Лекция 11. Движение частицы в метрике Шварцшильда

Михаил Лашкевич

Разделение переменных

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Разделение переменных

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \tag{1}$$

Разделение переменных

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-m^2=0. \qquad (1)$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-E, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=J. \qquad (2)$$

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \qquad (1)$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J. \qquad (2)$$

Здесь E представляет собой энергию частицы, а J — момент импульса в направлении оси z.

Разделение переменных

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \qquad (1)$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J. \qquad (2)$$

Здесь E представляет собой энергию частицы, а J — момент импульса в направлении оси z. Имеем

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + J\varphi + S_r(E, J, r). \qquad (3)$$

Изучим движение частицы в метрике Шварцшильда. Поскольку движение происходит в одной плоскости, выберем плоскость $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 = 0. \qquad (1)$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J. \qquad (2)$$

Здесь E представляет собой энергию частицы, а J — момент импульса в направлении оси z. Имеем

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + J\varphi + S_r(E, J, r). \qquad (3)$$

Отсюда получаем

$$\frac{E^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{J^2}{r^2} - m^2 = 0.$$

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$S_r(E,J,r) = \pm \int dr\, \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E,J,r)},$$
$$F(E,J,r) = E^2 - U^2(J,r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \tag{4}$$

Разделение переменных

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$\begin{aligned} S_r(E,J,r) &= \pm \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E,J,r)}, \\ F(E,J,r) &= E^2 - U^2(J,r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$
\begin{aligned}
S_r(E,J,r) &= \pm\int dr\,\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\sqrt{F(E,J,r)},\\
F(E,J,r) &= E^2-U^2(J,r) = E^2-\left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.
Теперь продифференцируем действие $S=-Et+J\varphi+S_r(E,J,r)$ по константам E,J:

$$
\frac{\partial S}{\partial E}=-t_0,\qquad \frac{\partial S}{\partial J}=\varphi_0,
\tag{5}
$$

Разделение переменных

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$\begin{aligned} S_r(E,J,r) &= \pm \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E,J,r)}, \\ F(E,J,r) &= E^2 - U^2(J,r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.
Теперь продифференцируем действие $S = -Et + J\varphi + S_r(E,J,r)$ по константам E, J:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi_0, \tag{5}$$

Явно получаем

$$t = t_0 \pm E \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{7}$$

Для собственного времени имеем

$$\tau = \tau_0 \pm m \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{8}$$

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$S_r(E,J,r) = \pm \int dr \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E,J,r)},$$
$$F(E,J,r) = E^2 - U^2(J,r) = E^2 - \left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right). \tag{4}$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.
Теперь продифференцируем действие $S=-Et+J\varphi+S_r(E,J,r)$ по константам E, J:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi_0, \tag{5}$$

Явно получаем

$$t = t_0 \pm E\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{7}$$

Для собственного времени имеем

$$\tau = \tau_0 \pm m\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{8}$$

Формально задача разделения переменных решена.

Разделение переменных

Подставляя это в уравнение (1) и интегрируя по r, получаем

$$\begin{aligned} S_r(E,J,r) &= \pm\int dr\,\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\sqrt{F(E,J,r)}, \\ F(E,J,r) &= E^2-U^2(J,r) = E^2-\left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.
Теперь продифференцируем действие $S=-Et+J\varphi+S_r(E,J,r)$ по константам E,J:

$$\frac{\partial S}{\partial E}=-t_0,\qquad \frac{\partial S}{\partial J}=\varphi_0, \tag{5}$$

Явно получаем

$$t = t_0 \pm E\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{7}$$

Для собственного времени имеем

$$\tau = \tau_0 \pm m\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{8}$$

Формально задача разделения переменных решена. Однако это решение локальное в окрестности любой точки, где $F(E,J,r)>0$. Теперь надо изучить глобальное устройство мировых линий.

Пределы радиального движения частицы

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы?

Пределы радиального движения частицы

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{9}$$

Пределы радиального движения частицы

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E,J,r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{9}$$

Обратим внимание, что уравнение можно решать и при $r > r_g$ и при $r < r_g$, причем траектория переходит из одной области в другую непрерывно,

Пределы радиального движения частицы

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{9}$$

Обратим внимание, что уравнение можно решать и при $r > r_g$ и при $r < r_g$, причем траектория переходит из одной области в другую непрерывно, в то время как время t испытывает бесконечных разрыв в силу логарифмической расходимости в (6). Это связано с тем, что шварцшильдовские карты не сшиваются непрерывно.

Пределы радиального движения частицы

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{9}$$

Обратим внимание, что уравнение можно решать и при $r > r_g$ и при $r < r_g$, причем траектория переходит из одной области в другую непрерывно, в то время как время t испытывает бесконечных разрыв в силу логарифмической расходимости в (6). Это связано с тем, что шварцшильдовские карты не сшиваются непрерывно.

Решения уравнения

$$F(E, J, r_*) \equiv E^2 - U^2(J, r_*) = 0 \tag{10}$$

дают точки поворота, где направление радиального движения (знаки $\pm$ в (6), (7)) меняется на противоположное.

В каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы? Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E, J, r) \geq 0, \qquad r > 0. \tag{9}$$

Обратим внимание, что уравнение можно решать и при $r > r_g$ и при $r < r_g$, причем траектория переходит из одной области в другую непрерывно, в то время как время t испытывает бесконечных разрыв в силу логарифмической расходимости в (6). Это связано с тем, что шварцшильдовские карты не сшиваются непрерывно.
Решения уравнения

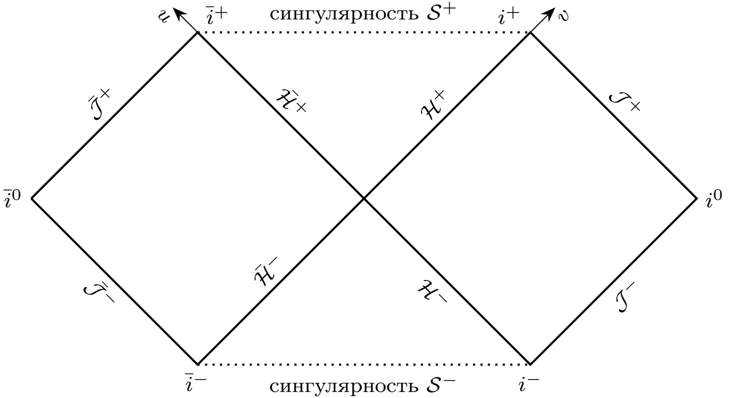
$$F(E, J, r_*) \equiv E^2 - U^2(J, r_*) = 0 \tag{10}$$

дают точки поворота, где направление радиального движения (знаки $\pm$ в (6), (7)) меняется на противоположное.
Обратим внимание, что

$$U^2(J, \infty) = m^2, \quad U^2(J, r_g) = 0.$$

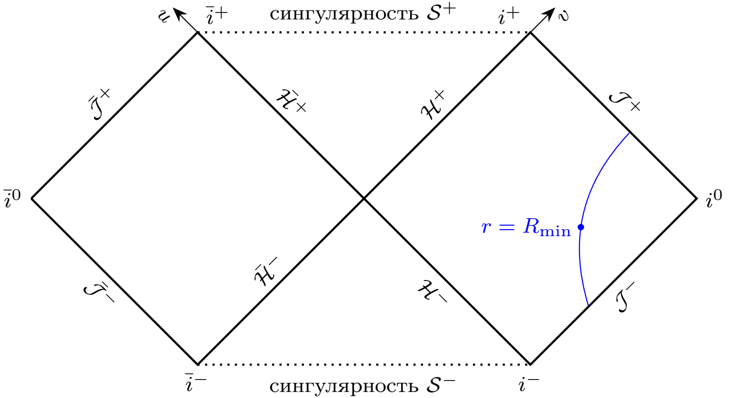
Это две точки, через которые обязательно проходит график функции $U^2(J, r)$.

Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:



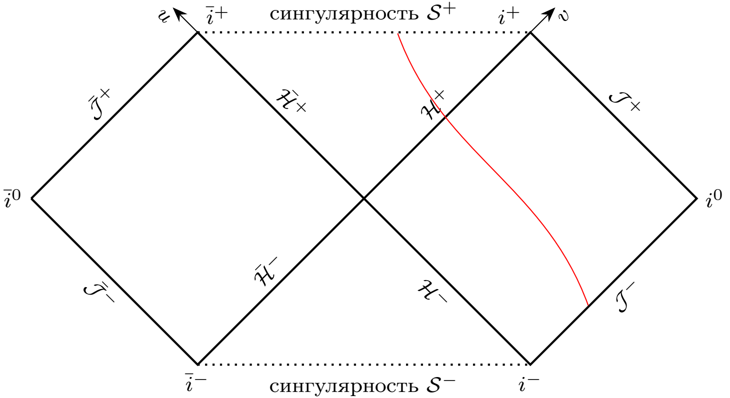
Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:

1. Инфинитное движение: $\mathcal{J}^- \to (r = R_{\min} > r_g) \to \mathcal{J}^+$.



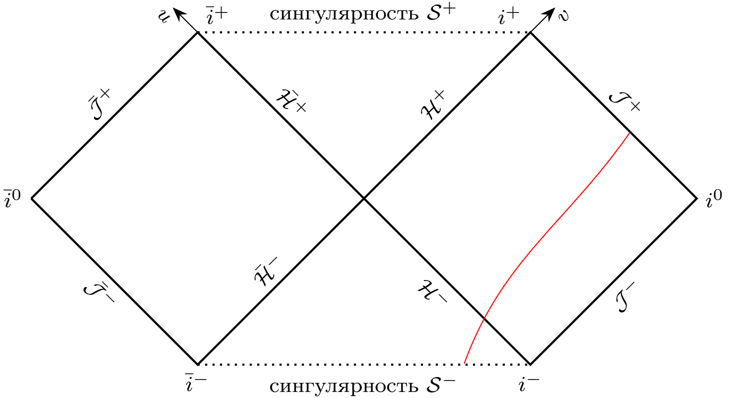
Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:

1. Инфинитное движение: $\mathcal{J}^- \to (r = R_{\min} > r_g) \to \mathcal{J}^+$.
2. «Инфинитно-сингулярное» движение: $\mathcal{J}^- \to \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}^+$



Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:

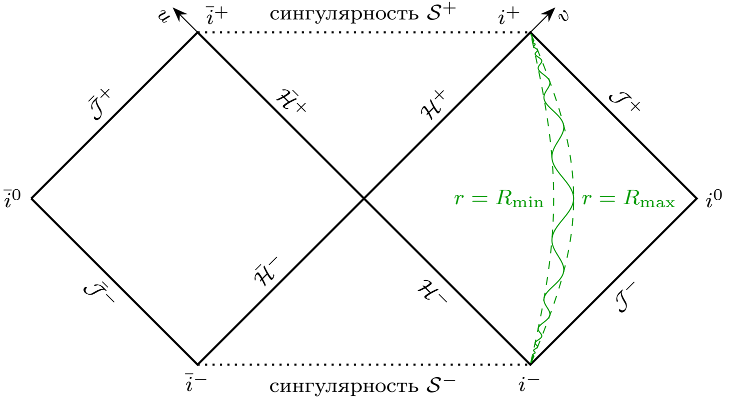
1. Инфинитное движение: $\mathcal{J}^- \to (r = R_{\min} > r_g) \to \mathcal{J}^+$.
2. «Инфинитно-сингулярное» движение: $\mathcal{J}^- \to \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}^+$ или $\mathcal{S}^- \to \mathcal{H}^- \to \mathcal{J}^+$.



Виды движения частицы

Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:

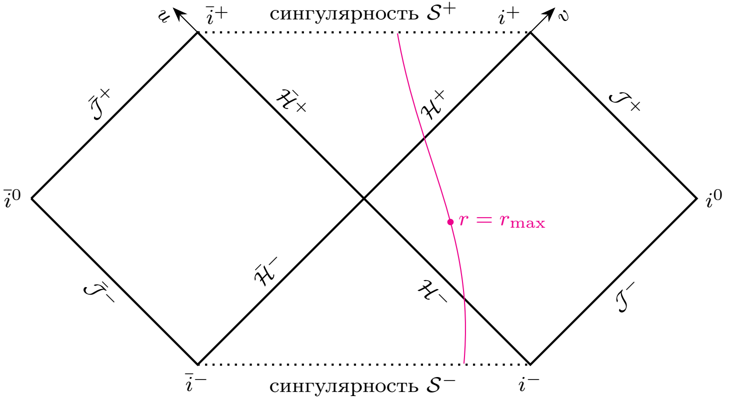
1. Инфинитное движение: $\mathcal{J}^- \to (r = R_{\min} > r_g) \to \mathcal{J}^+$.
2. «Инфинитно-сингулярное» движение: $\mathcal{J}^- \to \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}^+$ или $\mathcal{S}^- \to \mathcal{H}^- \to \mathcal{J}^+$.
3. Финитное («орбитальное») движение: $R_{\min} \le r \le R_{\max}$.



Виды движения частицы

Рассмотрим основные виды движения частицы в метрике Шварцшильда:

1. Инфинитное движение: $\mathcal{J}^- \to (r = R_{\min} > r_g) \to \mathcal{J}^+$.
2. «Инфинитно-сингулярное» движение: $\mathcal{J}^- \to \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}^+$ или $\mathcal{S}^- \to \mathcal{H}^- \to \mathcal{J}^+$.
3. Финитное («орбитальное») движение: $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$.
4. «Финитно-сингулярное» движение: $\mathcal{S}^- \to \mathcal{H}^- \to (r = r_{\max}) \to \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}^+$.



Точки поворота. Случай $J = 0$

Функция $F(E, J, r)$ является полиномом третьей степени обратного расстояния $\xi = r^{-1}$:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2.$$

Поэтому она имеет не более трех положительных корней.

Точки поворота. Случай $J = 0$

Функция $F(E, J, r)$ является полиномом третьей степени обратного расстояния $\xi = r^{-1}$:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2.$$

Поэтому она имеет не более трех положительных корней.
Начнем со случая $J = 0$. В этом случае функция F линейна по ξ:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = m^2 r_g \xi + E^2 - m^2,$$

Точки поворота. Случай $J = 0$

Функция $F(E, J, r)$ является полиномом третьей степени обратного расстояния $\xi = r^{-1}$:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2.$$

Поэтому она имеет не более трех положительных корней.
Начнем со случая $J = 0$. В этом случае функция F линейна по ξ:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = m^2 r_g \xi + E^2 - m^2,$$

и уравнение $F = 0$ имеет единственный корень, отвечающий точке

$$r_{\max} = \frac{r_g}{1 - E^2/m^2}.$$

Точки поворота. Случай $J = 0$

Функция $F(E, J, r)$ является полиномом третьей степени обратного расстояния $\xi = r^{-1}$:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2.$$

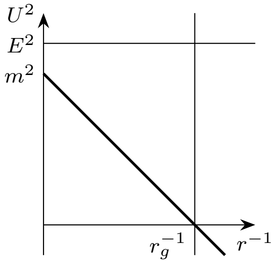
Поэтому она имеет не более трех положительных корней.
Начнем со случая $J = 0$. В этом случае функция F линейна по ξ:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = m^2 r_g \xi + E^2 - m^2,$$

и уравнение $F = 0$ имеет единственный корень, отвечающий точке

$$r_{\max} = \frac{r_g}{1 - E^2/m^2}.$$

- Если $E > m$, точек поворота нет и движение «инфинитно-сингулярное».



Точки поворота. Случай $J = 0$

Функция $F(E, J, r)$ является полиномом третьей степени обратного расстояния $\xi = r^{-1}$:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = r_g J^2 \xi^3 - J^2 \xi^2 + m^2 r_g \xi + E^2 - m^2.$$

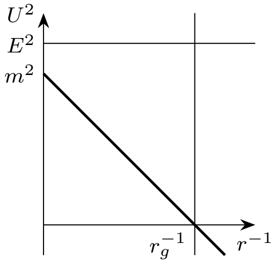
Поэтому она имеет не более трех положительных корней.
Начнем со случая $J = 0$. В этом случае функция F линейна по ξ:

$$F(E, J, \xi^{-1}) = m^2 r_g \xi + E^2 - m^2,$$

и уравнение $F = 0$ имеет единственный корень, отвечающий точке

$$r_{\max} = \frac{r_g}{1 - E^2/m^2}.$$

- Если $E > m$, точек поворота нет и движение «инфинитно-сингулярное».
- Если $E < m$, имеем $r_{\max} > 0$, и это точка поворота. Так как $E^2 \geq 0$, имеем $r_{\max} \geq r_g$. Движение «финитно-сингулярное».



Точки поворота. Случай $|J| \le \sqrt{3} m r_g$

Исследуем корни уравнения

$$F(E, J, \xi_*^{-1}) \equiv r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0. \tag{11}$$

Исследуем корни уравнения

$$F(E, J, \xi_*^{-1}) \equiv r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0. \tag{11}$$

Для этого сначала найдем экстремумы функции F:

$$\begin{gathered}
\xi_\pm = \frac{1}{3r_g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}}\right), \\
F(E, J, \xi_\pm^{-1}) = E^2 - E_\pm^2, \quad E_\pm^2 = \frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{27}\frac{J^2}{r_g^2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}\right)^{3/2}\right).
\end{gathered} \tag{12}$$

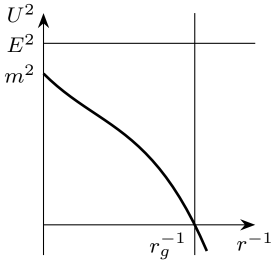
Исследуем корни уравнения

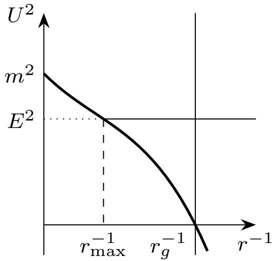
$$F(E, J, \xi_*^{-1}) \equiv r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0. \qquad (11)$$

Для этого сначала найдем экстремумы функции F:

$$\xi_\pm = \frac{1}{3r_g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}}\right),$$
$$F(E, J, \xi_\pm^{-1}) = E^2 - E_\pm^2, \quad E_\pm^2 = \frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{27}\frac{J^2}{r_g^2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}\right)^{3/2}\right). \qquad (12)$$

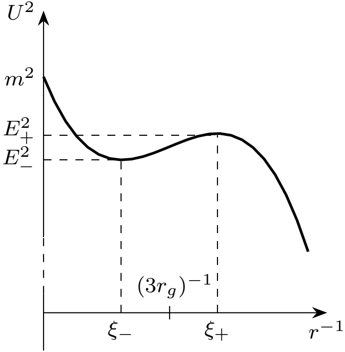
При $|J| \le \sqrt{3} m r_g$ экстремумов нет и уравнение (11) имеет ровно один вещественный корень и он положителен при $E < m$:





В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$.

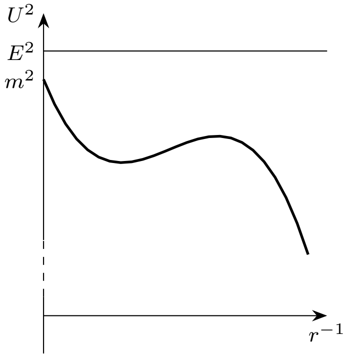
В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$. Имеется четыре ситуации:



Точки поворота. Случай $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$

В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$. Имеется четыре ситуации:

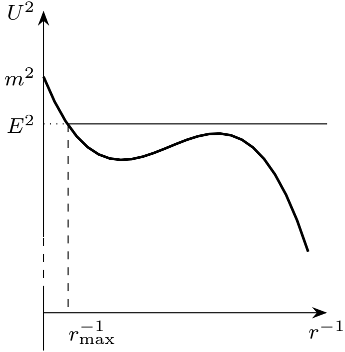
1. $E \geq m$: «инфинитно-сингулярное» движение.



Точки поворота. Случай $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$

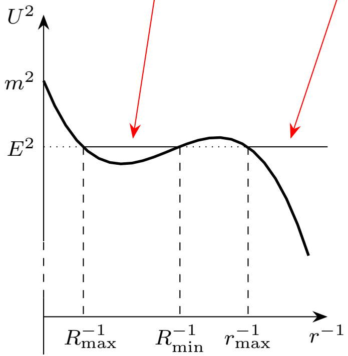
В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$. Имеется четыре ситуации:

1. $E \geq m$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $E_+ < E < m$: «финитно-сингулярное» движение.



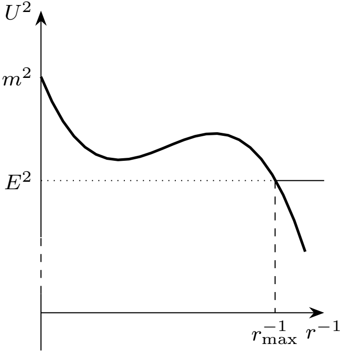
В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$. Имеется четыре ситуации:

1. $E \geq m$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $E_+ < E < m$: «финитно-сингулярное» движение.
3. $E_- \leq E \leq E_+$. Две области: финитного и «финитно-сингулярного» движения.



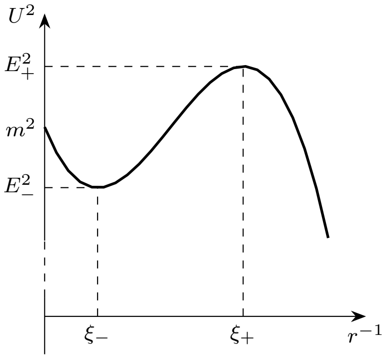
В интервале $\sqrt{3}mr_g < |J| < 2mr_g$ имеется два экстремума $\xi_- < (3r_g)^{-1} < \xi_+$, и $E_+ < m$. Имеется четыре ситуации:

1. $E \geq m$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $E_+ < E < m$: «финитно-сингулярное» движение.
3. $E_- \leq E \leq E_+$. Две области: финитного и «финитно-сингулярного» движения.
4. $E < E_-$: «финитно-сингулярное» движение.



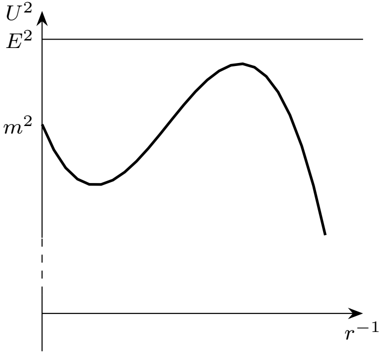
Точки поворота. Случай $J \geq 2mr_g$

В случае $J \geq 2mr_g$ имеется потенциальная яма, но барьер, отделяющий ее от сингулярностей выше массы: $E_+ > m$. Имеем следующие четыре ситуации



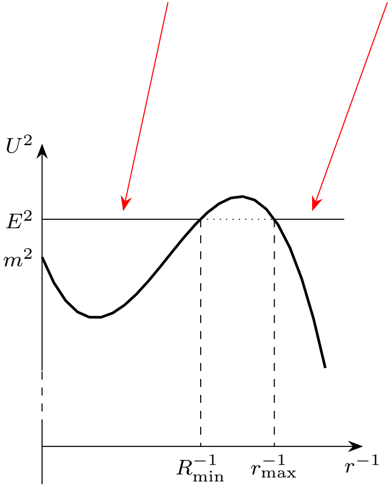
В случае $J \geq 2mr_g$ имеется потенциальная яма, но барьер, отделяющий ее от сингулярностей выше массы: $E_+ > m$. Имеем следующие четыре ситуации

1. $E > E_+$: «инфинитно-сингулярное» движение.



В случае $J \geq 2mr_g$ имеется потенциальная яма, но барьер, отделяющий ее от сингулярностей выше массы: $E_+ > m$. Имеем следующие четыре ситуации

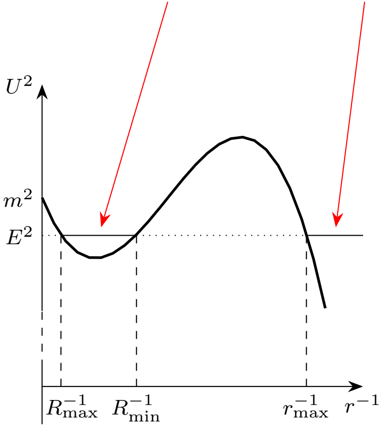
1. $E > E_+$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $m \leq E \leq E_+$. Две области: инфинитного и «финитно-сингулярного» движения.



Точки поворота. Случай $J \geq 2mr_g$

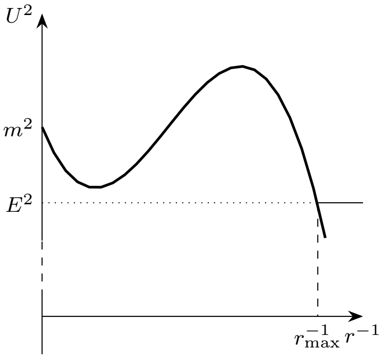
В случае $J \geq 2mr_g$ имеется потенциальная яма, но барьер, отделяющий ее от сингулярностей выше массы: $E_+ > m$. Имеем следующие четыре ситуации

1. $E > E_+$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $m \leq E \leq E_+$. Две области: инфинитного и «финитно-сингулярного» движения.
3. $E_- \leq E < m$. Две области: финитного и «финитно-сингулярного» движения.



В случае $J \geq 2mr_g$ имеется потенциальная яма, но барьер, отделяющий ее от сингулярностей выше массы: $E_+ > m$. Имеем следующие четыре ситуации

1. $E > E_+$: «инфинитно-сингулярное» движение.
2. $m \leq E \leq E_+$. Две области: инфинитного и «финитно-сингулярного» движения.
3. $E_- \leq E < m$. Две области: финитного и «финитно-сингулярного» движения.
4. $E < E_-$: «финитно-сингулярное» движение.



Финитное движение характеризуется радиусом перицентра $R_{\min}$ и радиусом апоцентра $R_{\max}$ (в случае Солнечной системы говорят об перигелии и афелии соответственно).

Финитное движение характеризуется радиусом перицентра $R_{\min}$ и радиусом апоцентра $R_{\max}$ (в случае Солнечной системы говорят об перигелии и афелии соответственно).
Найдем период радиального движения $T_{\text{пер}}$ и угол $\Phi_{\text{пер}}$, набегающий за этот период:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{13}$$

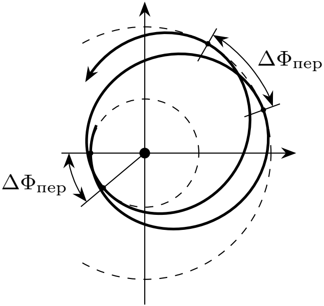
$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{14}$$

Финитное движение характеризуется радиусом перицентра $R_{\min}$ и радиусом апоцентра $R_{\max}$ (в случае Солнечной системы говорят об перигелии и афелии соответственно).
Найдем период радиального движения $T_{\text{пер}}$ и угол $\Phi_{\text{пер}}$, набегающий за этот период:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E, J, r)}}, \tag{13}$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \tag{14}$$

Разница $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$ даст смещение перицентра за один период:

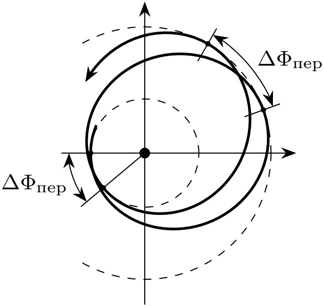


Финитное движение характеризуется радиусом перицентра $R_{\min}$ и радиусом апоцентра $R_{\max}$ (в случае Солнечной системы говорят об перигелии и афелии соответственно).
Найдем период радиального движения $T_{\text{пер}}$ и угол $\Phi_{\text{пер}}$, набегающий за этот период:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{F(E, J, r)}}, \tag{13}$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E, J, r)}}. \tag{14}$$

Разница $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$ даст смещение перицентра за один период:



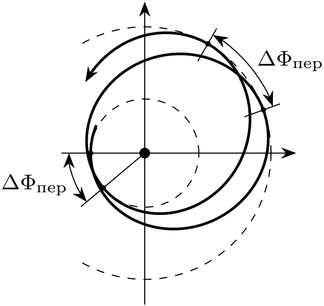
Сидерический период, то есть период обращения не определен.

Финитное движение характеризуется радиусом перицентра $R_{\min}$ и радиусом апоцентра $R_{\max}$ (в случае Солнечной системы говорят об перигелии и афелии соответственно).
Найдем период радиального движения $T_{\text{пер}}$ и угол $\Phi_{\text{пер}}$, набегающий за этот период:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}, \tag{13}$$

$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}. \tag{14}$$

Разница $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$ даст смещение перицентра за один период:



Сидерический период, то есть период обращения не определен. Определен лишь средний сидерический период:

$$\overline{T_{\text{сид}}} = \frac{2\pi}{\Phi_{\text{пер}}} T_{\text{пер}}. \tag{15}$$

Семинар. Падение пылевидной сферы на черную дыру

Рассмотрим простейшую модель воздействия падающего вещества на черную дыру: пылевая сфера массы $m \ll M$ и энергии $\delta E \ll M$.

Семинар. Падение пылевидной сферы на черную дыру

Рассмотрим простейшую модель воздействия падающего вещества на черную дыру: пылевая сфера массы $m \ll M$ и энергии $\delta E \ll M$. Функция $r(t)$ есть решение уравнения движения с $J = 0$ для частицы с отношением энергии к массе $\varepsilon = \delta E/m$ в поле массивного тела массы M.

Рассмотрим простейшую модель воздействия падающего вещества на черную дыру: пылевая сфера массы $m \ll M$ и энергии $\delta E \ll M$. Функция $r(t)$ есть решение уравнения движения с $J = 0$ для частицы с отношением энергии к массе $\varepsilon = \delta E/m$ в поле массивного тела массы M. Кроме того, будем предполагать

$$G\,\delta E, Gm \ll l, \tag{16}$$

где l — толщина слоя.

Рассмотрим простейшую модель воздействия падающего вещества на черную дыру: пылевая сфера массы $m \ll M$ и энергии $\delta E \ll M$. Функция $r(t)$ есть решение уравнения движения с $J = 0$ для частицы с отношением энергии к массе $\varepsilon = \delta E/m$ в поле массивного тела массы M. Кроме того, будем предполагать

$$G\,\delta E, Gm \ll l, \tag{16}$$

где l — толщина слоя.

Мы хотим сшить два решения Шварцшильда вне и внутри сферы. Будем искать решение в виде

$$\begin{gathered} ds^2 = \mathrm{e}^{2F(t,r)-2h(t,r)}\,dt^2 - e^{2h(t,r)}\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \\ F(t,r) = F_\sigma(t), \quad e^{-2h(t,r)} = 1 - \frac{r_{g\sigma}}{r}, \quad \sigma = \begin{cases} + & \text{при } r > r(t); \\ - & \text{при } r < r(t). \end{cases} \end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим простейшую модель воздействия падающего вещества на черную дыру: пылевая сфера массы $m \ll M$ и энергии $\delta E \ll M$. Функция $r(t)$ есть решение уравнения движения с $J = 0$ для частицы с отношением энергии к массе $\varepsilon = \delta E/m$ в поле массивного тела массы M. Кроме того, будем предполагать

$$G\,\delta E, Gm \ll l, \tag{16}$$

где l — толщина слоя.

Мы хотим сшить два решения Шварцшильда вне и внутри сферы. Будем искать решение в виде

$$\begin{gathered} ds^2 = \mathrm{e}^{2F(t,r)-2h(t,r)}\,dt^2 - e^{2h(t,r)}\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \\ F(t,r) = F_\sigma(t), \quad e^{-2h(t,r)} = 1 - \frac{r_{g\sigma}}{r}, \quad \sigma = \begin{cases} + & \text{при } r > r(t); \\ - & \text{при } r < r(t). \end{cases} \end{gathered} \tag{17}$$

В конце концов нас будут интересовать разрывы $\delta r_g = r_{g+} - r_{g-}$ и $\delta F(t) = F_+(t) - F_-(t)$.

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$.

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{18}$$

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{18}$$

Задача 1. Разделите переменные в функции $\tau(t,r)$, найдите дифференциал $d\tau(t,r)$, 4-скорость частицы $u(t)$ и 3-скорость $\dot{r}(t)$.

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$e^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - e^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{18}$$

Задача 1. Разделите переменные в функции $\tau(t,r)$, найдите дифференциал $d\tau(t,r)$, 4-скорость частицы $u(t)$ и 3-скорость $\dot{r}(t)$. Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t,r,\varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r,\varepsilon), \tag{19}$$

где $f'(t) = e^{F(t)}$.

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t, r) \simeq F(t)$, $h(t, r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{18}$$

Задача 1. Разделите переменные в функции $\tau(t, r)$, найдите дифференциал $d\tau(t, r)$, 4-скорость частицы $u(t)$ и 3-скорость $\dot{r}(t)$. Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t, r, \varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r, \varepsilon), \tag{19}$$

где $f'(t) = \mathrm{e}^{F(t)}$. Подставляя в (18), находим

$$\tilde{\tau}(r, \varepsilon) = \int dr\, e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}. \tag{20}$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам.

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \qquad (18)$$

Задача 1. Разделите переменные в функции $\tau(t,r)$, найдите дифференциал $d\tau(t,r)$, 4-скорость частицы $u(t)$ и 3-скорость $\dot{r}(t)$. Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t,r,\varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r,\varepsilon), \qquad (19)$$

где $f'(t) = \mathrm{e}^{F(t)}$. Подставляя в (18), находим

$$\tilde{\tau}(r,\varepsilon) = \int dr\, e^{2h}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}. \qquad (20)$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам. Находим

$$d\tau = \tau_{,t}\, dt + \tau_{,r}\, dr = \mathrm{e}^F \varepsilon\, dt + \mathrm{e}^{2h}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dr. \qquad (21)$$

Изучим падение сферы на черную дыру, пренебрегая разрывами, то есть считая $F(t,r) \simeq F(t)$, $h(t,r) \simeq h(r)$. Напишем уравнение Гамильтона—Якоби на собственное время

$$\mathrm{e}^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - \mathrm{e}^{-2h(r)}\tau_{,r}^2 = 1. \tag{18}$$

Задача 1. Разделите переменные в функции $\tau(t,r)$, найдите дифференциал $d\tau(t,r)$, 4-скорость частицы $u(t)$ и 3-скорость $\dot{r}(t)$. Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t,r,\varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde{\tau}(r,\varepsilon), \tag{19}$$

где $f'(t) = \mathrm{e}^{F(t)}$. Подставляя в (18), находим

$$\tilde{\tau}(r,\varepsilon) = \int dr\, e^{2h}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}. \tag{20}$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам. Находим

$$d\tau = \tau_{,t}\, dt + \tau_{,r}\, dr = \mathrm{e}^F \varepsilon\, dt + \mathrm{e}^{2h}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dr. \tag{21}$$

Так как $u_\mu = \tau_{,\mu}$, имеем

$$u^t = e^{h-k}\varepsilon, \quad u^r = -\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}, \quad \dot{r}(t) = u^r/u^t = -e^{k-h}\sqrt{1-\varepsilon^{-1}e^{-2h}}.$$

Задача 2. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

Задача 2. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h} \varepsilon\, dr. \tag{22}$$

Задача 2. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h} \varepsilon\, dr. \tag{22}$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l), \tag{23}$$

где l — отклонение от положения сферы.

Задача 2. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h} \varepsilon\, dr. \tag{22}$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l), \tag{23}$$

где l — отклонение от положения сферы.
Задача 3. Найдите плотность ρ в координатах t, r.

Задача 3. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h} \varepsilon\, dr. \tag{22}$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l), \tag{23}$$

где l — отклонение от положения сферы.

Задача 3. Найдите плотность ρ в координатах t, r. Полагая $dt = 0$, выражаем dr через dl:

$$dr = \mathrm{e}^{-2h} \varepsilon^{-1}\, dl,$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации.

Задача 3. Найдите форму dl ортогональную форме $d\tau$.

$$dl = \mathrm{e}^F \sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\, dt + \mathrm{e}^{2h}\varepsilon\, dr. \tag{22}$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2}\delta(l), \tag{23}$$

где l — отклонение от положения сферы.
Задача 3. Найдите плотность ρ в координатах t, r. Полагая $dt = 0$, выражаем dr через dl:

$$dr = \mathrm{e}^{-2h}\varepsilon^{-1}\, dl,$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации. Получаем

$$\rho(t,r) = \frac{m}{4\pi r^2 \varepsilon \mathrm{e}^{2h}}\delta(r - r(t)). \tag{24}$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu}$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$
\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = \\
R^{\vartheta}_{\vartheta} &= R^{\varphi}_{\varphi} = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} =
\end{aligned} \tag{25}
$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu}$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$
\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} =
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} =
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\mathrm{e}^{2h-F}\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\,\delta(r - r(t)), \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} =
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu}$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$
\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\mathrm{e}^{2h-F}\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\,\delta(r - r(t)), \\
R^{\vartheta}_{\vartheta} &= R^{\varphi}_{\varphi} = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{2h}r^2}\,\delta(r - r(t)),
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Задача 4. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\mathrm{e}^{2h-F}\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\,\delta(r - r(t)), \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{2h}r^2}\delta(r - r(t)),
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача 5. Найдите $k' \pm h'$.

$$\begin{aligned}
k' + h' &= \\
\\
k' - h' &=
\end{aligned} \tag{26}$$

Задача 5. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\mathrm{e}^{2h-F}\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\,\delta(r - r(t)), \\
R^\vartheta_\vartheta = R^\varphi_\varphi &= -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{2h}r^2}\,\delta(r - r(t)),
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача 5. Найдите $k' \pm h'$.

$$\begin{aligned}
k' + h' &= \frac{2G\,\delta E}{r}\left(\mathrm{e}^{2h} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
k' - h' &=
\end{aligned} \tag{26}$$

Задача 5. Найдите компоненты тензора энергии-импульса $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$ и подставьте их в уравнения Эйнштейна.

$$\begin{aligned}
R^t_t &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= \frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^r_r &= (-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2)\mathrm{e}^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right)\mathrm{e}^{-2h} \\
&= -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
R^t_r &= \frac{2\mathrm{e}^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{2G\,\delta E}{r^2}\mathrm{e}^{2h-F}\varepsilon^{-1}\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{e}^{-2h}}\,\delta(r - r(t)), \\
R^\vartheta_\vartheta &= R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1)\mathrm{e}^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{2h}r^2}\,\delta(r - r(t)),
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача 5. Найдите $k' \pm h'$.

$$\begin{aligned}
k' + h' &= \frac{2G\,\delta E}{r}\left(\mathrm{e}^{2h} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)\delta(r - r(t)), \\
k' - h' &= -\frac{G\,\delta E}{\varepsilon^2 r}\,\delta(r - r(t)) + \frac{\mathrm{e}^{2h} - 1}{r}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Задача 6. Найдите скачки δh, δk и выразите их явно через r_g, а через них выразите δr_g и $\delta F(t)$.

$$\delta k = \qquad\qquad \delta h = \tag{27}$$

Отсюда

$$\delta r_g = \qquad\qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = \tag{28}$$

Задача 6. Найдите скачки δh, δk и выразите их явно через r_g, а через них выразите δr_g и $\delta F(t)$.

$$\delta k = G\delta E\left(\frac{1}{r-r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r}\right), \qquad \delta h = \tag{27}$$

Отсюда

$$\delta r_g = \qquad\qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = \tag{28}$$

Задача 6. Найдите скачки δh, δk и выразите их явно через r_g, а через них выразите δr_g и $\delta F(t)$.

$$\delta k = G\delta E\left(\frac{1}{r - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r}\right), \qquad \delta h = \frac{G\,\delta E}{r - r_g}. \tag{27}$$

Отсюда

$$\delta r_g = \qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = \tag{28}$$

Задача 6. Найдите скачки δh, δk и выразите их явно через r_g, а через них выразите δr_g и $\delta F(t)$.

$$\delta k = G\delta E \left(\frac{1}{r - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r} \right), \qquad \delta h = \frac{G\,\delta E}{r - r_g}. \tag{27}$$

Отсюда

$$\delta r_g = 2G\,\delta E, \qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = \tag{28}$$

Задача 6. Найдите скачки δh, δk и выразите их явно через r_g, а через них выразите δr_g и $\delta F(t)$.

$$\delta k = G\delta E\left(\frac{1}{r-r_g}-\frac{1}{\varepsilon^2 r}\right), \qquad \delta h = \frac{G\,\delta E}{r-r_g}. \tag{27}$$

Отсюда

$$\delta r_g = 2G\,\delta E, \qquad \delta F(t) = \delta k(r(t)) + \delta h(r(t)) = G\,\delta E\left(\frac{2}{r(t)-r_g}-\frac{1}{\varepsilon^2 r(t)}\right). \tag{28}$$