

## Пояснение А

### Ковариантная производная вдоль базисного вектора

Есть одна тонкость в понимании ковариантной производной  $\nabla_\mu a \equiv \nabla_{\partial_\mu} a$  от векторного поля  $a$ . Важно подчеркнуть, что это снова *вектор*, а вовсе не тензор второго ранга как кажется:  $\nabla_\mu a \in C(TM)$ . Тензор получается, когда мы рассматриваем объект  $\nabla a = dx^\mu \nabla_\mu a \in C(T_1^1 M)$ . Эту разницу важно понимать, когда мы вычисляем вторую ковариантную производную. Именно,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu a = \nabla_\mu \nabla_\nu (a^\lambda \partial_\lambda) = \nabla_\mu (\partial_\nu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda a^\kappa) \partial_\lambda = a^\lambda{}_{;\nu\mu} \partial_\lambda, \quad (\text{A.1})$$

где

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} = \partial_\nu (\partial_\mu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda a^\kappa) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda (\partial_\nu a^\rho + \Gamma_{\kappa\nu}^\rho a^\kappa). \quad (\text{A.2})$$

Неудобство такого обозначения состоит в том, что числа  $a^\lambda{}_{;\nu\mu}$  не преобразуются как компоненты тензора.

В то же время для второго объекта мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla \nabla a &= dx^\mu \otimes \nabla_\mu (dx^\nu \otimes \nabla_\nu a) = dx^\mu \otimes (\nabla_\mu dx^\nu) \otimes \nabla_\nu a + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a \\ &= dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a - \Gamma_{\nu\mu}^\rho dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\rho a = a^\lambda{}_{;\nu\mu} dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \partial_\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} = a^\lambda{}_{;\nu\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho (\partial_\rho a^\lambda + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda a^\sigma). \quad (\text{A.4})$$

Этот набор чисел уже преобразуется как компоненты тензора третьего ранга, поскольку они определены через объект  $\nabla \nabla a \in C(T_2^1 M)$ .

Замечательное свойство состоит в том, что антисимметризация по индексам  $\mu$  и  $\nu$  для двух значков дает один и тот же результат для связности без кручения:

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} - a^\lambda{}_{;\mu\nu} = a^\lambda{}_{;\nu\mu} - a^\lambda{}_{;\mu\nu} = R^\lambda{}_{\kappa\mu\nu} a^\kappa. \quad (\text{A.5})$$

Это связано с тем, что второе слагаемое в (A.4) симметрично по индексам  $\mu$  и  $\nu$ .

Разумеется, эти рассуждения легко обобщаются на произвольное тензорное поле  $a \in C(T_n^m M)$ .