

Лекция 5

Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

В этой лекции мы обсудим такой фундаментальный объект как *тензор энергии-импульса*. Дело в том, что общая теория относительности является теорией поля, и взаимодействие гравитации с веществом естественнее всего описывать в терминах теории поля. Мы начнем с теории поля, но потом увидим, что соответствующие объекты достаточно хорошо определены и для более привычных вам точечных частиц.

Начнем со специальной теории относительности. Пусть $\phi^a(x)$ ($a = 1, \dots, N$) — набор вещественных полей. Теория поля описывается обычно действием вида

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi). \quad (5.1)$$

Функция $\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi)$ называется *плотностью лагранжиана*. Довольно широкий класс систем представляют системы с плотностью лагранжиана вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\bullet \phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} G_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b - U(\phi), \quad (5.2)$$

где $G_{ij}(\phi)$ — симметричная матрица.

Уравнение движения записывается через плотность лагранжиана в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} = 0. \quad (5.3)$$

Это совершенно аналогично лагранжевым уравнениям движения для частицы в нерелятивистской классической механике.

Чтобы лучше понять смысл этих уравнений, рассмотрим простой пример. Пусть $N = 1$, а действие имеет вид

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \omega_0^2 \phi^2). \quad (5.4)$$

Соответствующее уравнение движения

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (5.5)$$

называется *уравнением Клейна—Гордона*. Это — простейшее волновое уравнение в физике. Легко построить его решения в виде плоских волн. Подставляя

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \text{Re} e^{-ikx+i\alpha},$$

легко находим¹

$$k^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow k^0 = \pm \omega_{\mathbf{k}} \equiv \pm \sqrt{\omega_0^2 + \mathbf{k}^2}. \quad (5.6)$$

В силу инвариантности решения относительно замены $k \rightarrow -k$, $\alpha \rightarrow -\alpha$ можно выбрать знак «+». В силу линейности уравнения (5.5) любая линейная комбинация этих решений тоже является решением. Более того, построенная система решений полна: любое ограниченное решение уравнения Клейна—Гордона раскладывается по плоским волнам. Более того, она, очевидно, избыточна. Можно ограничиться двумя различными по модулю π значениями α , например $\alpha = 0, \pi/2$.

Теперь вернемся к лагранжиану общего вида. Изучим преобразование действия при сдвигах $x = x' + \xi$. В силу трансляционной инвариантности действие в некоторой конечной области U не должно меняться:

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi_{,\lambda} \right) - \int_U d^d x \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (5.7)$$

¹Обратите внимание на сходство этого закона дисперсии с законом $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ для частицы. На самом деле в квантовой теории поля уравнение Клейна—Гордона действительно описывает частицу массы $m = \hbar\omega_0$.

Последнее слагаемое связано с изменением области интегрирования при сдвиге. Операция δ_ξ , примененная к полям — это уже знакомая нам производная Ли. В аффинном пространстве в случае постоянного поля ξ эта производная тривиальна:

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \quad \delta_\xi \phi_{,\lambda} = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}.$$

Перегруппируя слагаемые, получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \xi^\mu \int_U d^d x \partial_\lambda T_\mu{}^\lambda, \quad (5.8)$$

где

$$T_\mu{}^\nu = \phi^a{}_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a{}_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} + \partial_\lambda \psi_\mu{}^{\nu\lambda}, \quad \psi_\mu{}^{\nu\lambda} = -\psi_\mu{}^{\lambda\nu}, \quad (5.9)$$

называется *каноническим тензором энергии-импульса*. Добавка $\psi_\mu{}^{\nu\lambda}$ обычно выбирается таким образом, чтобы тензор $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} T_\lambda{}^\nu$ был симметричен:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (5.10)$$

Канонический тензор энергии-импульса является сохраняющимся током для 4-импульса P^μ системы. Действительно, на решениях уравнения движения (5.3) первое слагаемое в (5.8) исчезает. В силу произвольности вектора ξ и области U , интеграл обращается в нуль при условии

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.11)$$

Компоненты *4-импульса*

$$P^\mu = \int d^{d-1} x T^{\mu 0}. \quad (5.12)$$

являются сохраняющимися зарядами,

$$\dot{P}^\mu = 0. \quad (5.13)$$

если интеграл берется по всему пространству (или, точнее, по области пространства, где происходит динамика поля ϕ). При этом величина $\mathcal{H}(\phi, \pi) = P_0$ как функция конфигурации полей $\phi^a(\mathbf{r})$ и обобщенных импульсов $\pi_a(\mathbf{r}) = \frac{\delta}{\delta \phi^a(\mathbf{r})} \int d^{d-1} x \mathcal{L}$ в данный момент времени t является гамильтонианом системы.

Другая сохраняющаяся величина, связанная с тензором энергии-импульса — это момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1} x (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}), \quad (5.14)$$

$$j^{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Его сохранение следует из возможности сделать тензор энергии-импульса симметричным (5.10).

Рассмотрим по отдельности различные компоненты тензора энергии-импульса:

$$\rho = T^{00}, \quad S^i = T^{0i} = T^{i0}, \quad \sigma^{ij} = -T^{ij} \quad (i, j = 1, \dots, d-1). \quad (5.16)$$

Величина W имеет смысл плотности энергии. Компоненты S^i образуют пространственный вектор \mathbf{S} с двойным смыслом: плотности импульса и плотности потока энергии. Вообще говоря, эти две плотности могли бы не совпадать. Их совпадение является следствием сохранения момента импульса. Величины σ^{ik} образуют пространственный тензор, который называется *тензором напряжений* и имеет смысл плотности потока импульса.

Хорошим физическим примером поля является электромагнитное поле. Аналогом полей ϕ для него являются компоненты 4-потенциала A_μ . Действие электромагнитного поля (в системе Хевисайда) имеет вид

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4 x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \int F \wedge *F, \quad (5.17)$$

где $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$. Соответствующий тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu}{}^{\nu} = -F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} + \frac{\delta^{\nu}_{\mu}}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}. \quad (5.18)$$

В компонентах имеем

$$\rho = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{2}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \sigma^{ij} = E_i E_j + H_i H_j - \rho \delta_{ij}. \quad (5.19)$$

Величина \mathbf{S} в случае электромагнитного поля называется *вектором Пойнтинга*, а ρ и σ^{ij} — плотностью электромагнитной энергии, и электромагнитным тензором напряжений.

Теперь перейдем к теории поля на многообразии. В этом случае действие (5.1) зависит также от метрики:

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi|g, \partial_{\bullet}g, \dots). \quad (5.20)$$

Пока что мы будем рассматривать метрику не как поле, а как функциональный параметр. Чтобы подчеркнуть это, мы отделили ее от полей вертикальной чертой. Очевидно, что такое действие уже не является трансляционно-инвариантным. Тем не менее, можно ввести тензор, который будет переходить в канонический тензор энергии-импульса (5.9) в пределе $g = \eta$.

Нас будут интересовать *общековариантные* функционалы действия, то есть такие, которые не меняются при замене координат. Лагранжианы для таких функционалов действия (их мы тоже будем называть общековариантными) несложно построить. Например, все лагранжианы вида

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{ab}(\phi)\partial_{\mu}\phi^a\partial_{\nu}\phi^b - U(\phi) - RV(\phi) \quad (5.21)$$

являются общековариантными. Большой класс общековариантных лагранжианов можно построить из лоренц-инвариантных лагранжианов заменой

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}. \quad (5.22)$$

Получаемые таким способом лагранжианы называются лагранжианами с *минимальной* связью материи с гравитацией. Иными словами, лагранжиан с минимальной связью имеет вид

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_{\bullet}\phi|g, \partial_{\bullet}g, \dots) = \mathcal{L}(\phi, \nabla_{\bullet}\phi|g, 0, \dots, 0). \quad (5.23)$$

Например, лагранжиан (5.21) будет лагранжианом с минимальной связью, если $V(\phi) = 0$. В дальнейшем мы будем ограничиваться случаями минимальной связи.

Лагранжиан электромагнитного поля почти не меняется:

$$\mathcal{L}_{EM}(A, dA) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}.$$

Это связано с тем, что тензор напряженностей электромагнитного поля $F = dA$ получается операцией внешней производной d , которая не зависит от связностей. Отсюда следует, что лагранжиан электромагнитного поля тоже является лагранжианом с минимальной связью.

Для простоты рассмотрим лагранжианы для полей ϕ^a с какой-то тензорной структурой, такие что лагранжиан зависит только от компонент $g_{\mu\nu}$ и их первых производных. Это верно, например, для лагранжианов (5.21) с $V = 0$. Мы будем также пользоваться кратким обозначением $a_{,\mu} = \partial_{\mu}a$. Вариация *общековариантного* действия при преобразовании δ_{ξ} должна обратиться в нуль:

$$\begin{aligned} 0 = \delta_{\xi}S &= \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} \delta_{\xi}\phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_{\xi}\phi_{,\lambda} \right) \\ &+ \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_{\xi}g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_{\xi}g_{\mu\nu,\lambda} \right) - \int_U d^d x \partial_{\mu}(\xi^{\mu}\sqrt{|g|}\mathcal{L}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Последнее слагаемое обобщает последнее слагаемое в (5.7) и связано с тем, что одна и та же область интегрирования на многообразии M отображается в разные области в \mathbb{R}^d в разных системах координат.

Здесь возникает некоторый вопрос, который не вызывал проблем в случае трансляций в плоском пространстве: как понимать выражение $\delta_\xi \phi_{,\lambda}$ для какого-то набора тензорных компонент ϕ ? Что мы делаем вначале, дифференцируем по λ или берем производную Ли вдоль ξ ? Чтобы понять это, разберемся с тем, как мы понимаем вариацию лагранжиана. Правильное понимание состоит в том, что мы заменяем не переменную x на $f_\xi(x) = x + \xi(x)$, а функции $\phi(x)$ преобразуем согласно их тензорной структуре. Именно в этом месте важно, чтобы действие было общековариантным: оно будет инвариантно относительно именно таких преобразований.

Более явно, рассмотрим преобразование

$$\phi(x) \rightarrow (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)), \quad \delta_\xi \phi(x) = (1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x) = \xi\phi(x) + K_\xi(x)\phi(x),$$

где $K_\xi(x)$ — оператор, отвечающий преобразованию компонент тензора, линейно (при $\xi \rightarrow 0$) зависящий от векторного поля ξ и его производных. Например для скалярных полей $K_\xi\phi = 0$, а для векторных $(K_\xi\phi)^\lambda = -\phi^\mu \xi^\lambda_{,\mu}$. Поэтому мы должны сначала применять производную Ли, а потом дифференцировать по координатам

$$\delta_\xi \phi_{,\lambda}(x) = ((1 + K_\xi(x))\phi(f_\xi(x)) - \phi(x))_{,\lambda} = (\delta_\xi \phi)_{,\lambda}(x).$$

Ниже нам будет удобно слегка изменить запись для производной Ли, «перекинув» часть оператора K_ξ в ковариантную производную:

$$\delta_\xi \phi = \xi\phi + K_\xi\phi = \nabla_\xi \phi + \tilde{K}_\xi\phi.$$

Например, для скалярных полей $\tilde{K}_\xi\phi = 0$, а для векторных полей $(\tilde{K}_\xi\phi)^\lambda = -(\nabla_\phi \xi)^\lambda = -\phi^\mu \xi^\lambda_{,\mu}$.

Теперь мы можем вернуться к вычислению вариации. Прежде всего, распишем сумму первого и третьего слагаемых в (5.24). При этом второй член в скобках в первом интеграле возьмем по частям и слегка перегруппируем слагаемые:

$$(I) + (III) = \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \right) \delta_\xi \phi + \int_U d^d x \partial_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \delta_\xi \phi - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

Выражение в скобках в первом интеграле представляет собой левую часть уравнения движения:

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \quad (5.25)$$

В случае скалярного поля ϕ нетрудно записать его через ковариантную производную. Используя (3.33), получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\lambda}} = 0. \quad (5.26)$$

Таким образом, первый интеграл на уравнениях движения для поля ϕ обращается в нуль, а оставшееся выражение можно записать в виде:

$$(I) + (III) = \oint_{\partial U} df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} (\xi^\mu \nabla_\mu \phi + \tilde{K}_\xi\phi) - \sqrt{|g|}\mathcal{L}\xi^\lambda \right).$$

где ∂U — граница области U , а $df_\mu = \frac{1}{(d-1)!} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{d-1}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{d-1}}$ — элемент поверхности границы. Перегруппировав слагаемые, получаем

$$(I) + (III) = \oint_{\partial U} df_\lambda \left(\sqrt{|g|} \tilde{T}_\kappa{}^\lambda \xi^\kappa + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial\phi_{,\lambda}} \tilde{K}_\xi\phi \right),$$

где

$$\tilde{T}_\mu{}^\nu = \nabla_\mu \phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}} - \mathcal{L}\delta_\mu^\nu \quad (5.27)$$

— канонический тензор энергии-импульса, определенный аналогично (5.9).² Однако в отличие от СТО действие не трансляционно-инвариантно, что приводит к появлению второго слагаемого в (5.24). Для последнего имеем

$$\begin{aligned} (\text{II}) &= \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} (\delta_\xi g_{\mu\nu})_{,\lambda} \right) \\ &= \int_U d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \right) \delta_\xi g_{\mu\nu} + \oint_{\partial U} df_\lambda \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \delta_\xi g_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \dots \right), \quad (5.28)$$

где многоточие изображает члены со старшими производными от компонент метрики, если таковые есть. По причине, которая сейчас будет ясна, мы будем называть эту величину *метрическим тензором энергии-импульса*. На практике довольно часто удобнее варьировать по обратной метрике. Так как $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} \delta g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\nu}$, имеем

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (5.29)$$

Используем теперь формулу для производной Ли от метрики: $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$. Имеем

$$(\text{II}) = - \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} + 2 \oint_{\partial U} df_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} \xi_{\mu;\nu}.$$

Используя тождество

$$\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \sqrt{|g|} (T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu = (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \xi_\mu)_{;\nu} - \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu,$$

получаем

$$0 = \delta_\xi S = \int_U d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \xi_\mu + \oint_{\partial U} df_\nu \sqrt{|g|} \left((\tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}) \xi_\mu + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} \xi_{\mu;\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \tilde{K}_\xi \phi \right). \quad (5.30)$$

Рассмотрим сначала такие векторные поля ξ , которые обращаются в нуль на границе вместе со всеми своими производными. Тогда второе слагаемое в (5.30) исчезает и мы получаем тождество

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (5.31)$$

которое верно для любого общековариантного действия вида (5.20). Поскольку мы можем произвольно выбирать область интегрирования, мы заключаем, что это равенство верно *на уравнениях движения* во всем пространстве. Мы будем говорить, что тензор $T^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$ *ковариантно сохраняется*. Следует обратить внимание, что вывод уравнения ковариантного сохранения (5.31) на самом деле не использует никаких специальных свойств лагранжиана и верен для любых тензорных полей материи и любой зависимости лагранжиана от метрики и любых ее производных.

Теперь рассмотрим общее векторное поле ξ , не обращающееся в нуль на границе. В силу доказанного равенства (5.31) в выражении (5.30) остается только второе слагаемое, которое сводится к поверхностному интегралу. В случае *минимальной связи* для *скалярного* поля действие не содержит производных от компонент метрики, а $\tilde{K}_\xi = 0$. Поэтому второе и третье слагаемые под интегралом обращаются в нуль. Так как поверхность произвольна, отсюда следует, что метрический и канонический тензоры энергии-импульса совпадают:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

²Строго говоря, тензор $\tilde{T}^{\mu}{}_{\nu} \partial_\mu \otimes dx^\nu$ не зависит от системы координат только для моделей с минимальной связью.

В общем случае моделей с минимальной связью, когда полями материи являются произвольные тензорные поля,³ второе слагаемое в поверхностном интеграле в (5.24) выражается через производные по полям материи:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} \frac{\partial \phi_{,\rho}}{\partial g_{\lambda\mu,\nu}},$$

так как производные от метрики входят только через символы Кристоффеля, входящие в ковариантные производные. В правой части этого равенства лагранжиан понимается как функция полей, их ковариантных производных и метрики, так же как в правой части (5.23). Можно (хотя и в общем виде непросто) показать, что в этом случае

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu\lambda}{}_{;\lambda}, \quad \psi^{\mu\nu\lambda} = -\psi^{\mu\lambda\nu}. \quad (5.33)$$

Тензор ψ , вообще говоря, не является полностью антисимметричным, так что вектор $\psi^{\mu\nu\lambda}{}_{;\lambda}\partial_\mu$ не обязан обращаться в нуль иначе как в плоском пространстве. Таким образом, канонический тензор энергии-импульса не удовлетворяет условию ковариантного сохранения. В плоском пространстве оба тензора удовлетворяют уравнению непрерывности и определяют сохраняющиеся величины. В дальнейшем под тензором энергии-импульса мы всегда будем понимать метрический тензор энергии-импульса (5.29), если специально не будет оговорено иное.

Как и следовало ожидать, энергия и импульс не сохраняются в отсутствие однородности (трансляционной инвариантности) пространства-времени, а момент импульса — в отсутствие изотропии. Физически это означает обмен энергией, импульсом и моментом импульса с гравитационным полем. Позже мы обсудим это более подробно.

В заключение найдем тензор энергии-импульса для точечной частицы. Запишем действие (4.10) в виде

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau \delta(x^\bullet - x^\bullet(\tau)) \left(-m \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)} - e A_\mu(x) \dot{x}^\mu(\tau) \right).$$

Дифференцируя по метрике, получаем в калибровке $\tau = s$:

$$T^{\mu\nu} = \int ds \frac{\delta(x^\bullet - x^\bullet(s))}{\sqrt{|g|}} m \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s).$$

Первый множитель представляет собой инвариантную дельта-функцию на псевдоримановом многообразии:

$$\delta_g(x, y) = \frac{\delta(x^\bullet - y^\bullet)}{\sqrt{|g(y)|}}. \quad (5.34)$$

Поэтому окончательно получаем

$$T^{\mu\nu} = \int ds \delta_g(x, x(s)) m \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s). \quad (5.35)$$

Задачи

1. Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса (5.10) следует сохранение момента импульса (5.15).

2. С помощью формулы (5.28) получите общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и для скалярного поля с $V = 0$.

3. Пусть ψ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга и $\Delta^{\mu\nu} = \psi^{\mu\nu\lambda}{}_{;\lambda}$. Покажите, что $\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-1/2} \partial_\lambda (|g|^{1/2} \psi^{\mu\nu\lambda})$ и $\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

4. На концы тонкого стержня длиной $2a$ нулевой массы насажены точечные массы m . Центр стержня неподвижен с лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается с угловой скоростью ω , причем скорость концов ωa не предполагается малой. Найдите тензор энергии-импульса для стержня и точечных масс.

5*. Для действия, зависящего от одного векторного поля материи $\phi = \phi^\mu \partial_\mu$, минимально связанного с гравитацией, докажите (5.33).

³В этом курсе мы не рассматриваем случай спинорных полей, для определения которых требуется более сложная техника — *реперный* (или *тетрадный*) формализм.

Семинар 5

Тензор энергии-импульса разных физических систем

Источником гравитационного поля, как мы увидим в следующей лекции, является тензор энергии-импульса материи. На семинаре мы будем вычислять тензор энергии-импульса для нескольких физических систем:

1. Движущаяся пылевидная материя.
2. Движущаяся жидкость с плотностью ρ и давлением p . Нерелятивистский и ультрарелятивистский идеальные газы.
3. Задача о движущемся конденсаторе.