

## Лекция 12

### Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

На этой лекции мы разберем два примера, соответствующих двум исторически первым экспериментальным проверкам ОТО. Это вековое смещение перигелия орбиты частицы и отклонение света в поле гравитирующих тел.

Вековое смещение перигелия Меркурия было открыто еще в 1859 году французским астрономом Урбеном Леверье, который обработал результаты 40-летних наблюдений Парижской обсерватории, учел влияние других планет, и обнаружил, что смещение перигелия отличается от предсказываемого ньютоновской теорией примерно на  $38''$  за столетие. Позднее, в 1895 году американский астроном Саймон Ньюком уточнил этот результат ( $43''$  за столетие) и нашел аномальное смещение перигелия также у Марса. Предпринимались многочисленные попытки объяснить эти аномалии. Было высказано предположение, что внутри орбиты Меркурия имеются орбиты какого-то еще тела («Вулкан») или нескольких тел («Вулканоиды»). Однако поиски таких тел не принесли результата. К концу XIX века возможность существования таких тел достаточной массы, чтобы сказаться на орбите Меркурия, была исключена. Так же была исключена возможность существования достаточно массивных газовых или пылевых облаков. Было предложено несколько модификаций ньютоновской гравитации, как с потенциальным, так и с непотенциальным (зависящим от скорости) взаимодействием. Однако такие теории при значениях параметров, которые могли бы объяснить аномалию, противоречили известным фактам о движении планет и Луны. В результате аномалия не нашла удовлетворительного объяснения до создания общей теории относительности. Правильное значение смещения было вычислено Эйнштейном на основе ОТО в конце 1915 года, причем ответ не содержал никаких подгоночных параметров.

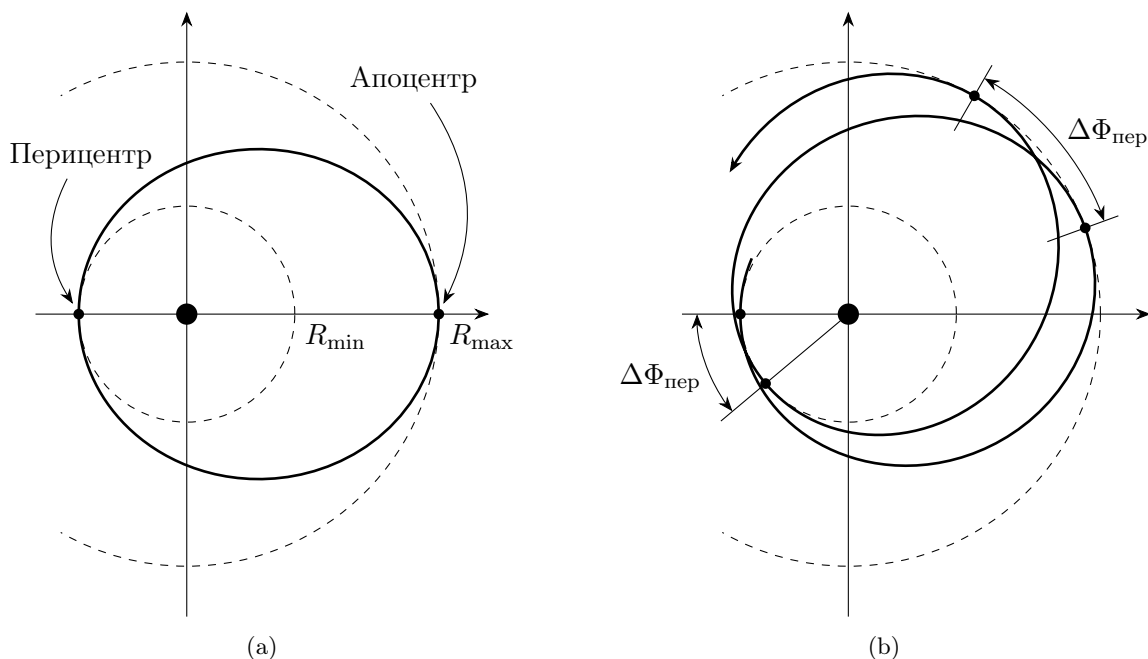


Рис. 12.1. Орбитальное движение частицы в гравитационном поле: (а) в ньютоновском поле; (б) в общей теории относительности.

Отклонение луча света гравитационным полем (*гравитационное линзирование*) было предсказано Эйнштейном в 1916 году и открыто двумя британскими экспедициями под руководством Артура Эддингтона в 1919 году.

Начнем с изучения орбиты нерелятивистской частицы в слабом гравитационном поле и вычисления смещения перигелия. Прежде всего, надо правильно разложить подкоренное выражение  $F(E, J, r)$  в действии (11.4). Для этого оценим «нерелятивистскую» энергию  $\mathcal{E} = E - m < 0$ , момент импульса  $J$  и потенциальную энергию  $-GmM/r = -mr_g/2r$  для орбитального движения через характерную

скорость  $v \ll 1$  частицы:

$$\frac{|\mathcal{E}|}{m} \sim \frac{J^2}{m^2 r^2} \sim v^2 \sim \frac{r_g}{r}.$$

Разложим выражение  $F(m + \mathcal{E}, J, r)$  вплоть до членов порядка  $v^4 \sim \mathcal{E}^2/m^2$ :

$$F(E, J, r) = \left( 2m\mathcal{E} + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2} \right) + \left( \mathcal{E}^2 + \frac{J^2 r_g}{r^3} \right) + m^2 O\left(\frac{\mathcal{E}^3}{m^3}\right). \quad (12.1)$$

Первая скобка

$$F^{(0)}(m + \mathcal{E}, J, r) = 2m\mathcal{E} + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2} \quad (12.2)$$

имеет порядок  $mv^2$  и отвечает, очевидно, действию для закона Ньютона:

$$S_r^{(0)}(\mathcal{E}, J, r) = \sqrt{2m} \int dr \sqrt{\mathcal{E} - \frac{J^2}{2mr^2} + G \frac{Mm}{r}}. \quad (12.3)$$

Вторая скобка имеет порядок  $m^2 v^4 \sim m^2 r_g^2 / r^2$  и дает первую поправку. Поделив на  $m^2$  получаем относительный порядок малости  $r_g^2 / r^2$ . Отсюда следует, что задача выходит за рамки линейного приближения для гравитационного поля, которое дает правильные ответы только в порядке малости  $r_g / r$ .

Важно, что не все поправки вносят вклад в смещение перицентра. Чтобы это увидеть, давайте поймем, как изменяются пределы интегрирования под действием поправок. Ньютоновские пределы интегрирования являются решениями квадратного уравнения

$$\mathcal{E} + \frac{mr_g}{2r} - \frac{J^2}{2mr^2} = 0.$$

Слагаемое  $\mathcal{E}^2$  во второй скобке в (12.1) можно поглотить, объединив со слагаемым  $2m\mathcal{E}$ . Это слегка изменит период обращения, потому что энергия отдельно входит в (11.6), но не скажется на угле смещения перицентра за период, который определяется уравнением (11.7), в которое энергия входит только через  $F$ . Оказывается, можно с интересующей нас точностью поглотить и член  $J^2 r_g / r^3$ . Для этого сделаем замену  $r = \tilde{r} - r_g / 2$ . Тогда имеем

$$F(E, J, r) = F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r}) + m^2 O(|\mathcal{E}|^3 / m^3), \quad (12.4)$$

где

$$\tilde{r} = r + \frac{r_g}{2}, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \left( 1 + \frac{\mathcal{E}}{2m} \right), \quad \tilde{J}^2 = J^2 - \frac{m^2 r_g^2}{2}. \quad (12.5)$$

Легко видеть, что поправка к моменту мала:

$$\frac{m^2 r_g^2}{J^2} \sim \frac{m^2 r_g^2}{m^2 r^2 v^2} \sim \frac{r_g}{r}.$$

После подстановки (12.5) предельные значения  $\tilde{R}_{\min}, \tilde{R}_{\max}$  для переменной  $\tilde{r}$  совпадают с  $R_{\min}, R_{\max}$  в ньютоновском пределе, вычисленных для энергии  $\mathcal{E}$  и момента  $\tilde{J}$ . При этом согласно формуле (11.15) и известному факту, что смещение перицентра в ньютоновской теории равно нулю, имеем

$$2\tilde{J} \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}} = 2\pi.$$

При этом полный набег угла, который получает частица за полный цикл изменения  $r$  от минимального до максимального значения и обратно, составляет

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}}.$$

Поэтому

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2 \int_{\tilde{R}_{\min}}^{\tilde{R}_{\max}} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{F^{(0)}(m + \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{J}, \tilde{r})}} \left( \frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \right).$$

Легко видеть, что

$$\frac{J}{r^2} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2(1 - r_g/2\tilde{r})^2} \left( 1 + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}^2} \right) - \frac{\tilde{J}}{\tilde{r}^2} \simeq \frac{\tilde{J} r_g}{\tilde{r}^3} + \frac{m^2 r_g^2}{4\tilde{J}\tilde{r}^2}.$$

Это величина порядка малости  $r_g/r \sim v^2$  по сравнению с  $J/r^2$ , так что в правой части этого равенства, под корнем и в пределах интегрирования мы можем убрать тильды. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\text{пер}} &= 2Jr_g \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{-2m|\mathcal{E}| + \frac{m^2 r_g}{r} - \frac{J^2}{r^2}}} \left( \frac{1}{r} + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right) \\ &= 2Jr_g \int_{R_{\max}^{-1}}^{R_{\min}^{-1}} \frac{d\xi}{\sqrt{-2m|\mathcal{E}| + m^2 r_g \xi - J^2 \xi^2}} \left( \xi + \frac{m^2 r_g}{4J^2} \right). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Последний интеграл уже легко взять. Заменой  $\xi \rightarrow \xi + \frac{m^2 r_g}{2J^2}$  получаем

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = 2r_g \int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} \left( \xi + \frac{3m^2 r_g}{4J^2} \right), \quad A = \frac{\sqrt{m^4 r_g^2 - 8m|\mathcal{E}|}}{2|J|}.$$

Первый член в скобках дает нулевой вклад, а для второго имеем

$$\int_{-A}^A \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pi.$$

Мы получаем формулу Эйнштейна для смещения перицентра:

$$\Delta\Phi_{\text{пер}} = \frac{3\pi m^2 r_g^2}{2J^2} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{J^2}. \quad (12.7)$$

Разумеется равенство (12.4) также означает, что эксцентриситет орбиты и скорость частиц в разных точках в зависимости от, например, расстояния от центра до перицентра и сидерического периода несколько отличаются от кеплеровских значений, но эти отклонения очень малы, и их трудно обнаружить в Солнечной системе. Смещение же перигелия сравнительно легко установить по многолетним наблюдениям.

Теперь перейдем к задаче об отклонении луча света гравитационным полем. Луч света в геометрической оптике ведет себя идентично частице нулевой массы. Для такой частицы случай 2b — единственный реализующийся случай при любом ненулевом моменте. При этом  $E_- = 0$ , а максимум находится в точке  $r = \frac{3}{2}r_g$ , причем высота барьера  $E_+ = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{J}{r_g}$  пропорциональна моменту импульса (см. рис. 12.2).

На большом расстоянии от гравитирующих тел частица движется по прямой, так что момент импульса  $J$  выражается через *прицельный параметр*  $\rho$ , то есть расстояние от луча до параллельной ему оси, проходящей через начало координат:

$$J = |\mathbf{p}|\rho = E\rho. \quad (12.8)$$

Тогда уравнение (11.7) можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (12.9)$$

Полный угол, заметаемый лучом равен

$$\Phi = 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(\rho, r)}}, \quad (12.10)$$

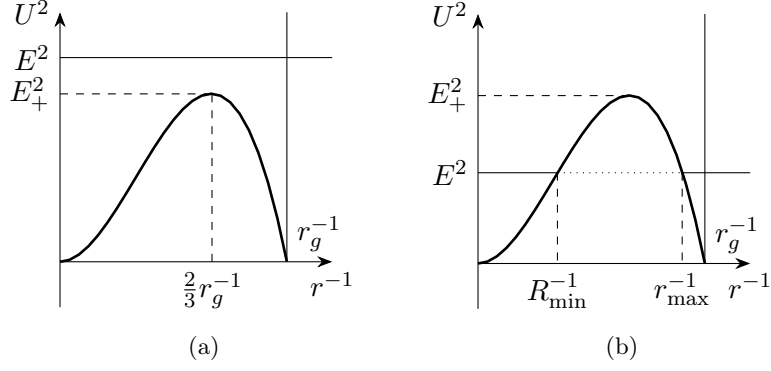


Рис. 12.2. Случай нулевой массы: (а)  $E > E_+$ ; (б)  $E < E_+$ .

где  $R_{\min}$  — решение уравнения

$$f(\rho, R_{\min}) = 0. \quad (12.11)$$

В случае плоского пространства ( $r_g = 0$ ) этот угол равен

$$\Phi_0 = 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \pi.$$

Нас будет интересовать отклонение луча от прямой  $\theta = \Phi - \pi$ .

Максимум потенциальной энергии, как мы уже говорили, отвечает параметрам

$$\rho_+ = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g, \quad r_+ = \frac{3}{2} r_g. \quad (12.12)$$

При  $\rho < \rho_+$  свет падает на сингулярность (Рис. 12.2а), а при  $\rho > \rho_+$  (Рис. 12.2б) свет рассеивается и снова уходит на бесконечность. Отсюда мы легко находим сечение поглощения света черной дырой:

$$\sigma_{\text{погл}} = \pi \rho_+^2 = \frac{27\pi}{4} r_g^2. \quad (12.13)$$

При  $\rho = \rho_+$  имеем  $R_{\min} = r_+$ , и свет приходящий из бесконечности асимптотически приближается к фотонной сфере  $r = r_+$ , «накручиваясь» на нее. Если прицельный параметр немного больше:  $\rho - \rho_+ \ll \rho_+$ , свет приближается к фотонной сфере, делает некоторое количество оборотов, а затем снова уходит на бесконечность. Оценить число оборотов оказывается довольно несложно. Сначала разложим выражение под корнем по переменной  $\xi = r^{-1}$  вблизи точки  $\xi_+ = r_+^{-1}$ :

$$f(\rho, \xi^{-1}) = \rho^{-2} - \rho_+^{-2} + (\xi_+ - \xi)^2 - r_g(\xi_+ - \xi)^3.$$

При вычислении  $R_{\min}$  последним слагаемым можно пренебречь. Из (12.11) получаем

$$\xi_* = R_{\min}^{-1} \simeq \xi_+ - \rho_+^{-1} \delta, \quad \delta = \sqrt{1 - \frac{\rho_+^2}{\rho^2}}. \quad (12.14)$$

Теперь положим  $\eta = \xi_* - \xi$  и разложим  $f(\rho, \xi^{-1})$  по  $\eta$  и  $\delta$ :

$$f(\rho, \xi^{-1}) = 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3 - 3r_g \rho_+^{-1} \delta \eta^2 - 3r_g \rho_+^{-2} \delta^2 \eta + O(\delta^3).$$

Если положить  $\delta = 0$ , интеграл (12.10) будет логарифмически расходиться при  $\eta \rightarrow 0$ , что соответствует бесконечному накручиванию траектории на фотонную сферу. Интеграл могут сделать конечным первое и последнее слагаемое в этом выражении. Но последнее более высокого порядка малости по  $\delta$ , поэтому его можно отбросить. Можно отбросить и предпоследнее слагаемое, потому что оно вообще не регуляризует интеграл. Поэтому положим

$$f(\rho, \xi^{-1}) \simeq 2\rho_+^{-1} \delta \eta + \eta^2 - r_g \eta^3. \quad (12.15)$$

Так как интеграл расходится логарифмически, разобьем его на две части. Возьмем такое  $\varepsilon$ , что  $r_g^{-1}\delta \ll \varepsilon \ll r_g^{-1}$ . Тогда

$$\Phi \simeq 2 \int_0^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2 - r_g\eta^3}} \simeq 2 \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{2\rho_+^{-1}\delta\eta + \eta^2}} + 2 \int_\varepsilon^{\xi_+} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r_g\eta^3}}.$$

В первом интеграле мы пренебрегли последним членом, так как  $r_g\eta^3 \ll \eta^2$  при  $\eta \lesssim \varepsilon$  и  $r_g\eta^3 \ll \rho_+^{-1}\delta\eta$  при  $\eta \lesssim r_g^{-1}\delta$ , а во втором — первым членом, так как  $\rho_+^{-1}\delta\eta \ll \eta^2$  при  $\eta \gtrsim \varepsilon$ . В качестве верхнего предела интегрирования мы взяли  $\xi_+$  вместо  $\xi_*$  так как эта замена внесет только малую поправку порядка  $\delta$ . Получившиеся интегралы считаются явно, и вклады, содержащие  $\varepsilon$ , сокращаются. В результате имеем

$$\Phi \simeq \log \frac{C\rho_+}{\rho - \rho_+}, \quad C = 216 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \simeq 15.5. \quad (12.16)$$

Мы видим, что число оборотов  $\Phi/2\pi$  логарифмически растет с уменьшением  $\rho - \rho_+$ , и это значит, что свет будет рассеиваться во все стороны. Нетрудно проверить, что вклад в сечение рассеяния света в интервал углов  $[\theta, \theta + d\theta]$  от таких орбит пропорционален  $\text{ch}(\pi - \theta) d\theta$ , то есть свет будет рассеиваться на большие углы, хотя рассеяние вперед будет преобладать. Это должно приводить к тому, что на изображении черной дыры, освещенной окружающими объектами, должно быть видно светящееся кольцо с внутренним радиусом  $\rho_+$ . Это кольцо создается как удаленными источниками излучения, так и излучением аккрецируемого вещества. В настоящее время имеется два наблюдения такого кольца для сверхмассивных черных дыр в центре галактики М87 (это одна из самых массивных галактик Местного скопления) и в центре нашей Галактики. Наблюдения сделаны в 2017 году с помощью коллаборации радиообсерваторий по всему миру (Телескоп горизонта событий), а результаты обработаны и опубликованы в 2019 и 2022 году соответственно.

В то же время основное рассеяние света как для крупных тел, так и для черных дыр происходит от области слабого рассеяния  $\rho \gg r_g$ . Как и в случае орбитального движения, чтобы вычислить углы рассеяния в этой области, нужно найти поправку к  $R_{\min}$ . В данном случае нужно искать поправку по сравнению с плоским пространством-временем. Знакомой нам заменой радиальной координаты  $r = \tilde{r} - r_g/2$  исключаем из  $f(\rho, r)$  вклад  $\propto \tilde{r}^{-3}$  и получаем

$$\theta = 2 \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{r}}{r^2 \sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} - \pi = 2 \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{r} (r^{-2} - \tilde{r}^{-2})}{\sqrt{\rho^{-2} - \tilde{r}^{-2}}} = 2r_g \int_\rho^\infty \frac{dr}{r^3 \sqrt{\rho^{-2} - r^{-2}}} = \frac{2r_g}{\rho} \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (12.17)$$

Интеграл по  $\xi$  легко берется и равен единице. Отсюда получаем

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}. \quad (12.18)$$

В отличие от задачи о прецессии перигея, вывод этой формулы требует только линейного приближения в уравнениях Эйнштейна (см. задачи).

Полезно отметить, что уравнение Гамильтона—Якоби для безмассовой частицы

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0 \quad (12.19)$$

формально совпадает с уравнением эйконала в геометрической оптике

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0, \quad (12.20)$$

где эйконал  $\psi(x)$  есть фаза электромагнитной волны в луче. Уравнение эйконала является коротковолновым пределом точного волнового уравнения. Частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  выражаются через эйконал как

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad k_\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}. \quad (12.21)$$

Таким образом, энергия частицы и частота волны, а также импульс частицы и волновой вектор пропорциональны. Физическая причина этой пропорциональности становится ясна в квантовой механике.

Рассмотрим теперь задачу о *рассеянии* света или потока безмассовых частиц сферически-симметричным гравитационным полем. Для этого введем систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль потока падающих частиц, а оси  $x, y$  перпендикулярны ему. В этой системе координат угол отклонения  $\theta$  частиц, которые прошли через поле и уходят на бесконечность, представляет собой полярный угол в паре  $(\theta, \phi)$ . В задаче рассеяния нас будет интересовать *сечение рассеяния*, то есть величина площади  $d\sigma$  в плоскости, перпендикулярной потоку падающих частиц, и расположенной далеко от гравитирующего тела, с которой частицы будут отклоняться на угол в интервале  $[\theta, \theta + d\theta]$ . Очевидно,

$$d\theta = \frac{2r_g}{\rho^2} d\rho = \frac{r_g}{\rho^3} d(\rho^2) = \frac{r_g}{\pi\rho^3} d\sigma.$$

Выразим теперь  $d\sigma$  через величину соответствующего телесного угла  $do = 2\pi \sin\theta d\theta \simeq 2\pi\theta d\theta$  (мы рассматриваем только малые углы отклонения). Также из (12.18) выражаем  $\rho$  через  $\theta$ . Окончательно, получаем для сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{4r_g^2}{\theta^4} do, \quad \theta \ll 1. \tag{12.22}$$

Эта величина характеризует вероятность для безмассовой частицы, падающей на источник гравитационного поля из бесконечности, отклониться в заданный телесный угол  $do = \sin\theta d\theta d\phi$  вблизи направления  $(\theta, \phi)$ . В случае безмассовых частиц такая вероятность не зависит от энергии падающих частиц (или частоты падающего света), вследствие того, что такая зависимость выпадает из (12.9). В случае массивных частиц такая зависимость, вообще говоря, есть. Заметим также, что полное сечение рассеяния на углы меньше какого-то угла  $\theta_0$  равно бесконечности, что согласуется с тем что угол рассеяния уменьшается с ростом прицельного параметра, но никогда не обращается в точности в нуль. Таким образом, площадь, с которой собирается свет, рассеиваемый на малые углы, равна бесконечности.

### Задачи

1. Выведите отклонение луча света гравитационным полем, исходя из решения линеаризованных уравнений Эйнштейна:  $\psi_{00} = -2r_g/r$ ,  $\psi_{0i} = 0$ ,  $\psi_{ik} = 0$ .
2. Предположим теперь, что источник гравитационного поля обладает собственным моментом импульса  $L$ . Используя решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, найдите отклонение луча света, лежащего в экваториальной плоскости.
3. Завершите вывод формулы (12.16) для набега угла при малых  $\rho - \rho_+$ . Оцените с *логарифмической точностью* (то есть без коэффициентов под знаком логарифма) время задержки света вблизи черной дыры (по сравнению со светом, проходящим вдали от черной дыры) в системе координат Шварцшильда.
4. Найдите сечение падения нерелятивистской ( $\mathcal{E} = E - m \ll m$ ) частицы на черную дыру как функцию  $\mathcal{E}$ .
- 5\*. Наблюдатель смотрит на сферический источник света радиуса  $r$ , находящийся на расстоянии  $L$  от него. Между наблюдателем и телом на расстоянии  $\rho$  от соединяющей их прямой находится темное тело массы  $m$  (см. рисунок ниже). Предполагается, что  $r_g, r \ll \rho \ll l, L - l$ , где  $r_g = 2Gm$ . Найдите положение и форму изображений источника, которые видит на небе наблюдатель. Рассмотрите два предельных случая:  $r_g l, r_g(L - l) \ll \rho^2$  и  $r_g l, r_g(L - l) \gg \rho^2$ . Все вычисления выполняйте в первом порядке по малым параметрам.

