Лекция 11
Движение частицы в метрике Шварцшильда

В прошлый раз мы обсуждали радиальное движение частицы в метрике Шварцшильда. Сегодня рассмотрим общий случай движения частицы по орбите и детально разберем процесс разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. В следующей лекции мы используем это, чтобы изучить два эффекта в слабом поле, связанные с экспериментальной проверкой ОТО: вращение перигелия орбиты частицы и отклонение света гравитационным полем (гравитационное линзирование).

В силу сферической симметрии системы и закона сохранения момента импульса частица будет двигаться в одной плоскости, содержащей большие круги сфер $r = \mathrm{const}$. Удобно выбрать эту плоскость перпендикулярной оси $z = x^3$, то есть принять $\vartheta = \pi/2$.[1] Уравнение Гамильтона—Якоби (4.20) принимает вид

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-m^2=0. \tag{11.1}$$

Мы видим, что переменные t, φ не входят явно в уравнение. Поэтому мы можем положить соответствующие производные постоянными:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-E, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=J. \tag{11.2}$$

Смысл этих констант достаточно очевиден: E представляет собой энергию частицы, а J — проекцию момента импульса на ось z (по модулю совпадающую с полным моментом). Отсюда имеем

$$S(E,J,t,r,\varphi)=-Et+J\varphi+S_r(E,J,r). \tag{11.3}$$

Подставляя это в уравнение (11.1) и интегрируя по r, получаем

$$\begin{aligned} S_r(E,J,r)&=\pm\int dr\,\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\sqrt{F(E,J,r)},\\ F(E,J,r)&=E^2-U^2(J,r)=E^2-\left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии. Мы имеем решение, зависящее от двух параметров, для системы с двумя степенями свободы. Мировая линия частицы определяется уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial E}=-t_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial J}=\varphi_0, \tag{11.5}$$

где новые константы t_0, φ_0 имеют очевидный смысл начальных времени и угла. Имеем

$$t=t_0\pm E\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{11.6}$$

$$\varphi=\varphi_0\pm J\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{11.7}$$

Нетрудно также вычислить собственное время частицы

$$\tau=\tau_0\pm m\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{11.8}$$

Обратим внимание, что собственное время свободно падающей частицы по-прежнему связано с координатным соотношением (10.26).

Мы здесь немного злоупотребили обозначениями, обозначив одной буквой предел и переменную интегрирования, но, я думаю, это никого не введет в заблуждение. Физикам такое простительно.

[1] Несложно разделить переменные и в общем случае, но это не изменит ответов, несколько усложнив технику.

Зададимся вопросом: в каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{11.9}$$

Обратим внимание, что уравнение Гамильтона—Якоби можно решать как в области $r > r_g$, так и в области $r < r_g$, причем, если не касаться времени t, решения переходят из одной области в другую непрерывно. Разрыв в определении времени t, выражающийся логарифмической расходимостью интеграла в уравнении (11.6), означает, что на самом деле мы имеем дело с двумя различными картами, не переходящими друг в друга непрерывно. Однако частица, движущаяся в метрике Шварцшильда, «не знает» об этом: время t ее совершенно не касается. Правильный способ перехода между областями связан с решением уравнения Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна, но решения этого уравнения просто пересчитываются в решения уравнения (11.1) (см. задачу).

Для начала перечислим возможные виды движения тела в центральном поле:

1. Инфинитное движение. Частица прилетает из бесконечности, приближается к сфере Шварцшильда до некоторого минимального значения радиальной координаты $r = R_{\min} > r_g$, а затем снова улетает на бесконечность.

2. «Инфинитно-сингулярное»[2] движение. Частица прилетает из бесконечности, пересекает горизонт событий $\mathscr{H}^+$ и достигает сингулярности черной дыры $\mathscr{S}^+$ (падение на черную дыру). Либо наоборот, испускается сингулярностью белой дыры $\mathscr{S}^-$, пересекает горизонт событий $\mathscr{H}^-$ и уходит на бесконечность (испускание частицы белой дырой). Эти два движения переходят друг в друга при обращении времени.

3. Финитное (орбитальное) движение. Частица совершает орбитальное движение приближаясь к сфере Шварцшильда и удаляясь от нее, оставаясь все время в некоторых пределах $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$, причем $R_{\min} > r_g$.

4. «Финитно-сингулярное» движение. Частица испускается белой дырой, последовательно пересекает горизонты событий $\mathscr{H}^-$ и $\mathscr{H}^+$ и поглощается черной дырой. При этом ее радиальная координата не превышает некоторого значения $r_{\max} \geq r_g$.

Точки $R_{\max}, R_{\min}, r_{\max}$ являются *точками поворота*. Это значит, что в этих точках (и только в этих точках!) может изменяться направление радиального движения частицы: «к центру» на «от центра» и наоборот. Точки поворота являются решениями уравнения

$$F(E, J, r_*) \equiv E^2 - U^2(J, r_*) = 0. \tag{11.10}$$

Сначала рассмотрим случай $J = 0$. В этом случае уравнение (11.10) линейно по r_*^{-1} и легко решается. Неравенство (11.9) дает

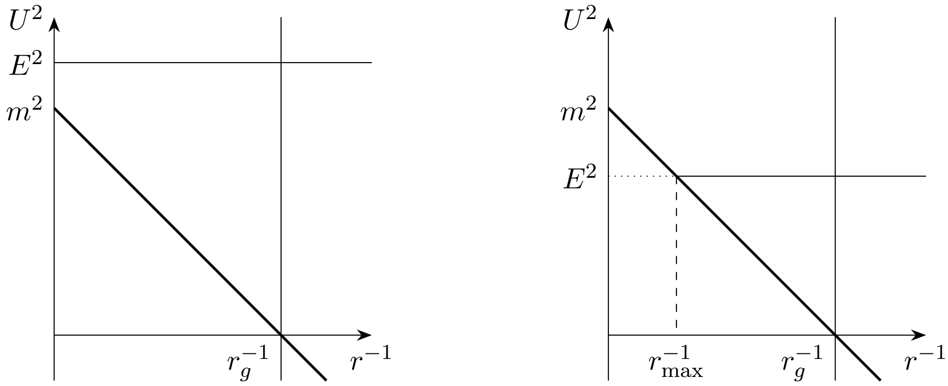
$$\frac{r_g}{r} \geq -\frac{E^2 - m^2}{m^2}. \tag{11.11}$$

Мы видим, что если $E \geq m$ неравенство выполняется для любых допустимых значений r, точек поворота нет и движение частицы «инфинитно-сингулярное». В случае $E < m$ частица не может удалиться на расстояние больше $r_{\max} = r_g m^2/(m^2 - E^2)$. Она испускается из сингулярности белой дыры $\mathscr{S}^-$, затем, достигнув точки $r = r_{\max}$, *разворачивается* (ее радиальная скорость в этот момент равна нулю) и снова падает на «центр», точнее, на сингулярность $\mathscr{S}^+$. Это — «финитно-сингулярное» движение. Графически это изображено на рис. 11.1. На графиках приведена зависимость U^2 от r^{-1} и уровни E^2. Сплошная часть линий уровня E^2 показывает области, где происходит движение частицы, а пунктирная часть — запрещенные области.

Когда $J \neq 0$, ситуация оказывается сложнее. Уравнение (11.10) является уравнением третьей степени. Удобно рассмотреть его как уравнение для переменной $\xi = r^{-1}$:

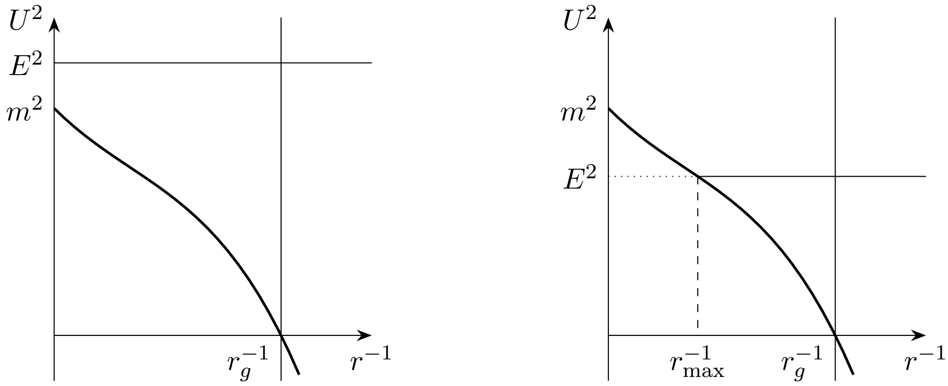
$$r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0. \tag{11.12}$$

[2] В кавычки взяты названия, не являющиеся общепринятыми терминами.



(a) (b)

Рис. 11.1. График $U^2(0, r)$ в зависимости от r^{-1}. (a) $E > m$ и $F > 0$ для всех r; (b) $E < m$ и $F \geq 0$ для $r \leq r_{\max}$.



(a) (b)

Рис. 11.2. График $U^2(J, r)$ в зависимости от r^{-1} в случае $|J| < \sqrt{3} m r_g$. (a) $E > m$ и $F > 0$ для всех r; (b) $E < m$ и $F \geq 0$ для $r \leq r_{\max}$.

Старший коэффициент положителен, так что при достаточно больших значениях ξ функция $F(E, J, \xi^{-1})$ растет, а, соответственно $U^2(J, \xi^{-1})$ убывает. Заметим, что график функции $U^2(J, \xi^{-1})$ (Рис. 11.1–11.4) обязательно проходит через две точки $(0, m^2)$ и $(r_g^{-1}, 0)$. Далее ситуация зависит от количества вещественных положительных корней уравнения (11.12). Нетрудно (хотя и утомительно) найти экстремумы функции $F(E, J, \xi^{-1})$:

$$\begin{aligned} r_\pm^{-1} = \xi_\pm &= \frac{1}{3 r_g} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3 r_g^2 m^2}{J^2}} \right), \\ F(E, J, r_\pm) = E^2 - E_\pm^2, \qquad E_\pm^2 &= \frac{2}{3} m^2 + \frac{2}{27} \frac{J^2}{r_g^2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{3 r_g^2 m^2}{J^2} \right)^{3/2} \right). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Здесь имеется два случая.

1. Если $|J| \leq \sqrt{3} m r_g$, полином $F(E, J, \xi^{-1})$ монотонен и имеет единственный вещественный корень $r_{\max}^{-1}$, который положителен при $E < m$ и отрицателен при $E > m$. Действительно, для корней уравнения (11.12) ξ_i имеем $\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \frac{m^2 - E^2}{r_g J^2}$. Поскольку два корня, например ξ_2, ξ_3 комплексно сопряжены друг другу, их произведение положительно. Значит, знак ξ_1 (и, соответственно, r_1) совпадает со знаком $m^2 - E^2$. Ситуация вполне аналогична ситуации при $J = 0$ за исключением того, что $r_{\max}^{-1}$ теперь является решением уравнения третьей степени (см. рис. 11.2).

2. Если же момент импульса частицы достаточно велик, $|J| > \sqrt{3} m r_g$, имеется два положительных экстремума $r_g^{-1} > \xi_+ > \xi_- > 0$, причем экстремальные значения «потенциальной энергии» удовлетворяют условию $E_+ > E_- > 0$. Следовательно, уравнение (11.12) может иметь от одного до трех

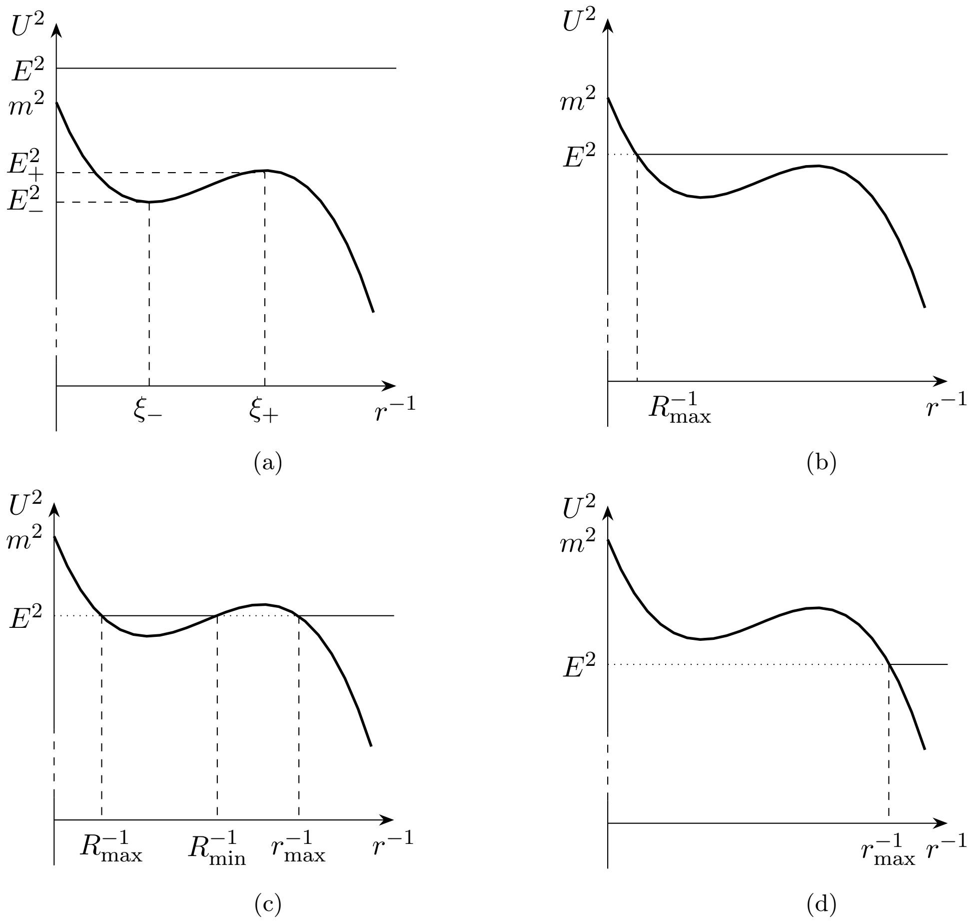


Рис. 11.3. График $U^2(J,r)$ в зависимости от r^{-1} в случае $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$. (a) $E > m$; (b) $E_+ < E < m$; (c) $E_- < E < E_+$; (d) $E < E_-$.

вещественных корней, и из этих корней не более чем один корень может быть отрицательным. Мы видим, что при $E > E_+$ имеется ровно один вещественный корень ξ_1. Этот корень положителен при $E^2 < m^2$. Поэтому поведение системы зависит от того, что больше, m или E_+. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E_+ &< m, \quad \text{если } |J| < 2mr_g; \\ E_+ &> m, \quad \text{если } |J| > 2mr_g. \end{aligned}$$

При $E > E_+, m$ единственный корень отрицателен и частица совершает «инфинитно-сингулярное» движение. При $E < E_-$ единственный корень $\xi_1 > 0$ дает $r_{\max} = \xi_1^{-1}$ и движение является «финитно-сингулярным». В области же $E_- < E < \max(E_+, m)$ случай 2 распадается на два подслучая.

2а. При $\sqrt{3}mr_g < J < 2mr_g$ (см. рис. 11.3) в диапазоне $E_+ < E < m$ система ведет себя как в случае 1: единственный корень ξ_1 положителен и соответствующее значение $R_{\max} = \xi_1^{-1}$ дает максимальное удаление частицы от сферы Шварцшильда. Частица совершает «финитно-сингулярное» движение.

В случае же $E_- < E < E_+$ имеется три положительных корня. Обозначим их $R_{\max} > R_{\min} > r_{\max}$ и две области неотрицательных значений $F(E,J,r)$: $R_{\min} \le r \le R_{\max}$ и $r \le r_{\max}$. Первая область отвечает орбитальному (финитному) движению, вторая — «финитно-сингулярному».

2б. При $J > 2mr_g$ (см. рис. 11.4) в диапазоне $E_+ > E > m$ имеется три корня, но один из них отрицательный, а два других — положительны. Этим двум положительным корням отвечают две точки $R_{\min}, r_{\max}$, такие что $R_{\min} > \xi_-^{-1} > r_{\max} > \xi_+^{-1} > \frac{3}{2}r_g$. В области $r > R_{\min}$ частица совершает инфинитное движение, а в области $r < r_{\max}$ — «финитно-сингулярное». Между этими двумя областями имеется потенциальный барьер. Формально-математически сюда же относится и случай $J = 2mr_g$.

Изучим орбитальное движение тела, которое имеет место в случае 2 при $E_- \le E \le m, E_+$. В это случае тело вращается вокруг источника гравитации, периодически приближаясь к источнику

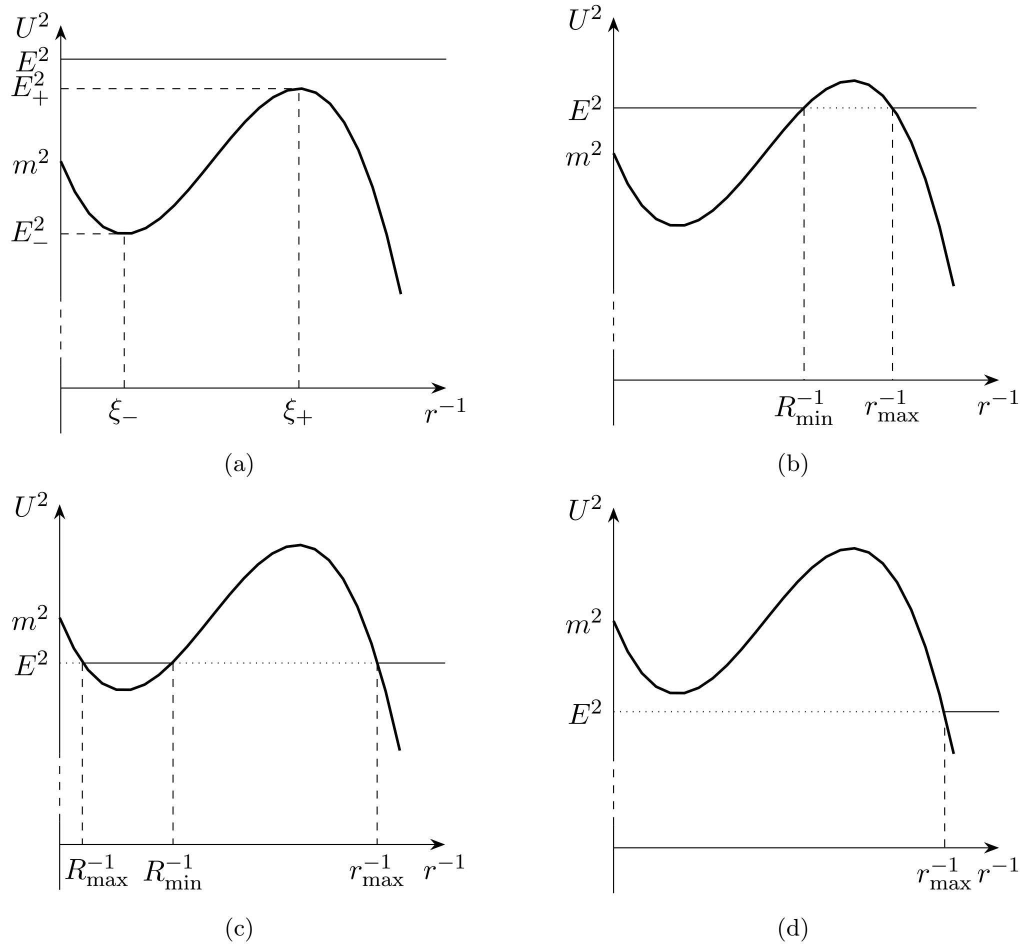


Рис. 11.4. График $U^2(J, r)$ в зависимости от r^{-1} в случае $|J| > 2mr_g$. (a) $E > E_+$; (b) $m < E < E_+$; (c) $E_- < E < m$; (d) $E < E_-$.

и достигая точки *перицентра* $r = R_{\min}$ и затем удаляясь и достигая точки *апоцентра*[3] $r = R_{\max}$. Уравнения (11.6), (11.7) дают нам время $T_{\text{пер}}$ и угол $\Phi_{\text{пер}}$, характеризующие движение тела по орбите:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \tag{11.14}$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \tag{11.15}$$

Величина $T_{\text{пер}}$ дает время, за которое тело, находящееся в начальный момент времени в перицентре достигает апоцентра и вновь приближается, достигая новой точки перицентра. Величина $\Phi_{\text{пер}}$ дает угол, на который следующая точка перицентра отличается от предыдущей. В ньютоновском пределе $\Phi_{\text{пер}} = 2\pi$, то есть следующий перицентр достигается ровно через один оборот вокруг источника гравитации. В дальнейшем нас будет интересовать величина $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$, характеризующая смещение перицентра за один оборот. Важно отметить, что величина $T_{\text{пер}}$ является периодом *радиального* движения тела, а *не* периодом обращения (*сидерическим* периодом), то есть периодом, за который угол меняется на 2π. Сидерический период, строго говоря, не является периодом какого бы то ни было движения. Он зависит от того, с какой начальной точки орбиты мы его отсчитываем. Хорошо определен только *средний* сидерический период, основанный на «многолетних» измерениях:

$$\overline{T_{\text{сид}}} = \frac{2\pi}{\Phi_{\text{пер}}} T_{\text{пер}}. \tag{11.16}$$

В пределе $E \to E_+$ как период $T_{\text{пер}}$, так и угол $\Phi_{\text{пер}}$ стремятся к бесконечности. Дело в том, что частица с $E = E_+$ бесконечно долго приближается снаружи к точке $r_+ = r_{\max} = R_{\min}$ и отскока не

[3]Если центральным телом является Солнце, то говорят о *перигелии* и *афелии* (или *апогелии*) соответственно.

происходит. Точно также, частица с энергией $E = E_+$, испущенная из белой дыры, бесконечно долго приближается к этой точке и никогда не падает на черную дыру.

Задачи

1. Второй закон Кеплера утверждает, что угловая скорость частицы в ньютоновском гравитационном поле (и, на самом деле, в любом статическом центральном потенциальном поле в нерелятивистской механике) обратно пропорциональна квадрату расстояния до центрального тела. Найдите аналог второго закона Кеплера для тела, движущегося в метрике Шварцшильда.

2. Напишите и решите уравнение Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна (10.29). Найдите связь с решением (11.6), (11.7).

3. Выведите (11.8) и покажите, что в случае свободного падения на черную дыру частица достигает горизонта $\mathscr{H}^+$, а затем и сингулярности за конечное собственное время и при ненулевых значениях момента импульса.

4. Найдите все устойчивые круговые орбиты в метрике Шварцшильда, их энергии, моменты импульса и сидерические периоды в зависимости от радиуса орбиты. Найдите наименьший возможный радиус устойчивой орбиты.

5*. Изучите и опишите качественно движение частиц с энергией $E = E_+$ в разных режимах. Найдите асимптотики этих решений, когда частица приближается неустойчивой орбите $r = r_+ = \xi_+^{-1}$. Найдите параметры этих орбит. Найдите наименьший возможный радиус неустойчивой орбиты. Как будет вести себя частица с энергией чуть меньше или чуть больше E_+? Оцените время, которое частица будет проводить в окрестности неустойчивой орбиты и количество оборотов, которое она за это время сделает.

Семинар 11

Падение пыли на черную дыру

Рассмотрим падение тонкого (малой толщины $\sim l$) сферического слоя пылевидной материи малой массы m с полной энергией $\delta E = \varepsilon m$ на черную дыру массы $M \gg \delta E, m$. Ее движение описывается функцией $r = r(t)$. Мы будем все же предполагать слой не слишком тонким, чтобы

$$G\delta E \ll l. \tag{11.17}$$

При этом условии мы можем пренебречь изменением траекторий частиц под действием гравитационного поля самого слоя. Кроме того, мы будем игнорировать возможные неустойчивости, которые могли бы привести к нарушению сферичности слоя.

Снаружи ($r > r(t)$) и внутри ($r < r(t)$) пылевидной оболочки будем искать решение в виде метрики Шварцшильда с гравитационным радиусом r_{g+} снаружи и r_{g-} внутри. У нас нет гарантии, что эти две метрики будут сшиваться на слое в одной и той же калибровке, так что мы будем записывать метрику в слегка более общем виде, полагая, что $k + h = F_\pm(t)$:

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2F_\sigma(t)-2h(t,r)}\,dt^2 - e^{2h(t,r)}\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \tag{11.18}$$

где

$$e^{-2h(t,r)} = 1 - \frac{r_{g\sigma}}{r}, \qquad \sigma = \mathrm{sign}(r - r(t)) \tag{11.19}$$

Ниже мы найдем малые скачки гравитационного радиуса $\delta r_g = r_{g+} - r_{g-}$ и калибровочной функции $\delta F(t) = F_+(t) - F_-(t)$ на слое.

Изучим сначала движение пылевидной сферы и найдем ее тензор энергии-импульса. Будем считать, что сфера настолько легкая, что при вычислении закона ее падения скачками F и r_g можно пренебречь. Движение сферы определяется уравнением Гамильтона—Якоби. Напишем его для собственного времени $\tau(t, r)$ пылинок:

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{11.20}$$

Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t, r, \varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r, \varepsilon), \tag{11.21}$$

где $f'(t) = \mathrm{e}^{F(t)}$. Подставляя в (11.20), находим

$$\tilde{\tau}(r, \varepsilon) = \int dr\, e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}. \tag{11.22}$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам (это отвечает знаку «−» в (11.4)). Без ограничения общности мы будем полагать $t_0 = 0$. Тогда легко находим

$$d\tau = \tau_{,t}\, dt + \tau_{,r}\, dr = \mathrm{e}^F \varepsilon\, dt + \mathrm{e}^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dr. \tag{11.23}$$

Нетрудно подобрать ортогональное направление с единичной нормой:

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h} \varepsilon\, dr. \tag{11.24}$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l), \tag{11.25}$$

где l — отклонение от положения сферы в данный момент времени $r(t)$ вдоль направления, задаваемого dl. Полагая $dt = 0$, выражаем dr через dl:

$$dr = \mathrm{e}^{-2h} \varepsilon^{-1}\, dl,$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации. Получаем

$$\rho(t, r) = \frac{m}{4\pi r^2 \varepsilon \mathrm{e}^{2h}} \delta(r - r(t)). \tag{11.26}$$

Тензор энергии-импульса равен $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$, где $u_\mu = \tau_{,\mu}$. Отсюда получаем уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right) \mathrm{e}^{-2h} = \frac{2G\,\delta E}{r^2} \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right) \mathrm{e}^{-2h} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2} \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = \frac{2G\,\delta E}{r^2} \mathrm{e}^{2h-F} \sqrt{1 - \varepsilon^{-2}\mathrm{e}^{-2h}}\, \delta(r - r(t)), \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2 \mathrm{e}^{2h} r^2}\, \delta(r - r(t)),
\end{aligned} \tag{11.27}$$

где мы использовали равенство $\delta E = \varepsilon m$. Уравнения для $R^t_t - R^r_r$ и R^ϑ_ϑ немедленно дают

$$\begin{aligned}
k' + h' &= \frac{2G\,\delta E}{r} \left(e^{2h} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t)), \\
k' - h' &= -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2 r}\, \delta(r - r(t)) + \frac{\mathrm{e}^{2h} - 1}{r}.
\end{aligned} \tag{11.28}$$

Отсюда для скачков получаем

$$\delta k = G\delta E \left(\frac{1}{r - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r}\right), \qquad \delta h = \frac{G\,\delta E}{r - r_g}. \tag{11.29}$$

Так как

$$k = F(t) + \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \qquad h = -\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{r_g}{r}\right),$$

и, следовательно,

$$\delta k = \delta F - \frac{\delta r_g}{2(r - r_g)}, \qquad \delta h = \frac{\delta r_g}{2(r - r_g)},$$

получаем

$$\delta r_g = 2G\,\delta E, \qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = G\,\delta E \left(\frac{2}{r(t) - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r(t)} \right). \tag{11.30}$$

Иными словами, масса черной дыры увеличивается ровно на энергию падающей пылевидной сферы, а скорость течения времени испытывает скачок δk на поверхности разрыва. В нерелятивистском пределе $r_g \to 0$, $\varepsilon \to 1$ этот скачок стремиться к нулю. Это соответствует тому хорошо известному факту, что потенциал поля не испытывает скачка на материальной поверхности конечной поверхностной плотности.

Заметим, что в силу условия (11.17) в уравнении для $R^t_t + R^r_r$ мы можем пренебречь членами, квадратичными по дельта-функции, входящими $\dot{k}\dot{h}, \dot{h}^2, k'^2, k'h'$.

Если последовательно падает, не пересекаясь, несколько пылевых сфер, то они ничего друг о друге «не знают», поэтому решение можно обобщить на пылевой шаровой слой или шар, сжимающийся таким образом, чтобы частицы двигались по непересекающимся геодезическим.