Лекция 9
Излучение гравитационных волн

Мы убедились в том, что гравитационные волны являются свободными решениями уравнений гравитационного поля. Теперь нас будут интересовать гравитационные волны как вынужденные решения. Мы рассмотрим систему частиц, совершающих движение с небольшой скоростью в конечном объеме и найдем «вынужденное» решения уравнения (7.14). Мы увидим, что создаваемое частицей на больших расстояниях гравитационное поле описывается гравитационными волнами. Мы будем решать эту задачу в размерности $d = 4$ по двум причинам. Во-первых, потому что эта задача физически интересна. Во-вторых, потому что интересующее нас *запаздывающее* решение особенно просто в четырехмерном случае: оно зависит только от значения тензора энергии-импульса в момент времени, упреждающий момент наблюдения на промежуток времени, за который волна проходит от источника до точки наблюдения.

Итак, решение уравнения (7.14) как функционал от тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ называется запаздывающим, если оно удовлетворяет следующему условию. Возьмем две функции $T_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ и $T'_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$, такие, что $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$ для всех $\boldsymbol{r}$ при $t < t_0$, тогда соответствующие запаздывающие решения $\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ и $\psi'_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r})$ тоже совпадают при $t < t_0$. Более того, если $T_{\mu\nu}$ и $T'_{\mu\nu}$ различаются в какой-то области пространства-времени, то решения не различаются вне светового конуса будущего этой области. Физически это значит, что мы ищем решение, причинно-зависимое от тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$.

В произвольной размерности решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = -16\pi G \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^{d-1}x'\, G^R(t - t', |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) T_{\mu\nu}(t', \boldsymbol{r}'), \tag{9.1}$$

где *запаздывающая функция Грина* $G^R(t, \boldsymbol{r})$ представляет собой решение уравнения

$$\Box\, G^R(t, \boldsymbol{r}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r}) \tag{9.2}$$

с начальным условием

$$G^R(t, \boldsymbol{r}) = 0 \text{ при } t < r \equiv |\boldsymbol{r}|. \tag{9.3}$$

Запаздывающую функцию Грина можно построить так. Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}. \tag{9.4}$$

Подставляя это в уравнение (9.2) и учитывая, что

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-ikx}, \tag{9.5}$$

получаем $(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1$ и, следовательно,

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}. \tag{9.6}$$

В этом виде решение еще недоопределено. Действительно, при интегрировании по k^0 в (9.4) полюс в точках $k^0 = \pm|\boldsymbol{k}|$ можно обходить с разных сторон. Чтобы учесть условие (9.3), нужно, чтобы интеграл обращался в нуль при $t < 0$. В этом случае множитель $e^{-ik^0 t}$ стремится к нулю, если $\operatorname{Im} k^0 \to +\infty$. Поэтому контур должен проходить над полюсами. Тогда при $t < 0$ его можно будет замкнуть сверху на бесконечности и сжать в точку, что будет означать обращение функции Грина в нуль. Небольшой сдвиг контура вверх отвечает замене k^0 на $k^0 + i0$ в знаменателе (9.6):

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{(k^0 + i0)^2 - \boldsymbol{k}^2} = -\frac{1}{k^2 + i0k^0}. \tag{9.7}$$

При $t > 0$ экспонента $e^{-ik^0 t}$ стремится к нулю при $\operatorname{Im} k^0 \to -\infty$, поэтому контур можно замкнуть снизу, и интеграл по k^0 сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left(\operatorname*{res}_{\omega = -|\boldsymbol{k}|} + \operatorname*{res}_{\omega = |\boldsymbol{k}|} \right) \frac{e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}}{\omega^2 - \boldsymbol{k}^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \sin|\boldsymbol{k}|t}{|\boldsymbol{k}|}. \tag{9.8}$$

В пространстве-времени произвольной размерности функция $G^R(x)$ представляет собой сложную (обобщенную) функцию.[1] Особенность случая $d = 4$ состоит в том, что запаздывающая функция Грина оператора Даламбера пропорциональна дельта-функции с носителем в точности на световом конусе будущего:

$$G^R(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r}. \tag{9.9}$$

В результате запаздывающее решение имеет удивительно простой вид

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{r}) = -4G \int d^3x' \, \frac{T_{\mu\nu}(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{9.10}$$

Важный факт состоит в том, что если материя сосредоточена в конечной области (то есть тензор энергии-импульса отличен от нуля в конечной области) пространства, то вдали от этой области решение неотличимо от суммы статического решения и гравитационной волны. Более того, достаточно далеко от гравитирующей материи гравитационная волна в небольшой области пространства неотличима от плоской волны. То есть мы можем говорить об излучении гравитационных волн материей.

Мы уже говорили о том, что ковариантный закон сохранения импульса $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ в первом порядке по $h_{\mu\nu}$ дает сохранение импульса и момента импульса в пространстве Минковского:

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{9.11}$$

Но излучение гравитационных волн должно приводить к тому, что материя теряет энергию. Как мы выяснили на прошлой лекции, энергия гравитационной волны является величиной второго порядка малости.

Замечание. В некоторых задачах поле вблизи источника может быть не так мало́, чтобы можно было пренебречь нелинейными поправками, в то время как нас интересует волна на больших расстояниях, в области слабого поля. В этом случае рассуждения этой лекции применимы, если мы заменим компоненты тензора энергии-импульса на величины

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{8\pi G} \left(\tilde{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{2} \tilde{R} \right), \tag{9.12}$$

где $\tilde{R}^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - R^{(1)}{}^{\bar{\mu}}_{\nu}$. Здесь $R^{(1)}_{\mu\nu}$ — линеаризованный тензор Риччи, определенный в (7.5). Нетрудно проверить, что, в силу свойств $R^{(1)}_{\mu\nu}$, символ $\tilde{T}_{\bar{\mu}\nu}$ симметричен и формально выполняется закон сохранения $\tilde{T}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0$. Действительно, на решениях точных уравнений Эйнштейна $\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left(R^{(1)}{}^{\bar{\mu}}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} R^{(1)}{}^{\bar{\lambda}}_{\lambda} \right)$. Разумеется, в этом случае задача не решается так прямо, но описанный ниже прием, выражающий ответ через одну компоненту $\tilde{T}^0_0$ во многих случаях работает.

Мы рассмотрим простейший случай нерелятивистской материи, сосредоточенной в течение всего времени вблизи начала координат $\boldsymbol{r} = 0$. Будем считать, что мы наблюдаем гравитационное поле $\psi_{\mu\nu}(X) = \psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{R})$ в *волновой зоне*, то есть на большом расстоянии R от источника: $R \gg r_{\text{ист}}, r^2_{\text{ист}}/\lambda$. Здесь $r_{\text{ист}}$ — характерный размер области, где находится материя, а λ — характерная длина волны. За пределами области вблизи начала координат размера $r_{\text{ист}}$ мы будем считать $T_{\mu\nu} = 0$. При этом условии решение упрощается, поскольку знаменатель $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}'| \simeq R$ можно считать постоянным. Для запаздывания это приближение будет слишком грубым, поэтому в числителе мы положим $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}'| \simeq R - \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}/R$. Здесь мы пренебрегли членами порядка $O(r^2/R)$, что и соответствует приближению волновой зоны. Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, \boldsymbol{n})}{R}, \qquad M_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{n}) = \int d^3x \, T_{\mu\nu}(t + \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}). \tag{9.13}$$

[1] В пространствах четной размерности $d > 2$ носитель функции $G^R(x)$ совпадает со световым конусом будущего: $\eta(x, x) = 0$, $t \geq 0$. В пространствах нечетной размерности он содержит также всю внутренность конуса: $\eta(x, x) \geq 0$, $t \geq 0$. Так что нам сильно повезло, что мы живем в четномерном пространстве-времени. В нечетномерном пространстве-времени восстановление динамики источника по сигналу представляет более сложную задачу, и наши зрение и слух должны были бы быть устроены сложнее.

(Для упрощения обозначений мы убрали штрихи у $\boldsymbol{r}'$.) Величины $M_{\mu\nu}$ не преобразуются как компоненты тензора даже по отношению к преобразованиям Лоренца. Чтобы легче было изучать их свойства, положим $\boldsymbol{R} = R\,\partial_1$, то есть $X^2 = X^3 = 0$, $X^1 = R > 0$. Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}(t, \partial_1) = \int d^3x\, T_{\mu\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}). \tag{9.14}$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (9.11). С учетом запаздывания имеем

$$T_{0\nu,0}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = T_{k\nu,k}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}) - T_{1\nu,0}(t + x^1, \boldsymbol{r}).$$

В правой части частная производная ∂_k берется по переменной x^k от всего выражения, включая первый аргумент тензора энергии-импульса. Если мы определим $T^-_\nu = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}$,[2] то немедленно получим

$$\dot{T}^-_\nu(t + x^1, \boldsymbol{r}) = \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}). \tag{9.15}$$

Отсюда ясно, что величины

$$M^-_\nu(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t) \tag{9.16}$$

сохраняются. В самом деле,

$$\dot{M}^-_\nu = \int d^3x\, \dot{T}^-_\nu(t + x^1, \boldsymbol{r}) = \int d^3x\, \partial_k T_{k\nu}(t + x^1, \boldsymbol{r}) = 0, \tag{9.17}$$

так как последний интеграл сводится к интегралу по удаленной границе, где по условию тензор энергии-импульса обращается в нуль. Легко видеть, что M^-_ν есть не что иное как 4-импульс P_ν системы.[3] Следовательно,

$$M^-_0 = \int d^3x\, T^0_0(t, \boldsymbol{r}) = M, \qquad M^-_i = 0, \tag{9.18}$$

где M — полная масса гравитирующих тел. Второе равенство следует из того, что скорость центра масс системы равна нулю. Из (9.18) немедленно следует, что

$$\psi_{0\nu}(R\,\partial_1) + \psi_{1\nu}(R\,\partial_1) = -\frac{4GM}{R}\eta_{0\nu}. \tag{9.19}$$

Этот результат почти соответствует условию (8.7), которое должно выполняться в гравитационной волне в принятой нами калибровке (7.11). Несоответствие имеется только при $\nu = 0$, где возникает ненулевой вклад, который нельзя устранить калибровкой. Однако этот вклад отвечает постоянному во времени продольному полю, создаваемому массой, в соответствии с (7.23), (7.27). В пределе плоской волны (небольшая область пространства размера $l \ll R$) это отвечает постоянному однородному полю, которое мы исключали в прошлой лекции. Это поле следует вычесть из $\psi_{\mu\nu}$, чтобы получить чистое поле гравитационной волны.

Теперь нам нужно найти пространственные поперечные компоненты $M_{ab}(t)$ которые дадут нам физический, не устранимый калибровочным преобразованием, вклад в потенциалы $\psi_{\mu\nu}$. Чтобы сделать это, снова воспользуемся условиями (9.15).

Умножив уравнение (9.15) для $\nu = j$ на x^i и проинтегрировав по всему пространству, получим

$$\partial_0 \int d^3x\, T^-_j(t + x^1, \boldsymbol{r}) x^i = \int d^3x\, (\partial_k T_{kj}(t + x^1, \boldsymbol{r})) x^i = \int d^3x\, \partial_k (T_{kj}(t + x^1, \boldsymbol{r}) x^i) - M_{ij}.$$

Первый член в правой части представляет собой интеграл по удаленной границе, где $T_{ki} = 0$, и мы его опустим. Симметризуя по индексам i, j, получаем

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x\, (T_{+i}(t + x^1, \boldsymbol{r}) x^j + T_{+j}(t + x^1, \boldsymbol{r}) x^i). \tag{9.20}$$

[2]Эти обозначения соответствуют использованным в прошлой лекции координатам светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$, $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$.

[3]Мы пренебрегаем вкладом псевдотензора энергии-импульса как величины второго порядка малости.

Теперь умножим уравнение (9.15) для $\nu = +$ на $x^i x^j$ и проинтегрируем по всему пространству

$$\partial_0 \int d^3x\, 2T_{++}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^j = \int d^3x\, \partial_k(T_{+k}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^j) - \int d^3x\, (T_{+i}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^j + T_{+j}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i).$$

Опять первый интеграл обращается в нуль, а второй интеграл совпадает интегралом в правой части (9.20). Отсюда получаем

$$M_{ij}(t) = \partial_0^2 \int d^3x\, 2T_{++}(t+x^1,\boldsymbol{r})x^i x^j. \tag{9.21}$$

В прошлой лекции мы выяснили, что малой (порядка $h_{\mu\nu}$) заменой координат можно сделать гравитационную волну поперечной $h_{1i} = 0$ и бесследовой ($\psi_a^{\bar a} = h_a^{\bar a} = 0$). Но нам даже нет необходимости делать такую замену координат. Мы уже видели, что величины $h_\times = h_{23} = \psi_{23}$ и $2h_+ = h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$ являются калибровочно-инвариантными по отношению к остаточным преобразованиям, то есть преобразованиям, не нарушающим калибровку (7.11). Мы получаем

$$h_+(t,\boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_+(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \qquad h_\times(t,\boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_\times(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \tag{9.22}$$

где, если выбрать декартовы координаты так, чтобы было $\boldsymbol{n} = \partial_1$, имеем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \partial_0^2 \int d^3x\, T_{++}(t+x^1,\boldsymbol{r})((x^2)^2 - (x^3)^2), \\ M_\times(t) &= \partial_0^2 \int d^3x\, T_{++}(t+x^1,\boldsymbol{r}) \cdot 2x^2 x^3. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Разумеется, ортогональные направлению на источник координаты x^2, x^3 при этом выбираются произвольно.

Теперь используем предположение о нерелятивистском характере движения гравитирующих тел. Это условие предполагает, что размеры системы настолько малы, что за то время, пока сигнал, распространяющийся со скоростью света, пересечет всю систему, положения частиц существенно не изменятся: $vr_{\text{ист}} \ll l$, $ar_{\text{ист}} \ll v$, где v, a — характерные скорость и ускорение частиц, l — характерное расстояние между телами. В этом предположении мы можем опустить x^1 в аргументе $t + x^1$ в (9.23) и заменить там $4T_{++}$ на $T_{00} = T_0^0 = \rho$, поскольку $|T_{00}| \gg |T_{10}|$. Казалось бы, мы могли бы сделать это в самом начале, в (9.13). Оказывается, нет. Дело в том, что тогда бы мы явно нарушили условие калибровки (7.11). Эти приближения мы можем сделать только в окончательных выражениях для калибровочно-инвариантных величин.

Итак, в случае нерелятивистского источника имеем

$$\begin{aligned} M_+(t) &= \frac{1}{4}\,\partial_0^2 \int d^3x\, \rho(t,\boldsymbol{r}) \left((x^2)^2 - (x^3)^2\right), \\ M_\times(t) &= \frac{1}{2}\,\partial_0^2 \int d^3x\, \rho(t,\boldsymbol{r}) x^2 x^3. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Удобно выразить их через *квадрупольный момент* плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x\, \rho(t,\boldsymbol{r})(3x^i x^j - r^2\delta_{ij}). \tag{9.25}$$

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum_{i=1}^3 D_{ii} = 0$. Имеем

$$h_+(t,R\partial_1) = -\frac{G}{3R}(\ddot D_{22}(t-R) - \ddot D_{33}(t-R)), \qquad h_\times(t,R\partial_1) = -\frac{2G}{3R}\ddot D_{23}(t-R). \tag{9.26}$$

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Эта плотность равна компоненте t^{01} псевдотензора энергии-импульса. На большом расстоянии от источника мы можем воспользоваться формулой для плоской волны (8.37). Подставляя туда (9.26), находим

$$t^{01}(t+R,R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2}\left(\left(\frac{\dddot D_{22}(t) - \dddot D_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot D_{23}^2(t)\right). \tag{9.27}$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии $dI(t,\boldsymbol{n})$ в элемент телесного угла $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и, в конечном счете, потери энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой. Для элемента телесного угла в направлении x^1 имеем

$$dI(t,\partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_1)R^2\, do = \frac{G}{36\pi}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}^2_{23}(t)\right) do. \tag{9.28}$$

Мы специально «откатили» поток dI на R назад во времени, поскольку он должен характеризовать потери энергии системы именно в момент времени t, когда сигнал излучается, и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула (9.28) имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t,\partial_1) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}(\dddot{D}_{ij}e^{(s)}_{ij})^2\, do, \tag{9.29}$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad e^{(2)} = e^{(\times)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e^{(s)}_{ii} = 0, \qquad e^{(s)}_{ij} = e^{(s)}_{ji}, \qquad e^{(s)}_{ij}n_j = 0, \qquad e^{(s)}_{ij}e^{(s')}_{ij} = \delta^{ss'}. \tag{9.31}$$

Нетрудно показать, что формула (9.29) верна для *любой* пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t,\boldsymbol{n}) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}(\dddot{D}_{ij}e^{(s)}_{ij})^2\, do = \frac{G}{72\pi}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}E_{ijkl}(\boldsymbol{n})\, do, \qquad E_{ijkl}(\boldsymbol{n}) = \sum_{s=1}^{2} e^{(s)}_{ij}e^{(s)}_{kl}. \tag{9.32}$$

для произвольного $\boldsymbol{n}$. Нам осталось найти явно тензор $E_{ijkl}(\boldsymbol{n})$. Для этого воспользуемся его свойствами:

$$E_{iikl} = 0, \qquad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \qquad E_{ijkl}n_i = 0,$$
$$E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2},$$

которые немедленно следуют из (9.31) и (9.30). Используя второе свойство, запишем E_{ijkl} в виде

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) \\ &\quad + E_3(n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) + E_4\delta_{ij}\delta_{kl} + E_5(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned} \tag{9.33}$$

Коэффициенты $E_1, \ldots, E_5$ находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}. \tag{9.34}$$

Подставляя (9.33), (9.34) в (9.32), получаем

$$dI(\boldsymbol{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_i n_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{ij} - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_j n_k\right) do. \tag{9.35}$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}^2_{ij}. \tag{9.36}$$

Для звездных систем эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для очень тесных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в системе, состоящей из двух нейтронных звезд, было первым экспериментальным подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии за это открытие и проверку других общерелятивистских эффектов на данной системе.

Задачи

1. Покажите, что функция $G_R(x)$, определенная формулой (9.9), удовлетворяет уравнению (9.2).

2. Покажите, что потенциалы (9.13) удовлетворяют калибровочному условию (7.11).

3. Покажите, что формула (9.29) верна для любой пары тензоров $e^{(s)}$, удовлетворяющих условиям (9.31).

4. Выведите (9.34), (9.35). Затем проинтегрируйте (9.35) по углам и получите (9.36).

5*. Две частицы массами m_1 и m_2 вращаются вокруг общего центра масс с нерелятивистскими скоростями по круговым орбитам на расстоянии r друг от друга. Найдите потери энергии системой на гравитационное излучение и приближенную зависимость $r(t)$ в предположении, что взаимодействие частиц можно считать ньютоновским.

Семинар 9

Взаимодействие гравитационных волн с материей. Примеры

1. Взаимодействие гравитационных волн со сплошной средой. Слабое гравитационное поле изменяет расстояния между точками в соответствии с формулой

$$dl'^2 = dl^2 - h_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Согласно стандартным формулам теории сплошных сред, тензор деформации u_{ij} определяется как

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Следовательно, слабое гравитационное поле вызывает деформацию

$$u_{ij} = -\frac{1}{2}h_{ij}. \tag{9.37}$$

При этом, как мы видели, весь эффект гравитационной волны может быть сведен к такой деформации путем исключения временны́х компонент. Деформация, вызванная гравитационной волной полностью поперечна гравитационной волне.

Мы будем считать, что среда занимает все пространство, а скорость звука в среде много меньше скорости света в вакууме. Это приводит к тому, что релаксацией среды можно пренебречь. Если среда занимает конечный объем, то рассуждения ниже верны, если частоты собственных колебаний тела много меньше частоты гравитационной волны. Частоты собственных колебаний по порядку величины равны $\sqrt{k/\rho l}$, где k — модуль упругости (сжатия или сдвига в зависимости от геометрии), ρ — плотность среды, l — характерный размер тела.

Для изотропной среды упругие свойства среды определяются модулем сжатия K и модулем сдвига μ. Тензор напряжений согласно закону Гука равен

$$\sigma_{ij} = K u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}u_{kk}\right). \tag{9.38}$$

Учитывая, что в гравитационной волне $u_{kk} = 0$, она вообще не вызывает сжатия материала в системе отсчета, в которой среда остается покоящейся. Таким образом, она взаимодействует с веществом посредством сдвигов. Это приводит к тому, что тензор энергии-импульса вещества получает добавку

$$\Delta T_{ij} = -\Delta\sigma_{ij} = \mu h_{ij}. \tag{9.39}$$

Взаимодействие с упругой средой приводит к тому, что гравитационная волна распространяется в среде со скоростью меньшей, чем скорость света. Действительно, уравнение для потенциалов принимает вид

$$\Box\,\psi_{ij} + 16\pi G\mu\psi_{ij} = 0. \tag{9.40}$$

Отсюда для плоской волны получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = \boldsymbol{k}^2 + 16\pi G\mu. \tag{9.41}$$

Групповая скорость равна

$$\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} < 1. \tag{9.42}$$

Разумеется, для любых разумных твердых тел эффект ничтожно мал, однако эти формулы представляют интерес с точки зрения распространения гравитационного поля в межзвездном газе. Тело в том, что межзвездный газ можно считать бесстолкновительным, а в бесстолкновительной среде при деформации давление ведет себя анизотропно. Именно в направлении сжатия или растяжения $pL = \text{const}$. Если считать, что, тем не менее, до прохождения волны газ был равновесным с изотропным давлением p, то внутри волны

$$\Delta T_{ij} = -p u_{ij} = \frac{p}{2} h_{ij}. \tag{9.43}$$

Таким образом, межзвездный газ ведет себя как твердая среда с модулем сдвига $p/2$.

Для жидкости имеем

$$\sigma_{ij} = \zeta \dot{u}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left(\dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{kk} \right), \tag{9.44}$$

где η, ζ — коэффициенты вязкости. Вторая вязкость ζ опять же не играет роли. Имеем

$$\Box \psi_{ij} + 16\pi G \eta \dot{\psi}_{ij} = 0. \tag{9.45}$$

Закон дисперсии принимает вид

$$\omega^2 + 16\pi \mathrm{i} G \eta \omega = \boldsymbol{k}^2. \tag{9.46}$$

Это значит, что частота имеет отрицательную мнимую часть, что отвечает поглощению. Более того, сколь бы ни был мал коэффициент взаимодействия, для больших длин волн поглощение становится большим.

2. Взаимодействие гравитационных волн с электромагнитным полем. Может ли гравитационная волна порождаться электромагнитной? Рассмотрим тензор энергии-импульса электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x^1 и поляризованной в плоскости (x^1, x^2):

$$T^{\bullet\bullet} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^-. \tag{9.47}$$

Нас будут интересовать поперечные пространственные компоненты, поскольку продольные и временные компоненты не порождают гравитационную волну. Легко видеть, что они обращаются в нуль.

Включим внешнее постоянное однородное поперечное магнитное поле $\boldsymbol{H}_{\text{внеш}} = H_\perp \partial_2 + H_\| \partial_3$. Тогда мы найдем, что

$$T_{23} = -H_\perp E_0 \cos \omega x^- + \text{const}\,,$$
$$\frac{1}{2}(T_{22} - T_{33}) = H_\| E_0 \cos \omega x^- + \text{const}\,.$$

Таким образом, электромагнитная волна в постоянном магнитном поле является когерентным источником гравитационной волны.