{\mu}} A_{\mu\nu} = 0. \quad (8.4)$$

Общее решение имеет вид линейной комбинации всех возможных плоских волн

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=\pm} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} A_{\mu\nu}^{\varepsilon}(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon(|\mathbf{k}|x^0 - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (8.5)$$

$$|\mathbf{k}| A_{0\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) + k^{\bar{i}} A_{i\nu}^{\pm}(\mathbf{k}) = 0, \quad A_{\nu\mu}^{\pm}(\mathbf{k}) = A_{\mu\nu}^{\pm}(\mathbf{k}), \quad A_{\mu\nu}^{-}(\mathbf{k}) = (A_{\mu\nu}^{+}(\mathbf{k}))^{*}.$$

Последнее равенство во второй строчке представляет собой условие вещественности решения.

Рассмотрим одну монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси  $x^1$ , то есть с  $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$ ,  $k^{\bar{a}} = 0$  ( $a \geq 2$ ):

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \text{Re } A_{\mu\nu} e^{-i\omega(x^0 - x^1)}. \quad (8.6)$$

Иными словами  $A_{\mu\nu}^{+}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{d-1} A_{\mu\nu} \delta(\mathbf{k} - \omega \partial_1)$ . Для удобства в этой лекции мы будем обозначать индексы 0, 1 начальными буквами греческого алфавита, а индексы 2, ...,  $d-1$  — латинского:

$$\alpha, \beta, \dots = 0, 1; \quad a, b, \dots = 2, \dots, d-1.$$

Условие калибровки (7.11) дает  $d$  уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \quad (8.7)$$

Таким образом, из  $d(d+1)/2$  величин  $A_{\mu\nu}$  осталось  $d(d-1)/2$ . Тем не менее, количество физически различных поляризаций меньше. Как мы уже отмечали, условие (7.11) не фиксирует калибровку полностью. Остаются еще преобразования

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^{\lambda}_{,\lambda}. \quad (8.8)$$

удовлетворяющие уравнению (7.21):  $\square \xi^{\mu} = 0$ . Возьмем вектор  $\xi^{\mu}$  вида

$$\xi^{\mu} = \text{Re } X^{\mu} e^{-i\omega(x^0 - x^1)}. \quad (8.9)$$

Из (8.8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - i\omega(X^0 + X^1), \\ A'_{0a} &= A_{0a} + i\omega X^a, \\ A'_{ab} &= A_{ab} - i\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Мы видим, что калибровочные преобразования позволяют устранить еще  $d$  компонент. Например, положив

$$X^0 + X^1 = -i\omega^{-1}A_{00}, \quad X^a = i\omega^{-1}A_{0a}, \quad X^0 - X^1 = -\frac{i\omega^{-1}}{d-2} \sum_{a=1}^{d-2} A_{aa},$$

мы получаем  $A'_{\alpha\mu} = 0$ ,  $A'^{\bar{\mu}} = 0$ , то есть в результате калибровочного преобразования волна стала поперечной и бесследовой. Всего «живых» компонент остается  $d(d-3)/2$ . Так как числа  $A_{\mu\nu}$  комплексные, имеем  $d(d-3)$  начальных данных для плоской волны с импульсом  $\mathbf{k}$ .

Для описания гравитационной волны удобно выбрать  $d(d-3)/2$  комбинаций компонент, инвариантных относительно остаточных калибровочных преобразований:  $\psi_{ab}$  ( $a < b$ ) и  $\psi_{aa} - \psi_{a+1,a+1}$  ( $a = 2, \dots, d-2$ ). В частности, в четырехмерном пространстве это  $\psi_{23}$  и  $\psi_{22} - \psi_{33}$ . Вместе с их производными по времени они образуют  $d(d-3)$  функции пространственных координат, необходимые для решения задачи Коши. В четырехмерном пространстве-времени нужно задать четыре функции. Решения однородного уравнения в размерностях  $d \leq 3$  полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы. Хотя мы рассматривали слабые возмущения плоского пространства-времени, выводы, касающиеся задачи Коши в ОТО, имеют общий характер.

Изучая плоские волны, мы можем рассуждать по-другому. Рассмотрим общее решение уравнений (8.1), не зависящее от координат  $x^a$ . В плоскости  $(x^0, x^1)$  удобно перейти к координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ . Тогда

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})dx^+ dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})dx^a dx^b. \quad (8.11)$$

Уравнения (8.1) для постоянных по  $x^a$  функций принимают вид

$$\partial_+ \partial_- \psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_+ \psi_{-\mu} + \partial_- \psi_{+\mu} = 0. \quad (8.12)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}^R(x^-) + \psi_{\mu\nu}^L(x^+). \quad (8.13)$$

Функция  $\psi_{\mu\nu}^R(x^-)$  описывает волну, движущуюся направо, а функция  $\psi_{\mu\nu}^L(x^+)$  — волну, движущуюся налево. Калибровочное условие дает  $\psi_{-\mu}^L(x^+) = -\psi_{+\mu}^R(x^-)$ . Левая часть этого уравнения зависит только от  $x^+$ , а правая — только от  $x^-$ . Это значит, что обе функции постоянны. Исключая линейные решения для  $\psi_{\mu\nu}^{R,L}$  как не соответствующие физическому условию малости и постоянные ненулевые решения, как отвечающие другой задаче (мы еще обсудим это в следующей лекции), находим:

$$\psi_{-\mu}^L = \psi_{+\mu}^R = 0. \quad (8.14)$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием вида (8.8) можно обратить в нуль компоненты  $\psi_{+\mu}^L, \psi_{-\mu}^R$  и следы  $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}^{R,L}$  (поперечная калибровка). Тогда  $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$  и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h_{ab}^R(x^-) + h_{ab}^L(x^+), \quad h_{\alpha\mu} = 0, \quad \eta^{ab} h_{ab}^{R,L} = 0. \quad (8.15)$$

Мы видим, что эволюция системы волн определяется  $d(d-3)$  функциями  $h_{ab}^{R,L}$  ( $a < b$ ),  $h_{aa}^{R,L} - h_{a+1,a+1}^{R,L}$  ( $2 \leq a \leq d-2$ ) в согласии с нашими предыдущими соображениями.

Оставив только одну движущуюся направо волну, изучим, как меняются под ее влиянием пространственные расстояния. Так как поперечной калибровке отвечает синхронная система координат ( $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$ ), имеем

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})dx^a dx^b. \quad (8.16)$$



Если мы возьмем  $(d-2)$ -мерную сферу в плоскости, перпендикулярной волне, то функции  $h_{ab}$  описывают небольшие центрально-симметричные деформации такой сферы, причем величина  $h_{aa}$  дает нам уменьшение диаметра сферы в направлении оси  $x^a$ , а  $h_{ab}$  ( $a \neq b$ ) дает уменьшение диаметра сферы в диагональном направлении  $x^a = x^b$  в плоскости  $x^a x^b$  и увеличение диаметра в перпендикулярном ему диагональном направлении  $x^a = -x^b$ . В силу бесследовости объем сферы в первом порядке по  $h_{ab}$  сохраняется:  $\det(\gamma_{ab}) = \det(\delta_{ab} - h_{ab}) \simeq 1 - \text{tr}(h_{ab}) = 1$ .

Важно, что эта  $(d-2)$ -мерная сфера может быть физически реализована как система частиц. Именно, свободные пробные частицы, неподвижные в системе координат, в которой реализуется поперечная калибровка, остаются неподвижными в этой системе координат в течение всего времени прохождения волны. Действительно, в силу калибровки  $h_{0\mu} = 0$  имеем  $\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}) = 0$ . Это значит, что уравнение движения свободной частицы имеет вид

$$\ddot{x}^\mu = -2\Gamma_{i0}^\mu \dot{x}^i \dot{x}^0 - \Gamma_{ij}^\mu \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

То есть, если частица имеет нулевую скорость ( $\dot{x}^i = 0$ ) в какой-то момент времени, то она имеет и нулевое ускорение ( $\ddot{x}^i = 0$ ). Значит, она будет оставаться неподвижной в поле волны сколь угодно долго.

Рассмотрим подробно случай  $d = 4$ . Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \quad h_\times = h_{23}. \quad (8.17)$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_\perp^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times dx^2 dx^3. \quad (8.18)$$

Рассмотрим маленькую окружность радиуса  $dr$  в плоскости  $x^2 x^3$  (точнее, в соответствующем касательном пространстве), перпендикулярной волновому вектору. Будем задавать точку на окружности углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $x^2$ . Тогда координаты этой точки отличаются от координат центра окружности на величины

$$dx^2 = dr \cos \theta, \quad dx^3 = dr \sin \theta.$$

Отсюда имеем

$$dl_\perp = dr \left( 1 - \frac{h_+}{2} \cos 2\theta - \frac{h_\times}{2} \sin 2\theta \right) = dr \left( 1 - \frac{h_*}{2} \cos 2(\theta - \varphi) \right), \quad (8.19)$$

где

$$h_+ = h_* \cos 2\varphi, \quad h_\times = h_* \sin 2\varphi.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Предположим, у нашей волны  $h_+$  и  $h_\times$  пропорциональны (в случае монохромной волны это значит, что отношение  $A_{22}/A_{23}$  вещественно), то есть  $\varphi = \text{const}$ . Тогда кольцо в плоскости  $x^2 x^3$ , будет сжиматься и растягиваться вдоль прямой, повернутой под углом  $\varphi$  к оси  $x^2$ , и одновременно растягиваться и сжиматься вдоль перпендикулярной ей прямой. Мы будем называть такую волну волной с линейной (или плоской) поляризацией. В отличие от линейной поляризации электромагнитных волн угол  $\varphi$  наклона плоскости поляризации определен не по модулю  $\pi$ , а по модулю  $\frac{\pi}{2}$ . Действительно, правая часть (8.19) не меняется при замене  $\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2}$ ,  $h_* \rightarrow -h_*$ . Иными словами, плоская поляризация определяется двумя перпендикулярными плоскостями, параллельным лучу.

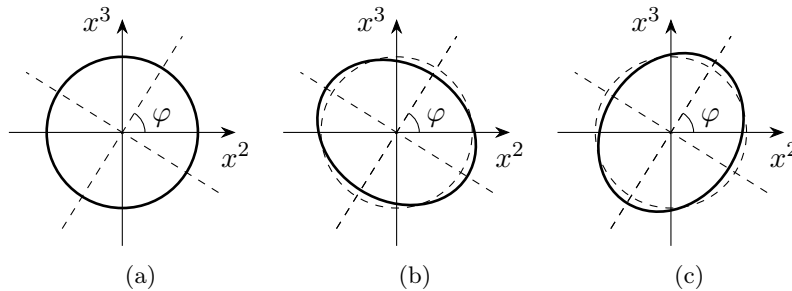


Рис. 8.1. Изменение формы пространственной окружности в линейно поляризованной гравитационной волне в поперечной плоскости: (а) исходная окружность до того, как ее достигла волна; (б) фаза  $h_* > 0$ ; фаза  $h_* < 0$  (в случае монохромной волны, например, через полупериод после фазы (б)).

Наличие двух независимых коэффициентов  $h_+$  и  $h_\times$  означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с  $\varphi = 0$  (определяемой функцией  $h_+$ ) и с  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  (определяемой функцией  $h_\times$ ).

Теперь выясним, какие энергию и импульс переносят гравитационные волны. Рассмотрим плоскую гравитационную волну в виде (8.15). Наша цель состоит в том, чтобы вычислить псевдотензор энергии-импульса. Согласно определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T_{\text{грав}}^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \quad (8.20)$$

Казалось бы, можно положить  $T_{\text{грав}}^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu} = 0$ , но это не так. Дело в том, что мы рассматриваем гравитационные волны в линейном приближении, а плотности и потоки энергии и импульса — величины *второго порядка* по  $h_{\mu\nu}$ . Наше решение обращает в нуль только вклад первого порядка в  $T_{\text{грав}}^{\mu\nu}$ , а вклад второго порядка оказывается ненулевым. Есть два способа решить эту проблему. Первый способ состоит в том, чтобы получить явную формулу для  $t^{\mu\nu}$  и увидеть, что она представляет собой линейную комбинацию членов, содержащих произведения вида  $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}g^{\rho\sigma}{}_{,\kappa}$ . В первом порядке  $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = -h^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$ , поэтому все эти произведения — второго порядка, а, значит, во всех коэффициентах можно заменить  $g_{\mu\nu}$  на  $\eta_{\mu\nu}$ . Этот метод дает правильный ответ, но требует дополнительного обоснования. Поэтому мы используем другой, более последовательный метод. Мы получим уравнения для поправок второго порядка в гравитационной волне и, подставив их в выражение для  $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ , покажем что в выражении для псевдотензора энергии-импульса  $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$  соответствующие вклады можно выразить через решения линейного уравнения (8.1).

Давайте рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (8.21)$$

Здесь  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  — решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, в нашей задаче — (8.1), а  $h_{\mu\nu}^{(k)}$  — поправка  $k$ -го порядка. Мы немного изменим обозначения: буквы  $h, \psi$  без индексов теперь будут обозначать матрицы, отвечающие соответствующим тензорам, а следы будут обозначаться значком  $\text{tr}$ :  $\text{tr} a = a_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu}$ ,  $(ab)_{\mu\nu} = a_{\mu}{}^{\lambda} b_{\lambda\nu}$  и т.п. Отсюда легко находим:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\bar{\mu}\bar{\nu}} - h^{(2)\bar{\mu}\bar{\nu}} + (h^{(1)2})^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \dots, \\ |g| &= 1 + \text{tr} h^{(1)} + \text{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2} \left( (\text{tr} h^{(1)})^2 - \text{tr} h^{(1)2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8.22)$$

В нашей задаче в силу калибровочных условий  $h_{\alpha\nu}^{(1)} = 0$ ,  $\text{tr} h^{(1)} = 0$ . Отсюда получаем во втором порядке

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \\ g^{\alpha b} &= -h^{(2)\bar{\alpha}\bar{b}}, \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\bar{a}\bar{b}} - h^{(2)\bar{a}\bar{b}} + (h^{(1)2})^{\bar{a}\bar{b}}, \\ |g| &= 1 + \text{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr} h^{(1)2}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля. При этом на поправки второго порядка наложим такое же калибровочное условие, как и на поправки первого порядка:

$$\psi^{(2)\bar{\mu}\bar{\nu}}{}_{,\nu} = 0, \quad \psi_{\mu\nu}^{(2)} = h_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \text{tr} h^{(2)}. \quad (8.24)$$

Вклады  $h^{(2)}$  входят в выражения до второго порядка только линейно и отдельно от  $h^{(1)}$ . Для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa} (h_{\mu\kappa,\nu}^{(2)} + h_{\nu\kappa,\mu}^{(2)} - h_{\mu\nu,\kappa}^{(2)}) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}, \quad (8.25)$$

где  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  содержат только вклады  $h_{\mu\nu}^{(1)}$ . Нетрудно проверить, что

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\bar{\lambda}\kappa})h_{\kappa\nu,\alpha}^{(1)}, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^\lambda = -\frac{1}{2}h_{ab}^{(1),\lambda}, \quad (8.26)$$

Отсюда следует, что единственные ненулевые компоненты равны

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha b}^c = \frac{1}{2}(\eta^{cd} - h^{(1)\bar{c}d})h_{bd,\alpha}^{(1)}, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^\gamma = -\frac{1}{2}h_{ab}^{(1),\gamma}. \quad (8.27)$$

Кроме того, для следа символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} \left( \text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right)_{,\alpha}, \quad \Gamma_{a\lambda}^\lambda = 0. \quad (8.28)$$

Отсюда во втором порядке немедленно получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}^{(2)} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \quad (8.29)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \text{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \text{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}), & \tilde{R}_{ab} &= 0, & \tilde{R}_{ab} &= \frac{1}{2}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}, \\ \tilde{R} &= \frac{3}{4} \text{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha}). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Так как это уже выражения второго порядка, мы можем здесь поднимать индексы с помощью  $\eta^{\mu\nu}$ , а  $|g|$  в коэффициентах при тензоре Риччи положить равным единице.

Из уравнений Эйнштейна в вакууме  $R_{\mu\nu} = 0$  мы немедленно получаем уравнение для поправки второго порядка к метрике:

$$\square h_{\mu\nu}^{(2)} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}. \quad (8.31)$$

Для плоской волны имеем

$$\square h_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \text{tr } h_{,\alpha}^{(1)}h_{,\beta}^{(1)} \right), \quad (8.32a)$$

$$\square h_{ab}^{(2)} = 0, \quad (8.32b)$$

$$\square h_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \square (h^{(1)2})_{ab}. \quad (8.32c)$$

Также имеем

$$\square \text{tr } h^{(2)} = \frac{3}{4} \square \text{tr } h^{(1)2}. \quad (8.33)$$

Мы всюду учитывали уравнение движения для вклада первого порядка  $\square h_{ab}^{(1)} = 0$ . Подняв индексы в (8.32a) и вычислив дивергенцию нетрудно привести ее к виду половины градиента правой части (8.33) и, тем самым, убедиться, что условие калибровки (8.24) согласовано с уравнениями движения.

Найдем величины  $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ . Подставляя (8.23) в определение (6.22), получаем

$$\begin{aligned} 16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left( 1 + \text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right) (\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}) \\ &\quad - h^{(2)\bar{\alpha}\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta}h^{(2)\bar{\gamma}\delta} + h^{(2)\bar{\alpha}\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\bar{\beta}\delta}, \end{aligned} \quad (8.34a)$$

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} = -h^{(2)\bar{\alpha}b}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\bar{b}\delta}, \quad (8.34b)$$

$$16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} = \left( 1 + \text{tr } h^{(2)} - \frac{1}{2} \text{tr } h^{(1)2} \right) \eta^{ab}\eta^{\gamma\delta} - \left( h^{(1)\bar{a}b} + h^{(2)\bar{a}b} - (h^{(1)2})^{\bar{a}b} \right) \eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab}h^{(2)\bar{\gamma}\delta}. \quad (8.34c)$$

Чтобы получить  $t^{\mu\nu}$ , надо продифференцировать это по  $x^\gamma, x^\delta$ . Явно выполним вычисление для второй строчки:

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}_{,\gamma\delta} = -\square h^{(2)\bar{\alpha}b} + (h^{(2)\bar{b}\delta}_{,\delta})^{\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения движения (8.32b), а второе слагаемое — в силу калибровочного условия (8.24). Мы получили естественный результат, что плотность импульса (= плотность потока энергии) в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, равна нулю. Аналогично, применяя уравнения движения (8.32) и калибровочное условие (8.24) к производным от правых частей (8.34a) и (8.34c) и опуская индекс (1) и черточки над индексами, получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \left( \text{tr } h^{\cdot\alpha} h^{\cdot\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \square \text{tr } h^2 \right), \quad (8.35a)$$

$$t^{ab} = 0, \quad (8.35b)$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G} \left( \square (h^2)^{ab} - \frac{1}{4} \eta^{ab} \square \text{tr } h^2 \right). \quad (8.35c)$$

Немного удивляют ненулевые поперечные компоненты напряжений  $t^{ab}$ , однако вспомним, что этот результат получен для произвольного двумерного решения уравнения (8.1), состоящего из двух встречных волн:

$$h_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}^R(x^0 - x^1) + h_{\mu\nu}^L(x^0 + x^1),$$

Если мы положим  $h_{\mu\nu}^L = 0$  (волна распространяется только вправо), все члены, содержащие даламбертиан  $\square$  в правых частях, обратятся в нуль, так как будут выражаться даламбертианом от функций одной световой координаты  $x^- = x^0 - x^1$ . Таким образом, для распространяющейся вправо волны получим

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}, \quad t^{\alpha b} = 0, \quad t^{ab} = 0. \quad (8.36)$$

В лоренц-инвариантном виде можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \text{tr } h^{\cdot\mu} h^{\cdot\nu} = \frac{1}{32\pi G} h_{\kappa}^{\lambda,\mu} h_{\lambda}^{\kappa,\nu}. \quad (8.37)$$

Эту формулу мы используем на следующей лекции, чтобы узнать потери энергии движущегося тела на излучение гравитационных волн.

### Задачи

**1.** Покажите, что «остаточным» калибровочным преобразованием вида (8.8) решение (8.13) с калибровочным условием (8.14) можно привести к виду (8.15). (N.B.! При решении задачи не надо использовать преобразование Фурье.)

**2.** Для монохромной волны (8.6) найдите такое соотношение на  $A_{22}, A_{23}$ , при котором угол  $\varphi$  меняется линейно со временем (*круговая поляризация*). Сколько имеется таких круговых поляризаций?

**3.** Выведите формулы (8.25), (8.26), (8.29), (8.30), со всеми подробностями. Покажите, что уравнения (8.32) совместны с калибровочным условием (8.24).

**4.** Из формулы (8.34) выведите (8.36) в предположении  $h_{\mu\nu}^L = 0$ .

**5\*.** Покажите, что, если подставить в правую часть (8.20) вместо  $R_{\mu\nu}$  величины  $\tilde{R}_{\mu\nu}$ , а вместо  $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$  величины  $\tilde{\chi}^{\mu\nu\lambda\kappa}$ , отличающиеся тем, что в них  $h^{(2)}$  положено равным нулю, ответ будет совпадать с (8.35). Объясните, почему ответы совпали.

### Семинар 8

#### Сильная гравитационная волна

Рассмотрим решение уравнений гравитационного поля в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим  $x^-$ :

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \quad (8.38)$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \quad x^- = \varphi^-(x'^-), \quad (8.39)$$

где буква  $i$  пробегает все остальные значения, кроме  $-$ . При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot{\varphi}^- g_{--} + 2\dot{\varphi}^i g_{-i})\dot{\varphi}^- + g_{ij}\dot{\varphi}^i\dot{\varphi}^j, \quad g'_{-i} = \dot{\varphi}^- g_{-i} + \dot{\varphi}^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \quad (8.40)$$

где точкой мы обозначили производную по  $x'^-$ . Если  $\det(g_{ij}) \neq 0$ , можно преобразованием (8.39) добиться того, чтобы  $g'_{-i} = 0$ . После этого мы можем применить такое же преобразование с  $\varphi'^i = 0$ , чтобы добиться  $g''_{--} = 1$ . Тогда координата  $x''^-$  есть временная координата в синхронной системе координат. Нас этот случай интересовать не будет.

Пусть  $\det(g_{ij}) = 0$ . Пусть  $(g^i)$  есть такой вектор, что  $g_{ij}g^j = 0$ . Выберем одну из координат (обозначим ее  $x^+$ ), для которой  $g^+ \neq 0$ . Изменяя норму  $(g^i)$  мы можем положить  $g^+ = -1$ . Полагая  $a, b = 2, \dots, d-1$ , получаем

$$g_{a+} = g_{ab}g^b, \quad g_{++} = g_{ab}g^a g^b. \quad (8.41)$$

Более высокого вырождения не может быть, поэтому  $\det(g_{ab}) \neq 0$ . С помощью преобразования (8.39) с любыми функциями  $\varphi^\pm$  можно добиться того, чтобы  $g'_{-a} = 0$ , а затем, подобрав подходящим образом  $\dot{\varphi}'^+$  и  $\dot{\varphi}'^-$  при условии  $\dot{\varphi}'^a = -g^a \dot{\varphi}'^+$ , можно добиться, чтобы  $g''_{--} = 0$ , а  $g''_{-+} = \frac{1}{2}$ . Опуская штрихи, получаем

$$g_{--} = 0, \quad g_{-+} = \frac{1}{2}, \quad g_{-a} = 0, \quad a = 2, \dots, d-1. \quad (8.42)$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a dx^+)(dx^b + g^b dx^+). \quad (8.43)$$

Вычислим тензор Риччи вдоль направлений  $\partial_a$ :

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \quad (8.44)$$

Так как согласно вакуумным уравнениям движения  $R_{ab} = 0$ , мы немедленно находим, что  $\dot{g}^a = 0$ , то есть  $g^a = \text{const}$ . Поэтому линейным преобразованием  $x^a + g^a x^+ \rightarrow x^a$  мы можем привести метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) dx^a dx^b. \quad (8.45)$$

Ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{b-}^a = \frac{1}{2}\kappa_b^a = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \quad \Gamma_{ab}^+ = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \quad (8.46)$$

Тогда  $(--)$ -компонента уравнения Эйнштейна имеет вид

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_a^a - \frac{1}{4}\kappa_a^b \kappa_b^a = -\frac{1}{2}g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot{g}_{bc}g^{cd}\dot{g}_{da} = 0. \quad (8.47)$$

Это — единственное уравнение на компоненты  $g_{ab}$ . Поэтому  $d(d-3)/2$  из них можно выбрать произвольно, и только на оставшуюся компоненту писать уравнение. Удобно это сделать в виде:

$$g_{ab} = -\chi^2 \gamma_{ab}, \quad \det(\gamma_{ab}) = 1. \quad (8.48)$$

Из последнего условия следует, что  $\gamma^{ab}\dot{\gamma}_{ab} = 0$ , где  $\gamma^{ab}$  — матрица обратная к  $\gamma_{ab}$ . Для  $\chi$  получается замкнутое уравнение второго порядка:

$$\ddot{\chi} = \frac{1}{4(d-2)}\dot{\gamma}^{ab}\dot{\gamma}_{ab}\chi. \quad (8.49)$$

Теперь введем переменные

$$x^0 = \frac{x^+ + x^-}{2}, \quad x^1 = \frac{x^+ - x^-}{2}.$$

Это значит, что если мы задали произвольные функции  $\gamma_{ab}(x^0 = 0, x^1, \dots, x^{d-1}) = \gamma_{ab}(x^- = -x^1)$  с условием  $\det(\gamma_{ab}) = 1$ , то есть всего  $d(d-3)/2$  произвольные функции, и два числа  $\chi(0)$ ,  $\dot{\chi}(0)$ , то мы полностью задали эволюцию системы. Калибровочным преобразованием (8.39) всегда можно добиться

того, чтобы  $\chi(0) = 1$ ,  $\dot{\chi}(0) = 0$ . Поэтому достаточно задать  $d(d-3)/2$  функций. Другие  $d(d-3)/2$  функций уже «съедены» условием того, что волна движется в одну сторону (зависит только от  $x^-$ ).

Рассмотрим опять слабую волну  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$  тогда  $\chi(x^-) \simeq 1$  и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Величина под интегралом, усредненная по времени, есть, в сущности, интенсивность волны. Если эта интенсивность не меняется,  $\chi$  по мере движения волны буде убывать по закону  $\chi \simeq 1 - \text{const} \cdot t^2$ . Хотя этот закон будет меняться, наступит момент  $t_0$ , когда  $\chi(t_0) = 0$ . В окрестности этой области имеем

$$ds^2 = dx^- dx^+ - A^2(x^- - t_0)^2 \delta_{ab} dx^a dx^b. \quad (8.50)$$

Казалось бы, мы имеем особенность. Однако замена переменных

$$x^- = y^- + t_0, \quad x^a = \frac{y^a}{Ay^-}, \quad x^+ = y^+ - \frac{\delta_{ab} y^a y^b}{y^-} \quad (8.51)$$

разрешает эту особенность:

$$ds^2 = dy^- dy^+ - \delta_{ab} dy^a dy^b. \quad (8.52)$$

Поэтому на самом деле распространение гравитационной волны не приводит к особенности метрики пространства-времени.

## Лекция 9

### Излучение гравитационных волн

Мы убедились в том, что гравитационные волны являются свободными решениями уравнений гравитационного поля. Теперь нас будут интересовать гравитационные волны как вынужденные решения. Мы рассмотрим систему частиц, совершающих движение с небольшой скоростью в конечном объеме и найдем «вынужденное» решения уравнения (7.14). Мы увидим, что создаваемое частицей на больших расстояниях гравитационное поле описывается гравитационными волнами. Мы будем решать эту задачу в размерности  $d = 4$  по двум причинам. Во-первых, потому что эта задача физически интересна. Во-вторых, потому что интересующее нас *запаздывающее* решение особенно просто в четырехмерном случае: оно зависит только от значения тензора энергии-импульса в момент времени, упреждающий момент наблюдения на промежуток времени, за который волна проходит от источника до точки наблюдения.

Итак, решение уравнения (7.14) как функционал от тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  называется запаздывающим, если оно удовлетворяет следующему условию. Возьмем две функции  $T_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$  и  $T'_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$ , такие, что  $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$  для всех  $\mathbf{r}$  при  $t < t_0$ , тогда соответствующие запаздывающие решения  $\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$  и  $\psi'_{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$  тоже совпадают при  $t < t_0$ . Более того, если  $T_{\mu\nu}$  и  $T'_{\mu\nu}$  различаются в какой-то области пространства-времени, то решения не различаются вне светового конуса будущего этой области. Физически это значит, что мы ищем решение, причинно-зависимое от тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ .

В произвольной размерности решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -16\pi G \int_{-\infty}^t dt' \int d^{d-1}x' G^R(t-t', |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) T_{\mu\nu}(t', \mathbf{r}'), \quad (9.1)$$

где *запаздывающая функция Грина*  $G^R(t, \mathbf{r})$  представляет собой решение уравнения

$$\square G^R(t, \mathbf{r}) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (9.2)$$

с начальным условием

$$G^R(t, \mathbf{r}) = 0 \text{ при } t < r \equiv |\mathbf{r}|. \quad (9.3)$$

Запаздывающую функцию Грина можно построить так. Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \quad (9.4)$$

Подставляя это в уравнение (9.2) и учитывая, что

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}, \quad (9.5)$$

получаем  $(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1$  и, следовательно,

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \quad (9.6)$$

В этом виде решение еще недоопределено. Действительно, при интегрировании по  $k^0$  в (9.4) полюс в точках  $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$  можно обходить с разных сторон. Чтобы учесть условие (9.3), нужно, чтобы интеграл обращался в нуль при  $t < 0$ . В этом случае множитель  $e^{-ik^0 t}$  стремится к нулю, если  $\text{Im } k^0 \rightarrow +\infty$ . Поэтому контур должен проходить над полюсами. Тогда при  $t < 0$  его можно будет замкнуть сверху на бесконечности и сжать в точку, что будет означать обращение функции Грина в нуль. Небольшой сдвиг контура вверх отвечает замене  $k^0$  на  $k^0 + i0$  в знаменателе (9.6):

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{(k^0 + i0)^2 - \mathbf{k}^2} = -\frac{1}{k^2 + i0k^0}. \quad (9.7)$$

При  $t > 0$  экспонента  $e^{-ik^0 t}$  стремится к нулю при  $\text{Im } k^0 \rightarrow -\infty$ , поэтому контур можно замкнуть снизу, и интеграл по  $k^0$  сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left( \text{res}_{\omega=-|\mathbf{k}|} + \text{res}_{\omega=|\mathbf{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin |\mathbf{k}|t}{|\mathbf{k}|}. \quad (9.8)$$

В пространстве-времени произвольной размерности функция  $G^R(x)$  представляет собой сложную (обобщенную) функцию.<sup>1</sup> Особенность случая  $d = 4$  состоит в том, что запаздывающая функция Грина оператора Даламбера пропорциональна дельта-функции с носителем в точности на световом конусе будущего:

$$G^R(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r}. \quad (9.9)$$

В результате запаздывающее решение имеет удивительно простой вид

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (9.10)$$

Важный факт состоит в том, что если материя сосредоточена в конечной области (то есть тензор энергии-импульса отличен от нуля в конечной области) пространства, то вдали от этой области решение неотлично от суммы статического решения и гравитационной волны. Более того, достаточно далеко от гравитирующей материи гравитационная волна в небольшой области пространства неотличима от плоской волны. То есть мы можем говорить об излучении гравитационных волн материей.

Мы уже говорили о том, что ковариантный закон сохранения импульса  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$  в первом порядке по  $h_{\mu\nu}$  дает сохранение импульса и момента импульса в пространстве Минковского:

$$T_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}} = 0. \quad (9.11)$$

Но излучение гравитационных волн должно приводить к тому, что материя теряет энергию. Как мы выяснили на прошлой лекции, энергия гравитационной волны является величиной второго порядка малости.

**Замечание.** В некоторых задачах поле вблизи источника может быть не так малó, чтобы можно было пренебречь нелинейными поправками, в то время как нас интересует волна на больших расстояниях, в области слабого поля. В этом случае рассуждения этой лекции применимы, если мы заменим компоненты тензора энергии-импульса на величины

$$\tilde{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu - \frac{1}{8\pi G} \left( \tilde{R}_\nu^\mu - \frac{\delta_\nu^\mu}{2} \tilde{R} \right), \quad (9.12)$$

где  $\tilde{R}_\nu^\mu = R_\nu^\mu - R^{(1)\bar{\mu}}_\nu$ . Здесь  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  — линеаризованный тензор Риччи, определенный в (7.5). Нетрудно проверить, что, в силу свойств  $R_{\mu\nu}^{(1)}$ , символ  $\tilde{T}_{\bar{\mu}\nu}^\mu$  симметричен и формально выполняется закон сохранения  $\tilde{T}_{\bar{\nu},\mu}^\mu = 0$ . Действительно, на решениях точных уравнений Эйнштейна  $\tilde{T}_\nu^\mu = \frac{1}{8\pi G} \left( R^{(1)\bar{\mu}}_\nu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R^{(1)\bar{\lambda}}_\lambda \right)$ . Разумеется, в этом случае задача не решается так прямо, но описанный ниже прием, выражающий ответ через одну компоненту  $\tilde{T}_0^0$  во многих случаях работает.

Мы рассмотрим простейший случай нерелятивистской материи, сосредоточенной в течение всего времени вблизи начала координат  $\mathbf{r} = 0$ . Будем считать, что мы наблюдаем гравитационное поле  $\psi_{\mu\nu}(X) = \psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R})$  в *волновой зоне*, то есть на большом расстоянии  $R$  от источника:  $R \gg r_{\text{ист}}, r_{\text{ист}}^2/\lambda$ . Здесь  $r_{\text{ист}}$  — характерный размер области, где находится материя, а  $\lambda$  — характерная длина волны. За пределами области вблизи начала координат размера  $r_{\text{ист}}$  мы будем считать  $T_{\mu\nu} = 0$ . При этом условии решение упрощается, поскольку знаменатель  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| \simeq R$  можно считать постоянным. Для запаздывания это приближение будет слишком грубым, поэтому в числителе мы положим  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| \simeq R - \mathbf{n}\mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Здесь мы пренебрегли членами порядка  $O(r^2/R)$ , что и соответствует приближению волновой зоны. Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad M_{\mu\nu}(t, \mathbf{n}) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + \mathbf{n}\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (9.13)$$

<sup>1</sup>В пространствах четной размерности  $d > 2$  носитель функции  $G^R(x)$  совпадает со световым конусом будущего:  $\eta(x, x) = 0, t \geq 0$ . В пространствах нечетной размерности он содержит также всю внутренность конуса:  $\eta(x, x) \geq 0, t \geq 0$ . Так что нам сильно повезло, что мы живем в четномерном пространстве-времени. В нечетномерном пространстве-времени восстановление динамики источника по сигналу представляет более сложную задачу, и наши зрение и слух должны были бы быть устроены сложнее.



(Для упрощения обозначений мы убрали штрихи у  $\mathbf{r}'$ .) Величины  $M_{\mu\nu}$  не преобразуются как компоненты тензора даже по отношению к преобразованиям Лоренца. Чтобы легче было изучать их свойства, положим  $\mathbf{R} = R \partial_1$ , то есть  $X^2 = X^3 = 0$ ,  $X^1 = R > 0$ . Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}(t, \partial_1) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + x^1, \mathbf{r}). \quad (9.14)$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (9.11). С учетом запаздывания имеем

$$T_{0\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}) = T_{k\nu,k}(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}) - T_{1\nu,0}(t + x^1, \mathbf{r}).$$

В правой части частная производная  $\partial_k$  берется по переменной  $x^k$  от всего выражения, включая первый аргумент тензора энергии-импульса. Если мы определим  $T_\nu^- = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}$ ,<sup>2</sup> то немедленно получим

$$\dot{T}_\nu^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}). \quad (9.15)$$

Отсюда ясно, что величины

$$M_\nu^-(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t) \quad (9.16)$$

сохраняются. В самом деле,

$$\dot{M}_\nu^- = \int d^3x \dot{T}_\nu^-(t + x^1, \mathbf{r}) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \mathbf{r}) = 0, \quad (9.17)$$

так как последний интеграл сводится к интегралу по удаленной границе, где по условию тензор энергии-импульса обращается в нуль. Легко видеть, что  $M_\nu^-$  есть не что иное как 4-импульс  $P_\nu$  системы.<sup>3</sup> Следовательно,

$$M_0^- = \int d^3x T_0^0(t, \mathbf{r}) = M, \quad M_i^- = 0, \quad (9.18)$$

где  $M$  — полная масса гравитирующих тел. Второе равенство следует из того, что скорость центра масс системы равна нулю. Из (9.18) немедленно следует, что

$$\psi_{0\nu}(R \partial_1) + \psi_{1\nu}(R \partial_1) = -\frac{4GM}{R} \eta_{0\nu}. \quad (9.19)$$

Этот результат почти соответствует условию (8.7), которое должно выполняться в гравитационной волне в принятой нами калибровке (7.11). Несоответствие имеется только при  $\nu = 0$ , где возникает ненулевой вклад, который нельзя устранить калибровкой. Однако этот вклад отвечает постоянному во времени продольному полю, создаваемому массой, в соответствии с (7.23), (7.27). В пределе плоской волны (небольшая область пространства размера  $l \ll R$ ) это отвечает постоянному однородному полю, которое мы исключали в прошлой лекции. Это поле следует вычесть из  $\psi_{\mu\nu}$ , чтобы получить чистое поле гравитационной волны.

Теперь нам нужно найти пространственные поперечные компоненты  $M_{ab}(t)$  которые дадут нам физический, не устранимый калибровочным преобразованием, вклад в потенциалы  $\psi_{\mu\nu}$ . Чтобы сделать это, снова воспользуемся условиями (9.15).

Умножив уравнение (9.15) для  $\nu = j$  на  $x^i$  и проинтегрировав по всему пространству, получим

$$\partial_0 \int d^3x T_j^-(t + x^1, \mathbf{r}) x^i = \int d^3x (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r})) x^i = \int d^3x \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i) - M_{ij}.$$

Первый член в правой части представляет собой интеграл по удаленной границе, где  $T_{ki} = 0$ , и мы его опустим. Симметризуя по индексам  $i, j$ , получаем

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r}) x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i). \quad (9.20)$$

<sup>2</sup>Эти обозначения соответствуют использованным в прошлой лекции координатам светового конуса  $x^\pm = x^0 \pm x^1$ ,  $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$ .

<sup>3</sup>Мы пренебрегаем вкладом псевдотензора энергии-импульса как величины второго порядка малости.

Теперь умножим уравнение (9.15) для  $\nu = +$  на  $x^i x^j$  и проинтегрируем по всему пространству

$$\partial_0 \int d^3x 2T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i x^j = \int d^3x \partial_k (T_{+k}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i x^j) - \int d^3x (T_{+i}(t + x^1, \mathbf{r}) x^j + T_{+j}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i).$$

Опять первый интеграл обращается в нуль, а второй интеграл совпадает интегралом в правой части (9.20). Отсюда получаем

$$M_{ij}(t) = \partial_0^2 \int d^3x 2T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) x^i x^j. \quad (9.21)$$

В прошлой лекции мы выяснили, что малой (порядка  $h_{\mu\nu}$ ) заменой координат можно сделать гравитационную волну поперечной  $h_{1i} = 0$  и бесследовой ( $\psi_a^{\bar{a}} = h_a^{\bar{a}} = 0$ ). Но нам даже нет необходимости делать такую замену координат. Мы уже видели, что величины  $h_{\times} = h_{23} = \psi_{23}$  и  $2h_{+} = h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$  являются калибровочно-инвариантными по отношению к остаточным преобразованиям, то есть преобразованиям, не нарушающим калибровку (7.11). Мы получаем

$$h_{+}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{+}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad h_{\times}(t, \mathbf{R}) = -\frac{4GM_{\times}(t - R, \mathbf{n})}{R}, \quad (9.22)$$

где, если выбрать декартовы координаты так, чтобы было  $\mathbf{n} = \partial_1$ , имеем

$$\begin{aligned} M_{+}(t) &= \partial_0^2 \int d^3x T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) ((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_{\times}(t) &= \partial_0^2 \int d^3x T_{++}(t + x^1, \mathbf{r}) \cdot 2x^2 x^3. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Разумеется, ортогональные направлению на источник координаты  $x^2, x^3$  при этом выбираются произвольно.

Теперь используем предположение о нерелятивистском характере движения гравитирующих тел. Это условие предполагает, что размеры системы настолько малы, что за то время, пока сигнал, распространяющийся со скоростью света, пересечет всю систему, положения частиц существенно не изменятся:  $vr_{\text{ист}} \ll l$ ,  $ar_{\text{ист}} \ll v$ , где  $v, a$  — характерные скорость и ускорение частиц,  $l$  — характерное расстояние между телами. В этом предположении мы можем опустить  $x^1$  в аргументе  $t + x^1$  в (9.23) и заменить там  $4T_{++}$  на  $T_{00} = T_0^0 = \rho$ , поскольку  $|T_{00}| \gg |T_{10}|$ . Казалось бы, мы могли бы сделать это в самом начале, в (9.13). Оказывается, нет. Дело в том, что тогда бы мы явно нарушили условие калибровки (7.11). Эти приближения мы можем сделать только в окончательных выражениях для калибровочно-инвариантных величин.

Итак, в случае нерелятивистского источника имеем

$$\begin{aligned} M_{+}(t) &= \frac{1}{4} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) ((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_{\times}(t) &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) x^2 x^3. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Удобно выразить их через *квадрупольный момент* плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \mathbf{r}) (3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}). \quad (9.25)$$

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю:  $\sum_{i=1}^3 D_{ii} = 0$ . Имеем

$$h_{+}(t, R\partial_1) = -\frac{G}{3R} (\ddot{D}_{22}(t - R) - \ddot{D}_{33}(t - R)), \quad h_{\times}(t, R\partial_1) = -\frac{2G}{3R} \ddot{D}_{23}(t - R). \quad (9.26)$$

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Эта плотность равна компоненте  $t^{01}$  псевдотензора энергии-импульса. На большом расстоянии от источника мы можем воспользоваться формулой для плоской волны (8.37). Подставляя туда (9.26), находим

$$t^{01}(t + R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right). \quad (9.27)$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии  $dI(t, \mathbf{n})$  в элемент телесного угла  $do = \sin \theta d\theta d\varphi$  и, в конечном счете, потери энергии  $-d\mathcal{E}/dt$  системой. Для элемента телесного угла в направлении  $x^1$  имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t + R, R\partial_1)R^2 do = \frac{G}{36\pi} \left( \left( \frac{\ddot{D}_{22}(t) - \ddot{D}_{33}(t)}{2} \right)^2 + \ddot{D}_{23}^2(t) \right) do. \quad (9.28)$$

Мы специально «откатали» поток  $dI$  на  $R$  назад во времени, поскольку он должен характеризовать потери энергии системы именно в момент времени  $t$ , когда сигнал излучается, и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула (9.28) имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do, \quad (9.29)$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.30)$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e_{ii}^{(s)} = 0, \quad e_{ij}^{(s)} = e_{ji}^{(s)}, \quad e_{ij}^{(s)} n_j = 0, \quad e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(s')} = \delta^{ss'}. \quad (9.31)$$

Нетрудно показать, что формула (9.29) верна для *любой* пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t, \mathbf{n}) = \frac{G}{72\pi} \sum_{s=1}^2 (\ddot{D}_{ij} e_{ij}^{(s)})^2 do = \frac{G}{72\pi} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\mathbf{n}) do, \quad E_{ijkl}(\mathbf{n}) = \sum_{s=1}^2 e_{ij}^{(s)} e_{kl}^{(s)}. \quad (9.32)$$

для произвольного  $\mathbf{n}$ . Нам осталось найти явно тензор  $E_{ijkl}(\mathbf{n})$ . Для этого воспользуемся его свойствами:

$$\begin{aligned} E_{iikl} &= 0, & E_{ijkl} &= E_{jikl} = E_{klij}, & E_{ijkl} n_i &= 0, \\ E_{2222}(\partial_1) &= E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

которые немедленно следуют из (9.31) и (9.30). Используя второе свойство, запишем  $E_{ijkl}$  в виде

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ &+ E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) + E_4 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Коэффициенты  $E_1, \dots, E_5$  находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \quad (9.34)$$

Подставляя (9.33), (9.34) в (9.32), получаем

$$dI(\mathbf{n}) = \frac{G}{36\pi} \left( \frac{1}{4} (\ddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{ij}^2 - \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ik} n_j n_k \right) do. \quad (9.35)$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45} \ddot{D}_{ij}^2. \quad (9.36)$$

Для звездных систем эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для очень тесных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джо-зефом Тейлором в системе, состоящей из двух нейтронных звезд, было первым экспериментальным подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии за это открытие и проверку других общерелятивистских эффектов на данной системе.

## Задачи

1. Покажите, что функция  $G_R(x)$ , определенная формулой (9.9), удовлетворяет уравнению (9.2).
2. Покажите, что потенциалы (9.13) удовлетворяют калибровочному условию (7.11).
3. Покажите, что формула (9.29) верна для любой пары тензоров  $e^{(s)}$ , удовлетворяющих условиям (9.31).
4. Выведите (9.34), (9.35). Затем проинтегрируйте (9.35) по углам и получите (9.36).
- 5\*. Две частицы массами  $m_1$  и  $m_2$  вращаются вокруг общего центра масс с нерелятивистскими скоростями по круговым орбитам на расстоянии  $r$  друг от друга. Найдите потери энергии системой на гравитационное излучение и приближенную зависимость  $r(t)$  в предположении, что взаимодействие частиц можно считать ньютоновским.

## Семинар 9

### Взаимодействие гравитационных волн с материей. Примеры

**1. Взаимодействие гравитационных волн со сплошной средой.** Слабое гравитационное поле изменяет расстояния между точками в соответствии с формулой

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij} dx^i dx^j.$$

Согласно стандартным формулам теории сплошных сред, тензор деформации  $u_{ij}$  определяется как

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij} dx^i dx^j.$$

Следовательно, слабое гравитационное поле вызывает деформацию

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}. \quad (9.37)$$

При этом, как мы видели, весь эффект гравитационной волны может быть сведен к такой деформации путем исключения временных компонент. Деформация, вызванная гравитационной волной полностью поперечна гравитационной волне.

Мы будем считать, что среда занимает все пространство, а скорость звука в среде много меньше скорости света в вакууме. Это приводит к тому, что релаксацией среды можно пренебречь. Если среда занимает конечный объем, то рассуждения ниже верны, если частоты собственных колебаний тела много меньше частоты гравитационной волны. Частоты собственных колебаний по порядку величины равны  $\sqrt{k/\rho l}$ , где  $k$  — модуль упругости (сжатия или сдвига в зависимости от геометрии),  $\rho$  — плотность среды,  $l$  — характерный размер тела.

Для изотропной среды упругие свойства среды определяются модулем сжатия  $K$  и модулем сдвига  $\mu$ . Тензор напряжений согласно закону Гука равен

$$\sigma_{ij} = K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kk} \right). \quad (9.38)$$

Учитывая, что в гравитационной волне  $u_{kk} = 0$ , она вообще не вызывает сжатия материала в системе отсчета, в которой среда остается покоящейся. Таким образом, она взаимодействует с веществом посредством сдвигов. Это приводит к тому, что тензор энергии-импульса вещества получает добавку

$$\Delta T_{ij} = -\Delta \sigma_{ij} = \mu h_{ij}. \quad (9.39)$$

Взаимодействие с упругой средой приводит к тому, что гравитационная волна распространяется в среде со скоростью меньшей, чем скорость света. Действительно, уравнение для потенциалов принимает вид

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \mu \psi_{ij} = 0. \quad (9.40)$$

Отсюда для плоской волны получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + 16\pi G \mu. \quad (9.41)$$

Групповая скорость равна

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} < 1. \quad (9.42)$$

Разумеется, для любых разумных твердых тел эффект ничтожно мал, однако эти формулы представляют интерес с точки зрения распространения гравитационного поля в межзвездном газе. Тело в том, что межзвездный газ можно считать бесстолкновительным, а в бесстолкновительной среде при деформации давление ведет себя анизотропно. Именно в направлении сжатия или растяжения  $pL = \text{const}$ . Если считать, что, тем не менее, до прохождения волны газ был равновесным с изотропным давлением  $p$ , то внутри волны

$$\Delta T_{ij} = -p u_{ij} = \frac{p}{2} h_{ij}. \quad (9.43)$$

Таким образом, межзвездный газ ведет себя как твердая среда с модулем сдвига  $p/2$ .

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \quad (9.44)$$

где  $\eta, \zeta$  — коэффициенты вязкости. Вторая вязкость  $\zeta$  опять же не играет роли. Имеем

$$\square \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \quad (9.45)$$

Закон дисперсии принимает вид

$$\omega^2 + 16\pi i G \eta \omega = \mathbf{k}^2. \quad (9.46)$$

Это значит, что частота имеет отрицательную мнимую часть, что отвечает поглощению. Более того, сколь бы ни был мал коэффициент взаимодействия, для больших длин волн поглощение становится большим.

**2. Взаимодействие гравитационных волн с электромагнитным полем.** Может ли гравитационная волна порождаться электромагнитной? Рассмотрим тензор энергии-импульса электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $x^1$  и поляризованной в плоскости  $(x^1, x^2)$ :

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^-. \quad (9.47)$$

Нас будут интересовать поперечные пространственные компоненты, поскольку продольные и временные компоненты не порождают гравитационную волну. Легко видеть, что они обращаются в нуль.

Включим внешнее постоянное однородное поперечное магнитное поле  $\mathbf{H}_{\text{внеш}} = H_{\perp} \partial_2 + H_{\parallel} \partial_3$ . Тогда мы найдем, что

$$T_{23} = -H_{\perp} E_0 \cos \omega x^- + \text{const},$$

$$\frac{1}{2}(T_{22} - T_{33}) = H_{\parallel} E_0 \cos \omega x^- + \text{const}.$$

Таким образом, электромагнитная волна в постоянном магнитном поле является когерентным источником гравитационной волны.

## Лекция 10

### Решение Шварцшильда

До сих пор мы рассматривали только слабые гравитационные поля, либо предполагая малость тензора-энергии импульса, либо рассматривая систему вдали от источников. Есть большой соблазн думать, что слабое гравитационное поле описывается линейной теорией, подобной электродинамике, однако это *не так*. Получаемая таким способом теория не является математически замкнутой. Это выражается, прежде всего, в том, что возмущение метрики  $h_{\mu\nu}$  влияет на измерение расстояний и времени и, таким образом, не допускает масштабирования: если мы увеличим поля так, чтобы  $h_{\mu\nu}$  было бы сравнимо с  $\eta_{\mu\nu}$ , мы получим абсурдные результаты для движения частиц в поле. Поэтому нам с необходимостью надо рассмотреть сильное поле и понять, к каким эффектам приводит сильная нелинейность. Как мы увидим, неизбежным следствием уравнений поля оказываются особенности пространственно-временного многообразия.

В этой лекции мы построим сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна — *решение Шварцшильда* — в четырехмерном пространстве-времени и изучим движение частиц в таком поле. Формально это решение будет стационарным, то есть компоненты метрики не будут зависеть от времени. Важный вывод будет состоять в том, что стационарность этого решения фиктивна и связана с неполнотой выбранной системы координат: она определена только в одной карте и не описывает многообразие целиком.

Что могли бы означать слова «сферически-симметричное решение» в применении к искривленному пространству-времени? Чтобы это понять, разберем, что мы понимаем под сферически-симметричным решением теории поля в пространстве-времени Минковского. Плоское пространство-время обладает группой симметрии  $SO(3)$  вращений трехмерного пространства. Эта группа порождается тремя генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (10.1)$$

образующими алгебру Ли  $so(3) \simeq su(2)$  относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (10.2)$$

Генераторы  $J_i$  являются векторными полями Киллинга для плоской метрики. Под сферически-симметричными решениями мы понимаем решения, инвариантные относительно группы вращений  $SO(3)$ . В терминах векторных полей Киллинга это выражается так

$$\delta_{J_i} A = 0, \quad (10.3)$$

где  $A(x)$  — некоторое тензорное поле (сечение тензорного расслоения), а  $\delta_\xi$  — уже знакомая нам производная Ли.

Для записи сферически-симметричных решений удобно выбрать сферические координаты  $t, r, \vartheta, \varphi$ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (10.4)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (10.5)$$

где  $d\Omega^2$  — метрика на единичной сфере:

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (10.6)$$

В этих координатах векторы Киллинга  $J_i$  имеют вид

$$J_x = \sin \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_\varphi, \quad J_y = -\cos \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi. \quad (10.7)$$

Видно, что векторные поля  $J_i$  действуют на сферах  $r, t = \text{const}$ , причем группа  $SO(3)$  действует на сфере транзитивно. Поэтому скалярные поля для сферически-симметричного решения должны были бы быть функциями только от  $r$  и  $t$ .

В искривленном пространстве-времени будем действовать точно так же. Мы назовем метрику сферически-симметричной, если в ней имеются три пространственноподобных векторных поля Киллинга  $J_i$ , удовлетворяющих коммутационным соотношениям (10.2) алгебры Ли  $so(3)$ . Условие (10.3) для метрики выполняется в силу того, что  $J_i$  являются векторами Киллинга. В более сложных случаях, когда кроме гравитационного поля есть поля материи, на них нужно наложить условие (10.3).

Самый простой способ построить сферически-симметричную метрику состоит в том, чтобы «расслоить» пространство-время на двумерные сферы со сферическими координатами на каждой. На двумерных сферах мы выберем координаты  $\vartheta, \varphi$  таким образом, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга. Две остальные координаты мы обозначим через  $t$  и  $r$  по аналогии с плоским пространством. Немного ниже мы уточним их определение.

Требование, чтобы векторные поля  $J_i$  являлись полями Киллинга,

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

накладывает ограничения на метрику. Прежде всего, для  $J_z$  имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (10.8)$$

откуда следует, что компоненты метрики не зависят от  $\varphi$ .

Далее мы будем полагать  $i = x, y$ . Подставляя  $\mu, \nu = \vartheta, \varphi$ , получаем уравнения, из которых находим

$$g_{\varphi\vartheta} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta, \quad \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (10.9)$$

Это значит, что индуцированная метрика на каждой сфере пропорциональна стандартной метрике  $d\Omega^2$  единичной сферы, то есть обладает  $SO(3)$ -симметрией.

Теперь, выбирая  $\mu = r, t, \nu = \vartheta, \varphi$ , немедленно получаем

$$g_{\alpha a} = 0, \quad \alpha = t, r, \quad a = \vartheta, \varphi, \quad (10.10)$$

то есть подпространства  $\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$  ортогональны сферам. Заметим, что это означает, что ковекторы  $\bar{g}(J_i) = g_{\mu\nu} J_i^\nu dx^\mu$  лежат в кокасательном пространстве к сфере, так же как векторы  $J_i$  лежат на касательном пространстве. Это же условие достаточно для того, чтобы двумерные символы Кристоффеля на сферах совпадали с соответствующими четырехмерными. Получаем

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Из оставшихся условий следует, что

$$\partial_\vartheta g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10.11)$$

то есть все четыре функции  $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$  зависят только от  $t$  и  $r$ .

Заметим теперь, что метрика в факторпространстве  $M/SO(3)$ , где  $SO(3)$  — группа вращений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида. Поэтому преобразованиями координат  $t, r$  мы можем зафиксировать две функции. Во-первых, потребуем, чтобы направления  $\partial_t$  и  $\partial_r$  были ортогональны, а во-вторых, определим  $r$  условием, чтобы длина большой окружности на любой из сфер  $t, r = \text{const}$  равнялась  $2\pi r$ . Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2. \quad (10.12)$$

Оставшиеся компоненты метрики  $g_{tt}, g_{rr}$  удобно записать в экспоненциальном виде  $e^{2k}, e^{2h}$ . Итак, сферически-симметричную метрику всегда можно представить в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (10.13)$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2} (\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi). \quad (10.14)$$

Будем точкой обозначать производную по  $t$  и штрихом — по  $r$ . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\ \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \text{ctg } \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{10.15}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\ R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\ R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\ R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),\end{aligned}\tag{10.16}$$

Решим уравнения Эйнштейна в вакууме  $R_\nu^\mu = 0$ . Из третьего уравнения немедленно имеем  $\dot{h} = 0$ , то есть  $h = h(r)$ . В первом и втором уравнениях выпадают все члены с производными по времени, и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной  $r$ . Используя комбинации  $R_t^t \mp R_r^r$ , получаем

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, \\ k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\ r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первого уравнения немедленно имеем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Функцию  $F(t)$  можно устранить преобразованием координат  $t' = \int dt e^{F(t)}$ , поэтому без ограничения общности положим ее равной нулю. Имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Третье уравнение легко решается

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где  $r_g$  — некоторая постоянная размерности длины. Подставляя это решение во второе уравнение, убеждаемся, что оно тоже выполнено. Окончательно имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2.\tag{10.17}$$

Это решение называется *решением Шварцшильда*, а постоянная  $r_g$  — *гравитационным радиусом*.

Величину  $r_g$  легко выразить через полную энергию (массу) системы. Действительно, рассмотрим асимптотику решения Шварцшильда при  $r \rightarrow \infty$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует виду (7.23), так как для нее  $h = 0$  и, следовательно,  $\psi_{rr} \neq 0$ . Но ее можно привести к нужному виду малым калибровочным преобразованием  $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$ . Тогда в первом порядке по  $r_g/r$  имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Переходя к «декартовым» координатам (10.4), находим  $h_{ij} = \delta_{ij}h_{tt}$ ,  $h_{tt} = -r_g/r$ ,  $h = 2r_g/r$ , откуда находим  $\psi_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}h\delta_{ij} = 0$ ,  $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -2r_g/r$ . Это согласуется с асимптотическим решением (7.23) при  $A = -2r_g$ . Сравнивая с (7.27), получаем

$$r_g = 2GM.\tag{10.18}$$



Из сферической симметрии решения физически ясно, что момент импульса системы, создающей гравитационное поле, равен нулю. Это также строго следует из того, что в асимптотике  $\psi_{0i} = 0$ .

Важно отметить, что решение Шварцшильда является единственным (с точностью до преобразований координат) сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна в вакууме для любого сферического слоя. Это значит, что радиальные движения сферически-симметричной материи, как и в ньютоновской теории, не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи.

Давайте изучим глобальные свойства решения (10.17). Если размер гравитирующих тел больше  $r_g$ , то решение (10.17) хорошо определено. Чтобы получить полное решение, мы должны сшить его с решением в области, где  $T^{\mu\nu} \neq 0$ . В то же время, ничто не может гарантировать, что материя распределена достаточно неплотно. Вполне возможно, что сил отталкивания не хватит, чтобы удержать материю за пределами сферы  $r = r_g$ , на которой метрика имеет особенность. Более того, может так случиться, что при ненулевом, но небольшом тензоре энергии-импульса особенность просто сдвинется внутрь, но не исчезнет. Поэтому попробуем понять смысл этой особенности. Для этого найдем промежутки времени на прямых  $r, \vartheta, \varphi = \text{const}$  и расстояния на плоскостях  $t = \text{const}$ . Пусть частица неподвижно висит в шварцшильдовых координатах. Пусть  $dt$  — малый промежуток «глобального» координатного времени. Промежуток физического времени по часам частицы (ее собственного времени)  $d\tau$  равен

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt. \quad (10.19)$$

Эта величина стремится к нулю при  $r \rightarrow r_g$ . Значит, прямая  $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$  изотропна. Позже мы увидим, что на самом деле эта прямая является в пространстве-времени *единственной точкой*.

Теперь перейдем к измерениям расстояний в пространственных слоях. Так как система координат Шварцшильда имеет нулевые компоненты  $g_{0i}$ , пространственная часть метрики полностью определяет расстояния между точками. Мы немедленно получаем, что расстояния между точками на любой сфере  $r = \text{const}$ , в том числе и на сфере Шварцшильда  $r = r_g$ , определяются стандартной метрикой на сфере радиуса  $r$ :

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2.$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шварцшильда:

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

Нетрудно проверить, что расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежащей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно. Пусть  $r - r_g \ll r_g$ . Тогда имеем

$$l_{\text{рад}}(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r_g} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

Это значит, что сфера Шварцшильда не «утолщается» в пространственном направлении.

Теперь покажем, что эти координаты не покрывают все физическое пространственно-временное многообразие. Для этого рассмотрим изотропные (светоподобные) кривые в плоскости  $(t, r)$ . В силу симметрии системы эти кривые должны быть геодезическими. Полагая  $d\vartheta = d\varphi = 0$  и  $ds = 0$ , получаем

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (10.20)$$

Знак «+» отвечает «фотону», летящему из центра, а знак «-» — «фотону», летящему к центру. Это уравнение нетрудно проинтегрировать, но даже без интегрирования ясно, что будет происходить с фотоном в будущем. Фотон, удаляющийся от центра, постепенно выйдет на асимптотику  $r = t$  и уйдет на бесконечность, в то время как «падающий» фотон будет приближаться к радиусу Шварцшильда по закону  $r - r_g \sim e^{-t/r_g}$ . Никакая частица не может обогнать свет и, тем самым, не может пересечь сферу Шварцшильда. Тем самым, массы никогда не достигнут этой сферы и проблема сингулярности просто не возникнет. Сфера Шварцшильда недостижима, а координаты внутри сферы Шварцшильда не являются продолжением карты вне сферы Шварцшильда.

Казалось бы, мы решили проблему сингулярности. Это так и не так. Это так, если мы наблюдаем за системой издалека. Действительно, удаленный наблюдатель будет видеть как частицы приближаются к сфере Шварцшильда, образуя вокруг нее тонкий слой, но никогда не пересекают ее. В тоже время удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах. На самом деле это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за *конечное собственное время*.

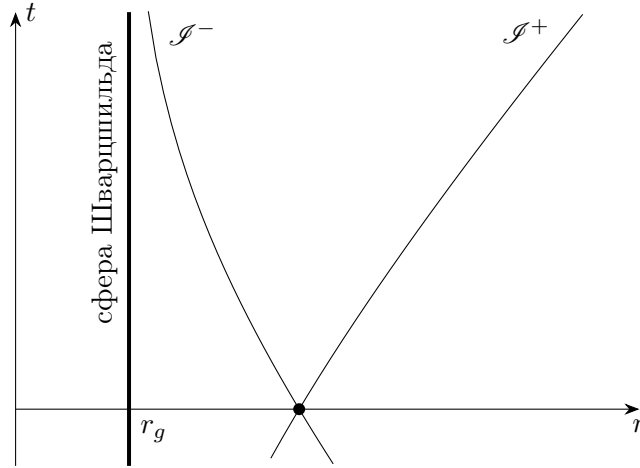


Рис. 10.1. Изотропные геодезические  $\mathcal{S}^\pm$  в шварцшильдовой метрике, соответствующие двум знакам в уравнении (10.20). Кривая  $\mathcal{S}^-$  приближается к сфере Шварцшильда, но никогда не достигает ее. Кривая  $\mathcal{S}^+$  уходит на бесконечность. Область внутри сферы Шварцшильда не покрывается картой и, на самом деле, не имеет смысла.

Чтобы убедиться в этом, найдем времениподобную геодезическую в плоскости  $(t, r)$ . Проще решить не уравнение геодезической (4.6), а уравнение Гамильтона—Якоби (4.20):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \tag{10.21}$$

Умножив обе части на  $1 - r_g/r$ , мы получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2.$$

Левая часть содержит только производную по  $t$ , а правая — только производную по  $r$ . Давайте искать решение в таком виде, чтобы обе части были равны константе. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \tag{10.22}$$

Константа  $E$  имеет смысл энергии частицы, и связана с однородностью задачи по времени. Так как энергия всюду входит в виде квадрата, мы будем считать ее положительной. Теперь имеем

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

и уравнение превращается в уравнение для  $S_r$ :

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm \int dr \frac{E}{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}.$$

Дифференцируя полное действие  $S(t, r, E)$  по параметру  $E$ , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

где  $t_0$  — новая константа, имеющая смысл «начального» момента времени. Итак

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (10.23)$$

Это — алгебраическое уравнение, задающее мировую линию частицы. Мы сейчас не будем изучать подробно это уравнение и свойства его решений. Мы сделаем это в следующий раз. Нас интересует собственное время и мы его выпишем:

$$d\tau = ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E}{m} dt - \frac{dS_r(r)}{m} = \pm \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.24)$$

Найдем полное собственное время, которое требуется частице, чтобы переместиться из точки  $r = r_0$  в точку  $r_g$ . Выбирая нижний знак, а затем меняя направление интегрирования, находим

$$\tau_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.25)$$

Важно, что собственное время падения *конечно*, так как подынтегральное выражение всюду конечно и *не имеет особенностей* при  $r = r_g$ . Если  $E < m$ , имеется особенность при  $r = r_g m / \sqrt{m^2 - E^2}$ , но это интегрируемая особенность. Она отвечает финитному движению: частица взлетела, а потом начала падать.

Заметим, что

$$d\tau = \frac{m}{E} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt. \quad (10.26)$$

Первый множитель  $m/E$  постоянен и для бесконечно удаленной частицы равен  $\sqrt{1 - v^2}$ , то есть дает замедление времени частицы, связанное с ее «первоначальным» движением. Второй множитель  $1 - r_g/r$  дает гравитационное замедление времени, отличное от замедления (10.19) для «неподвижно висящей» частицы.

Чтобы построить координаты, выходящие за пределы шварцшильдовской карты, придется отказаться от статичности метрики. Вместо координат  $(t, r)$  удобно будет использовать координаты светового конуса  $x^\pm$ . Потребуем, чтобы решения уравнения (10.20) записывались в виде  $x^\mp = \text{const}$ . Отсюда

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (10.27)$$

Явное интегрирование дает

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left( \frac{r}{r_g} - 1 \right). \quad (10.28)$$

Эти уравнения определяют  $t, r$  как функции переменных  $x^\pm$ . Важно, что любой паре вещественных чисел  $(x^-, x^+)$  можно сопоставить точку в области  $r > r_g$ . Бесконечному прошлому и бесконечному будущему в шварцшильдовой метрике отвечают пределы  $x^- + x^+ \rightarrow \mp\infty$ , бесконечно удаленной точке при конечном времени — предел  $x^+ - x^- \rightarrow +\infty$ , а сфере Шварцшильда — предел  $x^+ - x^- \rightarrow -\infty$ . Таким образом на  $r = r_g$  один из параметров  $x^\pm$  может оставаться конечным, но тогда на этом радиусе  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Переменные  $x^\pm$  дают возможность построить сразу несколько координатных систем. Начнем с простейшей. Выберем в качестве времени одну из координат светового конуса, например  $x^+$ , а в качестве

пространственной координаты оставим  $r$ . Тогда мы получим координаты Эддингтона—Финкельштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \quad (10.29)$$

Метрика в этих координатах по-прежнему стационарна. Однако на поверхности  $r = r_g$  уже нет особенности: компоненты конечные и гладкие, а метрика невырождена,  $g = -r^4 \sin^2 \vartheta \neq 0$ . Легко видеть, что кривые  $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$  являются изотропными геодезическими. Эти геодезические входят в непрерывное семейство изотропных геодезических  $x^- = \text{const}$ , которые расходятся от центра при  $r > r_g$  и сходятся к центру при  $r < r_g$  (Рис. 10.2). Поверхность  $r = r_g$  представляет собой *горизонт событий будущего*  $\mathcal{H}^+$ , из-за которого мы не можем получать никаких сигналов, так как все частицы, испущенные под горизонтом событий, не выходят из под него, а падают на сингулярность, которая лежит на линии  $r = 0$ . Область внутри горизонта событий будущего называют *черной дырой*.

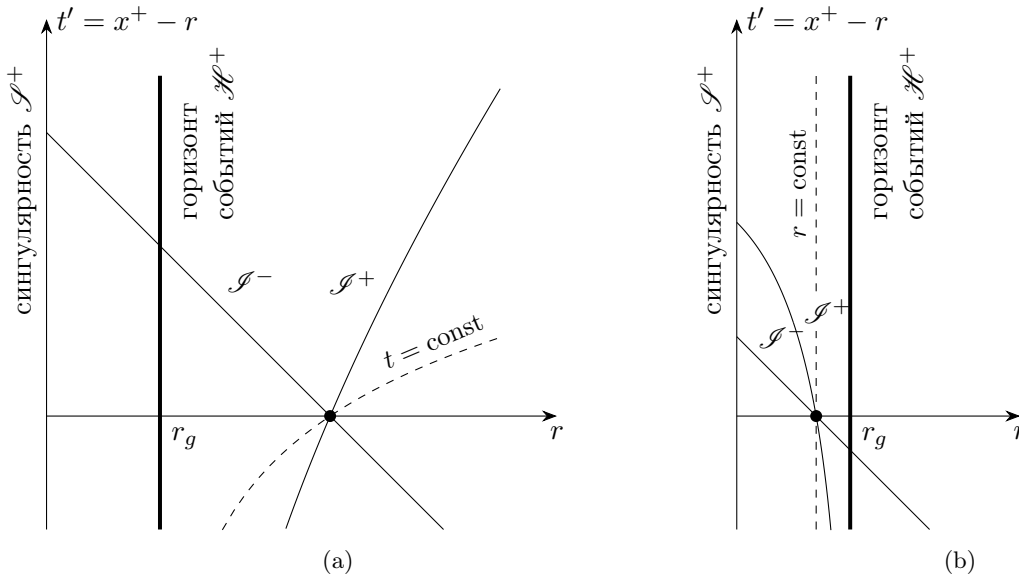


Рис. 10.2. Координаты Эддингтона—Финкельштейна. Для большей наглядности на оси ординат мы отложили время  $t' = x^+ - r$ , асимптотически переходящее в временную координату пространства Минковского. (а) Начальная точка находится вне горизонта событий. Изотропная кривая  $\mathcal{S}^-$  ( $x^+ = \text{const}$ ) пересекает горизонт событий и достигает сингулярности. Изотропная кривая  $\mathcal{S}^+$  ( $x^- = \text{const}$ ) уходит на бесконечность. Пунктирной линией обозначена поверхность синхронных событий, т.е. постоянного шварцшильдовского времени  $t$ . (б) Начальная точка находится за горизонтом событий. Обе изотропных геодезических  $\mathcal{S}^-$  и  $\mathcal{S}^+$  достигают сингулярности. Одновременными в смысле синхронизации часов здесь будут события на поверхности  $r = \text{const}$  (пунктир).

Важный факт состоит в том, что внутри черной дыры частица достигает сингулярности тоже за конечное собственное время. Для этого перейдем к координатам Шварцшильда в области *под горизонтом* заменой координат

$$x^+ = t + r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left(1 - \frac{r}{r_g}\right).$$

Заметим, что в силу условия  $r < r_g$  координата  $r$  играет роль времени, а  $t$  — пространственной координаты. Теперь для вычисления собственного времени под горизонтом мы снова можем воспользоваться формулой (10.24). Имеем

$$s_{\text{синг}} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (10.30)$$

Эта величина, очевидно, конечна.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна сохраняют стационарность метрики, но в них мы теряем симметрию по отношению к обращению времени. Дело в том, что линия  $r = r_g$  в этих координатах находится *в абсолютном будущем* по отношению ко всей области  $r > r_g$  и в шварцшильдовых координатах находится в бесконечном будущем  $t \rightarrow +\infty$ . Область  $r > r_g$  представляет собой одну и ту же область и в координатах Эддингтона—Финкельштейна и в координатах Шварцшильда, но координаты

Эддингтона—Финкельштейна растягивают двумерную сферу  $r = r_g$ ,  $t = +\infty$ , которая «собирает» все изотропные геодезические типа  $\mathcal{S}^-$ , в трехмерный горизонт событий  $\mathcal{H}^+$ , и уводят сферу Шварцшильда в бесконечное прошлое  $x^+ = -\infty$ . Обозначим карту, покрываемую координатами Эддингтона—Финкельштейна через  $EF^+$ , а карту, покрываемую координатами Шварцшильда через  $Sc$ . Тогда  $EF^+ \supset Sc$ .

Обращению времени в этой конструкции отвечает замена  $x^+ \rightarrow -x^-$ , что дает альтернативную систему координат Эддингтона—Финкельштейна  $EF^-$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (10.31)$$

Эта система продолжает систему координат Шварцшильда в бесконечное прошлое. В новой системе координат поверхность  $r = r_g$  представляет собой *горизонт событий прошлого*  $\mathcal{H}^-$ . Сингулярность  $r = 0$  в этой области не поглощает частицы, а испускает их. Область внутри горизонта событий прошлого отлична от области внутри горизонта событий будущего, и попасть из нее в черную дыру минуя область  $r \geq r_g$  невозможно. Ее называют *белой дырой*. Карта Шварцшильда оказывается пересечением двух карт:  $Sc = EF^+ \cap EF^-$ .

Как же совместить две картины (10.29) и (10.31)? Для этого надо полностью перейти к координатам светового конуса  $x^\pm$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2. \quad (10.32)$$

Пока ничего нового, по сути, не произошло. Новая идея состоит в том, чтобы отобразить каждую из переменных  $x^\pm$  на полуось. Это отвечает тому, что мы теперь воспринимаем плоскость  $(t, r)$  не как предел квадрата со сторонами, параллельными осям  $t$  и  $r$ , а как предел квадрата со светоподобными сторонами, параллельными осям  $x^-$  и  $x^+$ . В координатах Эддингтона—Финкельштейна мы спокойно «уходили на временную бесконечность» вблизи горизонта событий, оставляя конечными координаты  $x^+$  и  $r$ . Но в этой бесконечности координата  $x^-$  будет стремиться к бесконечности вместе с  $t = \frac{1}{2}(x^- + x^+)$ . Поэтому неплохо бы ее как-то «поджать». Аналогично, в прошлом неплохо бы «поджать»  $x^+$ . Это достигается в *координатах Крускала—Секереша*

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g}, \quad (10.33)$$

которые остаются конечными на горизонтах событий. Из (10.28) получаем

$$uv = -4r_g^2 e^{r/r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1\right). \quad (10.34)$$

То есть условию  $r = r_g$  отвечают две поверхности  $u = 0$  и  $v = 0$ . Шварцшильдовской области  $r > r_g$  отвечает квадрант  $u < 0, v > 0$ , причем значению  $r = r_g$  при конечных  $t$  соответствует в пространстве  $(u, v)$  единственная точка  $u = v = 0$ . То есть сфера Шварцшильда является *двумерной сферой*, а не трехмерным цилиндром. Это немедленно сказывается на метрике. Она перестает быть сингулярной как на шварцшильдовской сфере, так и на горизонтах событий:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u, v)} e^{-\frac{r(u, v)}{r_g}} du dv - r^2(u, v) d\Omega^2. \quad (10.35)$$

Здесь  $r$  записана как функция новых переменных  $u, v$ , которая решает уравнение (10.34).

Систему координат Крускала удобно изобразить графически с помощью *диаграммы Пенроуза* или *конформной* или *причинной диаграммы*. Для этого от некомпактных координат  $u, v$  следует перейти к компактным переменным  $u', v'$  с помощью замены

$$u = 2r_g \operatorname{tg} u', \quad v = 2r_g \operatorname{tg} v'.$$

В двумерном пространстве  $(u, v)$  это преобразование является конформным и сохраняет изотропные направления. Дополнительное *преобразование Вейля*

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

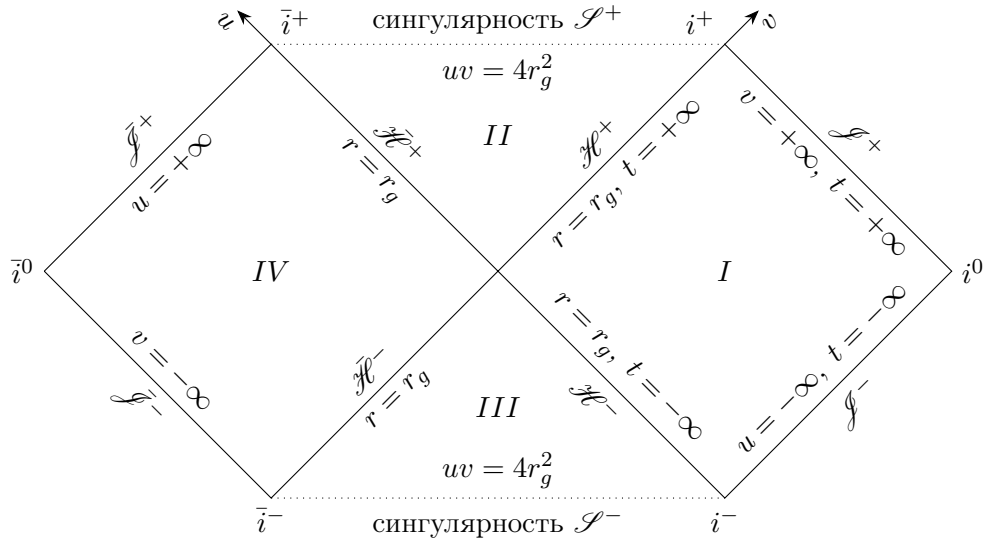


Рис. 10.3. Диаграмма Пенроуза для максимально расширенного многообразия Крускала.  $I$  — область, покрываемая картой Шварцшильда;  $II$  — черная дыра;  $III$  — белая дыра;  $IV$  — «зазеркалье». Имеем  $I = Sc$ ,  $I \cup III = EF^+$ ,  $I \cup III = EF^-$ .

с множителем

$$\Omega(x) = \frac{r(u, v)}{r_g} e^{\frac{r(u, v)}{r_g}} \frac{1}{(1 + u^2/4r_g^2)(1 + v^2/4r_g^2)}$$

отобразит метрику (10.35) в плоскую метрику листа бумаги. В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием («компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом  $45^\circ$  к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной. Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. 10.3.

Горизонт событий будущего  $\mathcal{H}^+$  изображается лучом  $u = 0, v > 0$ , а горизонт событий прошлого  $\mathcal{H}^-$  — лучом  $v = 0, u < 0$ . Оба луча ограничивают внешнюю область  $v > 0, u < 0$ , что эквивалентно  $r > r_g$  в шварцшильдовых координатах. Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область  $I$ . Схематично координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис. 10.4.

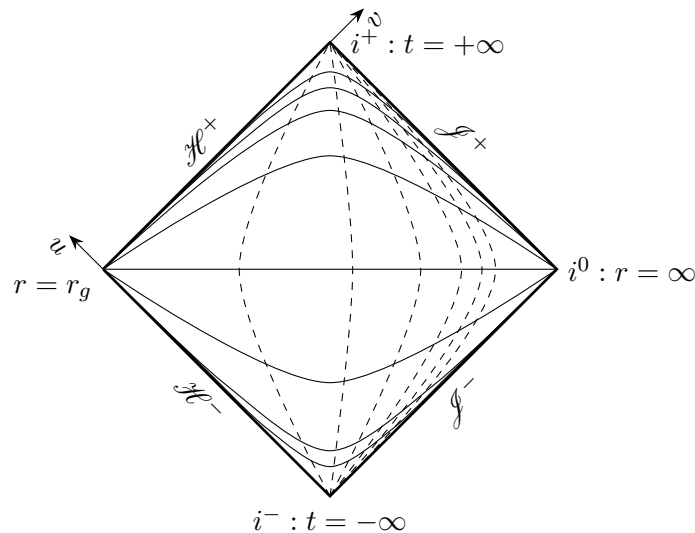


Рис. 10.4. Координатная сетка Шварцшильда в области  $I$  диаграммы Пенроуза (качественно). Линии времени  $t$  (пунктирные) сгущаются к правому краю, линии радиальной координаты  $r$  (сплошные) одинаково сгущаются сверху и снизу.

Достоинство координат  $u, v$  состоит в том, что мы можем продолжить метрику (10.35) из области

$u < 0, v > 0$  (область  $I$ ) в будущее в область  $u, v > 0$  (область  $II$ , черная дыра) и в прошлое в область  $u, v < 0$  (область  $III$ , белая дыра). Формально области  $II$  и  $III$  отвечают значениям  $r < r_g$ , но, на самом деле, представляют собой две совершенно отдельные области пространства-времени, независимо описываемые областью  $r < r_g$  координат Шварцшильда. Насколько далеко можно продолжить метрику в область положительных значений  $uv$ ? До тех пор, пока мы не достигнем линий сингулярности

$$r(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv = 4r_g^2. \quad (10.36)$$

При  $u, v > 0$  сингулярность находится в абсолютном будущем (см. рис. 10.3) для всех событий внутри области  $II$ . Никакая траектория не может миновать сингулярности. При  $u, v < 0$  сингулярность находится в абсолютном прошлом.

Кроме областей  $I, II$  и  $III$  мы видим на диаграмме область  $IV$ , которая необходима, если мы хотим избежать ситуации, когда частицы пропадают неизвестно куда или появляются ниоткуда в регулярных точках.<sup>1</sup> Эта область представляет собой невидимый «зеркальный мир», с которым не может быть никакой коммуникации из области  $I$ ,<sup>2</sup> но который обязан существовать. Формально горизонт  $\mathcal{H}^+$  и бесконечность  $\mathcal{I}^+$  отображаются в область  $t \rightarrow -\infty$ , а горизонт  $\mathcal{H}^-$  и бесконечность  $\mathcal{I}^-$  — в область  $t \rightarrow +\infty$ , так что можно предположить, что время там течет в некотором смысле назад. Однако, скорее всего, это относится к области умозрительных непроверяемых предположений.

### Задачи

1. Покажите, что векторные поля  $J_i$ , определенные в (10.1), являются векторами Киллинга в плоском пространстве-времени и удовлетворяют соотношениям (10.2) алгебры  $so(3)$ .
2. Завершите доказательство (10.9)–(10.11).
3. Проверьте формулы (10.15) и (10.16).
4. Используя уравнение Гамильтона—Якоби, покажите, что в некоторой окрестности любой точки метрику можно привести к виду

$$ds^2 = g_{--}(dx^-)^2 + 2 dx^- d\tau + 2g_{-i} dx^- dx^i + g_{ij} dx^i dx^j, \quad i = 2, \dots, d-1.$$

Здесь  $\tau$  является аффинным параметром изотропных геодезических. В случае  $g_{-i} = 0$  эти геодезические даются уравнениями  $x^- = \text{const}$ ,  $x^i = \text{const}$ . Такая метрика обобщает метрику Эддингтона—Финкельштейна.

**5\***. Используя конструкцию, которую мы обсуждали на Семинаре 6, и формулы (10.21)–(10.24), постройте синхронную систему отсчета в подпространстве  $\vartheta$ ,  $\varphi = \text{const}$ . Перейдите от координат  $(t, x)$  к координатам  $\tau = -S/m$  и  $\varepsilon = E/m$  и найдите метрику в этих координатах. Как меняется с собственным временем расстояние между частицами, которые начали падать одновременно из одной точки с немного разными энергиями? Как оно ведет себя вблизи сингулярности?

## Семинар 10

### Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

В случае статического сферически-симметричного тела с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_j^i = -p(r)\delta_j^i$$

задачу нахождения гравитационного поля можно решить точно. Уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Естественно, можно рассматривать и многолистные накрытия пространства, изображенного на рис. 10.3 с точкой ветвления  $u = v = 0$  ( $r = r_g$ ), в которых будет несколько (или даже бесконечно много) областей типа  $I, II, III, IV$ .

<sup>2</sup>Точнее, мы можем что-то узнать об этом мире, только упав на черную дыру, если мы, конечно, выживем, когда нас будут разрывать приливные силы. В любом случае наше знание пропадет, когда мы упадем на сингулярность.

Первое уравнение приводит к статичности метрики. Уравнение для  $h(r)$  отделяется и дает

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (10.37)$$

С помощью четвертого уравнения отсюда легко найти  $k'(r)$ :

$$\frac{dk}{dr} = G \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}.$$

Подставляя ответ в третье уравнение, получаем *условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова*

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (10.38)$$

На этом уравнении строится теория устойчивости звезд (в тех случаях, когда вращением можно пренебречь). Уравнение следует решать с граничным условием  $p(R) = 0$ , где  $R$  — радиус звезды.

Давайте оценим предел устойчивости звезд. Критерий устойчивости звезды радиуса  $R$  имеет вид:

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (10.39)$$

Проще всего найти критерий устойчивости для звезды, состоящей из несжимаемого вещества  $\rho = \text{const}$ . В этом случае для предельной массы имеем

$$M_{\text{max}} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}. \quad (10.40)$$

Для нейтронной звезды с плотностью  $\rho \simeq 3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$  имеем  $M_{\text{max}} \simeq 6.6 M_{\odot}$ , где  $M_{\odot}$  — масса Солнца.

Рассмотрим теперь звезду с уравнением состояния

$$p = \alpha\rho. \quad (10.41)$$

В случае  $\alpha = \frac{1}{3}$  это уравнение представляет собой уравнение ультрарелятивистского идеального газа. Здесь имеется точное решение

$$m(r) = Kr, \quad K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1} G^{-1}, \quad (10.42)$$

и критерий устойчивости состоит в том, что  $K < \frac{1}{2G}$ . Это условие выполнено при любых  $\alpha$ . Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.41) перестает работать. Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.



## Лекция 11

### Движение частицы в метрике Шварцшильда

В прошлый раз мы обсуждали радиальное движение частицы в метрике Шварцшильда. Сегодня рассмотрим общий случай движения частицы по орбите и детально разберем процесс разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. В следующей лекции мы используем это, чтобы изучить два эффекта в слабом поле, связанные с экспериментальной проверкой ОТО: вращение перигелия орбиты частицы и отклонение света гравитационным полем (гравитационное линзирование).

В силу сферической симметрии системы и закона сохранения момента импульса частица будет двигаться в одной плоскости, содержащей большие круги сфер  $r = \text{const}$ . Удобно выбрать эту плоскость перпендикулярной оси  $z = x^3$ , то есть принять  $\vartheta = \pi/2$ .<sup>1</sup> Уравнение Гамильтона—Якоби (4.20) принимает вид

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \quad (11.1)$$

Мы видим, что переменные  $t, \varphi$  не входят явно в уравнение. Поэтому мы можем положить соответствующие производные постоянными:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J. \quad (11.2)$$

Смысл этих констант достаточно очевиден:  $E$  представляет собой энергию частицы, а  $J$  — проекцию момента импульса на ось  $z$  (по модулю совпадающую с полным моментом). Отсюда имеем

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + J\varphi + S_r(E, J, r). \quad (11.3)$$

Подставляя это в уравнение (11.1) и интегрируя по  $r$ , получаем

$$S_r(E, J, r) = \pm \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E, J, r)}, \quad (11.4)$$

$$F(E, J, r) = E^2 - U^2(J, r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Величина  $U(J, r)$  играет роль потенциальной энергии. Мы имеем решение, зависящее от двух параметров, для системы с двумя степенями свободы. Миртовая линия частицы определяется уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi_0, \quad (11.5)$$

где новые константы  $t_0, \varphi_0$  имеют очевидный смысл начальных времени и угла. Имеем

$$t = t_0 \pm E \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \quad (11.6)$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \quad (11.7)$$

Нетрудно также вычислить собственное время частицы

$$\tau = \tau_0 \pm m \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{F(E, J, r)}}. \quad (11.8)$$

Обратим внимание, что собственное время свободно падающей частицы по-прежнему связано с координатным соотношением (10.26).

Мы здесь немного злоупотребили обозначениями, обозначив одной буквой предел и переменную интегрирования, но, я думаю, это никого не введет в заблуждение. Физикам такое простительно.

<sup>1</sup>Несложно разделить переменные и в общем случае, но это не изменит ответов, несколько усложнив технику.

Зададимся вопросом: в каких пределах может меняться радиальная координата  $r$  при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \quad r > 0. \quad (11.9)$$

Обратим внимание, что уравнение Гамильтона—Якоби можно решать как в области  $r > r_g$ , так и в области  $r < r_g$ , причем, если не касаться времени  $t$ , решения переходят из одной области в другую непрерывно. Разрыв в определении времени  $t$ , выражающийся логарифмической расходимостью интеграла в уравнении (11.6), означает, что на самом деле мы имеем дело с двумя различными картами, не переходящими друг в друга непрерывно. Однако частица, движущаяся в метрике Шварцшильда, «не знает» об этом: время  $t$  ее совершенно не касается. Правильный способ перехода между областями связан с решением уравнения Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна, но решения этого уравнения просто пересчитываются в решения уравнения (11.1) (см. задачу).

Для начала перечислим возможные виды движения тела в центральном поле:

1. Инфинитное движение. Частица прилетает из бесконечности, приближается к сфере Шварцшильда до некоторого минимального значения радиальной координаты  $r = R_{\min} > r_g$ , а затем снова улетает на бесконечность.
2. «Инфинитно-сингулярное»<sup>2</sup> движение. Частица прилетает из бесконечности, пересекает горизонт событий  $\mathcal{H}^+$  и достигает сингулярности черной дыры  $\mathcal{S}^+$  (падение на черную дыру). Либо наоборот, испускается сингулярностью белой дыры  $\mathcal{S}^-$ , пересекает горизонт событий  $\mathcal{H}^-$  и уходит на бесконечность (испускание частицы белой дырой). Эти два движения переходят друг в друга при обращении времени.
3. Финитное (орбитальное) движение. Частица совершает орбитальное движение приближаясь к сфере Шварцшильда и удаляясь от нее, оставаясь все время в некоторых пределах  $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ , причем  $R_{\min} > r_g$ .
4. «Финитно-сингулярное» движение. Частица испускается белой дырой, последовательно пересекает горизонты событий  $\mathcal{H}^-$  и  $\mathcal{H}^+$  и поглощается черной дырой. При этом ее радиальная координата не превышает некоторого значения  $r_{\max} \geq r_g$ .

Точки  $R_{\max}$ ,  $R_{\min}$ ,  $r_{\max}$  являются *точками поворота*. Это значит, что в этих точках (и только в этих точках!) может изменяться направление радиального движения частицы: «к центру» на «от центра» и наоборот. Точки поворота являются решениями уравнения

$$F(E, J, r_*) \equiv E^2 - U^2(J, r_*) = 0. \quad (11.10)$$

Сначала рассмотрим случай  $J = 0$ . В этом случае уравнение (11.10) линейно по  $r_*^{-1}$  и легко решается. Неравенство (11.9) дает

$$\frac{r_g}{r} \geq -\frac{E^2 - m^2}{m^2}. \quad (11.11)$$

Мы видим, что если  $E \geq m$  неравенство выполняется для любых допустимых значений  $r$ , точек поворота нет и движение частицы «инфинитно-сингулярное». В случае  $E < m$  частица не может удалиться на расстояние больше  $r_{\max} = r_g m^2 / (m^2 - E^2)$ . Она испускается из сингулярности белой дыры  $\mathcal{S}^-$ , затем, достигнув точки  $r = r_{\max}$ , *разворачивается* (ее радиальная скорость в этот момент равна нулю) и снова падает на «центр», точнее, на сингулярность  $\mathcal{S}^+$ . Это — «финитно-сингулярное» движение. Графически это изображено на рис. 11.1. На графиках приведена зависимость  $U^2$  от  $r^{-1}$  и уровни  $E^2$ . Сплошная часть линий уровня  $E^2$  показывает области, где происходит движение частицы, а пунктирная часть — запрещенные области.

Когда  $J \neq 0$ , ситуация оказывается сложнее. Уравнение (11.10) является уравнением третьей степени. Удобно рассмотреть его как уравнение для переменной  $\xi = r^{-1}$ :

$$r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0. \quad (11.12)$$

<sup>2</sup>В кавычки взяты названия, не являющиеся общепринятыми терминами.

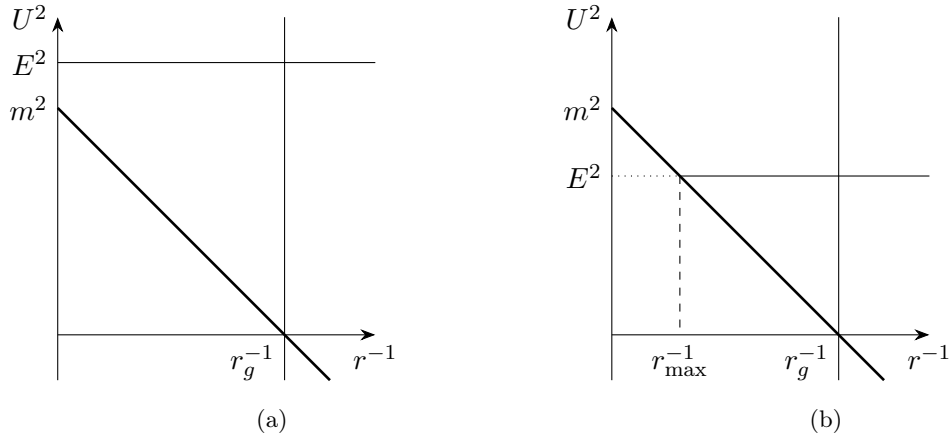


Рис. 11.1. График  $U^2(0, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$ . (а)  $E > m$  и  $F > 0$  для всех  $r$ ; (б)  $E < m$  и  $F \geq 0$  для  $r \leq r_{\max}$ .

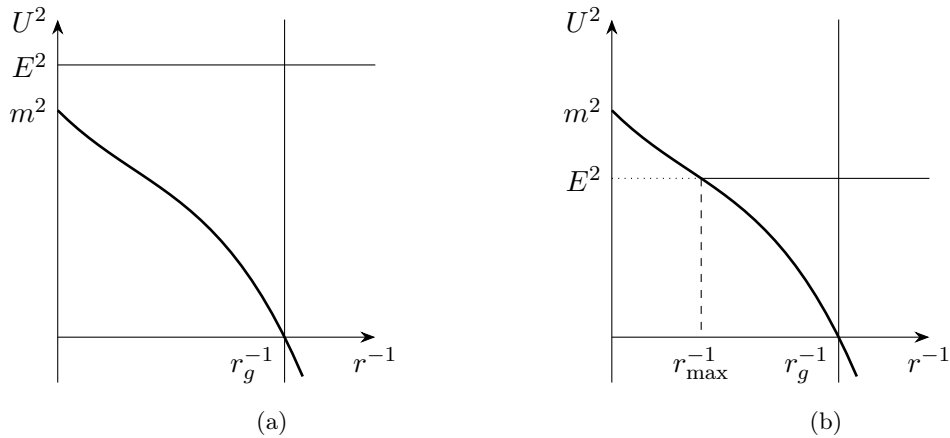


Рис. 11.2. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $|J| < \sqrt{3}mr_g$ . (а)  $E > m$  и  $F > 0$  для всех  $r$ ; (б)  $E < m$  и  $F \geq 0$  для  $r \leq r_{\max}$ .

Старший коэффициент положителен, так что при достаточно больших значениях  $\xi$  функция  $F(E, J, \xi^{-1})$  растёт, а, соответственно  $U^2(J, \xi^{-1})$  убывает. Заметим, что график функции  $U^2(J, \xi^{-1})$  (Рис. 11.1–11.4) обязательно проходит через две точки  $(0, m^2)$  и  $(r_g^{-1}, 0)$ . Далее ситуация зависит от количества вещественных положительных корней уравнения (11.12). Нетрудно (хотя и утомительно) найти экстремумы функции  $F(E, J, \xi^{-1})$ :

$$r_{\pm}^{-1} = \xi_{\pm} = \frac{1}{3r_g} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}} \right), \quad (11.13)$$

$$F(E, J, r_{\pm}) = E^2 - E_{\pm}^2, \quad E_{\pm}^2 = \frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{27} \frac{J^2}{r_g^2} \left( 1 \pm \left( 1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2} \right)^{3/2} \right).$$

Здесь имеется два случая.

1. Если  $|J| \leq \sqrt{3}mr_g$ , полином  $F(E, J, \xi^{-1})$  монотонен и имеет единственный вещественный корень  $r_{\max}^{-1}$ , который положителен при  $E < m$  и отрицателен при  $E > m$ . Действительно, для корней уравнения (11.12)  $\xi_i$  имеем  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \frac{m^2 - E^2}{r_g J^2}$ . Поскольку два корня, например  $\xi_2, \xi_3$  комплексно сопряжены друг другу, их произведение положительно. Значит, знак  $\xi_1$  (и, соответственно,  $r_1$ ) совпадает со знаком  $m^2 - E^2$ . Ситуация вполне аналогична ситуации при  $J = 0$  за исключением того, что  $r_{\max}^{-1}$  теперь является решением уравнения третьей степени (см. рис. 11.2).

2. Если же момент импульса частицы достаточно велик,  $|J| > \sqrt{3}mr_g$ , имеется два положительных экстремума  $r_g^{-1} > \xi_+ > \xi_- > 0$ , причем экстремальные значения «потенциальной энергии» удовлетворяют условию  $E_+ > E_- > 0$ . Следовательно, уравнение (11.12) может иметь от одного до трех

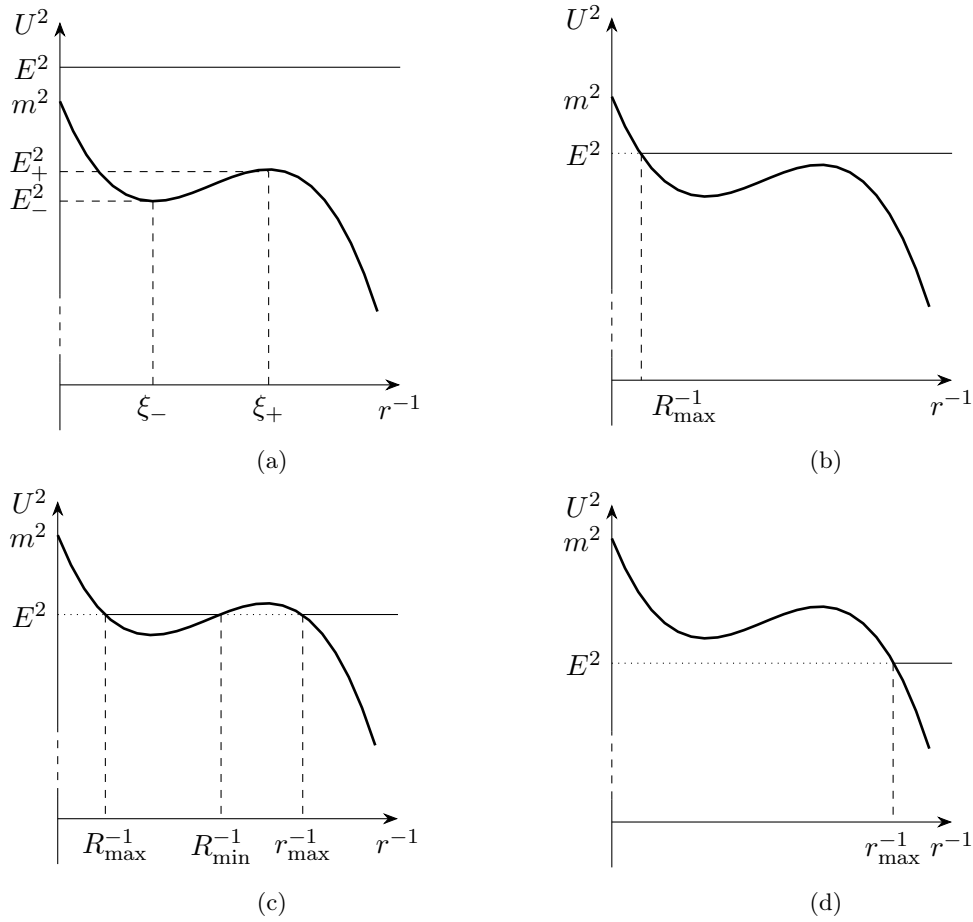


Рис. 11.3. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ . (a)  $E > m$ ; (b)  $E_+ < E < m$ ; (c)  $E_- < E < E_+$ ; (d)  $E < E_-$ .

вещественных корней, и из этих корней не более чем один корень может быть отрицательным. Мы видим, что при  $E > E_+$  имеется ровно один вещественный корень  $\xi_1$ . Этот корень положителен при  $E^2 < m^2$ . Поэтому поведение системы зависит от того, что больше,  $m$  или  $E_+$ . Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E_+ < m, & \text{ если } |J| < 2mr_g; \\ E_+ > m, & \text{ если } |J| > 2mr_g. \end{aligned}$$

При  $E > E_+, m$  единственный корень отрицателен и частица совершает «инфинитно-сингулярное» движение. При  $E < E_-$  единственный корень  $\xi_1 > 0$  дает  $r_{\max} = \xi_1^{-1}$  и движение является «финитно-сингулярным». В области же  $E_- < E < \max(E_+, m)$  случай 2 распадается на два подслучая.

2а. При  $\sqrt{3}mr_g < J < 2mr_g$  (см. рис. 11.3) в диапазоне  $E_+ < E < m$  система ведет себя как в случае 1: единственный корень  $\xi_1$  положителен и соответствующее значение  $R_{\max} = \xi_1^{-1}$  дает максимальное удаление частицы от сферы Шварцшильда. Частица совершает «финитно-сингулярное» движение.

В случае же  $E_- < E < E_+$  имеется три положительных корня. Обозначим их  $R_{\max} > R_{\min} > r_{\max}$  и две области неотрицательных значений  $F(E, J, r)$ :  $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$  и  $r \leq r_{\max}$ . Первая область отвечает орбитальному (финитному) движению, вторая — «финитно-сингулярному».

2б. При  $J > 2mr_g$  (см. рис. 11.4) в диапазоне  $E_+ > E > m$  имеется три корня, но один из них отрицательный, а два других — положительные. Этим двум положительным корням отвечают две точки  $R_{\min}, r_{\max}$ , такие что  $R_{\min} > \xi_-^{-1} > r_{\max} > \xi_+^{-1} > \frac{3}{2}r_g$ . В области  $r > R_{\min}$  частица совершает инфинитное движение, а в области  $r < r_{\max}$  — «финитно-сингулярное». Между этими двумя областями имеется потенциальный барьер. Формально-математически сюда же относится и случай  $J = 2mr_g$ .

Изучим орбитальное движение тела, которое имеет место в случае 2 при  $E_- \leq E \leq m, E_+$ . В это случае тело вращается вокруг источника гравитации, периодически приближаясь к источнику

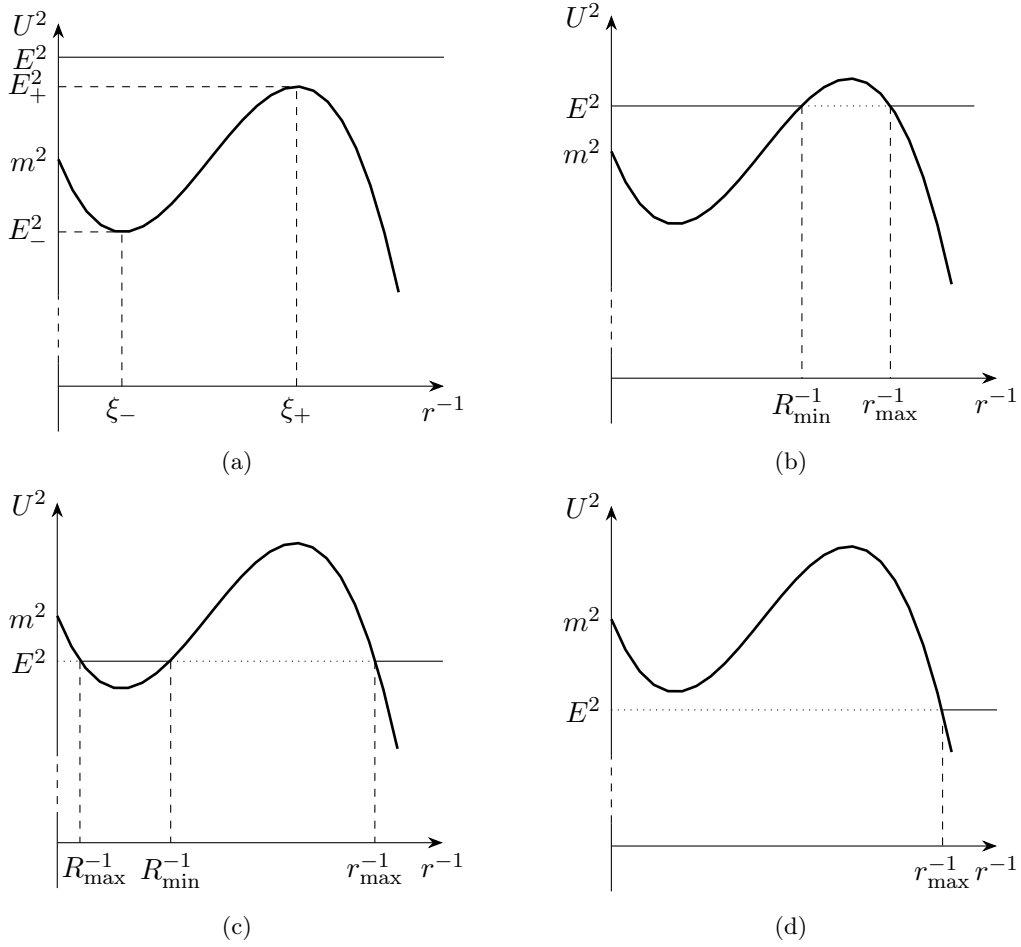


Рис. 11.4. График  $U^2(J, r)$  в зависимости от  $r^{-1}$  в случае  $|J| > 2mr_g$ . (a)  $E > E_+$ ; (b)  $m < E < E_+$ ; (c)  $E_- < E < m$ ; (d)  $E < E_-$ .

и достигая точки *перицентра*  $r = R_{\min}$  и затем удаляясь и достигая точки *апоцентра*<sup>3</sup>  $r = R_{\max}$ . Уравнения (11.6), (11.7) дают нам время  $T_{\text{пер}}$  и угол  $\Phi_{\text{пер}}$ , характеризующие движение тела по орбите:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \quad (11.14)$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \quad (11.15)$$

Величина  $T_{\text{пер}}$  дает время, за которое тело, находящееся в начальный момент времени в перифентре достигает апоцентра и вновь приближается, достигая новой точки перифентра. Величина  $\Phi_{\text{пер}}$  дает угол, на который следующая точка перифентра отличается от предыдущей. В ньютоновском пределе  $\Phi_{\text{пер}} = 2\pi$ , то есть следующий перифентр достигается ровно через один оборот вокруг источника гравитации. В дальнейшем нас будет интересовать величина  $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$ , характеризующая смещение перифентра за один оборот. Важно отметить, что величина  $T_{\text{пер}}$  является периодом *радиального* движения тела, а не периодом обращения (*сидерическим* периодом), то есть периодом, за который угол меняется на  $2\pi$ . Сидерический период, строго говоря, не является периодом какого бы то ни было движения. Он зависит от того, с какой начальной точки орбиты мы его отсчитываем. Хорошо определен только *средний* сидерический период, основанный на «многолетних» измерениях:

$$\overline{T_{\text{сид}}} = \frac{2\pi}{\overline{\Phi_{\text{пер}}}} T_{\text{пер}}. \quad (11.16)$$

В пределе  $E \rightarrow E_+$  как период  $T_{\text{пер}}$ , так и угол  $\Phi_{\text{пер}}$  стремятся к бесконечности. Дело в том, что частица с  $E = E_+$  бесконечно долго приближается снаружи к точке  $r_+ = r_{\max} = R_{\min}$  и отскока не

<sup>3</sup>Если центральным телом является Солнце, то говорят о *перигелии* и *афелии* (или *апогелии*) соответственно.

происходит. Точно также, частица с энергией  $E = E_+$ , испущенная из белой дыры, бесконечно долго приближается к этой точке и никогда не падает на черную дыру.

### Задачи

1. Второй закон Кеплера утверждает, что угловая скорость частицы в ньютоновском гравитационном поле (и, на самом деле, в любом статическом центральном потенциальном поле в нерелятивистской механике) обратно пропорциональна квадрату расстояния до центрального тела. Найдите аналог второго закона Кеплера для тела, движущегося в метрике Шварцшильда.

2. Напишите и решите уравнение Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна (10.29). Найдите связь с решением (11.6), (11.7).

3. Выведите (11.8) и покажите, что в случае свободного падения на черную дыру частица достигает горизонта  $\mathcal{H}^+$ , а затем и сингулярности за конечное собственное время и при ненулевых значениях момента импульса.

4. Найдите все устойчивые круговые орбиты в метрике Шварцшильда, их энергии, моменты импульса и сидерические периоды в зависимости от радиуса орбиты. Найдите наименьший возможный радиус устойчивой орбиты.

5\*. Изучите и опишите качественно движение частиц с энергией  $E = E_+$  в разных режимах. Найдите асимптотики этих решений, когда частица приближается неустойчивой орбите  $r = r_+ = \xi_+^{-1}$ . Найдите параметры этих орбит. Найдите наименьший возможный радиус неустойчивой орбиты. Как будет вести себя частица с энергией чуть меньше или чуть больше  $E_+$ ? Оцените время, которое частица будет проводить в окрестности неустойчивой орбиты и количество оборотов, которое она за это время сделает.

## Семинар 11

### Падение пыли на черную дыру

Рассмотрим падение тонкого (малой толщины  $\sim l$ ) сферического слоя пылевидной материи малой массы  $m$  с полной энергией  $\delta E = \varepsilon m$  на черную дыру массы  $M \gg \delta E, m$ . Ее движение описывается функцией  $r = r(t)$ . Мы будем все же предполагать слой не слишком тонким, чтобы

$$G\delta E \ll l. \tag{11.17}$$

При этом условии мы можем пренебречь изменением траекторий частиц под действием гравитационного поля самого слоя. Кроме того, мы будем игнорировать возможные неустойчивости, которые могли бы привести к нарушению сферичности слоя.

Снаружи ( $r > r(t)$ ) и внутри ( $r < r(t)$ ) пылевидной оболочки будем искать решение в виде метрики Шварцшильда с гравитационным радиусом  $r_{g+}$  снаружи и  $r_{g-}$  внутри. У нас нет гарантии, что эти две метрики будут сшиваться на слое в одной и той же калибровке, так что мы будем записывать метрику в слегка более общем виде, полагая, что  $k + h = F_{\pm}(t)$ :

$$ds^2 = e^{2F_{\sigma}(t)-2h(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{11.18}$$

где

$$e^{-2h(t,r)} = 1 - \frac{r_{g\sigma}}{r}, \quad \sigma = \text{sign}(r - r(t)) \tag{11.19}$$

Ниже мы найдем малые скачки гравитационного радиуса  $\delta r_g = r_{g+} - r_{g-}$  и калибровочной функции  $\delta F(t) = F_+(t) - F_-(t)$  на слое.

Изучим сначала движение пылевидной сферы и найдем ее тензор энергии-импульса. Будем считать, что сфера настолько легкая, что при вычислении закона ее падения скачками  $F$  и  $r_g$  можно пренебречь. Движение сферы определяется уравнением Гамильтона—Якоби. Напишем его для собственного времени  $\tau(t, r)$  пылинок:

$$e^{2h(r)-2F(t)} \tau_t^2 - e^{-2h(r)} \tau_r^2 = 1. \tag{11.20}$$

Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t, r, \varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r, \varepsilon), \tag{11.21}$$

где  $f'(t) = e^{F(t)}$ . Подставляя в (11.20), находим

$$\tilde{\tau}(r, \varepsilon) = \int dr e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}}. \quad (11.22)$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам (это отвечает знаку «-» в (11.4)). Без ограничения общности мы будем полагать  $t_0 = 0$ . Тогда легко находим

$$d\tau = \tau_{,t} dt + \tau_{,r} dr = e^F \varepsilon dt + e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}} dr. \quad (11.23)$$

Нетрудно подобрать ортогональное направление с единичной нормой:

$$dl = e^F \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}} dt + e^{2h} \varepsilon dr. \quad (11.24)$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l), \quad (11.25)$$

где  $l$  — отклонение от положения сферы в данный момент времени  $r(t)$  вдоль направления, задаваемого  $dl$ . Полагая  $dt = 0$ , выражаем  $dr$  через  $dl$ :

$$dr = e^{-2h} \varepsilon^{-1} dl,$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации. Получаем

$$\rho(t, r) = \frac{m}{4\pi r^2 \varepsilon e^{2h}} \delta(r - r(t)). \quad (11.26)$$

Тензор энергии-импульса равен  $T_{\nu}^{\mu} = \rho u^{\mu} u_{\nu}$ , где  $u_{\mu} = \tau_{,\mu}$ . Отсюда получаем уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned} R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) e^{-2k} + \left( k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r} \right) e^{-2h} = \frac{2G \delta E}{r^2} \left( 1 - \frac{e^{-2h}}{2\varepsilon^2} \right) \delta(r - r(t)), \\ R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) e^{-2k} + \left( k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r} \right) e^{-2h} = -\frac{2G \delta E}{r^2} \left( 1 - \frac{e^{-2h}}{2\varepsilon^2} \right) \delta(r - r(t)), \\ R_r^t &= \frac{2e^{-2k} \dot{h}}{r} = \frac{2G \delta E}{r^2} e^{2h} \sqrt{1 - \varepsilon^{-2} e^{-2h}} \delta(r - r(t)), \\ R_{\vartheta}^{\vartheta} = R_{\varphi}^{\varphi} &= -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}}{r^2} = -\frac{G \delta E}{\varepsilon^2 e^{2h} r^2} \delta(r - r(t)), \end{aligned} \quad (11.27)$$

где мы использовали равенство  $\delta E = \varepsilon m$ . Уравнения для  $R_t^t - R_r^r$  и  $R_{\vartheta}^{\vartheta}$  немедленно дают

$$\begin{aligned} k' + h' &= \frac{2G \delta E}{r} \left( e^{2h} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) \delta(r - r(t)), \\ k' - h' &= -\frac{G \delta E}{\varepsilon^2 r} \delta(r - r(t)) + \frac{e^{2h} - 1}{r}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Отсюда для скачков получаем

$$\delta k = G \delta E \left( \frac{1}{r - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r} \right), \quad \delta h = \frac{G \delta E}{r - r_g}. \quad (11.29)$$

Так как

$$k = F(t) + \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right), \quad h = -\frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right),$$

и, следовательно,

$$\delta k = \delta F - \frac{\delta r_g}{2(r - r_g)}, \quad \delta h = \frac{\delta r_g}{2(r - r_g)},$$

получаем

$$\delta r_g = 2G \delta E, \quad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = G \delta E \left( \frac{2}{r(t) - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r(t)} \right). \quad (11.30)$$

Иными словами, масса черной дыры увеличивается ровно на энергию падающей пылевидной сферы, а скорость течения времени испытывает скачок  $\delta k$  на поверхности разрыва. В нерелятивистском пределе  $r_g \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$  этот скачок стремится к нулю. Это соответствует тому хорошо известному факту, что потенциал поля не испытывает скачка на материальной поверхности конечной поверхностной плотности.

Заметим, что в силу условия (11.17) в уравнении для  $R_t^t + R_r^r$  мы можем пренебречь членами, квадратичными по дельта-функции, входящими  $\dot{k}\dot{h}$ ,  $\dot{h}^2$ ,  $k'^2$ ,  $k'h'$ .

Если последовательно падает, не пересекаясь, несколько пылевых сфер, то они ничего друг о друге «не знают», поэтому решение можно обобщить на пылевой шаровой слой или шар, сжимающийся таким образом, чтобы частицы двигались по непересекающимся геодезическим.



## Лекция 12

### Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

На этой лекции мы разберем два примера, соответствующих двум исторически первым экспериментальным проверкам ОТО. Это вековое смещение перигелия орбиты частицы и отклонение света в поле гравитирующих тел.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто еще в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье, который обработал результаты 40-летних наблюдений Парижской обсерватории, учел влияние других планет, и обнаружил, что смещение перигелия отличается от предсказываемого ньютоновской теорией примерно на  $38''$  за столетие. Позднее, в 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ( $43''$  за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса. Предпринимались многочисленные попытки объяснить эти аномалии. Было высказано предположение, что внутри орбиты Меркурия имеются орбиты какого-то еще тела («Вулкан») или нескольких тел («Вулканоиды»). Однако поиски таких тел не принесли результата. К концу XIX века возможность существования таких тел достаточной массы, чтобы сказаться на орбите Меркурия, была исключена. Так же была исключена возможность существования достаточно массивных газовых или пылевых облаков. Было предложено несколько модификаций ньютоновской гравитации, как с потенциальным, так и с непотенциальным (зависящим от скорости) взаимодействием. Однако такие теории при значениях параметров, которые могли бы объяснить аномалию, противоречили известным фактам о движении планет и Луны. В результате аномалия не нашла удовлетворительного объяснения до создания общей теории относительности. Правильное значение смещения было вычислено Эйнштейном на основе ОТО в конце 1915 года, причем ответ не содержал никаких подгоночных параметров.

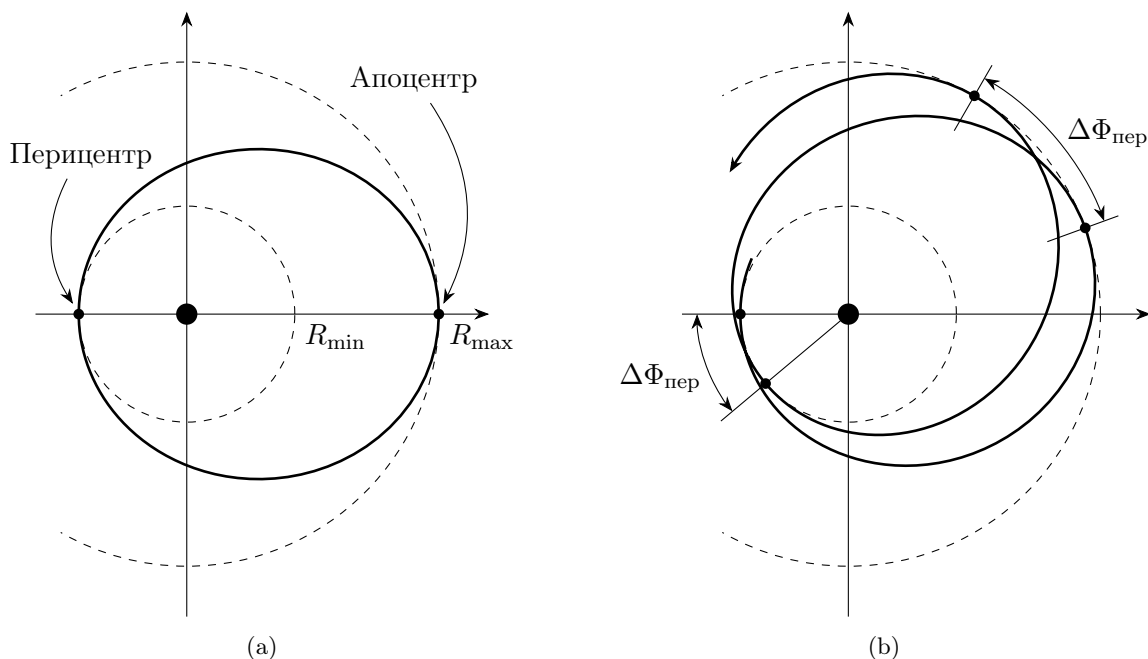


Рис. 12.1. Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) в ньютоновском поле; (б) в общей теории относительности.

Отклонение луча света гравитационным полем (*гравитационное линзирование*) было предсказано Эйнштейном в 1916 году и открыто двумя британскими экспедициями под руководством Артура Эддингтона в 1919 году.

Начнем с изучения орбиты нерелятивистской частицы в слабом гравитационном поле и вычисления смещения перигелия. Прежде всего, надо правильно разложить подкоренное выражение  $F(E, J, r)$  в действии (11.4). Для этого оценим «нерелятивистскую» энергию  $\mathcal{E} = E - m < 0$ , момент импульса  $J$  и потенциальную энергию  $-GmM/r = -mr_g/2r$  для орбитального движения через характерную

скорость  $v \ll 1$  частицы:

$$\frac{|\mathcal{E}|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Разложим выражение  $F(m + \mathcal{E}, J, r)$  вплоть до членов порядка  $v^4 \sim \mathcal{E}^2/m^2$ :

$$F(E, J, r) = \left( 2m\mathcal{E} + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2} \right) + \left( \mathcal{E}^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right) + m^2 O\left(\frac{\mathcal{E}^3}{m^3}\right). \quad (12.1)$$

Первая скобка

$$F^{(0)}(m + \mathcal{E}, J, r) = 2m\mathcal{E} + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2} \quad (12.2)$$

имеет порядок  $mv^2$  и отвечает, очевидно, действию для закона Ньютона:

$$S_r^{(0)}(\mathcal{E}, J, r) = \sqrt{2m} \int dr \sqrt{\mathcal{E} - \frac{J^2}{2mr^2} + G \frac{Mm}{r}}. \quad (12.3)$$

Вторая скобка имеет порядок  $m^2 v^4 \sim m^2 r_g^2 / r^2$  и дает первую поправку. Поделив на  $m^2$  получаем относительный порядок малости  $r_g^2 / r^2$ . Отсюда следует, что задача выходит за рамки линейного приближения для гравитационного поля, которое дает правильные ответы только в порядке малости  $r_g / r$ .

Важно, что не все поправки вносят вклад в смещение перицентра. Чтобы это увидеть, давайте поймем, как изменяются пределы интегрирования под действием поправок. Ньютоновские пределы интегрирования являются решениями квадратного уравнения

$$\mathcal{E} + \frac{m r_g}{2r} - \frac{J^2}{2m r^2} = 0.$$

Слагаемое  $\mathcal{E}^2$  во второй скобке в (12.1) можно поглотить, объединив со слагаемым  $2m\mathcal{E}$ . Это слегка изменит период обращения, потому что энергия отдельно входит в (11.6), но не скажется на угле смещения перицентра за период, который определяется уравнением (11.7), в которое энергия входит только через  $F$ . Оказывается, можно с интересующей нас точностью поглотить и член  $J^2 r_g / r^3$ . Для этого сделаем замену  $r = \tilde{r} - r_g / 2$ . Тогда имеем

$$F(E, J, r) = F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r}) + m^2 O(|\mathcal{E}|^3 / m^3), \quad (12.4)$$

где

$$\tilde{r} = r + \frac{r_g}{2}, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{2m} \right), \quad \tilde{J}^2 = J^2 - \frac{m^2 r_g^2}{2}. \quad (12.5)$$

Легко видеть, что поправка к моменту мала:

$$\frac{m^2 r_g^2}{J^2} \sim \frac{m^2 r_g^2}{m^2 r^2 v^2} \sim \frac{r_g}{r}.$$

После подстановки (12.5) предельные значения  $\tilde{R}_{\min}, \tilde{R}_{\max}$  для переменной  $\tilde{r}$  совпадают с  $R_{\min}, R_{\max}$  в ньютоновском пределе, вычисленных для энергии  $\mathcal{E}$  и момента  $\tilde{J}$ . При этом согласно формуле (11.15) и известному факту, что смещение перицентра в ньютоновской теории равно нулю, имеем

$$2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}} = 2\pi.$$

При этом полный набег угла, который получает частица за полный цикл изменения  $r$  от минимального до максимального значения и обратно, составляет

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Поэтому

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2 \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}} \left( \frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2(1 - r_g/2\tilde{r})^2} \left( 1 + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}^2} \right) - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \simeq \frac{\tilde{J} r_g}{\tilde{r}^3} + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}\tilde{r}^2}.$$

Это величина порядка малости  $r_g/r \sim v^2$  по сравнению с  $J/r^2$ , так что в правой части этого равенства, под корнем и в пределах интегрирования мы можем убрать тильды. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|\mathcal{E}| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left( \frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|\mathcal{E}| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left( \xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Последний интеграл уже легко взять. Заменой  $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2 r_g}{2J^2}$  получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left( \xi + \frac{3m^2 r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4 r_g^2 - 8m|\mathcal{E}|}}{2|J|}.$$

Первый член в скобках дает нулевой вклад, а для второго имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pi.$$

Мы получаем формулу Эйнштейна для смещения перицентра:

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = \frac{3\pi m^2 r_g^2}{2J^2} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{J^2}. \quad (12.7)$$

Разумеется равенство (12.4) также означает, что эксцентриситет орбиты и скорость частиц в разных точках в зависимости от, например, расстояния от центра до перицентра и сидерического периода несколько отличаются от кеплеровских значений, но эти отклонения очень малы, и их трудно обнаружить в Солнечной системе. Смещение же перигелия сравнительно легко установить по многолетним наблюдениям.

Теперь перейдем к задаче об отклонении луча света гравитационным полем. Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы. Для такой частицы случай 2b — единственный реализующийся случай при любом ненулевом моменте. При этом  $E_- = 0$ , а максимум находится в точке  $r = \frac{3}{2}r_g$ , причем высота барьера  $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$  пропорциональна моменту импульса (см. рис. 12.2).

На большом расстоянии от гравитирующих тел частица движется по прямой, так что момент импульса  $J$  выражается через *прицельный параметр*  $\rho$ , то есть расстояние от луча до параллельной ему оси, проходящей через начало координат:

$$J = |\mathbf{p}|\rho = E\rho. \quad (12.8)$$

Тогда уравнение (11.7) можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (12.9)$$

Полный угол, заметаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad (12.10)$$

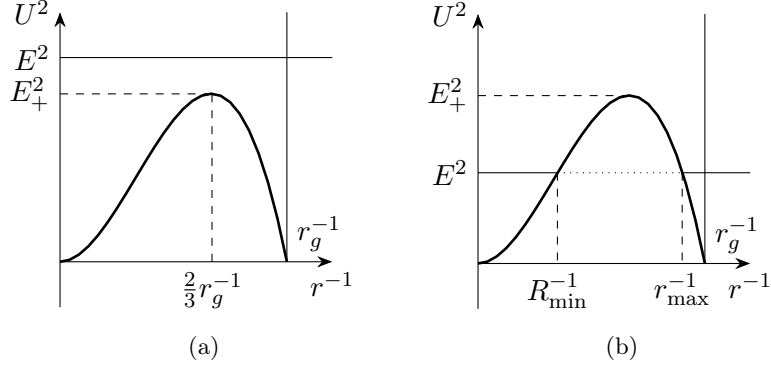


Рис. 12.2. Случай нулевой массы: (a)  $E > E_+$ ; (b)  $E < E_+$ .

где  $R_{\min}$  — решение уравнения

$$f(\rho, R_{\min}) = 0. \quad (12.11)$$

В случае плоского пространства ( $r_g = 0$ ) этот угол равен

$$\Phi_0 = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \pi.$$

Нас будет интересовать отклонение луча от прямой  $\theta = \Phi - \pi$ .

Максимум потенциальной энергии, как мы уже говорили, отвечает параметрам

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2} r_g. \quad (12.12)$$

При  $\rho < \rho_+$  свет падает на сингулярность (Рис. 12.2a), а при  $\rho > \rho_+$  (Рис. 12.2b) свет рассеивается и снова уходит на бесконечность. Отсюда мы легко находим сечение поглощения света черной дырой:

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi \rho_+^2 = \frac{27\pi}{4} r_g^2. \quad (12.13)$$

При  $\rho = \rho_+$  имеем  $R_{\min} = r_+$ , и свет приходящий из бесконечности асимптотически приближается к фотонной сфере  $r = r_+$ , «накручиваясь» на нее. Если прицельный параметр немного больше:  $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$ , свет приближается к фотонной сфере, делает некоторое количество оборотов, а затем снова уходит на бесконечность. Оценить число оборотов оказывается довольно несложно. Сначала разложим выражение под корнем по переменной  $\xi = r^{-1}$  вблизи точки  $\xi_+ = r_+^{-1}$ :

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

При вычислении  $R_{\min}$  последним слагаемым можно пренебречь. Из (12.11) получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1} \delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12.14)$$

Теперь положим  $\eta = \xi_* - \xi$  и разложим  $f(\rho, \xi^{-1})$  по  $\eta$  и  $\delta$ :

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3 - 3r_g \rho_+^{-1} \delta \eta^2 - 3r_g \rho_+^{-2} \delta^2 \eta + O(\delta^3).$$

Если положить  $\delta = 0$ , интеграл (12.10) будет логарифмически расходиться при  $\eta \rightarrow 0$ , что соответствует бесконечному накручиванию траектории на фотонную сферу. Интеграл могут сделать конечным первое и последнее слагаемое в этом выражении. Но последнее более высокого порядка малости по  $\delta$ , поэтому его можно отбросить. Можно отбросить и предпоследнее слагаемое, потому что оно вообще не регуляризует интеграл. Поэтому положим

$$f(\rho, \xi^{-1}) \simeq 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3. \quad (12.15)$$

Так как интеграл расходится логарифмически, разобьем его на две части. Возьмем такое  $\varepsilon$ , что  $r_g^{-1}\delta \ll \varepsilon \ll r_g^{-1}$ . Тогда

$$\Phi \simeq 2 \int_0^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3}} \simeq 2 \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2}} + 2 \int_\varepsilon^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r_g\eta^3}}.$$

В первом интеграле мы пренебрегли последним членом, так как  $r_g\eta^3 \ll \eta^2$  при  $\eta \lesssim \varepsilon$  и  $r_g\eta^3 \ll \rho_+^{-1}\delta\eta$  при  $\eta \lesssim r_g^{-1}\delta$ , а во втором — первым членом, так как  $\rho_+^{-1}\delta\eta \ll \eta^2$  при  $\eta \gtrsim \varepsilon$ . В качестве верхнего предела интегрирования мы взяли  $\xi_+$  вместо  $\xi_*$  так как эта замена внесет только малую поправку порядка  $\delta$ . Получившиеся интегралы считаются явно, и вклады, содержащие  $\varepsilon$ , сокращаются. В результате имеем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (12.16)$$

Мы видим, что число оборотов  $\Phi/2\pi$  логарифмически растет с уменьшением  $\rho - \rho_+$ , и это значит, что свет будет рассеиваться во все стороны. Нетрудно проверить, что вклад в сечение рассеяния света в интервал углов  $[\theta, \theta + d\theta]$  от таких орбит пропорционален  $\text{ch}(\pi - \theta) d\theta$ , то есть свет будет рассеиваться на большие углы, хотя рассеяние вперед будет преобладать. Это должно приводить к тому, что на изображении черной дыры, освещенной окружающими объектами, должно быть видно светящееся кольцо с внутренним радиусом  $\rho_+$ . Это кольцо создается как удаленными источниками излучения, так и излучением аккрецируемого вещества. В настоящее время имеется два наблюдения такого кольца для сверхмассивных черных дыр в центре галактики М87 (это одна из самых массивных галактик Местного скопления) и в центре нашей Галактики. Наблюдения сделаны в 2017 году с помощью коллаборации радиообсерваторий по всему миру (Телескоп горизонта событий), а результаты обработаны и опубликованы в 2019 и 2022 году соответственно.

В то же время основное рассеяние света как для крупных тел, так и для черных дыр происходит от области слабого рассеяния  $\rho \gg r_g$ . Как и в случае орбитального движения, чтобы вычислить углы рассеяния в этой области, нужно найти поправку к  $R_{\min}$ . В данном случае нужно искать поправку по сравнению с плоским пространством-временем. Знакомой нам заменой радиальной координаты  $r = \tilde{r} - r_g/2$  исключаем из  $f(\rho, r)$  вклад  $\propto \tilde{r}^{-3}$  и получаем

$$\theta = 2 \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - \pi = 2 \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (12.17)$$

Интеграл по  $\xi$  легко берется и равен единице. Отсюда получаем

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (12.18)$$

В отличие от задачи о прецессии перицентра, вывод этой формулы требует только линейного приближения в уравнениях Эйнштейна (см. задачи).

Полезно отметить, что уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (12.19)$$

формально совпадает с уравнением эйконала в геометрической оптике

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0, \quad (12.20)$$

где эйконал  $\psi(x)$  есть фаза электромагнитной волны в луче. Уравнение эйконала является коротковолновым пределом точного волнового уравнения. Частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  выражаются через эйконал как

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad k_\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (12.21)$$

Таким образом, энергия частицы и частота волны, а также импульс частицы и волновой вектор пропорциональны. Физическая причина этой пропорциональности становится ясна в квантовой механике.

Рассмотрим теперь задачу о *рассеянии* света или потока безмассовых частиц сферически-симметричным гравитационным полем. Для этого введем систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль потока падающих частиц, а оси  $x, y$  перпендикулярны ему. В этой системе координат угол отклонения  $\theta$  частиц, которые прошли через поле и уходят на бесконечность, представляет собой полярный угол в паре  $(\theta, \phi)$ . В задаче рассеяния нас будет интересовать *сечение рассеяния*, то есть величина площади  $d\sigma$  в плоскости, перпендикулярной потоку падающих частиц, и расположенной далеко от гравитирующего тела, с которой частицы будут отклоняться на угол в интервале  $[\theta, \theta + d\theta]$ . Очевидно,

$$d\theta = \frac{2r_g}{\rho^2} d\rho = \frac{r_g}{\rho^3} d(\rho^2) = \frac{r_g}{\pi\rho^3} d\sigma.$$

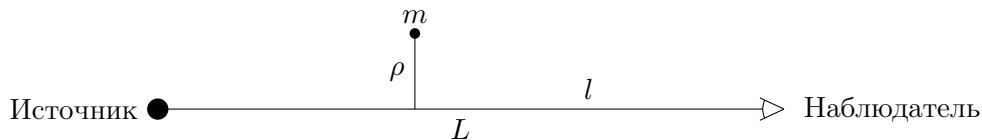
Выразим теперь  $d\sigma$  через величину соответствующего телесного угла  $do = 2\pi \sin\theta d\theta \simeq 2\pi\theta d\theta$  (мы рассматриваем только малые углы отклонения). Также из (12.18) выражаем  $\rho$  через  $\theta$ . Окончательно, получаем для сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{4r_g^2}{\theta^4} do, \quad \theta \ll 1. \tag{12.22}$$

Эта величина характеризует вероятность для безмассовой частицы, падающей на источник гравитационного поля из бесконечности, отклониться в заданный телесный угол  $do = \sin\theta d\theta d\phi$  вблизи направления  $(\theta, \phi)$ . В случае безмассовых частиц такая вероятность не зависит от энергии падающих частиц (или частоты падающего света), вследствие того, что такая зависимость выпадает из (12.9). В случае массивных частиц такая зависимость, вообще говоря, есть. Заметим также, что полное сечение рассеяния на углы меньше какого-то угла  $\theta_0$  равно бесконечности, что согласуется с тем что угол рассеяния уменьшается с ростом прицельного параметра, но никогда не обращается в точности в нуль. Таким образом, площадь, с которой собирается свет, рассеиваемый на малые углы, равна бесконечности.

### Задачи

1. Выведите отклонение луча света гравитационным полем, исходя из решения линейризованных уравнений Эйнштейна:  $\psi_{00} = -2r_g/r$ ,  $\psi_{0i} = 0$ ,  $\psi_{ik} = 0$ .
2. Предположим теперь, что источник гравитационного поля обладает собственным моментом импульса  $L$ . Используя решение линейризованных уравнений Эйнштейна, найдите отклонение луча света, лежащего в экваториальной плоскости.
3. Завершите вывод формулы (12.16) для набега угла при малых  $\rho - \rho_+$ . Оцените с *логарифмической точностью* (то есть без коэффициентов под знаком логарифма) время задержки света вблизи черной дыры (по сравнению со светом, проходящим вдали от черной дыры) в системе координат Шварцшильда.
4. Найдите сечение падения нерелятивистской ( $\mathcal{E} = E - m \ll m$ ) частицы на черную дыру как функцию  $\mathcal{E}$ .
- 5\*. Наблюдатель смотрит на сферический источник света радиуса  $r$ , находящийся на расстоянии  $L$  от него. Между наблюдателем и телом на расстоянии  $\rho$  от соединяющей их прямой находится темное тело массы  $m$  (см. рисунок ниже). Предполагается, что  $r_g, r \ll \rho \ll l, L - l$ , где  $r_g = 2Gm$ . Найдите положение и форму изображений источника, которые видит на небе наблюдатель. Рассмотрите два предельных случая:  $r_g l, r_g(L - l) \ll \rho^2$  и  $r_g l, r_g(L - l) \gg \rho^2$ . Все вычисления выполняйте в первом порядке по малым параметрам.



## Семинар 12

### Изотропные гиперповерхности. Инвариантность изображений

Пусть  $F(x)$  — гладкая функция на четырехмерном многообразии  $M$ . Тогда уравнение вида

$$F(x) = c \quad (12.23)$$

задает множество  $\mathcal{H}_c$ . Если форма  $dF = F_{,\mu} dx^\mu \neq 0$  на  $\mathcal{H}_c$ , то  $\mathcal{H}_c$  есть гиперповерхность, то есть трехмерное подмногообразие. Для любого вектора  $a \in (T\mathcal{H}_c)_x \subset TM_x$  имеем

$$\langle dF(x), a \rangle = F_{,\mu}(x)a^\mu = 0. \quad (12.24)$$

Обратно, касательное пространство  $(T\mathcal{H}_c)_x$  есть множество векторов, удовлетворяющих этому условию.

Если форма  $dF(x)$  времениподобна, любой вектор  $a$  пространственноподобен и гиперповерхность в окрестности точки  $x$  пространственноподобна. Если форма  $dF(x)$  пространственноподобна, то среди векторов  $a$  имеются времениподобные и гиперповерхность можно назвать времениподобной. Если же форма  $dF$  изотропна (светоподобна):

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0, \quad (12.25)$$

то направляющий вектор

$$l(x) = l^\mu(x) \partial_\mu = g^{\mu\nu}(x) F_{,\nu}(x) \partial_\mu \quad (12.26)$$

изотропен:

$$g_{\mu\nu} l^\mu(x) l^\nu(x) = 0, \quad (12.27)$$

и ортогонален форме:

$$\langle dF(x), l(x) \rangle = 0. \quad (12.28)$$

Таким образом, он лежит на поверхности:  $l(x) \in (T\mathcal{H}_c)_x$ . Значит, сама поверхность содержит изотропный вектор и может быть названа *изотропной* в точке  $x$ . Все остальные векторы в касательном пространстве к  $\mathcal{H}_c$  в точке  $x$  пространственноподобны. (Действительно, в подходящей системе координат в окрестности точки  $x$  метрика имеет вид  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , а  $F = x^- = x^0 - x^1$ . В такой системе координат утверждение очевидно.) Если гиперповерхность изотропна во всех своих точках, она называется изотропной. Сейчас мы исследуем некоторые свойства изотропных гиперповерхностей.

Прежде всего, заметим, что уравнение (12.25) представляет собой уравнение Гамильтона—Якоби для изотропных геодезических. Это значит, что направляющие  $l$  представляют собой 4-скорости безмассовых частиц, а уравнение  $F(x) = c$  соответствует тому факту, что собственное время безмассовых частиц равно нулю. Выведем это еще раз.

Рассмотрим интегральные кривые, которые задает векторное поле  $l$ :

$$\dot{\varphi}(\tau) = l(\varphi(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} = l^\mu(\varphi(\tau)). \quad (12.29)$$

Если кривая начинается на гиперповерхности,  $F(\varphi(0)) = c$ , то и вся кривая лежит на гиперповерхности:  $F(\varphi(\tau)) = c$ . Действительно,

$$\frac{d}{d\tau} F(\varphi(\tau)) = F_{,\mu}(\varphi(\tau)) \dot{\varphi}^\mu(\tau) = \langle dF(\varphi(\tau)), \dot{\varphi}(\tau) \rangle = \langle dF(\varphi(\tau)), l(\varphi(\tau)) \rangle = 0. \quad (12.30)$$

Более того, эта кривая является изотропной геодезической, а параметр  $\tau$  — аффинным параметром. Действительно, на этой кривой

$$\nabla_l l = l^\mu l^\nu{}_{;\mu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\lambda\mu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{;\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = \frac{1}{2} (g^{\kappa\mu} F_{,\kappa} F_{,\mu})_{;\lambda} g^{\lambda\nu} \partial_\nu = 0. \quad (12.31)$$

Мы использовали здесь тот факт, что ковариантная производная от скалярного поля совпадает с частной производной, а вторая ковариантная производная от скалярного поля симметрична для связности без кручения.

Итак, изотропная гиперповерхность  $\mathcal{H}_c$  является конгруэнцией изотропных геодезических  $\varphi(\tau, y, c)$ , где  $\tau$  — аффинный параметр, а  $y = (y^1, y^2)$  — параметр, нумерующий эти геодезические. Локально (в конечной окрестности любой точки) функцию  $F$  всегда можно продолжить в некоторую конечную окрестность гиперповерхности  $\mathcal{H}_c$  так, чтобы любая гиперповерхность  $\mathcal{H}_{c'}$  была бы изотропной. Мы будем предполагать, что функция  $F$  определена именно таким образом, то есть конгруэнция расширяется до трехпараметрической.<sup>1</sup>

Иными словами, гиперповерхность  $\mathcal{H}_c$  определяет поток световых лучей во внешнем гравитационном поле. Рассмотрим маленький экран, движущийся с 4-скоростью  $U$  и перпендикулярный лучам света. Пусть точки экрана имеют координаты  $x^\mu + \delta x^\mu$ , где  $x$  — «середина» экрана и  $\delta x^\mu$  очень малы. Перейдем в систему отсчета, которой экран покоится. Выберем локально-минковские координаты, то есть координаты, в которых  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ . Тогда  $\delta x^0 = 0$ . Это условие можно записать в инвариантном виде

$$U_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (12.32)$$

Условие того, что экран перпендикулярен лучу в системе покоя экрана,  $l^i \delta x^i = 0$ , можно инвариантно записать как

$$l_\mu \delta x^\mu = 0. \quad (12.33)$$

Но это условие в точности совпадает с условием того, что все точки  $x + \delta x$  находятся на пересечении экрана с гиперповерхностью  $\mathcal{H}_c$ :  $0 = F(x^\bullet + \delta x^\bullet) - F(x^\bullet) = F_{,\mu}(x) \delta x^\mu$ . Иными словами *все лучи света достигают перпендикулярного им экрана одновременно в системе отсчета экрана*.

Теперь рассмотрим два экрана  $S$  и  $S'$ , пересекающих гиперповерхность  $\mathcal{H}_c$  в окрестности точки  $x$  с общей точкой  $x$  и перпендикулярных геодезическим, но движущихся с разными скоростями  $U$  и  $U'$ . Предположим, что где-то в прошлом имеется рисунок, «окрашивающий» лучи другим цветом. На экранах  $S$  и  $S'$  окрашенные лучи создают изображения этого рисунка. Покажем, что *изображения имеют в системах покоя экранов  $S$  и  $S'$  одинаковые форму и размер*. Рассмотрим какую-то геодезическую  $\alpha$ , проходящую через экран  $S$  в точке  $x^\bullet + \delta_\alpha x^\bullet$ , а экран  $S'$  в точке  $x^\bullet + \delta_\alpha x'^\bullet$ . Так как эти точки находятся на одной геодезической, имеем

$$\delta_\alpha x'^\mu = \delta_\alpha x^\mu + (A_\nu \delta_\alpha x^\nu) l^\mu \quad (12.34)$$

с некоторыми коэффициентами  $A_\nu$ . Теперь рассмотрим две геодезические  $\alpha$  и  $\beta$ . В силу (12.27) и (12.33) имеем

$$g(\delta_\alpha x', \delta_\beta x') = g(\delta_\alpha x, \delta_\beta x). \quad (12.35)$$

Раз скалярные произведения любых двух векторов изображения на  $S$  и изображения на  $S'$  совпадают, значит, совпадают их длины и углы между ними. Утверждение доказано.

Теперь разнесем два экрана  $S$  и  $S'$  в разные точки  $x$  и  $x'$  на геодезической:  $x = \varphi(\tau_1, 0, c)$ ,  $x' = \varphi(\tau_2, 0, c)$  теперь размеры и форма изображений не обязаны совпадать.<sup>2</sup> Пусть рисунок нанесен на экран  $S$ . Из приведенных рассуждений следует, что *все изотропные геодезические, которые вышли из разных точек экрана  $S$  одновременно в системе покоя этого экрана, достигают экрана  $S'$  одновременно в системе покоя экрана  $S'$ , причем форма и размер изображения на экране  $S'$  рисунка на экране  $S$  не зависит от скоростей  $U$  и  $U'$  экранов, коль скоро экраны перпендикулярны пространственным направлениям геодезических в своих системах покоя*.

<sup>1</sup>Отметим, что не любая конгруэнция изотропных геодезических распадается в семейство изотропных гиперповерхностей. Однако любая изотропная геодезическая в окрестности любой своей точки может быть вложена в такое семейство.

<sup>2</sup>В формуле аналогичной (12.34) для экранов, разнесенных на небольшое расстояние, коэффициенты при  $l^\mu$  не имели бы порядка малости  $O(\delta x^\mu)$  и нам пришлось бы учесть зависимость  $l^\mu$  от  $\delta x^\mu$ . Это мы обсудим на следующем семинаре.



## Лекция 13

### Заряженные и вращающиеся черные дыры

В лекции 10 было описано решение Шварцшильда, содержащее две особенности пространства-времени. Эти особенности были пространственноподобными и находились в бесконечном прошлом (белая дыра) и бесконечном будущем (черная дыра) соответственно. В этой лекции мы рассмотрим несколько решений, в которых особенность имеет другую структуру.

Сначала рассмотрим решение Рейснера—Нордстрёма. Это решение можно получить как совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла в вакууме. Под вакуумом мы здесь понимаем отсутствие частиц и других полей, кроме электромагнитного и гравитационного. Учитывая равенство нулю следа тензора энергии-импульса электромагнитного поля, имеем уравнения поля

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( -F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda} \right), \quad F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (13.1)$$

Будем искать решение для метрики в виде (10.13). В силу того, что для этого решения площадь любой сферы с центром в точке  $r = 0$  равна  $4\pi r^2$ , из теоремы Гаусса мы получаем решение уравнений Максвелла

$$E_r \equiv F_{tr} = -F_{rt} = e^{k+h} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_{\vartheta} = E_{\varphi} = 0, \quad H_i = 0. \quad (13.2)$$

Постоянная  $Q$  естественным образом отождествляется с зарядом центрального тела. Отсюда немедленно получаем тензор энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_t^t = T_r^r = -T_{\vartheta}^{\vartheta} = -T_{\varphi}^{\varphi} = \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4}. \quad (13.3)$$

Подставляя его в уравнения Эйнштейна с тензором Риччи вида (10.16), находим

$$e^{2k} = e^{-2h} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}, \quad (13.4)$$

то есть

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (13.5)$$

где

$$r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi}. \quad (13.6)$$

Параметр  $r_g$  связан с массой гравитирующего тела той же формулой  $r_g = 2GM$ , что и в шварцшильдовском случае. Действительно, слагаемое с  $r_Q$  не меняет главную асимптотику решения на больших расстояниях.

Величина  $e^{2k}$  обращается в нуль в точках

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2} = G \left( M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi G}} \right), \quad \text{если } \frac{Q^2}{4\pi} \leq GM^2. \quad (13.7)$$

В предельном случае шварцшильдовской метрики  $Q = 0$  имеем  $r_- = 0$ ,  $r_+ = r_g$ . Чтобы понять смысл радиусов  $r_{\pm}$  необходимо перейти к системе координат, аналогичной системе Эддингтона—Финкельштейна, не имеющей особенностей в этих точках. Как и в шварцшильдовском случае, найдем радиальные светоподобные геодезические:

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}} = \pm \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}. \quad (13.8)$$

Интегрируя, получаем

$$t = \pm r^*(r) + \text{const},$$

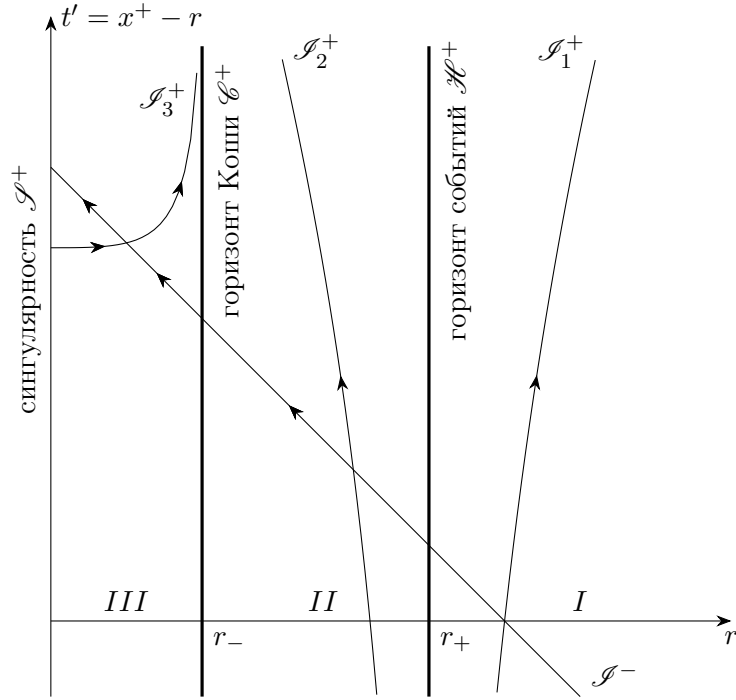


Рис. 13.1. Изотропные геодезические в координатах Эддингтона—Финкельштейна для метрики Рейснера—Нордстрема при  $2r_Q < r_g$ .

где

$$\begin{aligned}
 r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| && \text{при } r_Q < \frac{r_g}{2}; \\
 r^* &= r + r_g \log \left| \frac{2r}{r_g} - 1 \right| - \frac{r_g r}{2r - r_g} && \text{при } r_Q = \frac{r_g}{2}; \\
 r^* &= r + \frac{r_g}{2} \log \frac{r^2 - r_g r + r_Q^2}{r_Q^2} - \frac{r_Q^2 - r_g^2/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{r - r_g/2}{\sqrt{r_Q^2 - r_g^2/4}} && \text{при } r_Q > \frac{r_g}{2}.
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

Как и раньше, введем переменные

$$x^\pm = t \pm r^*. \tag{13.10}$$

Отсюда легко получаем метрику в виде

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left( 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2 \\
 &= \left( 1 - \frac{r_+}{r} \right) \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

Сингулярность осталась только на линии  $r = 0$ . Теперь рассмотрим три случая для разных соотношений между массой и зарядом.

Если заряд достаточно мал, так что  $2r_Q < r_g$ , корни  $r = r_\pm$  вещественны. Соответствующие линии (при  $\vartheta, \varphi = \text{const}$ ) в пространстве-времени представляют собой изотропные геодезические, пересекающиеся с изотропными геодезическими  $\mathcal{S}^-$  ( $x^+ = \text{const}$ ) (Рис. 13.1). Все геодезические  $\mathcal{S}^-$  направлены к центру и достигают сингулярности. Геодезические же  $\mathcal{S}^+$  ( $x^- = \text{const}$ ) в трех областях значений  $r$  ведут себя по-разному. Во внешней области  $I$ :  $r > r_+$  эти геодезические удаляются от центра и уходят на бесконечность. В области  $II$ :  $r_- < r < r_+$  они асимптотически стремятся к линии  $r = r_+$  в прошлом и к линии  $r = r_-$  в будущем. Частица, попавшая в эту область, не может выйти в область  $I$ . Таким образом, поверхность  $r = r_+$  является *горизонтом событий*. С другой стороны, частица может, но не обязана попасть в область  $III$ :  $r < r_-$ . Может случиться так, что она будет асимптотически приближаться к поверхности  $r = r_-$  (например, если частица обладает достаточно большим зарядом

того же знака, что и источник гравитации). Что происходит в этом случае, мы увидим позже, когда перейдем к координатам светового конуса. Если же частица попадает в область *III*, то она, тем не менее, не обязана падать на сингулярность, поскольку в этой области изотропные геодезические  $\mathcal{S}^+$  начинаются на сингулярности и асимптотически приближаются к поверхности  $r = r_-$ . Но это значит, что линия сингулярности  $r = 0$  является *временеподобной*, и может как поглощать частицы, так и излучать их, сочетая свойства как черной дыры, так и белой. В области *III* не существует *пространственноподобной* поверхности Коши. Любая поверхность, на которой мы можем задать данные, однозначно определяющие дальнейшую эволюцию системы, должна содержать *временеподобный* участок, окружающий сингулярность. Но в этом случае данные на такой поверхности будут избыточны, так как кривые  $\mathcal{S}^-$  будут пересекать ее дважды. Поверхность, ограничивающая область, данные в которой однозначно определяются данными на некоторой *пространственноподобной* частичной поверхности Коши называется *горизонтом Коши*. В данном случае горизонтом Коши является поверхность  $r = r_-$ .

В шварцшильдовском пределе  $r_- \rightarrow 0$  ( $Q \rightarrow 0$ ) изотропная геодезическая  $\mathcal{S}^+$  в области *II* «прижимается» к горизонту Коши, испытывая резкий изгиб вблизи него, а вдали от него становится неотличимой от таковой для метрики Шварцшильда. Таким образом, небольшая окрестность сингулярности и области *III* становится неотличимой от *пространственно-подобной* сингулярности. Экспериментатор, приблизившийся к этой окрестности испытывал бы такие же приливные силы, как экспериментатор, падающий на шварцшильдовскую черную дыру.

Теперь перейдем к описанию в координатах светового конуса  $x^\pm$ . Имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r(x^-, x^+)}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2, \quad (13.12)$$

где функция  $r(x^-, x^+)$  определяется как решение уравнения  $x^+ - x^- = 2r^*(r)$  относительно  $r$ . Легко видеть, что если мы выберем решение  $r > r_+$ , координаты  $x^\pm$  покроют область *I*. Предел  $x^+ \rightarrow +\infty$ ,  $x^- = \text{const}$  отвечает удаленной точке в будущем,  $t, r \rightarrow +\infty$ , предел  $x^- \rightarrow -\infty$ ,  $x^+ = \text{const}$  — удаленной точке в прошлом,  $-t, r \rightarrow +\infty$ , предел  $x^- \rightarrow +\infty$ ,  $x^+ = \text{const}$  — горизонту событий будущего  $\mathcal{H}^+$ ,  $r = r_+$ , а предел  $x^+ \rightarrow -\infty$ ,  $x^- = \text{const}$  — горизонту событий прошлого  $\mathcal{H}^-$ ,  $r = r_+$ , получаемому из  $\mathcal{H}^+$  обращением времени  $x^+ \leftrightarrow -x^-$ .

Выбирая другие решения уравнения  $x^+ - x^- = 2r^*$ , мы можем покрыть области *II* и *III*, но нам бы хотелось иметь координаты, которые можно было бы гладко продолжить из одной области в другую. Этому служат координаты, аналогичные координатам Крускала—Секереша:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha_+^{-1} e^{-\alpha_+ x^-} = -\alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r-t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \\ v &= \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+ x^+} = \alpha_+^{-1} e^{\alpha_+(r+t)} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+/2}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

где

$$\alpha_\pm = \frac{r_+ - r_-}{2r_\pm^2}, \quad \beta_\pm = \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^{\pm 2}. \quad (13.14)$$

Я здесь специально убрал знаки модуля, ограничив решение на область  $r > r_+$ . В этих переменных это отвечает области  $u < 0$ ,  $v > 0$ . Уравнение  $x^+ - x^- = 2r^*$  на переменную  $r$  приобретает вид

$$uv = -\alpha_+^{-2} e^{2\alpha_+ r} \left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{-\beta_+}. \quad (13.15)$$

Для метрики имеем

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{1-\beta_+} e^{-2\alpha_+ r} du dv - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (13.16)$$

Теперь вы видите, что переменные  $u, v$  могут быть продолжены за пределы области  $u < 0$ ,  $v > 0$  на все вещественные значения. Если мы сделаем дополнительное преобразование

$$u = \alpha_+^{-1} \text{tg } \bar{u}, \quad v = \alpha_+^{-1} \text{tg } \bar{v},$$

мы отобразим плоскость  $\mathbb{R}^2$  на квадрат, что удобнее для графического представления. На Рис. 13.2 этот квадрат отмечен жирным контуром.

Координатная система  $u, v$  не продолжается в область  $r < r_-$  ввиду особенности компонент метрики (13.16) вида  $(r/r_- - 1)^{1-\beta_+}$  на этой поверхности. В области  $II$  введем новые координаты  $u^{(1)}, v^{(1)}$ :

$$u^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u)^{-\beta_-}, \quad v^{(1)} = -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v)^{-\beta_-}, \quad (13.17)$$

так что

$$u^{(1)}v^{(1)} = \alpha_-^{-2} e^{-2\alpha_- r} \left( \frac{r}{r_-} - 1 \right) \left( 1 - \frac{r}{r_+} \right)^{-\beta_-}. \quad (13.18)$$

Эти координаты уже продолжаются за горизонт Коши. Действительно, метрика в этих координатах

$$ds^2 = \frac{r_Q^2}{r^2} \left( 1 - \frac{r}{r_+} \right)^{1-\beta_-} e^{-2\alpha_- r} du^{(1)} dv^{(1)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (13.19)$$

гладко продолжается в область положительных значений  $u^{(1)}, v^{(1)}$ , то есть на области  $III, III'_1, II'_1$ . В областях  $III, III_1$  они продолжаются вплоть до сингулярности  $u^{(1)}v^{(1)} = -\alpha_-^{-2}$ . В области  $II'_1$  мы делаем замену

$$u^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(1)})^{-\beta_+}, \quad v^{(2)} = -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(1)})^{-\beta_+}. \quad (13.20)$$

Эти координаты, очевидно, продолжаются на области  $I_1, I'_1, II_1$ . Далее повторяем операцию по индукции для всех областей в абсолютном будущем (вверх по рисунку) и в абсолютном прошлом (вниз по рисунку):

$$\begin{aligned} u^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ u^{(2n)})^{-\beta_-}, & v^{(2n+1)} &= -\alpha_-^{-1}(\alpha_+ v^{(2n)})^{-\beta_-}, \\ u^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- u^{(2n-1)})^{-\beta_+}, & v^{(2n)} &= -\alpha_+^{-1}(\alpha_- v^{(2n-1)})^{-\beta_+} \end{aligned} \quad (13.21)$$

для всех целых  $n$ . Для координат с четными индексами выполняется уравнение (13.15), а метрика имеет вид (13.16). Для координат с нечетными индексами выполняется уравнение (13.18), а метрика имеет вид (13.19).

Важное отличие черной дыры Рейснера—Нордстрема состоит в том, что частица вовсе не обязательно должна упасть на сингулярность. Частица, попавшая под горизонт событий, может пройти через область  $III$  или  $III_1$ , затем через белую дыру  $II'_1$  и попасть в другой «открытый» мир  $I_1$  или  $I'_1$ . При этом, пересекая горизонт Коши области  $III$  находящийся на ней наблюдатель может получить всю информацию о всем будущем «зеркального» мира  $I'$ , а пересекая горизонт Коши области  $III_1$  — всю информацию о будущем мира  $I$ , из которого он проник за горизонт событий. Мы видим, что судьба такого наблюдателя намного более оптимистична, чем в шварцшильдовском случае.<sup>1</sup>

С помощью такой черной дыры мы можем построить кротовую нору, ведущую в наше собственное прошлое, если отождествим, например область  $II'_1$  с областью  $II_1$ .

В вырожденном случае  $2r_Q = r_g$  область  $II$  схлопывается, горизонт событий и горизонт Коши совпадают, а переменные  $u, v$ , которые теперь следует определять как

$$\begin{aligned} u &= -2r_g e^{-x^-/2r_g} = -2r_g e^{\frac{r-t}{2r_g} - \frac{r}{2(2r-r_g)}} \left( \frac{2r}{r_g} - 1 \right)^{1/2}, \\ v &= 2r_g e^{x^+/2r_g} = 2r_g e^{\frac{r+t}{2r_g} - \frac{r}{2(2r-r_g)}} \left( \frac{2r}{r_g} - 1 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (13.22)$$

продолжаются непосредственно в области  $III$  и  $III_{-1}$ . Далее, легко построить координаты, которые продолжаются в  $I_{\pm 1}$ , затем в  $III_{\pm 1}$  и т.д.

Случай  $2r_Q > r_g$  — самый простой. Пространство-время покрывается одной картой и не ни содержит горизонтов событий ни горизонтов Коши, но содержит особенность  $r = 0$ . Такую особенность

<sup>1</sup>Разумеется, при условии, что наблюдатель сможет перенести перегрузки связанные с приливными силами. Диаграмма Пенроуза точно отражает причинную структуру, но ничего не говорит о масштабах, временах и кривизнах. Надо заметить, что если  $r_-$  достаточно мало, то ситуация для физического наблюдателя больших размеров будет мало отличаться от шварцшильдовской. Область  $r \leq r_-$  будет для него трудно отличима от пространственноподобной сингулярности шварцшильдовской черной дыры, и результат падения на горизонт Коши кончится для него его разрушением.

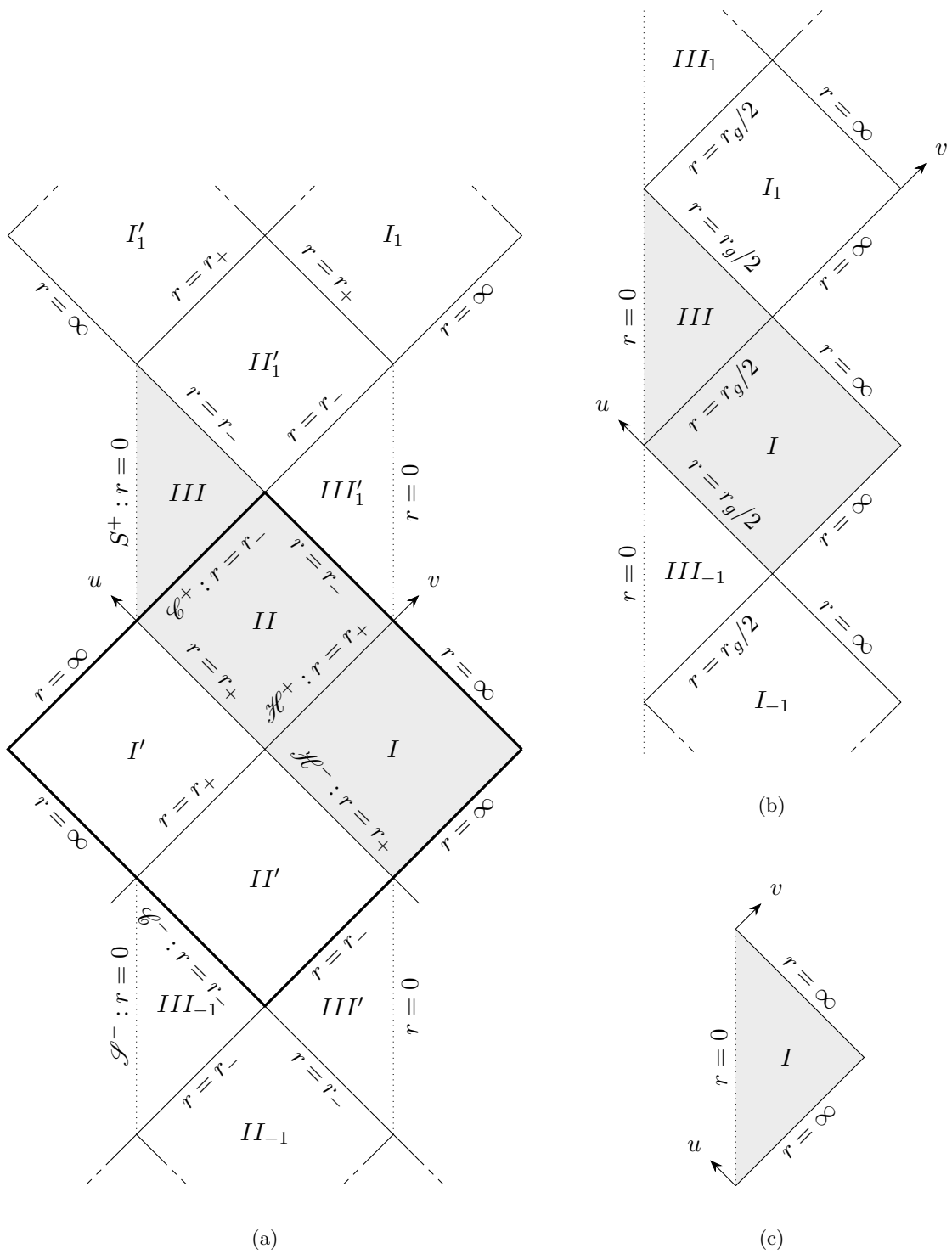


Рис. 13.2. Диаграмма Пенроуза для метрики Рейснера–Нордстрема. (а) Случай  $2r_Q < r_g$ . Жирным обведен квадрат, представляющий плоскость переменных  $u, v$ , определенных координатами  $x^+, r$  с метрикой (13.11). (б) Случай  $2r_Q = r_g$ . Область  $II$  исчезает. Горизонт событий и горизонт Коши совпадают. (с) Случай  $2r_Q > r_g$ . Голая сингулярность: горизонта событий и горизонта Коши нет.

называют *голой сингулярностью*. Это пространство «плохо» тем, что в нем вообще нет пространственноподобных поверхностей Коши. Многим ученым такая ситуация не нравится, и они предполагают, что во Вселенной действует *принцип космической цензуры*: в природе не может быть голых сингулярностей. По отношению к метрике Рейснера—Нордстрема валидность этого принципа может быть связана с тем, что кулоновское отталкивание не позволит создать голую сингулярность этого типа, но этот факт не доказан. Возможно, принцип космической цензуры является чисто эстетическим принципом и не имеет отношения к природе вещей.

Рассмотрим теперь (без всяких доказательств) «максимальное» обобщение метрики Шварцшильда — метрику Кёрра—Ньюмена. Эта метрика отвечает вращающейся заряженной черной дыре. В случае нулевого заряда она называется метрикой Керра. В координатах Бойера—Линдквиста, обобщающих координаты Шварцшильда, метрика Керра—Ньюмена имеет вид<sup>2</sup>

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2, \quad (13.23)$$

$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.$$

Параметр  $a$  связан с моментом импульса  $J$ :

$$J = aM. \quad (13.24)$$

Тензор электромагнитного поля удобнее записать в виде формы

$$F = \frac{Q}{4\pi\rho^4} ((r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta)(dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi) \wedge dr + ar \sin 2\vartheta d\vartheta \wedge (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)), \quad (13.25)$$

где, как обычно,  $dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu)$ .

Метрика имеет особенность в корнях полинома  $\Delta(r)$ ,

$$r_{\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - \frac{GQ^2}{4\pi} - a^2}. \quad (13.26)$$

Чтобы понять смысл этих корней, перейдем к координатам Керра  $x^+$ ,  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi$ , аналогичным координатам Эддингтона—Финкельштейна:

$$dx^+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (13.27)$$

В этих координатах кривая  $x^+$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi = \text{const}$  является изотропной кривой, однако, вообще говоря, не является геодезической. Метрика в них имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\phi^2 + 2a \sin^2 \vartheta dr d\phi + \frac{2a(r_g r - r_Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \vartheta dx^+ d\phi. \quad (13.28)$$

Кривая  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi = \text{const}$  является изотропной, но, опять же, не геодезической кривой на поверхности, где

$$\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta = 0, \quad (13.29)$$

то есть

$$r_{e,\pm}(\vartheta) = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_Q^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (13.30)$$

<sup>2</sup>Выражения в скобках определяют ортогональный базис, отличный от координатного. Такие базисы (реперы или «тетрады») дают важный метод решения уравнений Эйнштейна, но изучение этой техники находится за пределами данного курса. Такой же вид имеет и выражение (13.31) ниже.

При этом  $r_{e,+} \geq r_+$ . В полюсах  $\vartheta = 0, \pi$  радиальная часть метрики (13.28) имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr,$$

так что ясно, что точки с  $r = r_+ = r_{e,+}(0)$  находятся на горизонте событий, а с  $r = r_- = r_{e,-}(0)$  — на горизонте Коши. Давайте разберемся, что происходит на произвольных широтах. Для этого перепишем метрику в координатах Керра так:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2 - 2(dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi) dr - \rho^2 d\vartheta^2. \quad (13.31)$$

Изучим пересечение светового конуса с трехмерным пространственно-временным цилиндром  $r = \text{const}$  (точнее, с касательным пространством к нему). При  $dr = 0$  третий член пропадает, и остаются только три члена, имеющие вид полных квадратов. При  $\Delta < 0$  все эти члены отрицательны, и световой конус, начинающийся в некоторой точке, пересекается с поверхностью только в вершине. Поверхность является пространственноподобной. Можно показать, что половина конуса, соответствующая  $dx^+ > 0$ , направлена внутрь поверхности. Таким образом, если в какой-то момент времени  $x^+$  поместить на поверхность  $r = \text{const}$  легкие частицы и исследовать движение поверхности, образуемой этими частицами, площадь поверхности будет со временем уменьшаться. В этом случае мы говорим, что пространственная поверхность  $r = \text{const}$ ,  $r_- < r < r_+$  является *ловушечной поверхностью*.

При  $\Delta > 0$  световой конус пересекает поверхность по двумерному конусу

$$\rho^4 d\vartheta^2 = \Delta (dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi)^2 - \sin^2 \vartheta ((r^2 + a^2) d\phi - a dx^+)^2.$$

Это значит, что всегда есть часть светового конуса  $dx^+ > 0$ , которая направлена наружу. Поверхность является времениподобной. Если же  $\Delta = 0$ , двумерный конус вырождается в одну линию

$$d\vartheta = 0, \quad \frac{d\phi}{dx^+} = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Таким образом, световой конус касается гиперповерхности  $r = \text{const}$  и частицы, вошедшие под эту поверхность, не могут уже пересечь ее снова. Это значит, что поверхности  $\Delta = 0$  являются *изотропными* гиперповерхностями. По-другому в этом можно убедиться так. Как нетрудно проверить, на них  $g^{rr} = 0$ , и, следовательно,  $g^{\mu\nu} \Delta_{,\mu} \Delta_{,\nu} = g^{rr} \Delta_{,r}^2 = 0$ . Как мы убедились на прошлом семинаре, это значит, что интегральные кривые

$$r = r_{\pm}, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \phi = \phi_0 + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} x^+$$

являются изотропными геодезическими. Так как на каждом подпространстве  $r = r_{\pm}$ ,  $\vartheta = \text{const}$  метрика постоянна, мы можем заключить, что  $x^+$  является аффинным параметром геодезической.

Сравнивая с ситуацией в решении Рейснера—Нордстрема, мы видим, что поверхность  $r = r_+$  является горизонтом событий, а  $r = r_-$  — горизонтом Коши *при всех значениях угла*  $\vartheta$ . Поверхность же  $r = r_{e,+}(\vartheta)$  играет роль горизонта событий только для радиальных движений. Эта поверхность охватывает горизонт событий и касается его в полюсах. Она называется *пределом статичности* и ограничивает область (*эргосферу*), внутри которой частицы не могут оставаться стационарными по отношению к бесконечно-удаленной системе координат. Черная дыра «увлекает» их и заставляет вращаться вместе с собой. Однако частица, попавшая в эргосферу, может из нее вырваться во внешнюю область.

Наличие эргосферы отличает вращающуюся черную дыру от невращающейся. Другое отличие состоит в том, что сингулярность представляет собой не точку, а *окружность*. Если вычислить компоненты тензора Римана, то окажется, что они имеют особенности при  $r = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ . При всех других значениях  $\vartheta$  особенности нет. Чтобы понять смысл особенности, следует перейти к координатам:

$$X^0 = x^+ - r, \quad X^1 + iX^2 = (r + ia)e^{i\phi} \sin \vartheta, \quad X^3 = r \cos \vartheta. \quad (13.32)$$

Обратно,  $r$  является решением уравнения

$$r^4 - ((X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - a^2)r^2 - a^2(X^3)^2 = 0. \quad (13.33)$$

Метрика в этих координатах принимает вид *метрики Керра—Шильда*

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - 2H(k_\mu dX^\mu)^2, \quad (13.34)$$

где  $H$  и  $k_\mu$  ( $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$ ) — некоторые функции координат. Для решения Керра—Ньюмена они принимают вид

$$H = \frac{r_g r - r_Q^2}{2\rho^2}, \quad k_\mu dX^\mu = dx^+ - a \sin^2 \vartheta d\phi. \quad (13.35)$$

Разумеется, их можно выразить через координаты  $X^\mu$ , но это нам не понадобится. Для нас важно, что в этих координатах поверхности  $r = \text{const}$  при данном  $x^+$  представляют собой софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения с фокальной окружностью  $(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2$ ,  $X^3 = 0$  (Рис. 13.3) При  $r \rightarrow 0$  эллипсоид вырождается в диск радиуса  $a$ , натянутый на фокальную окружность, причем сингулярность расположена на краю диска — фокальной окружности эллипсоидов. На диске компоненты метрики конечны, но их производная по  $X^3$  имеет разрыв. Действительно, при  $(X^3)^2 \ll a^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2$  уравнение (13.33) имеет решение

$$r \simeq \frac{|aX^3|}{\sqrt{a^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2}},$$

а коэффициент  $H$  гладко зависит от  $r$  при  $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ . Таким образом,  $H$  испытывает излом при  $X^3 = 0$ . Чтобы избежать нарушения гладкости метрики, следует продолжить ее в область  $r < 0$ . Но при любых отрицательных  $r$  имеем  $\Delta > 0$ , так что в этой области нет горизонтов событий и горизонтов Коши.<sup>3</sup>

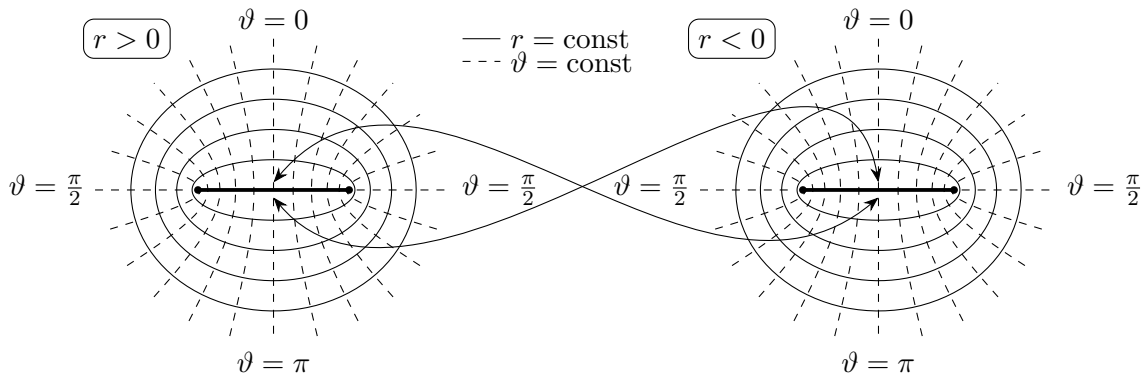


Рис. 13.3. Окрестность сингулярности в черной дыре Керра—Ньюмена. При уменьшении параметра  $r$  эллипсоид вырождается в диск (жирная линия посередине). При этом край диска (жирные точки) представляет собой пространственно-временную сингулярность, а внутренность диска — разрез. Двусторонние стрелки показывают, какие берега разреза областей  $r > 0$  и  $r < 0$  должны быть склеены.

Что касается диаграммы Пенроуза для пространства Керра—Ньюмена, то она почти не отличается от диаграммы для пространства Рейснера—Нордстрема, изображенной на Рис. 13.2. Единственное отличие состоит в том, что области типа *III* превращаются из «треугольников» в «квадраты» за счет области  $r < 0$ . На Рис. 13.4 представлена соответствующая часть диаграммы Пенроуза в экваториальной плоскости. (Вне экваториальной плоскости мы вообще не увидели бы сингулярности.)

Мы рассмотрели случай черной дыры  $r_g^2/4 > r_Q^2 + a^2$ . Обобщение на вырожденный случай  $r_g^2/4 = r_Q^2 + a^2$  и случай голой сингулярности  $r_g^2/4 < r_Q^2 + a^2$  не составляет труда. Надо сказать, что задача о движении частицы в поле решения Керра—Ньюмена тоже решается точно: переменные в соответствующем уравнении Гамильтона—Якоби разделяются.

Мы обнаружили сингулярности, изучая точные решения уравнений Эйнштейна в пустоте. Возникает вопрос, насколько универсально такое поведение. При каких условиях возникает особенность, и насколько ее возникновение неизбежно. На этот счет есть несколько теорем, которые формулируются

<sup>3</sup>Можно заметить, что наблюдатель в области  $r < 0$  будет наблюдать голую сингулярность *отрицательной массы*. Действительно, замена  $r \rightarrow -r$  эквивалентна замене  $r_g \rightarrow -r_g$ .



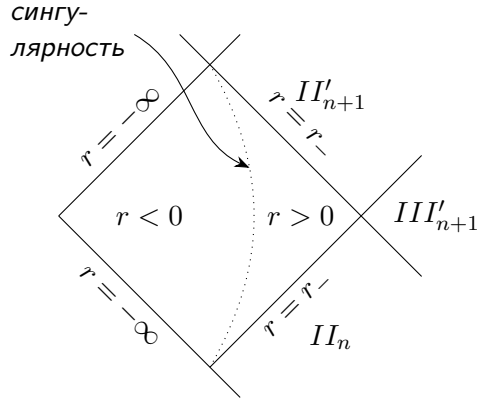


Рис. 13.4. Область  $III_n$  конформной диаграммы пространства Керра—Ньюмена в экваториальной плоскости.

настолько локально, насколько возможно. Введем важное понятие. Рассмотрим *замкнутое* компактное ориентируемое пространственноподобное двумерное подмногообразие  $\mathcal{S}$  в пространстве-времени. Через каждую точку этого многообразия проходит две ортогональные ему изотропные геодезические. По каждому из этих семейств геодезических мы можем построить в некоторой окрестности каждой точки  $x$  многообразия  $\mathcal{S}$  два пучка изотропных геодезических  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ . Введем на них аффинный параметр  $\tau$  так, чтобы  $\tau = 0$  на  $\mathcal{S}$ . Мы можем измерить площади  $A_1(\tau)$ ,  $A_2(\tau)$  пучков в зависимости от аффинного параметра. Тогда, если

$$\left. \frac{dA_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} < 0 \quad (i = 1, 2)$$

для каждой точки на  $\mathcal{S}$ , то  $\mathcal{S}$  называется *ловушечной поверхностью*.

Простейшая теорема об особенностях звучит так. Пространство-время не может быть изотропно геодезически полным (то есть аффинные параметры на некоторых изотропных геодезических не будут принимать значения на всем  $\mathbb{R}$ ), если

- 1) в каждой точке пространства-времени  $x$  для любого изотропного вектора  $k \in TM_x$  выполняется неравенство  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ ;
- 2) в пространстве-времени существует некомпактная глобальная поверхность Коши;
- 3) в пространстве-времени существует ловушечная поверхность.

Условия этой теоремы очень ограничительны. Из рассмотренных нами точных решений ее условиям удовлетворяет только решение Шварцшильда. Кроме того, ему могут удовлетворять некоторый класс задач о коллапсе тел. Тем не менее, эта теорема дает некоторое представление о том, как могут выглядеть условия существования особенностей пространства-времени.

### Задачи

1. Выведите решение уравнений Максвелла (13.2) и тензор энергии-импульса (13.3).
2. Решив уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса (13.3), получите метрику Рейснера—Нордстрема (13.5).
3. Найдите векторный потенциал для поля (13.2) и разделите переменные в уравнении Гамильтона—Якоби для *заряженной* частицы в метрике Рейснера—Нордстрема.
4. Рассмотрите метрику в форме Керра—Шильда (13.34) с произвольной функцией  $H(X)$  и векторным полем  $k(X)$ , таким что  $g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$ . Покажите, что  $k^\mu = k^{\bar{\mu}}$  и  $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$ , а также получите явный вид обратной метрики  $g^{\mu\nu}$ .
- 5\*. Изучите решение Керра—Ньюмена на больших расстояниях  $r \gg r_g, r_Q$  и покажите, что оно отвечает объекту массы  $M$ , заряда  $Q$  и момента импульса  $J = aM$ . Покажите, что магнитный дипольный момент этого объекта равен  $\mu = Qa$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Используйте тот факт, что неподвижная частица с магнитным моментом  $\mu$  в пространстве-времени Минковского создает магнитное поле  $\mathbf{H} = \frac{3(\mu\mathbf{n})\mathbf{n} - \mu}{4\pi r^3}$ .

Изотропные гиперповерхности. Эволюция изображений

В прошлый раз мы выяснили, что форма тени на экране не зависит от системы отсчета экрана при одном условии: экран находится в плоскости, перпендикулярной лучу света. В этот раз мы изучим, как меняется это изображение вдоль изотропных геодезических.

Рассмотрим теперь две «соседних» изотропных геодезических  $x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, 0, c)$  и  $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) = \varphi^\mu(\tau, \delta y, c)$  с малым  $\delta y$ . Как мы видели раньше, если они находятся на одной поверхности  $F(x) = c$ , выполняется условие  $l(x(\tau))\delta x(\tau) = 0$ . Выберем также семейство экранов  $S(\tau)$ , движущихся с такими скоростями  $U(\tau)$ , что  $U(\tau)\delta x(\tau) = 0$ . Это значит, что выполнены условия (12.32) и (12.33) и экраны ортогональны лучам света. Так как для формы изображений скорости экранов не важны, будем считать вектор  $U(\tau)$  ковариантно-постоянным вдоль геодезической  $x(\tau)$ :  $\nabla_{l(\tau)}U(\tau) = 0$ .

Эволюция компонент  $\delta x^\mu(\tau)$  вектора  $\delta x(\tau)$  определяется простым уравнением

$$\frac{d}{d\tau}\delta x^\lambda = l^\lambda{}_{,\mu}\delta x^\mu.$$

Но нас будет интересовать не само изменение набора чисел  $\delta x^\mu$ , а изменение изображения на экране  $S(\tau)$ . Мы знаем, что связность Леви-Чивиты переносит метрику саму в себя, поэтому изображение не менялось бы, если бы векторы  $\delta x(\tau)$  были ковариантно-постоянными. Значит, нас будет интересовать разность между вектором  $\delta x(\tau)$  и вектором  $\tilde{\delta}_{\tau_0}x(\tau)$ , который представляет собой перенос вектора  $\delta x(\tau_0)$  вдоль геодезической  $x(\tau)$ . Последняя величина определяется уравнением

$$\nabla_l\tilde{\delta}x(\tau_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\tilde{\delta}_{\tau_0}x^\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda l^\nu \tilde{\delta}_{\tau_0}x^\mu.$$

Заменяя  $\tau_0 \rightarrow \tau$ ,  $\tau \rightarrow \tau + \Delta\tau$  и вычитая одно из другого и, получаем

$$\delta\dot{x}^\lambda(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\delta x^\lambda(\tau + \Delta\tau) - \tilde{\delta}_{\tau}x^\lambda(\tau + \Delta\tau)}{\Delta\tau} = l^\lambda{}_{;\mu}\delta x^\mu \quad (13.36)$$

или

$$\delta\dot{x} = \nabla_{\delta x}l. \quad (13.37)$$

Иными словами, параллельный перенос вдоль геодезической  $x(\tau)$  позволяет нам отождествить все экраны, а уравнение (13.36) или (13.37) определяет эволюцию формы изображения на экране. Чтобы описать эволюцию изображений более явно, выберем на экранах базис из двух ортонормированных ковариантно-постоянных векторов  $e_1, e_2$ :

$$U(\tau)e_i(\tau) = l(x(\tau))e_i(\tau) = 0, \quad e_i(\tau)e_j(\tau) = -\delta_{ij}. \quad (13.38)$$

Поскольку мы будем в дальнейшем понимать их как фиксированные векторы в двумерном пространстве всех отождествленных экранов, параметр  $\tau$  мы будем опускать.

Вместо векторов  $e_i$  удобно использовать комплексные «изотропные» векторы  $m, \bar{m}$ :

$$m = \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{m} = \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \quad m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad m\bar{m} = -1. \quad (13.39)$$

Тогда произвольную точку  $x^\mu + \delta x^\mu$  можно задать комплексным числом  $\zeta$ :

$$\delta x^\mu = \zeta\bar{m}^\mu + \bar{\zeta}m^\mu. \quad (13.40)$$

Из (13.37) получаем

$$\dot{\zeta} = -(\rho\zeta + \sigma\bar{\zeta}), \quad (13.41)$$

где

$$\rho = l_{\mu;\nu}m^\mu\bar{m}^\nu, \quad \sigma = l_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu \quad (13.42)$$

называются *оптическими скалярами*. Оптические скаляры определяют изменение формы изображения. Если на первом экране нарисовать круг с контуром  $\zeta(\theta) = e^{i\theta}$ , то на близко расположенном втором экране его изображение будет выглядеть как эллипс

$$\zeta'(\theta) = e^{i\theta}(1 - \rho d\tau) - e^{-i\theta}\sigma d\tau \quad (13.43)$$

с полуосями  $a_{\pm} = 1 - (\operatorname{Re} \rho \mp |\sigma|) d\tau$ . Площадь уменьшится на величину  $2\pi \operatorname{Re} \rho d\tau$ , а  $|\sigma|$  характеризует сплющивание круга (астигматизм). Для конгруэнции лучей, образующих изотропную гиперповерхность, имеем  $l_{\mu;\nu} = F_{;\mu\nu} = l_{\nu;\mu}$ , а, значит,  $\rho$  является вещественным числом. В этом случае верно утверждение

$$\frac{d}{d\tau}\delta A^{1/2} = -\rho\delta A^{1/2}, \quad (13.44)$$

где  $\delta A$  площадь элемента поверхности

Теперь посмотрим, как эволюционируют сами оптические скаляры. Для этого нам понадобится тождество

$$\delta_{\nu}^{\mu} = -\frac{1}{(Ul)^2}l^{\mu}l_{\nu} - m^{\mu}\bar{m}_{\nu} - \bar{m}^{\mu}m_{\nu} + \frac{1}{Ul}(U^{\mu}l_{\nu} + l^{\mu}U_{\nu}). \quad (13.45)$$

Из определения тензора Римана можно получить

$$l_{\lambda;\mu\nu} = l_{\lambda;\nu\mu} + R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}l_{\kappa},$$

откуда

$$\frac{dl_{\mu;\nu}}{d\tau} \equiv l^{\lambda}l_{\mu;\nu\lambda} = -l^{\lambda}{}_{;\nu}l_{\mu;\lambda} + R_{\kappa\mu\nu\lambda}l^{\kappa}l^{\lambda}. \quad (13.46)$$

Используя тождество (13.45), получаем

$$R_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = -2R_{\kappa\mu\lambda\nu}m^{\kappa}l^{\mu}\bar{m}^{\lambda}l^{\nu}.$$

С помощью того же тождества из (13.46) получаем

$$\dot{\rho} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu}, \quad (13.47)$$

$$\dot{\sigma} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad \Psi = R_{\kappa\lambda\mu\nu}l^{\kappa}m^{\lambda}l^{\mu}m^{\nu} = C_{\kappa\lambda\mu\nu}l^{\kappa}m^{\lambda}l^{\mu}m^{\nu}. \quad (13.48)$$

Здесь  $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$  — тензор Вейля, то есть конформная часть тензора Римана.

Если при начальном параметре  $\tau = \tau_0$  второй скаляр  $\sigma = 0$  и всюду  $\Phi = \Psi = 0$ , уравнения легко решить:

$$\rho^{-1} - \rho_0^{-1} = \tau_0 - \tau.$$

Имеется некоторый момент  $\tau_* = \tau_0 + \rho_0^{-1}$ , где скаляр  $\rho$  обращается в бесконечность. Решая (13.44), получаем

$$\delta A^{1/2} \sim \tau - \tau_*.$$

Если начальное значение  $\rho$  отрицательно ( $\tau_0 > \tau_*$ ), площадь растет пропорционально квадрату геодезического параметра. Если же начальное значение положительно ( $\tau_0 < \tau_*$ ) в момент времени, отвечающий  $\tau_*$  площадь обращается в нуль, что отвечает фокальной точке.

Имеется общая теорема.

**Теорема о фокусировании.** Если во всем пространстве  $\Phi \geq 0$  и в некоторой точке светового пучка  $\tau = \tau_0$  первый оптический скаляр положителен,  $\rho(\tau_0) = \rho_0 > 0$ , то на конечном положительном расстоянии от этой точки  $\tau - \tau_0 \leq \rho_0^{-1}$  пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Действительно, из (13.44) получаем

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\delta A^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)\delta A^{1/2}. \quad (13.49)$$

Поскольку правая часть неположительна, имеем  $\frac{d}{d\tau}\delta A^{1/2} \leq -\rho_0\delta A_0^{1/2}$ , откуда и следует теорема.

Таким образом, ловушечная поверхность, это такая поверхность, для которой  $\rho > 0$  на проходящих через нее перпендикулярных ей изотропных конгруэнций.

## Лекция 14

### Космологические решения. Модели Фридмана

До сих пор мы рассматривали различные геометрии пространства-времени, считая, что на достаточно большом расстоянии от источников гравитации пространство-время асимптотически плоское или по крайней мере асимптотическое поведение каким-то образом задано. То есть, мы считали пространство в целом пустым, а космологическую постоянную — равной нулю. Во многих задачах это оказывается вполне разумным приближением, поскольку гравитирующие объекты притягивают друг друга и, чаще всего, собираются в компактные образования (планеты, звезды и звездные системы, скопления звезд, галактики, скопления и сверхскопления галактик), окруженные сравнительной пустотой. Но из наблюдательных данных мы знаем, что в целом для (видимой части) Вселенной это не так. Сверхскопления галактик заполняют пространство довольно равномерно, не говоря уже о неизвестной гравитирующей материи, называемой темной материей, которая не собирается в такой степени в компактные структуры, но средняя плотность которой в несколько раз больше средней плотности известных нам видов материи. Можно считать, что Вселенная довольно однородна на масштабах больше 100 Мpc. Кроме того, наблюдательные данные говорят о высокой изотропии Вселенной: вещество распределено довольно равномерно во всех направлениях. Это предположение подтверждает и высокая (на уровне  $10^{-4}$ ) изотропия реликтового излучения.<sup>1</sup> В этой лекции мы рассмотрим простейшие модели вселенной, равномерно и изотропно заполненной веществом и излучением, получим простейшие решения и вкратце обсудим, насколько они подтверждаются наблюдательными данными. Классические космологические модели, основанные на этих предположениях, называются *моделями Фридмана*.

Вопрос об эволюции Вселенной как целого возникает даже в ньютоновской теории гравитации. В самом деле, если заполнить веществом все пространство более или менее равномерно, то вещество не сможет всегда оставаться в стационарном состоянии в силу притяжения. В общей теории относительности проблема усугубляется тем, что само пространство может оказаться искривленным. С другой стороны, это помогло ученым осознать проблему там, где они не видели ее до создания ОТО.

Итак, нам следует наложить условия пространственной однородности и изотропии на кривизну и тензор энергии-импульса. Начнем с кривизны. Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые *пространства постоянной кривизны*. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\xi^{ij}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (14.1)$$

так что  $K$  не зависит от бивектора  $\xi^{ij}$ . Можно доказать, что в этом случае  $K$  не зависит от точки<sup>2</sup>  $x$  и кривизна имеет вид

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{ij} = (d-1)Kg_{ij}, \quad R = d(d-1)K, \quad (14.2)$$

где  $d$  — размерность многообразия. Иными словами, геометрическая однородность пространства следует из его изотропии.

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трехмерное пространство сигнатуры  $(+++)$ . Давайте построим соответствующую метрику. Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (14.3)$$

Пространство постоянной положительной кривизны легко находится как ограничение метрики плоского четырехмерного евклидова пространства с координатам  $X^I$ ,  $I = 1, \dots, 4$ , на трехмерную сферу

<sup>1</sup>Наблюдения показывают дипольный вклад в анизотропию реликтового излучения на уровне  $10^{-3}$ , однако этот вклад можно приписать движению Солнечной системы со скоростью примерно 370 km/s относительно системы отсчета, выделенной реликтовым излучением. Его следует вычитать из микроволнового фона, чтобы изучать физику процессов, связанных с образованием и распространением реликтового излучения. С учетом движения Солнечной системы в Галактике и движения Галактики в местной группе галактик, скорость движения местной группы оценивается в 630 km/s в направлении точки в созвездии Гидры.

<sup>2</sup>За исключением двумерного пространства, где формула (14.1) верна для любых пространств, и независимость  $K$  от  $x$  принимается за определение пространства постоянной кривизны.

$\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$ . Используя полярные координаты  $\chi, \vartheta, \varphi$ , получаем

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad K = 1/a^2. \quad (14.4)$$

Как всегда  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Аналогично пространство постоянной отрицательной кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры  $(+ + + -)$  плоского пространства на трехмерный двуполостный гиперboloид  $\sum_{I=1}^3 (X^I)^2 - (X^4)^2 = -a^2$ :

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \infty, \quad K = -1/a^2. \quad (14.5)$$

Вообще говоря, пространства постоянной кривизны топологически могут не совпадать с плоскостью, сферой или гиперboloидом, а представлять собой факторпространства этих пространств по какой-нибудь дискретной группе движений  $\Gamma$ , действующей свободно (без неподвижных точек). В частности, мир с положительной кривизной будет всегда замкнутым и имеющим конечный объем

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (14.6)$$

где  $N$  порядок группы  $\Gamma$ . Мы не будем заниматься топологическими вопросами, поскольку они не влияют на решения уравнений Эйнштейна, которые определены локально. Кроме того, мы, по-видимому, можем наблюдать только небольшую часть Вселенной, так что топология не играет роли при интерпретации наблюдений.<sup>3</sup>

Мы будем называть модели с положительной кривизной замкнутыми, а модели с отрицательной кривизной — открытыми, хотя их открытость в строгом математическом смысле зависит от топологии. Мир с нулевой кривизной мы будем называть плоским.

Теперь перейдем к пространству-времени. Оно уже не должно быть однородным и изотропным, но система координат должна приводиться к виду, в котором  $g_{0i} = 0$ . В противном случае выделенный вектор  $g^{0i} \partial_i$  нарушил бы физическую изотропию пространства. Компонента метрики  $g_{00}$  и коэффициент  $a$  в пространственных компонентах метрики могут зависеть только от  $x^0$  в силу однородности пространства. Выберем  $g_{00}$  равным единице. Это значит, что время  $t = x^0$  будет совпадать с собственным временем неподвижного в координатах  $\chi, \vartheta, \varphi$  наблюдателя. В результате мы имеем синхронную во всем пространстве-времени метрику

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (14.7)$$

где

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (14.8)$$

Величина  $d\Omega_3^2$  представляет собой «обезразмеренную» метрику в трехмерном пространстве. Мы будем также использовать обозначение  $\gamma^{ij}$  для элементов матрицы, обратной к  $(\gamma_{ij})$ . В случае плоского пространства мы сделали замену  $r = a(t)\chi$  (хотя эта факторизация неоднозначна), поскольку зависимость масштаба  $a$  от времени  $t$  определяет геометрию пространства-времени. Здесь и ниже под неподвижными или покоящимися частицами мы будем понимать частицы, покоящиеся в системе координат  $t, \chi, \vartheta, \varphi$  с метрикой (14.7), то есть, частицы с  $\chi, \vartheta, \varphi = \text{const}$ . Собственное для покоящихся частиц время  $t$  мы будем называть физическим временем.

Возьмем двух покоящихся наблюдателей в разных точках пространства. Каждый из них, оглядываясь вокруг, будет видеть мир изотропным. Но расстояние между этими наблюдателями будет меняться со временем пропорционально фактору  $a(t)$ . Таким образом, каждый из наблюдателей будет видеть мир как расширяющийся, если  $\dot{a}(t) > 0$  и сжимающийся, если  $\dot{a}(t) < 0$ . Функцию  $a(t)$  называют *масштабным фактором*. Измерение абсолютного значения масштабного фактора в предположении, что

<sup>3</sup>Эффекты нетривиальной топологии можно было бы наблюдать по анизотропии реликтового излучения. Современные данные говорят о том, что если такая нетривиальная топология имеет место, то расстояние между отождествляемыми точками много больше размера наблюдаемой части Вселенной.

$K \neq 0$ , пока не представляется возможным, поскольку наблюдаемая кривизна  $K$  пространства слишком мала. Однако можно измерить, во-первых, отношение масштабных факторов в настоящее время и в момент испускания сигнала и, во-вторых, относительную скорость расширения Вселенной. Чтобы разобраться в этом, введем вместо времени  $t$  координату  $\eta$ , определенную равенством

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (14.9)$$

Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (14.10)$$

где  $a(\eta)$  понимается как  $a(t(\eta))$ . Производную по  $\eta$  мы будем обозначать штрихом, производную по  $t$  — точкой.

Напишем уравнение эйконала для луча света в этой метрике:

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (14.11)$$

где  $\psi$  — эйконал, то есть фаза волны вдоль луча как функция пространственно-временных координат, а коэффициенты  $\gamma^{ij}$  не зависят от  $\eta$ . Решая это уравнение методом разделения переменных, находим

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (14.12)$$

Величина  $\varepsilon$  имеет естественный смысл частоты в переменной  $\eta$ , и является интегралом движения. Частота  $\omega$  по отношению к физическому времени  $t$  связана с параметром  $\varepsilon$  очевидным соотношением

$$\omega(t) dt = \varepsilon d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\varepsilon}{a(t)}.$$

То есть частота волны обратно пропорциональна масштабному фактору. Это значит, что в расширяющейся Вселенной свет по мере распространения испытывает красное смещение. Введем величину относительного красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (14.13)$$

где  $\lambda_0, \omega_0$  — длина волны и частота в точке *наблюдения* (то есть в настоящий момент времени), а  $\lambda, \omega$  — длина волны и частота в точке *испускания*. Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z, \quad (14.14)$$

то есть красное смещение немедленно дает нам отношение масштабных факторов в настоящий момент времени и в момент испускания волны. Величина красного смещения является естественной мерой времени и расстояния до удаленных объектов в астрономии.

Не следует путать описанный эффект *космологического красного смещения* с эффектом Доплера. В отличие от эффекта Доплера космологическое красное смещение зависит не от скорости удаления объектов друг от друга, а только от отношения масштабных факторов в момент регистрации сигнала и его испускания. Даже если бы в моменты испускания и регистрации сигнала масштабный фактор был бы постоянен, но менялся бы в промежутке между этими событиями, мы бы наблюдали космологическое красное (в случае увеличения масштабного фактора между моментами времени  $t$  и  $t_0$ ) или фиолетовое (в случае его уменьшения) смещение. Сходство с эффектом Доплера состоит только в том, что *путь*, проходимый фотоном от момента испускания до момента наблюдения, растет со временем испускания  $t$  при  $a(t_0) > a(t)$ , поскольку чем позже испущен фотон, тем большие значения масштабного фактора будут на участках его пути с теми же координатами  $\chi, \vartheta, \varphi$ . То есть, мы измеряем не скорость удаления источника, а скорость увеличения пути, проходимого светом.

Рассмотрим случай  $z \ll 1$ . Тогда

$$z = \frac{a(t_0) - a(t)}{a(t)} \simeq \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0 - t) = H(t_0)L, \quad (14.15)$$

где  $L = t_0 - t$  — расстояние до источника, а  $H(t)$  — параметр Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (14.16)$$

Для измерения параметра Хаббла необходимо точно измерять расстояния до объектов. Ввиду систематических ошибок в измерении этих расстояний (неудачного выбора стандартных свечей) значение параметра Хаббла долгое время завывшалось, и лишь недавно была получена сравнительно надежная оценка. Различные эксперименты в последнее время дают результаты вблизи значения  $H(t_0) \simeq 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc} \simeq 2.2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \simeq 7 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$ . Тем не менее сохраняется разброс примерно в  $\pm 3 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$  в зависимости от метода измерения и инструмента. Примерно то же значение дают исследования гравитационных волн. Источники гравитационных волн являются хорошими стандартными свечами, поскольку «абсолютную яркость» гравитационного источника можно определить по форме волны. Пока что точность метода недостаточна для того, чтобы преодолеть разногласия.

Мы хотим выписать уравнения Эйнштейна. В метрике (14.7) ненулевые символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^{(3)i}, \quad (14.17)$$

где  $\Gamma_{jk}^{(3)i}$  — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые, как нетрудно убедиться, не зависят от масштабного фактора  $a$  в координатах  $\chi, \vartheta, \varphi$ . Поэтому временные производные от них равны нулю. А это значит, что они вносят вклад только в пространственные компоненты  $R_{ij}$ , и причем известный вклад:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(3)} + (\text{вклады } \Gamma_{lm}^t, \Gamma_{tm}^l), \quad R_{ij}^{(3)} = 2ka^{-2}(-g_{ij}),$$

где

$$k = \text{sign } K. \quad (14.18)$$

Отсюда нетрудно найти ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_t^t = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_j^i = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}\right)\delta_j^i, \quad R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right). \quad (14.19)$$

Теперь рассмотрим материальную часть уравнений Эйнштейна — тензор энергии-импульса. В силу изотропии пространства (но не пространства-времени) он должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (14.20)$$

Компонента  ${}^t_t$  уравнения Эйнштейна дает уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (14.21)$$

а компонента  ${}^i_j$  — уравнение движения

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (14.22)$$

Уравнение движения несколько неудобно, потому что это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его не очень трудно проинтегрировать, но результат интегрирования можно получить более простым способом. Именно, давайте воспользуемся ковариантным сохранением тензора энергии-импульса  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ . Без труда получаем

$$0 = T_{t;t}^t + T_{t;i}^i = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (14.23)$$

Умножая на  $dt$ , получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (14.24)$$

Это уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где  $\delta q$  — теплота, поступающая в систему,  $A$  — работа, совершаемая системой,  $V$  — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю. Иными словами, энергия  $U$  уменьшается на работу  $p dV$ , совершаемую материальной частью системы над гравитационным полем. Учитывая, что  $U = \rho V$ , получаем

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу объем  $V$  пропорционален  $a^3$ , получаем (14.24).

Если известно уравнение состояния вещества, можно найти зависимость  $p(\rho)$  в адиабатическом процессе ( $\delta q = 0$ ).<sup>4</sup> Тогда уравнение (14.24) интегрируется

$$3 \log a = - \int \frac{d\rho}{\rho + p(\rho)}. \quad (14.25)$$

Вслед за этим интегрируется уравнение Фридмана (14.21):

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)}, \quad (14.26)$$

где

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - K} \quad (14.27)$$

есть параметр Хаббла как функция масштабного фактора. Из определения координаты  $\eta$  (14.9) очевидно, что

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}. \quad (14.28)$$

Из выражения (14.27) ясно, что кривизна пространства однозначно выражается через среднюю плотность энергии вещества во Вселенной и параметр Хаббла:

$$K = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 = \frac{8\pi G(\rho - \rho_c)}{3}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (14.29)$$

Величина  $\rho_c$  называется *критической плотностью*. При  $\rho > \rho_c$  мир будет замкнутым ( $K > 0$ ), а при плотности  $\rho < \rho_c$  — открытым ( $K < 0$ ). Обратите внимание на универсальность этого результата: он не зависит от уравнения состояния вещества.

К сожалению, мы не можем прямо использовать формулу (14.29), чтобы установить кривизну пространства. Проблема состоит в том, что барионная материя, заключения о плотности которой мы можем сделать на основе наблюдения звезд, пыли и газовых облаков, составляет, по-видимому, очень небольшую часть гравитирующей материи в мире. Так называемая «темная материя» или «темное вещество» имеет в среднем по Вселенной гораздо большую массу. Природа темной материи неизвестна, но известно, что она концентрируется вблизи массивных тел. Это заметно по наблюдениям кривых вращения галактик и скоплений галактик. Как выясняется, звезды движутся в галактиках с большими скоростями, чем это следует из информации о массе барионной материи, которая находится внутри их орбит. То же самое касается скоростей галактик в скоплениях. Также темное вещество наблюдается по создаваемому им гравитационному линзированию. Однако на масштабах планетных систем плотность темной материи ничтожно мала. Это связано с тем, что частицы темной материи по-видимому взаимодействуют только (или почти только) гравитационно и длина их свободного пробега имеет астрономические масштабы. Из-за этого они не создают плотных сгустков как барионное вещество. При

<sup>4</sup>Это означает предположение, что на масштабах, на которых материю можно считать однородной и изотропной, устанавливается термодинамическое равновесие. Это предположение буквально неверно. Однако во многих случаях можно установить разумную степень равновесия и учитывать неравновесность системы через эволюцию дополнительных параметров.



этом по современным представлениям скорости этих частиц много меньше скорости света («холодное темное вещество», cold dark matter (CDM)). Механизмом скопления темного вещества является образование каспов — «перехлестов» в результате почти бесстолкновительного движения. Более того, поскольку средняя плотность темного вещества в пять раз больше средней плотности барионного вещества, на больших масштабах (галактики и скопления галактик) движение темного вещества играет определяющую роль: барионное вещество концентрируется вблизи скоплений темного вещества, а не наоборот.

Второй эффект, который ограничивает возможность использования этой формулы для определения кривизны, называют «темной энергией». Темная энергия ведет себя как космологическая постоянная или как вещество с относительно постоянными плотностью  $\rho$  и давлением  $p \simeq -\rho$ . Современные измерения светимости удаленных объектов показывают, что Вселенная удивительно близка к плоскому миру, так что суммарная плотность видимого вещества, темной материи и темной энергии очень близка к  $\rho_c$ . В настоящее время плотность барионной материи оценивается примерно в  $0.05\rho_c$ , плотность темной материи — в  $0.26\rho_c$ , а остальные 69% принадлежат темной энергии. Вклад электромагнитного излучения составляет, по-видимому, где-то  $5 \cdot 10^{-5}\rho_c$ . Следует подчеркнуть, что эти величины представляют собой результат интерполяции, так что разделение неизвестных нам эффектов на «темную материю» и «темную энергию» в известном смысле условно. Кроме того, пока нет достаточных наблюдательных данных, чтобы утверждать, что плотность темной энергии не зависит от времени (и, соответственно, абсолютная величина давления в точности совпадает с плотностью). Вполне может оказаться, что и темная материя и темная энергия представляют собой явления, выходящие за рамки общей теории относительности.

Теперь мы рассмотрим простейшие космологические модели. До сравнительно недавнего времени считалось, что давлением материи в современную эпоху можно пренебречь, так что в течение уже длительного времени Вселенная эволюционирует согласно уравнениям (14.25), (14.26) с  $p = 0$ . Этот случай допускает простое решение. Имеем

$$\rho = C_m a^{-3}, \quad (14.30)$$

где  $C_m$  — параметр размерности массы. В этом случае проще взять интеграл для параметра  $\eta$ . Для замкнутой вселенной имеем

$$a(\eta) = A_m \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2} (\eta - \sin \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad (14.31)$$

где

$$A_m = \frac{8\pi}{3} G C_m. \quad (14.32)$$

Для открытой вселенной

$$a(\eta) = A_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2} (\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad 0 \leq \eta < \infty. \quad (14.33)$$

Мы выбрали расширяющуюся вселенную как отвечающую наблюдениям. В плоском случае, очевидно,

$$a(\eta) = \frac{A_m}{4} \eta^2, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{12} \eta^3, \quad 0 \leq \eta < \infty. \quad (14.34)$$

На ранних стадиях все три решения совпадают и

$$a(t) \simeq \left( \frac{9A_m}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (14.35)$$

Замкнутая вселенная имеет две особые точки:  $\eta = 0, 2\pi$ . Особая точка  $\eta = 0$  представляет собой начальный момент существования вселенной («большой взрыв»). Особая точка  $\eta = 2\pi$  — конечный момент. Вне интервала  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  вселенная не определена, так что вопрос, что было до начальной сингулярности и что будет после конечной не имеет смысла в рамках ОТО. Если угодно, самого «до» не было, и самого «после» не будет. В отличие от замкнутой вселенной, открытая и плоская вселенные имеют начальную сингулярность, но не имеют конечной. Такие вселенные, однажды возникнув, бесконечно расширяются.

Рассмотрим теперь светоподобные геодезические в таких вселенных. Кривая  $\varphi = \vartheta = 0$  в пространстве является главной окружностью в замкнутом случае и гиперболой в открытом случае, то есть прямой пространства постоянной кривизны. Мы будем временно считать, что переменная  $\chi$  пробегает значения  $-\pi \leq \chi < \pi$  при  $K > 0$  и  $-\infty < \chi < \infty$  при  $K \leq 0$ . Нетрудно понять, что изотропные кривые  $\chi = \pm\eta + \text{const}$  являются геодезическими.

Поскольку переменная  $\eta$  в замкнутой вселенной пробегает значения от 0 до  $2\pi$ , изотропная геодезическая за это время делает полный круг и возвращается в исходную пространственную точку. Таким образом, луч света за время жизни вселенной может обойти ее ровно один раз. В общем случае, если мы возьмем точку вблизи сингулярности  $\eta \rightarrow 0$ , то с течением времени область в угловых переменных  $\chi, \vartheta, \varphi$ , до которой может прийти сигнал пропорциональна  $\eta \sim t^{1/3}$ , то есть растет со временем. Это значит, что если первоначальное распределение материи неоднородно, то эти неоднородности сохранятся и со временем наблюдатель будет их видеть все больше и больше, по мере того, как новые области пространства входят под его горизонт видимости. Таким образом, модель неустойчива по отношению к начальным неоднородностям: в ней нет механизма их сглаживания. Можно думать, что на начальных стадиях эволюции Вселенной действуют другие механизмы.

В самом деле, вблизи сингулярностей, когда плотность вещества велика, вещество наверняка не будет «пылевидным», оно будет создавать давление. Попробуем рассмотреть предельно сжатое вещество — ультрарелятивистский газ. Из статистической механики мы знаем уравнение состояния идеального ультрарелятивистского газа:  $\rho = 3p$ . Согласно уравнению (14.25) имеем

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (14.36)$$

где  $C_r$  — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (14.37)$$

При достаточно малых  $a$  имеем  $\frac{8\pi}{3} G \rho a^2 = A_r a^{-2} \gg 1$  и результат мало зависит от типа геометрии. Поэтому пренебрежем кривизной под корнем в (14.27) и получим

$$a(t) = A_r^{1/2} \eta = (2A_r)^{1/2} t^{1/2}. \quad (14.38)$$

Это несколько меняет поведение вселенной вблизи сингулярности, но не меняет основного вывода: фридмановские модели, основанные на известных формах материи, неустойчивы относительно первоначальных неоднородностей.<sup>5</sup> В то же время наблюдения свидетельствуют о высокой однородности и изотропии Вселенной. Класс гипотез, объясняющих эту однородность мы разберем на семинаре.

А сейчас вернемся к описанию современной Вселенной. В 1998 году были опубликованы астрономические исследования, значительно уточняющие параметр Хаббла как функцию времени. Один из выводов этих исследований состоял в том, что стандартные свечи с известным красным смещением выглядят на больших расстояниях темнее, чем они бы выглядели согласно моделям Фридмана с пылевидной материей. Это означает, что Вселенная расширяется быстрее, чем предсказывают эти модели. Более того, наблюдения согласуются с предположением, что в течение последних  $4 \div 5$  миллиардов лет (то есть начиная с  $z \simeq 0.3$ ) Вселенная расширяется с ускорением, примерно по экспоненциальному закону  $a(t) \sim e^{Ht}$ . Хотя различные методы дают разные абсолютные значения параметра Хаббла, все они подтверждают его постоянство в этот период. Для экспоненциального закона имеем

$$\eta \sim \int dt e^{-Ht} \sim -e^{-Ht}, \quad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \quad (14.39)$$

Из (14.27) мы видим, что такая зависимость возникает при  $\rho = \text{const}$ ,  $G\rho a^2 \gg 1$ . Сравнивая с законом сохранения энергии (14.23), мы получаем  $\rho = -p$ , что неотличимо от вклада  $\Lambda$ -члена с  $\Lambda = 8\pi G\rho$ . Этот вклад и принято называть темной энергией.

На самом деле, конечно,  $p > -\rho$ . Поэтому более точная модель должна сочетать в себе разные виды материи. Давайте разобьем материю на три компоненты: «пыль» (включающую в себя барионную и холодную темную материю) с плотностью  $\rho_m$  и давлением  $p_m = 0$ , излучение (включающее в себя

<sup>5</sup>Эта фаза даже немного ухудшает положение, уменьшая значения параметра  $\eta$ , отсчитываемые от сингулярности.

фотоны, легкие нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы) с плотностью  $\rho_r$  и давлением  $p_r = \rho_r/3$  и темную энергию с плотностью  $\rho_e$  и давлением  $p_e = -\rho_e$ . Будем пренебрегать возможностью перехода этих трех видов материи друг в друга. Тогда, в силу линейного вида уравнения (14.23), для каждого вида материи имеется своя зависимость плотности от масштабного фактора:

$$\rho_m = C_m a^{-3}, \quad \rho_r = C_r a^{-4}, \quad \rho_e = C_e. \quad (14.40)$$

Полагая  $A_i = \frac{8\pi}{3} G C_i$ , находим

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{A_r a^{-2} + A_m a^{-1} + A_e a^2 - k}}. \quad (14.41)$$

Этот интеграл берется численно и используется для подгонки под наблюдательные данные. Для сравнения с наблюдениями удобно привести его к данным о настоящем времени. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_m}{a_0^4 H_0^2}, & \Omega_r &= \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_r}{a_0^3 H_0^2}, \\ \Omega_e &= \frac{\rho_e(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_e}{a_0^2 H_0^2}, & \Omega_k &= -\frac{k}{a_0^2} = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_e, \end{aligned} \quad (14.42)$$

где  $H_0 = H(t_0)$ ,  $a_0 = a(t_0)$  — параметр Хаббла и масштабный фактор в настоящее время  $t_0 \simeq 13.8 \cdot 10^9$  yr. Вводя  $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$ , получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (14.43)$$

Из эмпирических данных имеем  $\Omega_m \simeq 0.31$ ,  $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Omega_e \simeq 0.69$ ,  $|\Omega_k| \lesssim 10^{-3}$ . Вкладом кривизны  $\Omega_k$  мы практически всюду можем пренебречь. Что касается вкладов разных видов материи, то с большим запасом выполняется неравенство  $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$ . Отсюда следует, что имеется два характерных значения масштабного параметра

$$a_1 = \frac{A_r}{A_m} \ll a_2 = \left( \frac{A_m}{A_e} \right)^{1/3},$$

так что при  $a(t) \ll a_1$  имеет вкладом пылевидной материи и темной энергии можно пренебречь (стадия *радиационного доминирования*), при  $a_1 \ll a(t) \ll a_2$  доминирует пылевидная материя (*пылевая стадия*), а при  $a(t) \gg a_2$  доминирует космологическая постоянная (стадия  $\Lambda$ -доминирования). Легко видеть, что  $\tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$  ( $z_1 \sim 10^4$ ,  $t_1 \sim 10^4$  yr),  $\tilde{a}_2 \simeq 0.77$  ( $z_2 \simeq 0.30$ ,  $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$  yr). Заметим, что даже электроны становятся ультрарелятивистскими только при температуре порядка  $10^{10}$  K, что соответствует значениям масштабного фактора порядка  $\tilde{a} \sim 10^{-9} \ll \tilde{a}_1$ , так что при больших масштабных факторах их можно считать частью «пыли». Вклад релятивистских нейтрино в области радиационного доминирования и, по крайней мере, в начале пылевой фазы составляет постоянную долю (примерно .7) от вклада фотонов. Позже этот вклад может уменьшиться (и увеличиться вклад нейтрино в нерелятивистскую материю) из-за массы нейтрино, но это уже не будет заметно влиять на эволюцию Вселенной. Это оправдывает первоначальное предположение о постоянстве  $\Omega_i$  в интересующем нас интервале масштабных факторов.

Описанная модель называется *моделью  $\Lambda$ CDM* (модель холодной темной материи с  $\Lambda$ -членом) и она хорошо согласуется с известными наблюдательными данными.

## Задачи

1. Получите формулы (14.4), (14.5) ограничением из плоского четырехмерного пространства. Проверьте также формулы для  $K$ . Докажите формулу (14.6).
2. Проверьте формулы для символов Кристоффеля (14.17) и для тензора Риччи (14.19).
3. Получите уравнение (14.24) прямым интегрированием уравнения движения (14.22) с использованием уравнения Фридмана (14.21).

4. Напишите уравнение Гамильтона—Якоби для массивной частицы в модели Фридмана общего вида и найдите решение в квадратурах методом разделения переменных.

5\*. Постройте диаграмму Пенроуза для метрики

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} e^{Ht} d\chi^2 = \frac{d\eta^2 - d\chi^2}{H^2 \eta^2}, \quad \eta = -e^{-Ht}.$$

Покажите, что эта система координат не полна (геодезические могут быть продолжены в прошлое). Заменой координат светового конуса найдите полную систему координат и построьте полную диаграмму Пенроуза.

## Семинар 14

### Проблемы моделей Фридмана. Инфляция

Перечислим основные проблемы моделей Фридмана.

**1. Проблема плоской Вселенной.** Согласно наблюдениям в настоящий момент времени Вселенная является довольно плоской:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-3}. \quad (14.44)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (14.45)$$

совпадающую с  $\Omega_k$  при  $t = t_0$ . Из правой части следует, что если  $a(t) \sim t^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), то  $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$  растет со временем. Значит, к началу стадии доминирования вещества плотность материи должна была быть намного ближе к критической:

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left( \frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-7}. \quad (14.46)$$

А в эпоху первичного нуклеосинтеза  $t_{\text{nucl}} \sim 10^2 \div 10^3$  s, например, должно быть

$$|\delta\Omega(t_{\text{nucl}})| \simeq \frac{t_{\text{nucl}}}{t_1} |\delta\Omega_1| \sim 10^{-16}. \quad (14.47)$$

По современным представлениям стадия радиационного доминирования начинается примерно в момент  $t_r \sim 10^{-32}$  s, что должно отвечать фантастически малой величине  $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-51}$  отклонения от критической плотности. Почему Вселенная должна быть настолько плоской на начальных этапах?

### 2. Проблема начальной однородности и проблема горизонтов.

Во фридмановских моделях неоднородности тоже должны расти со временем. Качественно можно думать, что если  $a(t) \sim t^\alpha$ , то отклонение локальной плотности от средней будет расти по тому же закону  $\delta\rho/\rho_c \sim \dot{a}^{-2} \sim t^{2-2\alpha}$ , что и  $\delta\Omega$ . Это касается порядка величины возмущений. Что касается пространственных масштабов возмущений, то мы можем рассуждать следующим образом.

В относительно однородной вселенной возмущения, так же как и другие астрофизические объекты, должны сохранять значения  $\chi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  (если только они не распространяются очень быстро). В этих координатах радиус наблюдаемой нами области в предшествующий момент времени  $t$  равен

$$\chi_{\text{max}} = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (14.48)$$

Если  $a(t) \sim t^\alpha$ , то  $\eta \sim t^{1-\alpha}$  и в достаточно далеком прошлом

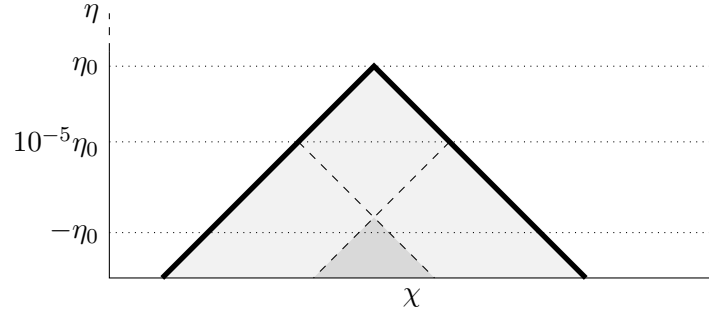
$$\eta \ll \chi_{\text{max}}. \quad (14.49)$$

Фактически самое древнее событие, которое мы можем наблюдать непосредственно, это рекомбинация плазмы, породившая реликтовое излучение. Она случилась в момент времени  $t_{\text{rec}} \simeq 4 \cdot 10^5$  yr,  $z \simeq 10^3$ . Для него

$$\frac{\eta_{\text{rec}}}{\eta_0} \sim \left( \frac{t_{\text{rec}}}{t_2} \right)^{1/3} \simeq 0.04. \quad (14.50)$$

(мы пренебрегли недолгой стадией  $\Lambda$ -доминирования, где  $\eta$  меняется не сильно). Но это значит, что масштабы, в которых могло установиться равновесие за период времени от Большого взрыва до рекомбинации составляет не более 0.04 от видимой области Вселенной. Мы должны были бы наблюдать это как сильную анизотропию реликтового излучения на угловых масштабах порядка нескольких градусов. Эксперимент же показывает чрезвычайно малую анизотропию (порядка  $10^{-4}$ ) на этих угловых масштабах.

Как это могло произойти? Каким образом видимая часть Вселенной могла достичь равновесия? Решение проблемы может заключаться в том, что момент  $\eta = 0$ , начальный во фридмановских моделях, не является начальным моментом реальной Вселенной. Ему должен предшествовать период по крайней мере до значений  $\eta < -\eta_0$ . Предположительная диаграмма Пенроуза должна выглядеть примерно так:



Затемненная область — это область видимости из нашей точки Вселенной в наше время. Более темная область — эта общая область, которая могла бы влиять на температуру реликтового излучения из противоположных точек на небе.

Одним из наиболее популярных объяснений существования такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени  $t$ , но продолжительная в масштабах параметра  $\eta$  фаза экспоненциального расширения (*инфляции*):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (14.51)$$

где  $H_*$  — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла.

При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Инфляция к моменту  $t \sim 10^{-32}$  s может подготовить нам достаточно плоскую вселенную. Действительно, при зависимости (14.51) масштабного фактора от времени плотность экспоненциально быстро приближается к критической:

$$|\delta\Omega| = \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Предположим, что Вселенная родилась каким-то квантовым образом на масштабах планковской длины

$$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

То есть, будем считать, что при рождении  $a \sim l_{\text{Pl}}$ , а отклонение плотности от критической порядка единицы:  $\delta\Omega_{\text{Pl}} \sim 1$ . Тогда необходимое для фридмановских моделей начальное отклонение плотности от критической будет достигнуто при  $a \sim 10^{-7}$  см. Согласно современным представлениям начальное время радиационно-доминированной модели Фрийдмана составляет  $t_r \sim 10^{-32}$  s. Пусть  $T_*$  — продолжительность инфляции. Тогда из оценки  $e^{-2H_* T_*} \sim 10^{-52}$  получаем  $H_* \gtrsim 60/T_*$ . Например, если  $T_* \sim t_r$ , то  $H_* \gtrsim 10^{34} \text{ s}^{-1}$ .

2. Масштабы неоднородностей растут во времени в процессе инфляции, а амплитуда их падает. И если на планковских масштабах неоднородности были сравнимы с планковской длиной, то есть с тогдашним масштабом  $a$  Вселенной, то после инфляции их масштабы опять же будут порядка  $a$ , но видимая нами часть Вселенной, определенная на момент рекомбинации плазмы  $\eta_{\text{rec}}$ , оказывается намного меньше этого масштаба. Возможно, что Вселенная в целом содержит значительные

неоднородности, но видимая часть Вселенной есть только маленькая и потому однородная область. Одна из возможностей состоит в том, что на фоне первичного квантового «бульона» возникают отдельные «вздутия», которые производят куски квазиклассического расширяющегося пространства.

3. Инфляция предоставляет достаточно времени для того, чтобы на масштабах видимой части Вселенной устанавливалось термодинамическое равновесие. Действительно, для наблюдателя в конце эпохи инфляции имеем

$$\chi_{\max} \simeq \frac{1}{H_* a(t_r)} (e^{H_* T_*} - 1). \quad (14.52)$$

Для достаточно большого  $T_*$  первое слагаемое может быть сделано сколь угодно большим. Например, полагая  $T_* \sim t_r$  и используя оценки из первого пункта, мы получаем  $\chi_{\max} \sim 10^9$ . Это многократно больше, чем нужно для установления равновесия. Увеличение  $H_*$  (при постоянном  $H_* T_*$ ) понижает эту оценку, но даже если  $H_* \sim 10^{43} \text{ s}^{-1}$ , то есть порядка обратного планковского времени,  $\chi \sim 1$ , что дает возможность установить равновесие в значительных областях.

Какие механизмы могут приводить к инфляции. Рассмотрим простую модель скалярного поля  $\Phi(x)$  с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (14.53)$$

Здесь  $V(\Phi)$  — некоторый потенциал. Обычно считается, что  $V(0) = 0$ ,  $V(\Phi) \geq 0$ . Мы не будем обсуждать природу поля. Может быть, это какое-то неизвестное фундаментальное поле, а может быть, это коллективная переменная (например, параметр порядка). Как бы то ни было, его тензор энергии-импульса будет иметь вид

$$T_{\mu\nu} = \left( \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (14.54)$$

Предположим, что поле  $\Phi$  находится в пространстве с метрикой вида (14.7), причем постоянно в пространстве и по какой-то причине медленно меняется со временем. Тогда

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (14.55)$$

Это эквивалентно появлению космологической «постоянной», медленно меняющейся со временем. Если потенциал  $V > 0$ , это может обеспечить инфляционную стадию.

«Разрешим» теперь полю  $\Phi$  меняться со временем, но будем его считать однородным в пространстве:  $\partial_i \Phi = 0$ . Тогда тензор энергии-импульса диагонален и пространственно-изотропен, причем

$$\rho = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \quad p = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi). \quad (14.56)$$

Напишем уравнения движения для модели (14.53). Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = -\frac{dV}{d\Phi}. \quad (14.57)$$

Полагая пространственную однородность и используя метрику в виде (14.7), находим

$$\frac{d}{dt} \left( a^3 \frac{d\Phi}{dt} \right) = -a^3 \frac{dV}{d\Phi}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + V'(\Phi) &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi}{3} G \left( \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right). \end{aligned} \quad (14.58)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (14.23) удовлетворяется автоматически.

Как эта задача связана с инфляцией? Если в момент «квантового рождения» Вселенной, поле  $\Phi$  приобретает какое-то конечное значение (может быть, даже различное в разных точках пространства), то это приводит к ненулевому параметру Хаббла. Позже в результате инфляции неоднородность ослабляется и Вселенная описывается уравнениями (14.58). Дальше возможны различные сценарии. В некоторых сценариях потенциал  $V(\Phi)$  имеет локальный минимум при некотором ненулевом значении  $\Phi$ , который постепенно исчезает (например, при понижении температуры, если поле описывает свойства некоторой среды). В других сценариях потенциал может иметь только один минимум в нуле и расти при увеличении  $\Phi$  (например, как  $|\Phi|^n$ ). В таких сценариях важно, что параметр Хаббла  $H = \dot{a}/a$  в первом из уравнений играет роль коэффициента трения. Таким образом, расширение Вселенной тормозит «скатывание» поля в потенциальную яму и, тем самым, продлевает инфляционную стадию. Рассматриваются также модели, содержащие несколько скалярных или даже тензорных полей.

## Пояснение А

### Ковариантная производная вдоль базисного вектора

Есть одна тонкость в понимании ковариантной производной  $\nabla_\mu a \equiv \nabla_{\partial_\mu} a$  от векторного поля  $a$ . Важно подчеркнуть, что это снова *вектор*, а вовсе не тензор второго ранга как кажется:  $\nabla_\mu a \in C(TM)$ . Тензор получается, когда мы рассматриваем объект  $\nabla a = dx^\mu \nabla_\mu a \in C(T_1^1 M)$ . Эту разницу важно понимать, когда мы вычисляем вторую ковариантную производную. Именно,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu a = \nabla_\mu \nabla_\nu (a^\lambda \partial_\lambda) = \nabla_\mu (\partial_\nu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda a^\kappa) \partial_\lambda = a^\lambda{}_{;\nu\mu} \partial_\lambda, \quad (\text{A.1})$$

где

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} = \partial_\nu (\partial_\mu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda a^\kappa) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda (\partial_\nu a^\rho + \Gamma_{\kappa\nu}^\rho a^\kappa). \quad (\text{A.2})$$

Неудобство такого обозначения состоит в том, что числа  $a^\lambda{}_{;\nu\mu}$  не преобразуются как компоненты тензора.

В то же время для второго объекта мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla \nabla a &= dx^\mu \otimes \nabla_\mu (dx^\nu \otimes \nabla_\nu a) = dx^\mu \otimes (\nabla_\mu dx^\nu) \otimes \nabla_\nu a + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a \\ &= dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a - \Gamma_{\nu\mu}^\rho dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\rho a = a^\lambda{}_{;\nu\mu} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \partial_\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} = a^\lambda{}_{;\nu\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho (\partial_\rho a^\lambda + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda a^\sigma). \quad (\text{A.4})$$

Этот набор чисел уже преобразуется как компоненты тензора третьего ранга, поскольку они определены через объект  $\nabla \nabla a \in C(T_2^1 M)$ .

Замечательное свойство состоит в том, что антисимметризация по индексам  $\mu$  и  $\nu$  для двух значков дает один и тот же результат для связности без кручения:

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} - a^\lambda{}_{;\mu\nu} = a^\lambda{}_{;\nu\mu} - a^\lambda{}_{;\mu\nu} = R^\lambda{}_{\kappa\mu\nu} a^\kappa. \quad (\text{A.5})$$

Это связано с тем, что второе слагаемое в (A.4) симметрично по индексам  $\mu$  и  $\nu$ .

Разумеется, эти рассуждения легко обобщаются на произвольное тензорное поле  $a \in C(T_n^m M)$ .



## Пояснение В

### Обобщенная теорема Остроградского—Гаусса

Пусть  $a = a^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k}$  — полностью антисимметричное тензорное поле на  $d$ -мерном (псевдо)римановом многообразии, а

$$df_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{1}{(d-l)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \quad (\text{В.1})$$

— элемент  $(d-l)$ -мерной поверхности. Пусть  $U$  — замкнутое подмножество в  $(d-k+1)$ -мерном подмногообразии  $M$ , а  $\partial U$  —  $(d-k)$ -мерная граница этой области в подмногообразии  $M$ . Мы хотим доказать формулу

$$\int_U df_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) = \frac{1}{k} \int_{\partial U} df_{\mu_1 \dots \mu_k} \sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (\text{В.2})$$

Мы будем доказывать для случая, когда область  $U$  покрывается одной картой. В случае, когда это не так, мы можем разбить область  $U$  на несколько подобластей, покрываемой одной картой каждая, и воспользоваться аддитивностью интегралов.

Прежде всего заметим, что левая и правая части равенства (В.2) не зависят от системы координат. Действительно, форма объема

$$dV = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_d}$$

является инвариантным объектом, а правая часть (В.2) является сверткой формы объема с контравариантным тензором ранга  $k$ , то есть объектом инвариантным. Левая же часть является сверткой той же формы объема с тензором

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_{k-1}} = (\nabla_{\mu_k} a)^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_{k-1}}.$$

Это равенство, обобщающее (3.33) на произвольный антисимметричный тензор, нетрудно проверяется. Таким образом, левая часть тоже не зависит от системы координат.

Выберем систему координат на карте, покрывающей  $U$  так, чтобы подмногообразие  $M$  задавалось уравнением вида

$$x^a = 0 \quad (a = 1, \dots, k-1).$$

(Мы здесь будем нумеровать индексы  $\mu$  от 1 до  $d$ .) Тогда на  $M$  единственные отличные от нуля компоненты это компонента  $df_{1 \dots k-1}$  и все компоненты, получаемые из нее перестановкой индексов. Действительно, все  $dx^a = 0$ , так что все ненулевые  $dx^\mu$ , входящие в правую сторону (В.1) имеют  $\mu > k-1$ . Их как раз  $d-k+1$  штука. При этом набор  $\mu_1, \dots, \mu_d$  для ненулевых слагаемых является перестановкой чисел  $1, \dots, d$ . Это значит, что индексы  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$  должны быть перестановками числе  $1, \dots, k-1$ .

Из антисимметричности  $df$  и  $a$  получаем

$$I = \int df_{\mu_1 \dots \mu_{k-1}} \partial_{\mu_k} (\sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}) = (k-1)! \int df_{1 \dots (k-1)} \partial_{\mu} (\sqrt{|g|} a^{1 \dots (k-1) \mu}).$$

Очевидно,  $\mu$  можно ограничить областью  $k, \dots, d$ , то есть номерами координат на подмногообразии  $M$ . Это значит, что к последней формуле можно применить теорему Гаусса:

$$I = (k-1)! \int df_{1 \dots (k-1) \mu} \sqrt{|g|} a^{1 \dots (k-1) \mu}.$$

Теперь заметим, что все остальные ненулевые элементы  $df_{\mu_1 \dots \mu_k}$  получаются перестановкой  $k$  индексов  $1, \dots, k-1, \mu$  (подумайте сами, почему). Ввиду все той же антисимметричности наших объектов, получаем

$$I = \frac{(k-1)!}{k!} \int df_{\mu_1 \dots \mu_k} \sqrt{|g|} a^{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Можно сделать два замечания. Во-первых, утверждение (В.2) можно также получить из обобщенной теоремы Стокса для антисимметричных форм

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega, \quad (\text{В.3})$$

которая верная для любых гладких многообразий, даже без всякой связности или метрики. Для доказательства достаточно взять

$$\omega = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_{k+1}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_d} = \frac{1}{(d-k)!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} a^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}.$$

Нетрудно увидеть, что внешний дифференциал формы сведется к дивергенции из левой части (В.2).

Во-вторых, теорема применима не только к антисимметричным тензорам, но и к любым антисимметричным символам  $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$ . Действительно, определим тензор  $\tilde{a}$ , компоненты которого  $\tilde{a}^{\mu_1 \dots \mu_k}$  равны  $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$  в данной системе координат. Для него, как мы видели, верна теорема Остроградского—Гаусса. Но в левой и правой части (В.2) этот тензор находится в одной и той же системе координат и поэтому его компоненты совпадают с компонентами символа  $a^{\mu_1 \dots \mu_k}$ . Иными словами, те преобразования, с помощью которых мы доказывали, следует применять к компонентам тензора  $\tilde{a}$ . А поскольку в конце рассуждения мы возвращаемся к исходной системе координат, то и компоненты тензора снова становятся равными компонентам символа  $a$ .