

Лекция 10. Решение Шварцшильда

Михаил Лашкевич

Сферически симметричные решения в плоском пространстве-времени

Что такое «сферически симметричное решение»? Рассмотрим сначала теорию поля в плоском пространстве-времени.

Сферически симметричные решения в плоском пространстве-времени

Что такое «сферически симметричное решение»? Рассмотрим сначала теорию поля в плоском пространстве-времени. Плоское пространство-время обладает $SO(3)$ -симметрией, причем группа $SO(3)$ порождается генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (1)$$

Сферически симметричные решения в плоском пространстве-времени

Что такое «сферически симметричное решение»? Рассмотрим сначала теорию поля в плоском пространстве-времени. Плоское пространство-время обладает $SO(3)$ -симметрией, причем группа $SO(3)$ порождается генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (1)$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (2)$$

Сферически симметричные решения в плоском пространстве-времени

Что такое «сферически симметричное решение»? Рассмотрим сначала теорию поля в плоском пространстве-времени. Плоское пространство-время обладает $SO(3)$ -симметрией, причем группа $SO(3)$ порождается генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (1)$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (2)$$

Генераторы J_i являются векторными полями Киллинга для плоской метрики.

Сферически симметричные решения в плоском пространстве-времени

Что такое «сферически симметричное решение»? Рассмотрим сначала теорию поля в плоском пространстве-времени. Плоское пространство-время обладает $SO(3)$ -симметрией, причем группа $SO(3)$ порождается генераторами

$$J_x = z \partial_y - y \partial_z, \quad J_y = x \partial_z - z \partial_x, \quad J_z = y \partial_x - x \partial_y, \quad (1)$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}. \quad (2)$$

Генераторы J_i являются векторными полями Киллинга для плоской метрики. Пусть $A(x)$ — некоторое тензорное поле (сечение тензорного расслоения). Это поле **сферически-симметрично**, если выполняется равенство

$$\delta_{J_i} A = 0. \quad (3)$$

Сферически-симметричные решения удобно писать в сферический координатах t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (4)$$

Сферически-симметричные решения удобно писать в сферический координатах t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (4)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (5)$$

($d\Omega^2$ — метрика на единичной сфере.)

Сферически-симметричные решения удобно писать в сферический координатах t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (4)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (5)$$

($d\Omega^2$ — метрика на единичной сфере.)

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin \varphi \partial_{\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_{\varphi}, \quad J_y = -\cos \varphi \partial_{\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_{\varphi}, \quad J_z = -\partial_{\varphi}. \quad (6)$$

Векторные поля J_i действуют на сферах $r, t = \text{const}$, причем группа $SO(3)$ действует на сфере транзитивно.

Сферически-симметричные решения удобно писать в сферический координатах t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (4)$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (5)$$

($d\Omega^2$ — метрика на единичной сфере.)

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin \varphi \partial_{\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_{\varphi}, \quad J_y = -\cos \varphi \partial_{\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_{\varphi}, \quad J_z = -\partial_{\varphi}. \quad (6)$$

Векторные поля J_i действуют на сферах $r, t = \text{const}$, причем группа $SO(3)$ действует на сфере транзитивно. Поэтому скалярные поля для сферически-симметричного решения должны были бы быть функциями только от r и t .

Сферически-симметричная метрика

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$.

Сферически-симметричная метрика

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$. Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$.

Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Наложим условие

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$. Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Наложим условие

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

Для J_z имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (7)$$

\Rightarrow компоненты метрики не зависят от φ .

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$. Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Наложим условие

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

Для J_z имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (7)$$

\Rightarrow компоненты метрики не зависят от φ .

Для $i = x, y, \mu, \nu = \vartheta, \varphi$ получаем

$$g_{\varphi\vartheta} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta, \quad \partial_{\vartheta} g_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (8)$$

То есть индуцированная метрика на сфере $\sim d\Omega^2$ и $SO(3)$ -инвариантна.

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$. Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Наложим условие

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

Для J_z имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (7)$$

\Rightarrow компоненты метрики не зависят от φ .

Для $i = x, y, \mu, \nu = \vartheta, \varphi$ получаем

$$g_{\varphi\vartheta} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta, \quad \partial_{\vartheta} g_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (8)$$

То есть индуцированная метрика на сфере $\sim d\Omega^2$ и $SO(3)$ -инвариантна.

Для $\mu = r, t, \nu = \vartheta, \varphi$, немедленно получаем

$$g_{\alpha a} = 0, \quad \alpha = t, r, \quad a = \vartheta, \varphi, \quad (9)$$

Это значит, что подпространства $\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ортогональны сферам.

Мы будем называть метрику сферически-симметричной, если в ней имеются пространственно-подобные поля Киллинга, образующие алгебру Ли $so(3)$. Орбитой группы $SO(3)$ в четырехмерном пространстве является двумерная сфера. Выберем координаты t, r, ϑ, φ так, чтобы t, r были бы постоянны на каждой сфере, а векторные поля Киллинга J_i имели бы вид (6).

Наложим условие

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad J_{i\mu} = g_{\mu\nu} J_i^\nu,$$

Для J_z имеем

$$0 = J_{z\mu;\nu} + J_{z\nu;\mu} = -g_{\mu\varphi,\nu} - g_{\nu\varphi,\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\varphi} = -g_{\mu\nu,\varphi}, \quad (7)$$

\Rightarrow компоненты метрики не зависят от φ .

Для $i = x, y, \mu, \nu = \vartheta, \varphi$ получаем

$$g_{\varphi\vartheta} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta, \quad \partial_\vartheta g_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (8)$$

То есть индуцированная метрика на сфере $\sim d\Omega^2$ и $SO(3)$ -инвариантна.

Для $\mu = r, t, \nu = \vartheta, \varphi$, немедленно получаем

$$g_{\alpha a} = 0, \quad \alpha = t, r, \quad a = \vartheta, \varphi, \quad (9)$$

Это значит, что подпространства $\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ ортогональны сферам. Кроме того, формы $J_{i\mu} dx^\mu$ лежат в кокасательных расслоениях сфер.

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\Omega^2.$$

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .
Преобразованиями t, r мы можем зафиксировать две функции.

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Преобразованиями t, r мы можем зафиксировать две функции. Положим

$$g_{tr} = 0,$$

то есть направления ∂_t и ∂_r ортогональны,

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Преобразованиями t, r мы можем зафиксировать две функции. Положим

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2,$$

то есть направления ∂_t и ∂_r ортогональны, а площадь сферы (t, r) равна $4\pi r^2$.

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Преобразованиями t, r мы можем зафиксировать две функции. Положим

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2,$$

то есть направления ∂_t и ∂_r ортогональны, а площадь сферы (t, r) равна $4\pi r^2$.
Полагая $g_{tt} = e^{2k}, g_{rr} = -e^{2h}$, получаем

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (11)$$

Итак,

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\vartheta\vartheta} d\Omega^2.$$

Теперь выбирая $\mu, \nu = t, r$, получаем

$$\partial_{\vartheta} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = t, r, \quad (10)$$

то есть все четыре функции g_{tt} , g_{tr} , g_{rr} , $g_{\vartheta\vartheta}$ зависят только от t и r .

Преобразованиями t, r мы можем зафиксировать две функции. Положим

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2,$$

то есть направления ∂_t и ∂_r ортогональны, а площадь сферы (t, r) равна $4\pi r^2$.
Полагая $g_{tt} = e^{2k}$, $g_{rr} = -e^{2h}$, получаем

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (11)$$

Эту метрику мы подставим в уравнения Эйнштейна в вакууме

$$R_{\nu}^{\mu} = 0.$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\ \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{12}$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

$$k' + h' = 0,$$

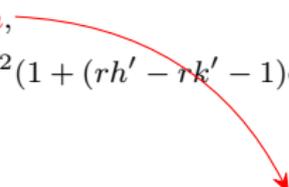
Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

$$k' + h' = 0, \quad \dot{h} = 0,$$


Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + k\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\
 k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0,
 \end{aligned}$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\
 k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\
 r(k' - h') &= e^{2h} - 1.
 \end{aligned}$$

Будем точкой обозначать производную по t и штрихом — по r . Имеем для ненулевых символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^t &= \dot{k}, & \Gamma_{rt}^t &= k', & \Gamma_{tt}^r &= k'e^{2k-2h}, \\
 \Gamma_{rt}^r &= \dot{h}, & \Gamma_{rr}^t &= \dot{h}e^{2h-2k}, & \Gamma_{rr}^r &= h', \\
 \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = r^{-1}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -re^{-2h}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -re^{-2h} \sin^2 \vartheta, \\
 \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
 R_t^t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')e^{-2h}, \\
 R_r^r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h')e^{-2h}, \\
 R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}, \\
 R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}(1 + (rh' - rk' - 1)e^{-2h}),
 \end{aligned} \tag{13}$$

Получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\
 k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\
 r(k' - h') &= e^{2h} - 1.
 \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Заменой координат $t' = \int dt e^{F(t)}$ получаем $e^{2k} dt^2 = e^{2k-2F} dt'^2 = e^{-2h} dt'^2$.

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Заменой координат $t' = \int dt e^{F(t)}$ получаем $e^{2k} dt^2 = e^{2k-2F} dt'^2 = e^{-2h} dt'^2$.
Поэтому без потери общности имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Заменой координат $t' = \int dt e^{F(t)}$ получаем $e^{2k} dt^2 = e^{2k-2F} dt'^2 = e^{-2h} dt'^2$.
Поэтому без потери общности имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Последнее уравнение легко решается:

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где r_g — константа интегрирования.

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Заменой координат $t' = \int dt e^{F(t)}$ получаем $e^{2k} dt^2 = e^{2k-2F} dt'^2 = e^{-2h} dt'^2$.
Поэтому без потери общности имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Последнее уравнение легко решается:

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где r_g — константа интегрирования. Второе уравнение тоже выполняется на этом решении.

Итак

$$\begin{aligned}k' + h' &= 0, & \dot{h} &= 0, \\k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0, \\r(k' - h') &= e^{2h} - 1.\end{aligned}$$

Из первой строчки получаем

$$k(t, r) = F(t) - h(r).$$

Заменой координат $t' = \int dt e^{F(t)}$ получаем $e^{2k} dt^2 = e^{2k-2F} dt'^2 = e^{-2h} dt'^2$. Поэтому без потери общности имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2 dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}.$$

Последнее уравнение легко решается:

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r},$$

где r_g — константа интегрирования. Второе уравнение тоже выполняется на этом решении.

Итак, получаем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2. \quad (14)$$

Это единственное (с точностью до замен координат) сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна, называемое [решением Шварцшильда](#). Величина r_g называется [шварцшильдовским радиусом](#).

Постоянную r_g можно связать с массой M системы.

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Выполним преобразование координат $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Выполним преобразование координат $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Теперь $h_{ii} = h_{tt} = -\frac{r_g}{r}$, $h = \frac{2r_g}{r} \Rightarrow \psi_{ii} = h_{ii} + \frac{1}{2}h = 0$, $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -\frac{2r_g}{r}$

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Выполним преобразование координат $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Теперь $h_{ii} = h_{tt} = -\frac{r_g}{r}$, $h = \frac{2r_g}{r} \Rightarrow \psi_{ii} = h_{ii} + \frac{1}{2}h = 0$, $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -\frac{2r_g}{r}$
 $\Rightarrow -2r_g = A = -4GM$.

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Выполним преобразование координат $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Теперь $h_{ii} = h_{tt} = -\frac{r_g}{r}$, $h = \frac{2r_g}{r} \Rightarrow \psi_{ii} = h_{ii} + \frac{1}{2}h = 0$, $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -\frac{2r_g}{r} \Rightarrow -2r_g = A = -4GM$. Получаем

$$r_g = 2GM. \quad (15)$$

Постоянную r_g можно связать с массой M системы. Рассмотрим асимптотику при $r \gg r_g$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Эта асимптотика не соответствует калибровке из лекции 7, так как для нее $h = 0 \Rightarrow \psi_{rr} = h_{rr} = -r_g/r \neq 0$.

Выполним преобразование координат $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Теперь $h_{ii} = h_{tt} = -\frac{r_g}{r}$, $h = \frac{2r_g}{r} \Rightarrow \psi_{ii} = h_{ii} + \frac{1}{2}h = 0$, $\psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -\frac{2r_g}{r} \Rightarrow -2r_g = A = -4GM$. Получаем

$$r_g = 2GM. \quad (15)$$

Важно понимать, что масса M — это не масса «центрального тела», а энергия покоя всей системы в целом, включая гравитационное поле. Как мы увидим, центрального тела может вообще не существовать.

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Сфера $r = r_g$ (**сфера Шварцшильда**) выделена тем, что на ней $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$. Время на этой сфере течет бесконечно медленно. При пересечении сферы Шварцшильда знаки g_{tt} и g_{rr} меняются, поэтому продолжение решения внутрь этой сферы проблематично.

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Сфера $r = r_g$ (сфера Шварцшильда) выделена тем, что на ней $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$. Время на этой сфере течет бесконечно медленно. При пересечении сферы Шварцшильда знаки g_{tt} и g_{rr} меняются, поэтому продолжение решения внутрь этой сферы проблематично.

Измерим расстояния в пространстве Шварцшильда. Так как $g_{0i} = 0$, расстояния на гиперплоскостях $t = \text{const}$ даются метрикой $\gamma_{ij} = -g_{ij}$.

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Сфера $r = r_g$ (сфера Шварцшильда) выделена тем, что на ней $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$. Время на этой сфере течет бесконечно медленно. При пересечении сферы Шварцшильда знаки g_{tt} и g_{rr} меняются, поэтому продолжение решения внутрь этой сферы проблематично.

Измерим расстояния в пространстве Шварцшильда. Так как $g_{0i} = 0$, расстояния на гиперплоскостях $t = \text{const}$ даются метрикой $\gamma_{ij} = -g_{ij}$. Как мы уже говорили, на сферах расстояния

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2$$

совпадают с расстояниями на сфере радиуса r .

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Сфера $r = r_g$ (сфера Шварцшильда) выделена тем, что на ней $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$. Время на этой сфере течет бесконечно медленно. При пересечении сферы Шварцшильда знаки g_{tt} и g_{rr} меняются, поэтому продолжение решения внутрь этой сферы проблематично.

Измерим расстояния в пространстве Шварцшильда. Так как $g_{0i} = 0$, расстояния на гиперплоскостях $t = \text{const}$ даются метрикой $\gamma_{ij} = -g_{ij}$. Как мы уже говорили, на сферах расстояния

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2$$

совпадают с расстояниями на сфере радиуса r .

Радиальные расстояния

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

растут для данного dr при приближении к сфере Шварцшильда.

Физическое время в пространстве Шварцшильда течет медленнее, чем в асимптотической области:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t. \quad (16)$$

Сфера $r = r_g$ (сфера Шварцшильда) выделена тем, что на ней $g_{tt} = 0$, $g_{rr} = \infty$. Время на этой сфере течет бесконечно медленно. При пересечении сферы Шварцшильда знаки g_{tt} и g_{rr} меняются, поэтому продолжение решения внутрь этой сферы проблематично.

Измерим расстояния в пространстве Шварцшильда. Так как $g_{0i} = 0$, расстояния на гиперплоскостях $t = \text{const}$ даются метрикой $\gamma_{ij} = -g_{ij}$. Как мы уже говорили, на сферах расстояния

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2$$

совпадают с расстояниями на сфере радиуса r .

Радиальные расстояния

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

растут для данного dr при приближении к сфере Шварцшильда. Однако расстояние от сферы Шварцшильда до любой точки пространства конечно.

Пусть $r - r_g \ll r_g$. Тогда

$$l_{\text{рад}}(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r_g} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

То есть сфера Шварцшильда не удалена бесконечно.

Радиальные световые лучи в метрике Шварцшильда

В силу симметрии изотропные кривые в плоскости $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ являются геодезическими. Такие кривые легко найти.

Радиальные световые лучи в метрике Шварцшильда

В силу симметрии изотропные кривые в плоскости $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ являются геодезическими. Такие кривые легко найти. Полагая $ds = 0$, находим

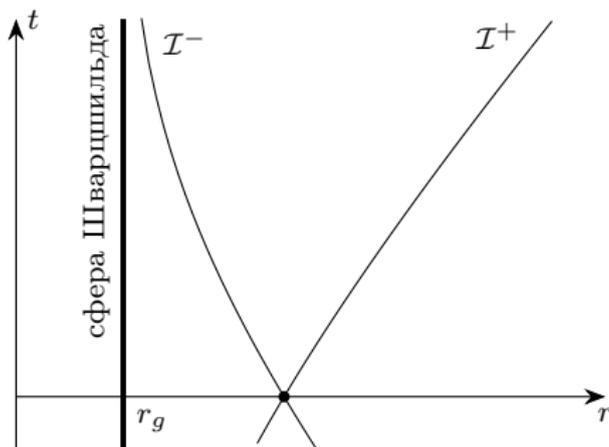
$$\mathcal{I}^\pm : dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (17)$$

Радиальные световые лучи в метрике Шварцшильда

В силу симметрии изотропные кривые в плоскости $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ являются геодезическими. Такие кривые легко найти. Полагая $ds = 0$, находим

$$\mathcal{I}^{\pm} : dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (17)$$

Эти два решения выглядят так:

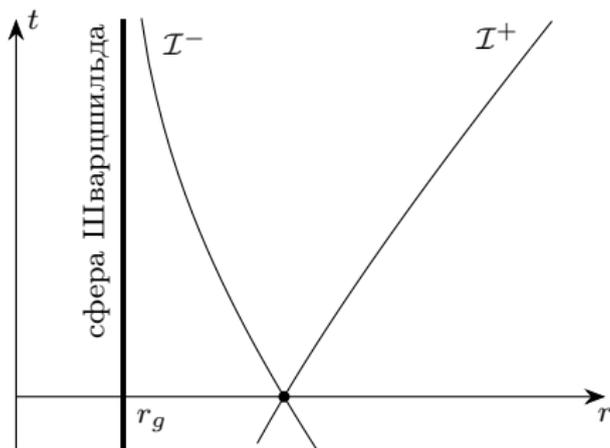


Радиальные световые лучи в метрике Шварцшильда

В силу симметрии изотропные кривые в плоскости $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ являются геодезическими. Такие кривые легко найти. Полагая $ds = 0$, находим

$$\mathcal{I}^{\pm} : dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (17)$$

Эти два решения выглядят так:



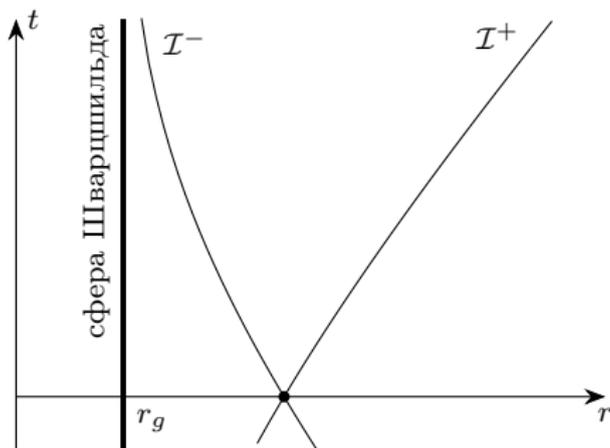
Луч \mathcal{I}^+ в будущем уходит на бесконечность, а луч \mathcal{I}^- стремится к сфере Шварцшильда, никогда не достигая его.

Радиальные световые лучи в метрике Шварцшильда

В силу симметрии изотропные кривые в плоскости $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ являются геодезическими. Такие кривые легко найти. Полагая $ds = 0$, находим

$$\mathcal{I}^{\pm} : dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (17)$$

Эти два решения выглядят так:



Луч \mathcal{I}^+ в будущем уходит на бесконечность, а луч \mathcal{I}^- стремится к сфере Шварцшильда, никогда не достигая его. В прошлом все наоборот.

Радиальное движение частиц в метрике Шварцшильда

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Изучим движение частиц подробнее. Так как $g^{tt} = -g_{rr} = 1 - \frac{r_g}{r}$, имеем уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (18)$$

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Изучим движение частиц подробнее. Так как $g^{tt} = -g_{rr} = 1 - \frac{r_g}{r}$, имеем уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (18)$$

Будем решать уравнение методом разделения переменных. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (19)$$

Константа E имеет смысл энергии частицы.

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Изучим движение частиц подробнее. Так как $g^{tt} = -g_{rr} = 1 - \frac{r_g}{r}$, имеем уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (18)$$

Будем решать уравнение методом разделения переменных. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (19)$$

Константа E имеет смысл энергии частицы. Тогда

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Изучим движение частиц подробнее. Так как $g^{tt} = -g_{rr} = 1 - \frac{r_g}{r}$, имеем уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (18)$$

Будем решать уравнение методом разделения переменных. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (19)$$

Константа E имеет смысл энергии частицы. Тогда

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

и уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}.$$

Поскольку массивные частицы движутся внутри светового конуса, в системе отсчета удаленного наблюдателя частицы никогда не достигают сферы Шварцшильда.

Изучим движение частиц подробнее. Так как $g^{tt} = -g_{rr} = 1 - \frac{r_g}{r}$, имеем уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2. \quad (18)$$

Будем решать уравнение методом разделения переменных. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (19)$$

Константа E имеет смысл энергии частицы. Тогда

$$S(t, r) = -Et + S_r(r),$$

и уравнение приобретает вид

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm \int dr \frac{E}{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}.$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

то есть

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (20)$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

то есть

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (20)$$

Собственное время совпадает с $-S/m$, поэтому

$$ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E}{m} dt - \frac{dS_r(r)}{m} = \pm \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (21)$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

то есть

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (20)$$

Собственное время совпадает с $-S/m$, поэтому

$$ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E}{m} dt - \frac{dS_r(r)}{m} = \pm \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (21)$$

Найдем собственное время, соответствующее перемещению из точки $r = r_0$ в точку r_g :

$$s_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (22)$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}},$$

то есть

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (20)$$

Собственное время совпадает с $-S/m$, поэтому

$$ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E}{m} dt - \frac{dS_r(r)}{m} = \pm \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (21)$$

Найдем собственное время, соответствующее перемещению из точки $r = r_0$ в точку r_g :

$$s_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (22)$$

Это собственное время **конечно**. Надо понять, покрывает ли построенная карта все многообразие. Для этого надо попробовать построить другую систему координат.

Заметим, что

$$ds = \frac{m}{E} \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt. \quad (23)$$

Заметим, что

$$ds = \frac{m}{E} \sqrt{1 - \frac{rg}{r}} dt. \quad (23)$$

- Первый множитель $\frac{m}{E} = \text{const}$. Для бесконечно удаленной частицы $\frac{m}{E} = \sqrt{1 - v^2}$. Это — замедление времени в результате «начального» движения.

Заметим, что

$$ds = \frac{m}{E} \sqrt{1 - \frac{rg}{r}} dt. \quad (23)$$

- Первый множитель $\frac{m}{E} = \text{const}$. Для бесконечно удаленной частицы $\frac{m}{E} = \sqrt{1 - v^2}$. Это — замедление времени в результате «начального» движения.
- Второй множитель $\sqrt{1 - \frac{rg}{r}}$ можно интерпретировать гравитационное замедление времени.

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$.

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Интегрируя, получаем

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (25)$$

С их помощью мы построим несколько систем координат.

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Интегрируя, получаем

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (25)$$

С их помощью мы построим несколько систем координат. Начнем с системы координат $(x^\pm, r, \vartheta, \varphi)$, называемой **системой Эддингтона—Финкельштейна**.

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Интегрируя, получаем

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (25)$$

С их помощью мы построим несколько систем координат. Начнем с системы координат $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$, называемой **системой Эддингтона—Финкельштейна**. Получаем метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \quad (26)$$

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Интегрируя, получаем

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (25)$$

С их помощью мы построим несколько систем координат. Начнем с системы координат $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$, называемой **системой Эддингтона—Финкельштейна**. Получаем метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \quad (26)$$

Эта метрика **нигде не вырождена** ($g = -r^4 \sin^2 \vartheta$), кроме точки $r = 0$, где она имеет особенность. Мы можем **гладко продолжать** многообразие в область $r \leq r_g$.

Найдем аналог переменных светового конуса, то есть такие функции x^\pm переменных t, r , чтобы кривые \mathcal{I}^\pm записывались в виде $x^\mp = \text{const}$. Это значит, что

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (24)$$

Интегрируя, получаем

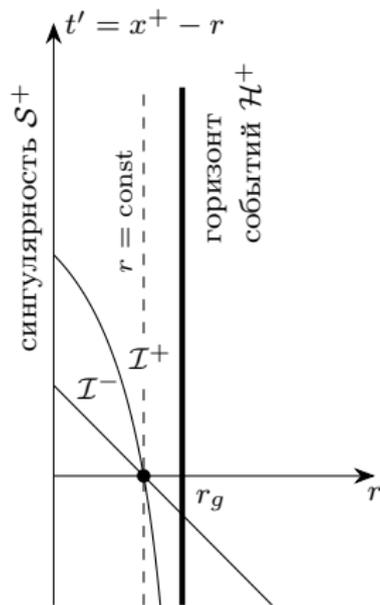
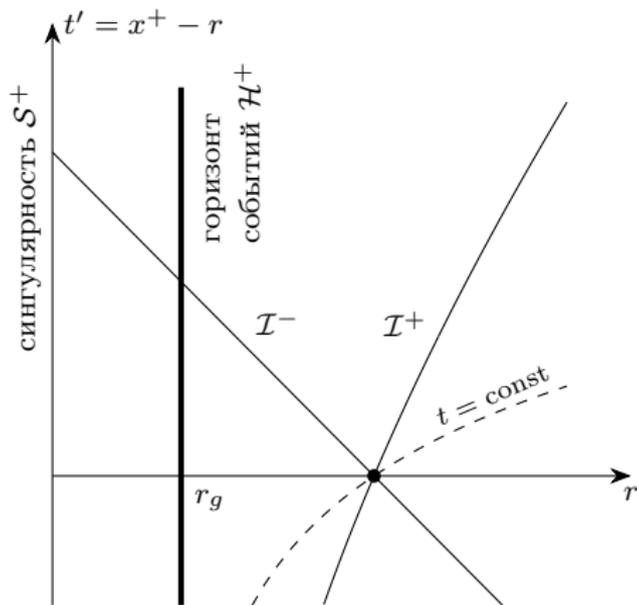
$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right|. \quad (25)$$

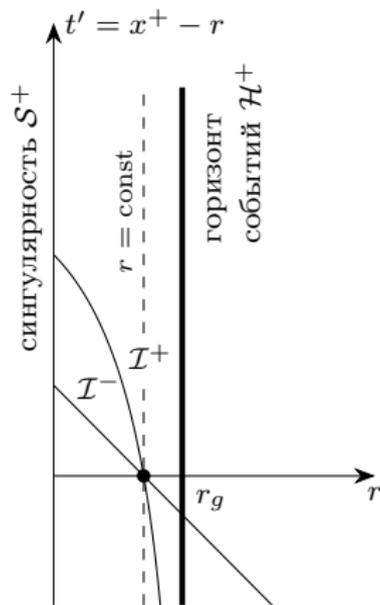
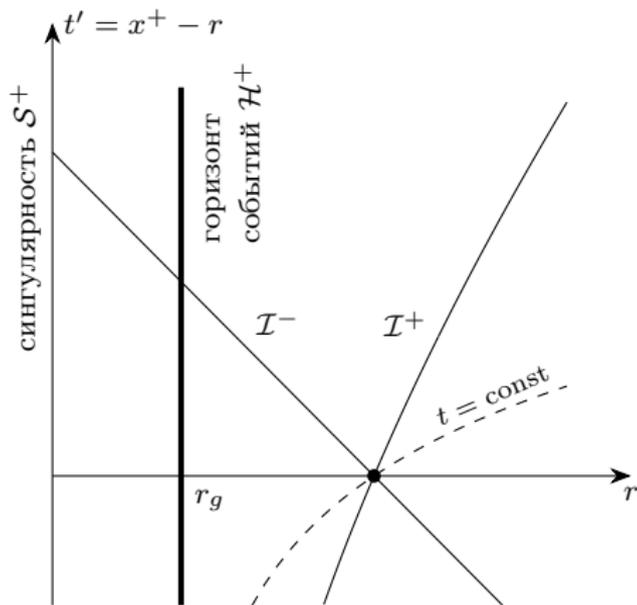
С их помощью мы построим несколько систем координат. Начнем с системы координат $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$, называемой **системой Эддингтона—Финкельштейна**. Получаем метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2 dx^+ dr - r^2 d\Omega^2. \quad (26)$$

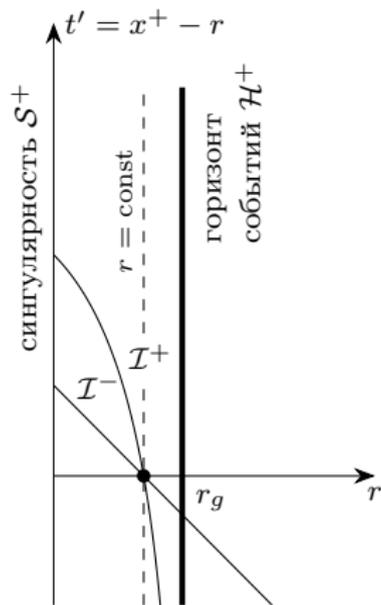
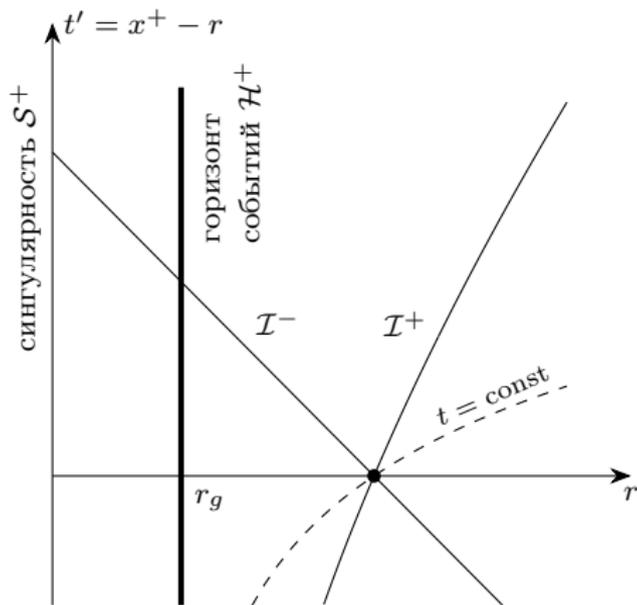
Эта метрика **нигде не вырождена** ($g = -r^4 \sin^2 \vartheta$), кроме точки $r = 0$, где она имеет особенность. Мы можем **гладко продолжать** многообразие в область $r \leq r_g$.

Теперь кривые $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ являются изотропными геодезическими, входящими в семейство \mathcal{I}^+ ($x^- = \text{const}$).





Каждая сфера $r = \text{const}$ с $r < r_g$ является **ловушечной поверхностью**: она будет непременно сжиматься, если ее сделать материальной.



Каждая сфера $r = \text{const}$ с $r < r_g$ является **ловушечной поверхностью**: она будет непременно сжиматься, если ее сделать материальной. Каждая линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ является изотропной геодезической из семейства \mathcal{I}^+ .

Горизонт событий и судьба частиц

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Горизонт событий и судьба частиц

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$.

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$. Чтобы это установить, сделаем обратное преобразование (25) от $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$ к $(t, r, \vartheta, \varphi)$ при $r < r_g$. Мы попадем в область $r < r_g$ координат Шварцшильда.

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$. Чтобы это установить, сделаем обратное преобразование (25) от $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$ к $(t, r, \vartheta, \varphi)$ при $r < r_g$. Мы попадем в область $r < r_g$ координат Шварцшильда. (Эта область не сшивается гладко с областью $r > r_g$ в силу модуля под логарифмом.)

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$. Чтобы это установить, сделаем обратное преобразование (25) от $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$ к $(t, r, \vartheta, \varphi)$ при $r < r_g$. Мы попадем в область $r < r_g$ координат Шварцшильда. (Эта область не сшивается гладко с областью $r > r_g$ в силу модуля под логарифмом.) Тогда формула (21) для ds верна и в области $r < r_g$. Значит собственное время падения частицы с нулевым моментом от горизонта на сингулярность равно

$$s_{\text{синг}} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (27)$$

Это время конечно.

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$. Чтобы это установить, сделаем обратное преобразование (25) от $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$ к $(t, r, \vartheta, \varphi)$ при $r < r_g$. Мы попадем в область $r < r_g$ координат Шварцшильда. (Эта область не сшивается гладко с областью $r > r_g$ в силу модуля под логарифмом.) Тогда формула (21) для ds верна и в области $r < r_g$. Значит собственное время падения частицы с нулевым моментом от горизонта на сингулярность равно

$$s_{\text{синг}} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (27)$$

Это время конечно. Область внутри горизонта событий называется **черной дырой**.

Сфера $r = r_g$ является **горизонтом событий** для удаленного наблюдателя: он не может получить информацию из-под этой сферы.

Каждая частица, попавшая за горизонт событий, за конечное собственное время достигает сингулярности $r = 0$. Чтобы это установить, сделаем обратное преобразование (25) от $(x^+, r, \vartheta, \varphi)$ к $(t, r, \vartheta, \varphi)$ при $r < r_g$. Мы попадем в область $r < r_g$ координат Шварцшильда. (Эта область не сшивается гладко с областью $r > r_g$ в силу модуля под логарифмом.) Тогда формула (21) для ds верна и в области $r < r_g$. Значит собственное время падения частицы с нулевым моментом от горизонта на сингулярность равно

$$s_{\text{синг}} = \frac{m}{E} \int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (27)$$

Это время конечно. Область внутри горизонта событий называется **черной дырой**.

Горизонт событий никак не выделен локально: он определяется только глобально структурой пространства-времени. Падающий в черную дыру наблюдатель не заметит, как пересечет горизонт событий (конечно, если выдержит приливные силы вблизи и внутри черной дыры).

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты Эддингтона—Финкельштейна.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии. Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть?

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты

Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть? Обращение времени $t \rightarrow -t$ отвечает замене $x^+ \leftrightarrow -x^-$.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты

Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть? Обращение времени $t \rightarrow -t$ отвечает замене $x^+ \leftrightarrow -x^-$. Это дает вторую систему координат Эддингтона—Финкельштейна

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты

Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть? Обращение времени $t \rightarrow -t$ отвечает замене $x^+ \leftrightarrow -x^-$. Это дает вторую систему координат

Эддингтона—Финкельштейна

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

В этой системе предыдущая картинка перевернута. Все частицы, находящиеся в области $r < r_g$ **родились на сингулярности**. Они достигают горизонта событий за конечное собственное время и могут выйти наружу.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты

Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть? Обращение времени $t \rightarrow -t$ отвечает замене $x^+ \leftrightarrow -x^-$. Это дает вторую систему координат Эддингтона—Финкельштейна

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

В этой системе предыдущая картинка перевернута. Все частицы, находящиеся в области $r < r_g$ **родились на сингулярности**. Они достигают горизонта событий за конечное собственное время и могут выйти наружу. Это **другая сингулярность**: белая дыра.

Область $r > r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна совпадает с областью $r > r_g$ в координатах Шварцшильда.

Область $r < r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна можно сопоставить с областью $r < r_g$ в координатах Шварцшильда.

Но непрерывный переход от одной области к другой происходит именно в координатах Эддингтона—Финкельштейна. При этом весь горизонт событий $r = r_g$ в координатах Эддингтона—Финкельштейна соответствует единственной точке $r \rightarrow r_g + 0, t \rightarrow +\infty$ в координатах Шварцшильда. Это нефизическое вырождение, которое снимают координаты

Эддингтона—Финкельштейна. Наоборот вся линия $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ в координатах Шварцшильда является **единственной точкой** на многообразии.

Координаты Эддингтона—Финкельштейна нарушают симметрию относительно обращения времени. Как быть? Обращение времени $t \rightarrow -t$ отвечает замене $x^+ \leftrightarrow -x^-$. Это дает вторую систему координат

Эддингтона—Финкельштейна

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2 dx^- dr - r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

В этой системе предыдущая картинка перевернута. Все частицы, находящиеся в области $r < r_g$ **родились на сингулярности**. Они достигают горизонта событий за конечное собственное время и могут выйти наружу. Это **другая сингулярность: белая дыра**. Поверхность $r = r_g$ в этой системе координат является **горизонтом событий прошлого** для удаленного наблюдателя.

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$.

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g} < 0, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g} > 0. \quad (30)$$

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g} < 0, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g} > 0. \quad (30)$$

Координаты $(u, v, \vartheta, \varphi)$ называются **координатами Крускала**. Уравнение для r приобретает вид

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$-4r_g^2 \exp \frac{1}{r_g} \left(\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right) \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g} < 0, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g} > 0. \quad (30)$$

Координаты $(u, v, \vartheta, \varphi)$ называются **координатами Крускала**. Уравнение для r приобретает вид

$$uv = -4r_g^2 e^{\frac{r(u,v)}{r_g}} \left(\frac{r(u,v)}{r_g} - 1 \right). \quad (31)$$

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g} < 0, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g} > 0. \quad (30)$$

Координаты $(u, v, \vartheta, \varphi)$ называются **координатами Крускала**. Уравнение для r приобретает вид

$$uv = -4r_g^2 e^{\frac{r(u,v)}{r_g}} \left(\frac{r(u,v)}{r_g} - 1 \right). \quad (31)$$

Метрика в координатах Крускала уже не содержит особенности при $r = r_g$:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{-\frac{r(u,v)}{r_g}} du dv - r^2(u,v) d\Omega^2. \quad (32)$$

Перейдем к координатам $(x^-, x^+, \vartheta, \varphi)$. В области $r > r_g$ мы можем задать функцию $r(x^-, x^+)$ уравнением

$$\frac{x^+ - x^-}{2} = r(x^-, x^+) + r_g \log \left(\frac{r(x^-, x^+)}{r_g} - 1 \right),$$

поэтому переход от координат Шварцшильда к этим координатам обратим.
Метрика

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)} \right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2 \quad (29)$$

имеет особенность при $r = r_g$. Чтобы избавиться от этой особенности, давайте «подождем» координаты x^\pm так, чтобы новые координаты оставались конечными при $r = r_g$, то есть при $x^- \rightarrow +\infty$ или $x^+ \rightarrow -\infty$:

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g} < 0, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g} > 0. \quad (30)$$

Координаты $(u, v, \vartheta, \varphi)$ называются **координатами Крускала**. Уравнение для r приобретает вид

$$uv = -4r_g^2 e^{\frac{r(u,v)}{r_g}} \left(\frac{r(u,v)}{r_g} - 1 \right). \quad (31)$$

Метрика в координатах Крускала уже не содержит особенности при $r = r_g$:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{-\frac{r(u,v)}{r_g}} du dv - r^2(u,v) d\Omega^2. \quad (32)$$

Координаты u, v уже легко продолжаются в области $u > 0$ и $v < 0$, где $r < r_g$.

Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$,

Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$, можно изобразить пространство-время для решения Шварцшильда так:

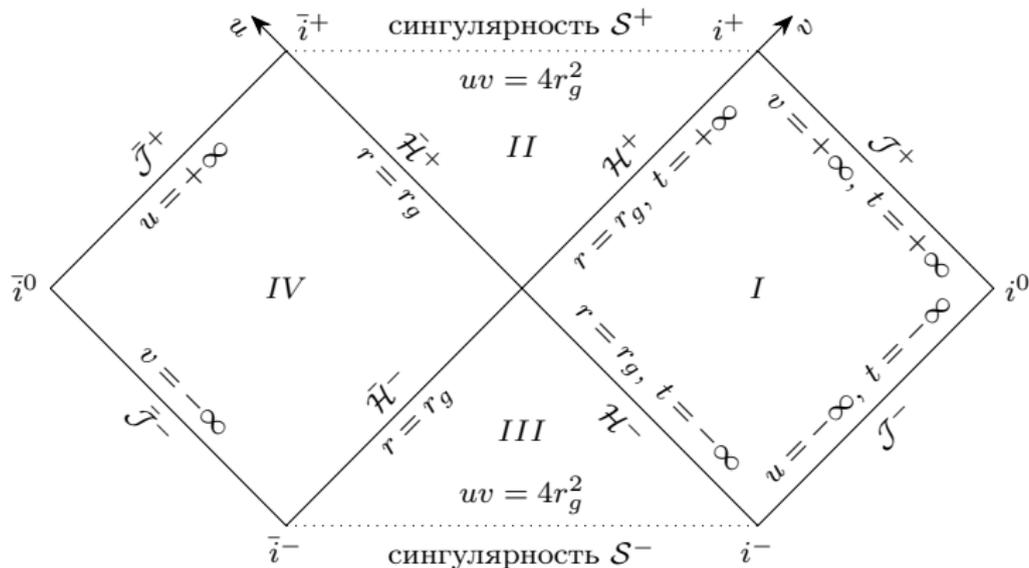
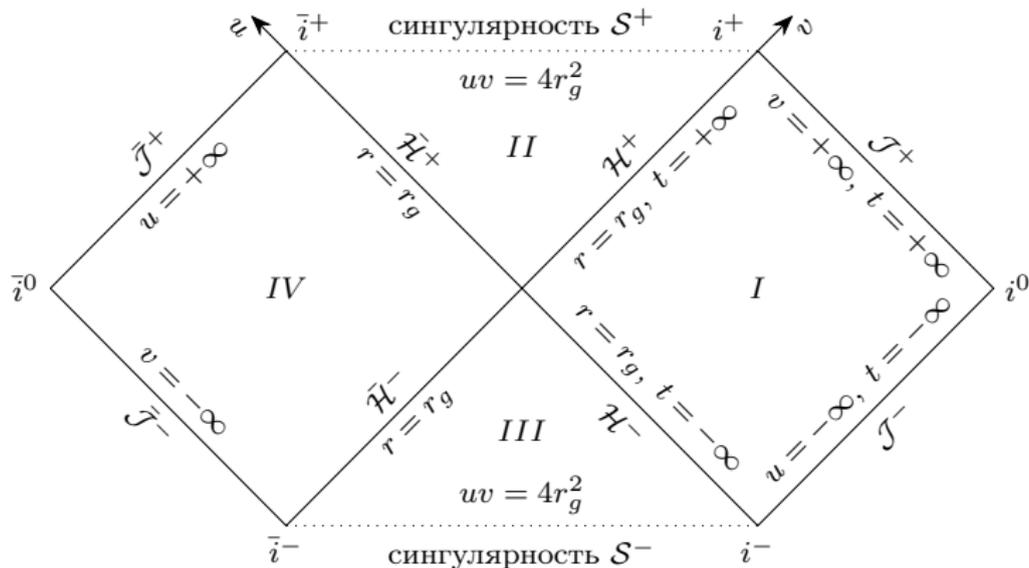


Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

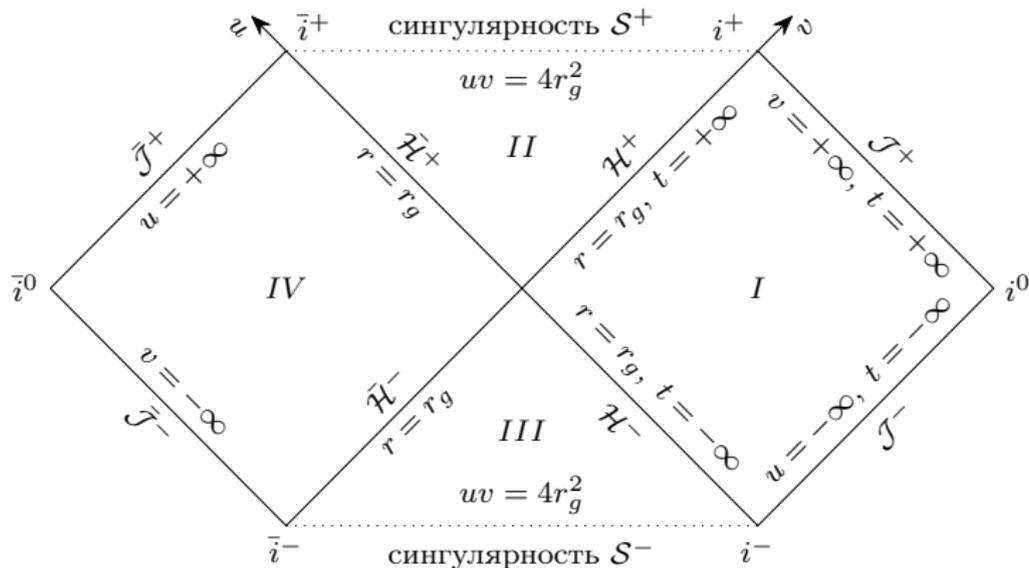
Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$, можно изобразить пространство-время для решения Шварцшильда так:



- I — «внешняя» область, покрываемая картой Шварцшильда;

Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

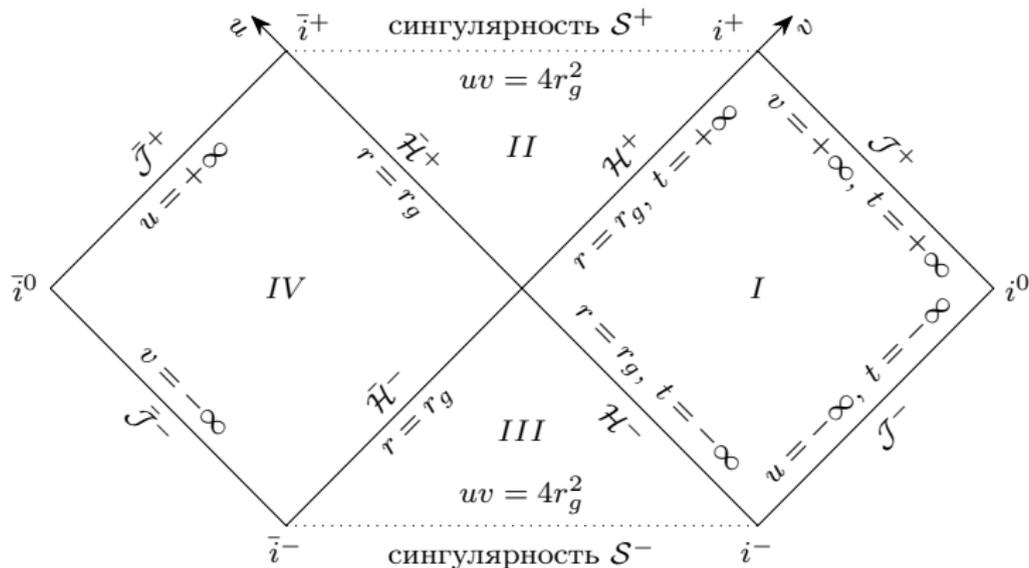
Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$, можно изобразить пространство-время для решения Шварцшильда так:



- I — «внешняя» область, покрываемая картой Шварцшильда;
- II — черная дыра;

Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

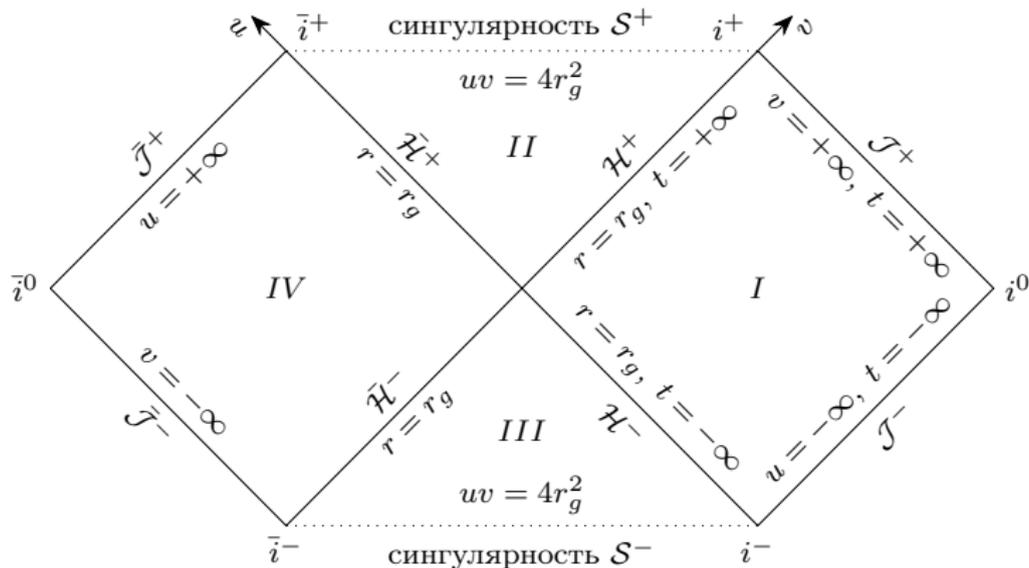
Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$, можно изобразить пространство-время для решения Шварцшильда так:



- I — «внешняя» область, покрываемая картой Шварцшильда;
- II — черная дыра;
- III — белая дыра;

Диаграмма Пенроуза для координат Крускала

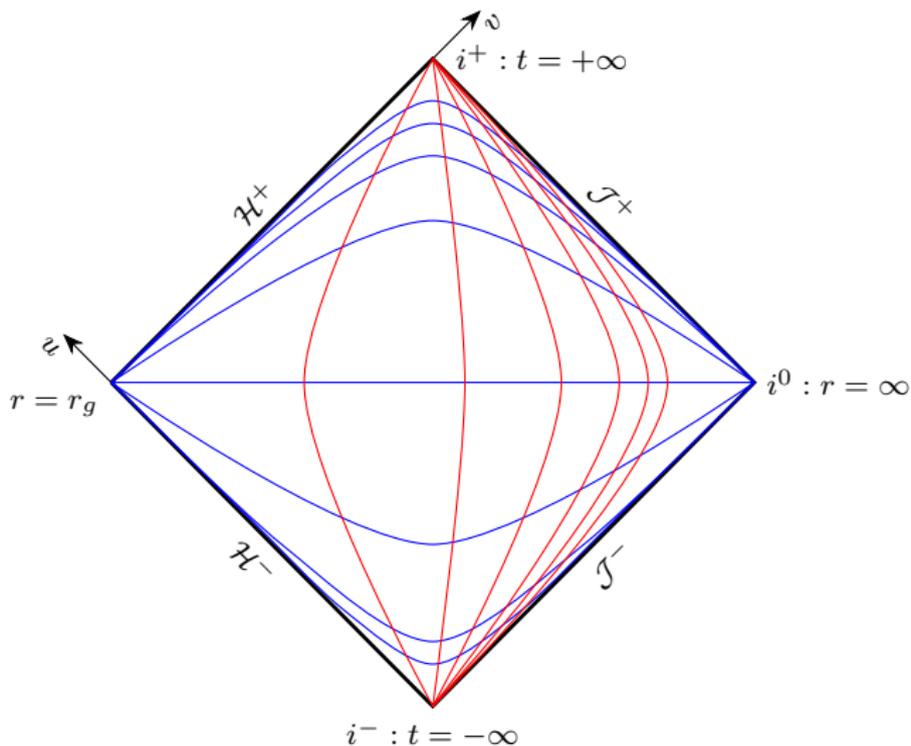
Используя дополнительное сжатие переменных $u = 2r_g \operatorname{tg} u'$, $v = 2r_g \operatorname{tg} v'$, можно изобразить пространство-время для решения Шварцшильда так:



- I — «внешняя» область, покрываемая картой Шварцшильда;
- II — черная дыра;
- III — белая дыра;
- IV — «зеркальный» мир, не наблюдаемый из области I .

Координаты Шварцшильда на диаграмме Пенроуза

Схематично изобразим шварцшильдовские координаты t (красные) и r (синие) в области I диаграммы Пенроуза:



Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Задача 2. Отделите уравнение для $h(r)$ и решите его.

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Задача 2. Отделите уравнение для $h(r)$ и решите его.

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (33)$$

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Задача 2. Отделите уравнение для $h(r)$ и решите его.

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (33)$$

Задача 3. Найдите k' .

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Рассмотрим жидкое сферически симметричное тело с тензором энергии-импульса

$$T_t^t = \rho(r), \quad T_r^r = T_\vartheta^\vartheta = T_\varphi^\varphi = -p(r).$$

Задача 1. Напишите уравнения Эйнштейна для такого тела в случае сферически симметричного гравитационного поля.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0, \\ r^{-1}e^{-2h}(k' + h') &= 4\pi G(\rho + p), \\ e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h')) &= 8\pi Gp, \\ r^{-2}(1 - e^{-2h}) + r^{-1}(h' - k')e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Задача 2. Отделите уравнение для $h(r)$ и решите его.

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r). \quad (33)$$

Задача 3. Найдите k' .

$$\frac{dk}{dr} = G \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}.$$

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (34)$$

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (34)$$

Критерий устойчивости невращающейся звезды радиуса R :

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (35)$$

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (34)$$

Критерий устойчивости невращающейся звезды радиуса R :

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (35)$$

Задача 5. Найдите предельную массу звезды из несжимаемой жидкости плотности ρ .

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (34)$$

Критерий устойчивости невращающейся звезды радиуса R :

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (35)$$

Задача 5. Найдите предельную массу звезды из несжимаемой жидкости плотности ρ .

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}. \quad (36)$$

Задача 4. Подставьте результаты в третье уравнение и получите уравнение на давление.

Условие статического равновесия Оппенгеймера—Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}. \quad (34)$$

Критерий устойчивости невращающейся звезды радиуса R :

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R. \quad (35)$$

Задача 5. Найдите предельную массу звезды из несжимаемой жидкости плотности ρ .

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}. \quad (36)$$

Для нейтронной звезды плотности $\rho \simeq 3 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ имеем $M_{\max} \simeq 6.6M_{\odot}$, где M_{\odot} — масса Солнца. Эта оценка сильно завышена, поскольку реальная звезда состоит из сжимаемого вещества.

Семинар. Гравитационное поле статического сферически-симметричного тела

Задача 6. Решите уравнение Оппенгеймера—Волкова для газа с уравнением состояния $p = \alpha\rho$ и найдите критерий устойчивости.

Задача 6. Решите уравнение Оппенгеймера—Волкова для газа с уравнением состояния $p = \alpha\rho$ и найдите критерий устойчивости.

$$m(r) = Kr, \quad K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1}G^{-1}, \quad (37)$$

Критерий устойчивости $K < (2G)^{-1}$ всегда выполнен. Поэтому устойчивость будет зависеть от уравнения состояния на малых плотностях.