

Лекция 14. Космологические решения. Модели Фридмана

Михаил Лашкевич

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом деле гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.
Предположения космологических моделей:

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 Однородность.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.
- 2 **Изотропия.**

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.
- 2 **Изотропия.** Лучшим свидетельством изотропии является изотропия реликтового излучения.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.
- 2 **Изотропия.** Лучшим свидетельством изотропии является изотропия реликтового излучения. Относительная температура реликтового излучения меняется в разных направлениях в пределах 10^{-3} , однако это дипольная анизотропия. Ее следует приписать движению Солнечной системы в системе отсчета реликтового излучения со скоростью примерно 370 км/с.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.
- 2 **Изотропия.** Лучшим свидетельством изотропии является изотропия реликтового излучения. Относительная температура реликтового излучения меняется в разных направлениях в пределах 10^{-3} , однако это дипольная анизотропия. Ее следует приписать движению Солнечной системы в системе отсчета реликтового излучения со скоростью примерно 370 км/с. «Настоящая» (квадрупольная и выше) неоднородность составляет $\sim 10^{-4}$.

До сих пор мы рассматривали пространство-время как асимптотически плоское вдали от гравитирующих тел. На самом гравитирующие тела заполняют пространство на всех наблюдаемых расстояниях, хотя и не очень равномерно. Поэтому такое описание недостаточно.

Предположения космологических моделей:

- 1 **Однородность.** В природе мы наблюдаем сгустки вещества — планеты, звезды, звездные скопления, галактики, скопления галактик. Кажется, что вещество распределено крайне неравномерно. Однако на масштабах больше 100 МПс Вселенную можно считать однородной.
- 2 **Изотропия.** Лучшим свидетельством изотропии является изотропия реликтового излучения. Относительная температура реликтового излучения меняется в разных направлениях в пределах 10^{-3} , однако это дипольная анизотропия. Ее следует приписать движению Солнечной системы в системе отсчета реликтового излучения со скоростью примерно 370 км/с. «Настоящая» (квадрупольная и выше) неоднородность составляет $\sim 10^{-4}$.

Из этих предположений следует однородность и изотропия усредненного тензора энергии-импульса и кривизны.

Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые пространства постоянной кривизны.

Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые **пространства постоянной кривизны**. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{ji})\xi^{ji}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (1)$$

так что K не зависит от бивектора ξ^{ij} .

Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые **пространства постоянной кривизны**. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{ji})\xi^{ji}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (1)$$

так что K не зависит от бивектора ξ^{ij} . Можно доказать (при $d > 2$), что в этом случае K не зависит от точки x

Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые **пространства постоянной кривизны**. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{ji})\xi^{ji}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (1)$$

так что K не зависит от бивектора ξ^{ij} . Можно доказать (при $d > 2$), что в этом случае K не зависит от точки x и

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{ij} = (d-1)Kg_{ij}, \quad R = d(d-1)K, \quad (2)$$

где d — размерность многообразия.

Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые **пространства постоянной кривизны**. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{ji})\xi^{ji}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (1)$$

так что K не зависит от бивектора ξ^{ij} . Можно доказать (при $d > 2$), что в этом случае K не зависит от точки x и

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{ij} = (d-1)Kg_{ij}, \quad R = d(d-1)K, \quad (2)$$

где d — размерность многообразия. Иными словами, геометрическая однородность пространства следует из его изотропии.

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трехмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трёхмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \\ K &= 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трехмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \\ K &= 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Пространства постоянной **положительной** кривизны получаются ограничением метрики плоского четырехмерного пространства с сигнатурой $(++++)$ на сферу $\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$.

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трёхмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \\ K &= 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пространства постоянной **положительной** кривизны получаются ограничением метрики плоского четырёхмерного пространства с сигнатурой $(++++)$ на сферу $\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$. Используя полярные координаты χ, ϑ, φ , получаем

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 1/a^2, \quad 0 \leq \chi, \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трёхмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \\ K &= 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пространства постоянной **положительной** кривизны получаются ограничением метрики плоского четырёхмерного пространства с сигнатурой $(++++)$ на сферу $\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$. Используя полярные координаты χ, ϑ, φ , получаем

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 1/a^2, \quad 0 \leq \chi, \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Пространство постоянной **отрицательной** кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры $(+++ -)$ плоского пространства на трёхмерный двуполостный гиперboloид $\sum_{I=1}^3 (X^I)^2 - (X^4)^2 = -a^2$:

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= -1/a^2, \quad 0 \leq \chi \leq \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трёхмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = a^2(d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 0, \quad 0 \leq \chi < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пространства постоянной **положительной** кривизны получаются ограничением метрики плоского четырёхмерного пространства с сигнатурой $(++++)$ на сферу $\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$. Используя полярные координаты χ, ϑ, φ , получаем

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 1/a^2, \quad 0 \leq \chi, \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Пространство постоянной **отрицательной** кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры $(+++)$ плоского пространства на трёхмерный двуполостный гиперboloид $\sum_{I=1}^3 (X^I)^2 - (X^4)^2 = -a^2$:

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= -1/a^2, \quad 0 \leq \chi \leq \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Если в случае плоского пространства мы изменим масштаб $r = a\chi$, то получим .

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трёхмерное пространство сигнатуры $(+++)$.

Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$\begin{aligned} dl^2 &= \delta_{ij} dx^i dx^j = a^2(d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 0, \quad 0 \leq \chi < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пространства постоянной **положительной** кривизны получаются ограничением метрики плоского четырёхмерного пространства с сигнатурой $(++++)$ на сферу $\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$. Используя полярные координаты χ, ϑ, φ , получаем

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= 1/a^2, \quad 0 \leq \chi, \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Пространство постоянной **отрицательной** кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры $(+++ -)$ плоского пространства на трёхмерный двуполостный гиперboloид $\sum_{I=1}^3 (X^I)^2 - (X^4)^2 = -a^2$:

$$\begin{aligned} dl^2 &= a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \\ K &= -1/a^2, \quad 0 \leq \chi \leq \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Если в случае плоского пространства мы изменим масштаб $r = a\chi$, то получим . Теперь три выражения отличаются зависимостью от χ .

Замечание о факторпространствах

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно.

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно. В частности, сферу можно профакторизовать по конечной группе. Тогда объем пространства будет

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (6)$$

где N — порядок группы.

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно. В частности, сферу можно профакторизовать по конечной группе. Тогда объем пространства будет

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (6)$$

где N — порядок группы.

Тем не менее, уравнения Эйнштейна, будучи локальными, не изменятся, и эволюция этих пространств не будет зависеть от этой группы. Кроме того, нет никаких наблюдательных указаний на нетривиальную топологию, хотя и нет наблюдений, прямо ее запрещающих.

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно. В частности, сферу можно профакторизовать по конечной группе. Тогда объем пространства будет

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (6)$$

где N — порядок группы.

Тем не менее, уравнения Эйнштейна, будучи локальными, не изменятся, и эволюция этих пространств не будет зависеть от этой группы. Кроме того, нет никаких наблюдательных указаний на нетривиальную топологию, хотя и нет наблюдений, прямо ее запрещающих. Поэтому для простоты мы будем считать группу тривиальной.

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно. В частности, сферу можно профакторизовать по конечной группе. Тогда объем пространства будет

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (6)$$

где N — порядок группы.

Тем не менее, уравнения Эйнштейна, будучи локальными, не изменятся, и эволюция этих пространств не будет зависеть от этой группы. Кроме того, нет никаких наблюдательных указаний на нетривиальную топологию, хотя и нет наблюдений, прямо ее запрещающих. Поэтому для простоты мы будем считать группу тривиальной.

Мы будем называть космологические модели с пространствами отрицательной кривизны **открытыми**, положительной кривизны — **замкнутыми**, а нулевой кривизны — **плоскими**.

Вообще-то пространство постоянной кривизны может быть факторпространством одного из этих трех пространств по какой-то дискретной группе движений, действующей на этих пространствах свободно. В частности, сферу можно профакторизовать по конечной группе. Тогда объем пространства будет

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (6)$$

где N — порядок группы.

Тем не менее, уравнения Эйнштейна, будучи локальными, не изменятся, и эволюция этих пространств не будет зависеть от этой группы. Кроме того, нет никаких наблюдательных указаний на нетривиальную топологию, хотя и нет наблюдений, прямо ее запрещающих. Поэтому для простоты мы будем считать группу тривиальной.

Мы будем называть космологические модели с пространствами отрицательной кривизны **открытыми**, положительной кривизны — **замкнутыми**, а нулевой кривизны — **плоскими**. Перейдем к космологическим моделям.

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства.

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

где функция $a(t)$ называется **масштабным фактором**, а $d\Omega_3^2$ метрика вида

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

где функция $a(t)$ называется **масштабным фактором**, а $d\Omega_3^2$ метрика вида

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если мы имеем систему тел, неподвижных в координатах χ, ϑ, φ , то для наблюдатель, сидящего на любом из этих тел,

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

где функция $a(t)$ называется **масштабным фактором**, а $d\Omega_3^2$ метрика вида

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если мы имеем систему тел, неподвижных в координатах χ, ϑ, φ , то для наблюдатель, сидящего на любом из этих тел, расстояние до других тел будет пропорционально $a(t)$,

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

где функция $a(t)$ называется **масштабным фактором**, а $d\Omega_3^2$ метрика вида

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если мы имеем систему тел, неподвижных в координатах χ, ϑ, φ , то для наблюдатель, сидящего на любом из этих тел, расстояние до других тел будет пропорционально $a(t)$, а часы будут идти со временем t .

Пространство-время не должно быть однородным и изотропным, но

- Должно быть $g_{0i} = 0$. Иначе нарушится пространственная изотропия.
- Коэффициент g_{00} не должен зависеть от пространственных координат. Иначе нарушится однородность пространства. \Rightarrow Преобразованием $\sqrt{g_{00}(t)} dt \rightarrow dt$ можно сделать систему координат глобально синхронной.
- Коэффициенты g_{ij} должны иметь вид $-a(t)\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны.

Следовательно имеем

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (7)$$

где функция $a(t)$ называется **масштабным фактором**, а $d\Omega_3^2$ метрика вида

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если мы имеем систему тел, неподвижных в координатах χ, ϑ, φ , то для наблюдатель, сидящего на любом из этих тел, расстояние до других тел будет пропорционально $a(t)$, а часы будут идти со временем t . Если $\dot{a}(t) > 0$ (расширяющаяся вселенная), расстояние до тел будет расти со временем.

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$.

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические.

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Масштабный фактор $a(\eta)$ здесь не имеет значения.

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Масштабный фактор $a(\eta)$ здесь не имеет значения. Мы можем отделить переменную η :

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Масштабный фактор $a(\eta)$ здесь не имеет значения. Мы можем отделить переменную η :

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Частота ε во времени η и частота $\omega(t)$ в синхронном времени связаны:

$$\omega(t) dt = \varepsilon d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\varepsilon}{a(t)}.$$

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Масштабный фактор $a(\eta)$ здесь не имеет значения. Мы можем отделить переменную η :

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Частота ε во времени η и частота $\omega(t)$ в синхронном времени связаны:

$$\omega(t) dt = \varepsilon d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\varepsilon}{a(t)}.$$

Если фотон испущен в момент времени t и зарегистрирован наблюдателем в момент времени $t_0 > t$, то его частота уменьшится в $a(t_0)/a(t)$ раз. Это явление называется **космологическим красным смещением**.

Альтернативная временная координата:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (9)$$

С такой координатой метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. В этой метрике удобно искать изотропные геодезические. Уравнение эйконала

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (11)$$

Масштабный фактор $a(\eta)$ здесь не имеет значения. Мы можем отделить переменную η :

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (12)$$

Частота ε во времени η и частота $\omega(t)$ в синхронном времени связаны:

$$\omega(t) dt = \varepsilon d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\varepsilon}{a(t)}.$$

Если фотон испущен в момент времени t и зарегистрирован наблюдателем в момент времени $t_0 > t$, то его частота уменьшится в $a(t_0)/a(t)$ раз. Это явление называется **космологическим красным смещением**. **Важно:** не путайте с эффектом Доплера. Космологическое смещение зависит только от масштабных факторов, но не от скоростей.

Используя стандартное определение красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (13)$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке **наблюдения**, а λ, ω — длина волны и частота в точке **испускания**,

Используя стандартное определение красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (13)$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке **наблюдения**, а λ, ω — длина волны и частота в точке **испускания**, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z. \quad (14)$$

Используя стандартное определение красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (13)$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке **наблюдения**, а λ, ω — длина волны и частота в точке **испускания**, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z. \quad (14)$$

Красное смещение является естественной мерой времени и расстояния для удаленных космических объектов в астрономии.

Используя стандартное определение красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (13)$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке **наблюдения**, а λ, ω — длина волны и частота в точке **испускания**, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z. \quad (14)$$

Красное смещение является естественной мерой времени и расстояния для удаленных космических объектов в астрономии.

Рассмотрим случай $z \ll 1$. Тогда

$$z = \frac{a(t_0) - a(t)}{a(t)} \simeq \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0 - t) = H(t_0)L, \quad (15)$$

где $L = t_0 - t$ — расстояние до источника, а $H(t)$ — **параметр Хаббла**:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (16)$$

Для измерения параметра Хаббла необходимо точно измерять расстояния до объектов. Ввиду систематических ошибок в измерении этих расстояний (неудачного выбора стандартных свечей) значение параметра Хаббла долгое время завышалось, и лишь недавно была получена сравнительно надежная оценка. Различные эксперименты в последнее время дают результаты вблизи значения $H(t_0) \simeq 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc} \simeq 2.2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \simeq 7 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-11}$. Тем не менее сохраняется разброс примерно в $\pm 3 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ в зависимости от метода измерения и инструмента. Примерно то же значение дают исследования гравитационных волн. Источники гравитационных волн являются хорошими стандартными свечами, поскольку «абсолютную яркость» гравитационного источника можно определить по форме волны. Пока что точность метода недостаточна для того, чтобы преодолеть разногласия.

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2$.

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2$. Символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma^{(3)i}_{jk}, \quad (17)$$

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2$. Символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma^{(3)i}_{jk}, \quad (17)$$

где $\Gamma^{(3)i}_{jk}$ — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые не зависят от a в координатах χ, ϑ, φ .

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2$. Символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma^{(3)i}_{jk}, \quad (17)$$

где $\Gamma^{(3)i}_{jk}$ — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые не зависят от a в координатах χ, ϑ, φ . Поэтому $\dot{\Gamma}^{(3)i}_{jk} = 0$ и они вносят известный вклад в тензор Риччи:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(3)} + (\text{вклады } \Gamma_{lm}^t, \Gamma_{tm}^l), \quad R_{ij}^{(3)} = 2ka^{-2}(-g_{ij}),$$

где

$$k = \text{sign } K. \quad (18)$$

Выпишем уравнения Эйнштейна для метрики $ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2$. Символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^{(3)i}, \quad (17)$$

где $\Gamma_{jk}^{(3)i}$ — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые не зависят от a в координатах χ, ϑ, φ . Поэтому $\dot{\Gamma}_{jk}^{(3)i} = 0$ и они вносят известный вклад в тензор Риччи:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(3)} + (\text{вклады } \Gamma_{lm}^t, \Gamma_{tm}^l), \quad R_{ij}^{(3)} = 2ka^{-2}(-g_{ij}),$$

где

$$k = \text{sign } K. \quad (18)$$

Отсюда получаем

$$R_t^t = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_j^i = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}\right)\delta_j^i, \quad R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right). \quad (19)$$

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

Тогда имеем [уравнение Фридмана](#)

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

(22)

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

Тогда имеем [уравнение Фридмана](#)

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

и [уравнение движения](#)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (22)$$

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

Тогда имеем [уравнение Фридмана](#)

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

и [уравнение движения](#)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (22)$$

Уравнение движения является уравнением второго порядка, но его можно проинтегрировать.

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

Тогда имеем [уравнение Фридмана](#)

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

и [уравнение движения](#)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (22)$$

Уравнение движения является уравнением второго порядка, но его можно проинтегрировать. Проще, однако, найти решение из условия ковариантного сохранения энергии:

$$0 = T_{t;t}^t + T_{t;i}^i = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (23)$$

В силу однородности и изотропии пространства тензор энергии-импульса должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (20)$$

Тогда имеем [уравнение Фридмана](#)

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

и [уравнение движения](#)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (22)$$

Уравнение движения является уравнением второго порядка, но его можно проинтегрировать. Проще, однако, найти решение из условия ковариантного сохранения энергии:

$$0 = T_{t;t}^t + T_{t;i}^i = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (23)$$

Умножая на dt , получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (24)$$

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл.

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем.

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем.

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем $d(\rho V) = -p dV$ или

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем $d(\rho V) = -p dV$ или

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу $V \sim a^3$, получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (24)$$

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем $d(\rho V) = -p dV$ или

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу $V \sim a^3$, получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (24)$$

Если известно уравнение состояния вещества, можно найти зависимость $p(\rho)$ в адиабатическом процессе ($\delta q = 0$).

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем $d(\rho V) = -p dV$ или

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу $V \sim a^3$, получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (24)$$

Если известно уравнение состояния вещества, можно найти зависимость $p(\rho)$ в адиабатическом процессе ($\delta q = 0$). Тогда уравнение (24) интегрируется

$$3 \log a = - \int \frac{d\rho}{\rho + p(\rho)}. \quad (25)$$

Последнее уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю, то есть $dU = -p dV$, есть работа, совершаемая над материальной частью системы гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем $d(\rho V) = -p dV$ или

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу $V \sim a^3$, получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (24)$$

Если известно уравнение состояния вещества, можно найти зависимость $p(\rho)$ в адиабатическом процессе ($\delta q = 0$). Тогда уравнение (24) интегрируется

$$3 \log a = - \int \frac{d\rho}{\rho + p(\rho)}. \quad (25)$$

Зависимость $\rho(a)$ уже можно подставлять в уравнение Фридмана.

Теперь уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

Теперь уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

интегрируется

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)} \quad \text{или} \quad \eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}, \quad (26)$$

Теперь уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

интегрируется

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)} \quad \text{или} \quad \eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}, \quad (26)$$

где

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - K} \quad (27)$$

есть параметр Хаббла как функция масштабного фактора.

Теперь уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

интегрируется

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)} \quad \text{или} \quad \eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}, \quad (26)$$

где

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - K} \quad (27)$$

есть параметр Хаббла как функция масштабного фактора.

Отсюда ясно, что кривизна пространства однозначно определяется плотность энергии ρ вещества во Вселенной и параметром Хаббла:

$$K = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 = \frac{8\pi G(\rho - \rho_c)}{3}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (28)$$

Величина ρ_c называется **критической плотностью**.

Теперь уравнение Фридмана

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho \quad (21)$$

интегрируется

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)} \quad \text{или} \quad \eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}, \quad (26)$$

где

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - K} \quad (27)$$

есть параметр Хаббла как функция масштабного фактора.

Отсюда ясно, что кривизна пространства однозначно определяется плотность энергии ρ вещества во Вселенной и параметром Хаббла:

$$K = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 = \frac{8\pi G(\rho - \rho_c)}{3}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (28)$$

Величина ρ_c называется **критической плотностью**. При $\rho > \rho_c$ мир будет замкнутым ($K > 0$), а при плотности $\rho < \rho_c$ — открытым ($K < 0$).

Плотность энергии вещества во Вселенной невозможно сосчитать просто измеряя массу звезд, межзвездного газа и излучения. Дело в том, что полученная масса составляет лишь небольшую долю (около 5%) плотности энергии Вселенной. Основной вклад в плотность энергии дают два трудных для изучения фактора:

Плотность энергии вещества во Вселенной невозможно сосчитать просто измеряя массу звезд, межзвездного газа и излучения. Дело в том, что полученная масса составляет лишь небольшую долю (около 5%) плотности энергии Вселенной. Основной вклад в плотность энергии дают два трудных для изучения фактора:

- 1 Темное вещество (или темная материя) — около 26%. По современным представлениям темное вещество состоит из массивных частиц, движущихся в основном с малыми скоростями (cold dark matter — CDM), взаимодействующих друг с другом и с известными частицами только (или почти только) гравитационно. Они плохо сгущаются в силу астрономически большой длины свободного пробега. Сгущения образуются в результате притяжения к барионной материи (на масштабах галактик) или в результате каспов (перехлестов) на больших масштабах. Такие каспы образуют «каркас», вокруг которого собирается барионное вещество.

Плотность энергии вещества во Вселенной невозможно сосчитать просто измеряя массу звезд, межзвездного газа и излучения. Дело в том, что полученная масса составляет лишь небольшую долю (около 5%) плотности энергии Вселенной. Основной вклад в плотность энергии дают два трудных для изучения фактора:

- 1 Темное вещество (или темная материя) — около 26%. По современным представлениям темное вещество состоит из массивных частиц, движущихся в основном с малыми скоростями (cold dark matter — CDM), взаимодействующих друг с другом и с известными частицами только (или почти только) гравитационно. Они плохо сгущаются в силу астрономически большой длины свободного пробега. Сгущения образуются в результате притяжения к барионной материи (на масштабах галактик) или в результате каспов (перехлестов) на больших масштабах. Такие каспы образуют «каркас», вокруг которого собирается барионное вещество.
- 2 «Темная энергия» — остальные 69%. Неясный совершенно однородный вклад, ведущий себя как Λ -член, то есть $p = -\rho$. Мы будем говорить о нем дальше.

Плотность энергии вещества во Вселенной невозможно сосчитать просто измеряя массу звезд, межзвездного газа и излучения. Дело в том, что полученная масса составляет лишь небольшую долю (около 5%) плотности энергии Вселенной. Основной вклад в плотность энергии дают два трудных для изучения фактора:

- 1 Темное вещество (или темная материя) — около 26%. По современным представлениям темное вещество состоит из массивных частиц, движущихся в основном с малыми скоростями (cold dark matter — CDM), взаимодействующих друг с другом и с известными частицами только (или почти только) гравитационно. Они плохо сгущаются в силу астрономически большой длины свободного пробега. Сгущения образуются в результате притяжения к барионной материи (на масштабах галактик) или в результате каспов (перехлестов) на больших масштабах. Такие каспы образуют «каркас», вокруг которого собирается барионное вещество.
- 2 «Темная энергия» — остальные 69%. Неясный совершенно однородный вклад, ведущий себя как Λ -член, то есть $p = -\rho$. Мы будем говорить о нем дальше.

Исследование флуктуаций реликтового излучения показывает, что суммарная плотность энергии всех видов материи очень близка к ρ_c , так что Вселенная на больших масштабах близка к плоской ($K = 0$).

Рассмотрим различные космологические модели. Прежде всего, рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество).

Рассмотрим различные космологические модели. Прежде всего, рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество). В этом случае

$$\rho = C_m a^{-3}, \quad (29)$$

с некоторой константой C_m .

Рассмотрим различные космологические модели. Прежде всего, рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество). В этом случае

$$\rho = C_m a^{-3}, \quad (29)$$

с некоторой константой C_m . Функция $\eta(a)$ легко обращается и мы получаем

$$a(\eta) = A_m \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2}(\eta - \sin \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi \quad (k = 1); \quad (30)$$

$$a(\eta) = A_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad 0 \leq \eta < \infty \quad (k = -1); \quad (31)$$

$$a(\eta) = \frac{A_m}{4} \eta^2, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{12} \eta^3, \quad 0 \leq \eta < \infty \quad (k = 0), \quad (32)$$

где

$$A_m = \frac{8\pi}{3} G C_m. \quad (33)$$

Рассмотрим различные космологические модели. Прежде всего, рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество). В этом случае

$$\rho = C_m a^{-3}, \quad (29)$$

с некоторой константой C_m . Функция $\eta(a)$ легко обращается и мы получаем

$$a(\eta) = A_m \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2}(\eta - \sin \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi \quad (k = 1); \quad (30)$$

$$a(\eta) = A_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad 0 \leq \eta < \infty \quad (k = -1); \quad (31)$$

$$a(\eta) = \frac{A_m}{4} \eta^2, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{12} \eta^3, \quad 0 \leq \eta < \infty \quad (k = 0), \quad (32)$$

где

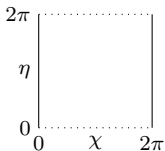
$$A_m = \frac{8\pi}{3} G C_m. \quad (33)$$

При малых t все три решения совпадают:

$$a(t) \simeq \left(\frac{9A_m}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (34)$$

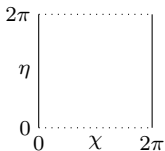
Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.

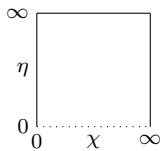


(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.

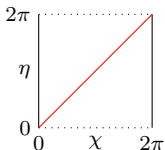


(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)

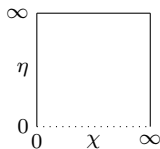


(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



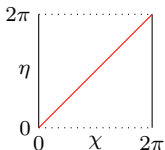
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



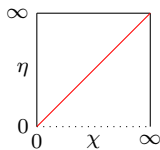
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны,

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



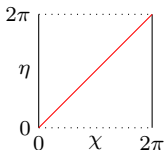
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



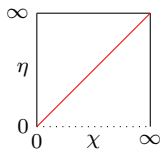
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, заматая все χ .

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



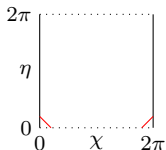
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



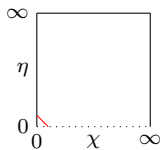
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, заматая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности.

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



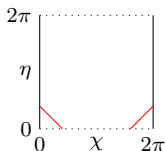
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



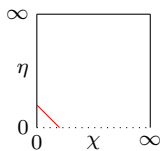
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, замечая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



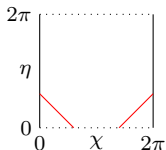
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



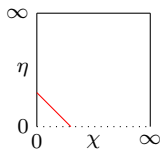
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, заматая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



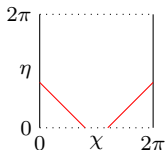
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



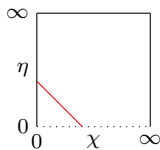
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, заматая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



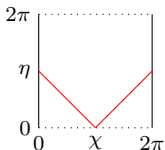
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



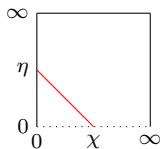
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, замечая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



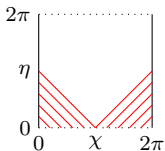
(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



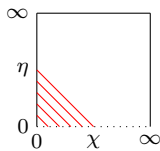
(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, замечая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет и он видит все больше и больше этих неоднородностей.

Изобразим диаграммы Пенроуза в переменных τ, χ . В случае замкнутой вселенной для удобства продолжим χ на область $0 \leq \chi \leq 2\pi$.



(a) Замкнутая вселенная ($K > 0$)



(b) Открытая вселенная ($K \leq 0$)

Световой луч пересекает замкнутую вселенную за время ее жизни и возвращается в исходную точку с другой стороны, а в открытой вселенной уходит от исходной точки сколь угодно далеко, замечая все χ . Это приводит к проблеме. Предположим, при рождении Вселенной имелись какие-то неоднородности. Тогда со временем горизонт видимости наблюдателя растет и он видит все больше и больше этих неоднородностей. Чтобы Вселенная была однородной и изотропной, она должна такой родиться в первичной сингулярности.

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$).

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой.

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3} \rho$.

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3}\rho$. Следовательно,

$$\rho = C_T a^{-4}, \quad \text{если } p = 3p, \quad (35)$$

где C_T — постоянная.

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3}\rho$. Следовательно,

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (35)$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (36)$$

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3}\rho$. Следовательно,

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (35)$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (36)$$

При малых a имеем $A_r a^{-4} \gg a^{-2}$, так что кривизной пространства можно пренебречь.

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3}\rho$. Следовательно,

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (35)$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (36)$$

При малых a имеем $A_r a^{-4} \gg a^{-2}$, так что кривизной пространства можно пренебречь. Имеем

$$a(t) = A_r^{1/2} \eta = (2A_r)^{1/2} t^{1/2}. \quad (37)$$

В настоящее время большая часть барионного вещества собралась в сгустки, находящиеся на большом расстоянии друг от друга и в этом смысле образующие пылевидную материю. Плотность энергии излучения тоже ничтожно мала (около $5 \cdot 10^{-5} \rho_c$). Однако на начальных стадиях эволюции Вселенной, когда масштабный параметр был мал, вещество должно было находиться в очень горячем состоянии и доля излучения тоже должна была быть большой. Для ультрарелятивистских частиц и излучения имеем $p = \frac{1}{3} \rho$. Следовательно,

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (35)$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (36)$$

При малых a имеем $A_r a^{-4} \gg a^{-2}$, так что кривизной пространства можно пренебречь. Имеем

$$a(t) = A_r^{1/2} \eta = (2A_r)^{1/2} t^{1/2}. \quad (37)$$

На диаграмме Пенроуза это немного сдвигает начальную сингулярность вниз, но не решает проблему первичных неоднородностей. Дело в том, что эта область слишком узкая (ее «толщина» $\eta_1 = A_r^{1/2} / A_m \ll \eta_0$), чтобы на этом этапе могло установиться равновесие.

В 1998 году были опубликованы наблюдения, свидетельствовавшие о том, что за последние $4 \div 5$ миллиардов лет (начиная с $z \simeq 0.3$) параметр Хаббла был примерно постоянен. Это противоречит фридмановской модели для пылевидной материи.

В 1998 году были опубликованы наблюдения, свидетельствовавшие о том, что за последние $4 \div 5$ миллиардов лет (начиная с $z \simeq 0.3$) параметр Хаббла был примерно постоянен. Это противоречит фридмановской модели для пылевидной материи. Постоянство параметра Хаббла означает закон $a(t) \sim e^{Ht}$ для расширения Вселенной. Следовательно,

$$\eta \sim \int dt e^{-Ht} \sim -e^{-Ht}, \quad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \quad (38)$$

В 1998 году были опубликованы наблюдения, свидетельствовавшие о том, что за последние $4 \div 5$ миллиардов лет (начиная с $z \simeq 0.3$) параметр Хаббла был примерно постоянен. Это противоречит фридмановской модели для пылевидной материи. Постоянство параметра Хаббла означает закон $a(t) \sim e^{Ht}$ для расширения Вселенной. Следовательно,

$$\eta \sim \int dt e^{-Ht} \sim -e^{-Ht}, \quad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \quad (38)$$

Это можно объяснить ненулевым Λ -членом в уравнениях Эйнштейна, либо наличием вещества с уравнением состояния $p = -\rho$. В этом случае плотность такого вещества постоянна ($\rho = C_e$) и при малой кривизне получается постоянный параметр $H = \sqrt{8\pi G C_e / 3}$.

В 1998 году были опубликованы наблюдения, свидетельствовавшие о том, что за последние $4 \div 5$ миллиардов лет (начиная с $z \simeq 0.3$) параметр Хаббла был примерно постоянен. Это противоречит фридмановской модели для пылевидной материи. Постоянство параметра Хаббла означает закон $a(t) \sim e^{Ht}$ для расширения Вселенной. Следовательно,

$$\eta \sim \int dt e^{-Ht} \sim -e^{-Ht}, \quad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \quad (38)$$

Это можно объяснить ненулевым Λ -членом в уравнениях Эйнштейна, либо наличием вещества с уравнением состояния $p = -\rho$. В этом случае плотность такого вещества постоянна ($\rho = C_e$) и при малой кривизне получается постоянный параметр $H = \sqrt{8\pi G C_e / 3}$. Это гипотетическое вещество (либо эквивалентное ему явление) было названо **темной энергией**.

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- 1 «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество:
$$\rho_m = C_m a^{-3}.$$

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- 1 «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество:
 $\rho_m = C_m a^{-3}$.
- 2 Излучение (фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы): $\rho_r = C_r a^{-4}$.

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- 1 «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество:
 $\rho_m = C_m a^{-3}$.
- 2 Излучение (фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы): $\rho_r = C_r a^{-4}$.
- 3 Темная энергия: $\rho_e = C_e$

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- 1 «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество:
 $\rho_m = C_m a^{-3}$.
- 2 Излучение (фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы): $\rho_r = C_r a^{-4}$.
- 3 Темная энергия: $\rho_e = C_e$

Будем считать, что полная плотность энергии $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_e$ и разные виды материи не переходят друг в друга.

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- ① «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество:
 $\rho_m = C_m a^{-3}$.
- ② Излучение (фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы): $\rho_r = C_r a^{-4}$.
- ③ Темная энергия: $\rho_e = C_e$

Будем считать, что полная плотность энергии $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_e$ и разные виды материи не переходят друг в друга.

Полагая $A_i = \frac{8\pi}{3} G C_i$, находим

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{A_r a^{-2} + A_m a^{-1} + A_e a^2 - k}}. \quad (39)$$

Известные космологические данные хорошо укладываются в довольно простую модель, называемую **моделью Λ CDM**.

Разобьем всю материю на три вида:

- ① «Пыль», включающую барионную материю и холодное темное вещество: $\rho_m = C_m a^{-3}$.
- ② Излучение (фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы): $\rho_r = C_r a^{-4}$.
- ③ Темная энергия: $\rho_e = C_e$

Будем считать, что полная плотность энергии $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_e$ и разные виды материи не переходят друг в друга.

Полагая $A_i = \frac{8\pi}{3} G C_i$, находим

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{A_r a^{-2} + A_m a^{-1} + A_e a^2 - k}}. \quad (39)$$

Удобно привести уравнение к величинам, наблюдаемым в настоящий момент времени. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_m}{a_0^4 H_0^2}, & \Omega_r &= \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_r}{a_0^3 H_0^2}, \\ \Omega_e &= \frac{\rho_e(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_e}{a_0^2 H_0^2}, & \Omega_k &= -\frac{k}{a_0^2} = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_e, \end{aligned} \quad (40)$$

где $H_0 = H(t_0)$, $a_0 = a(t_0)$ — параметр Хаббла и масштабный фактор в настоящее время $t_0 \simeq 13.8 \cdot 10^9$ yr.

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь.

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$.

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

- ④ Стадия **радиационного доминирования**: $\tilde{a} < \tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr).

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

- 1 Стадия **радиационного доминирования**: $\tilde{a} < \tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr).
- 2 **Пылевая** стадия: $\tilde{a}_1 < \tilde{a} < \tilde{a}_2 \simeq 0.77$ ($z_2 \simeq 0.30$, $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$ yr).

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

- 1 Стадия **радиационного доминирования**: $\tilde{a} < \tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr).
- 2 **Пылевая** стадия: $\tilde{a}_1 < \tilde{a} < \tilde{a}_2 \simeq 0.77$ ($z_2 \simeq 0.30$, $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$ yr).
- 3 Стадия **Λ -доминирования**: $\tilde{a} > \tilde{a}_2$.

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

- 1 Стадия **радиационного доминирования**: $\tilde{a} < \tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr).
- 2 **Пылевая** стадия: $\tilde{a}_1 < \tilde{a} < \tilde{a}_2 \simeq 0.77$ ($z_2 \simeq 0.30$, $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$ yr).
- 3 Стадия **Λ -доминирования**: $\tilde{a} > \tilde{a}_2$.

Хотя модель хорошо описывает наблюдательные данные, в ней есть ряд проблем. Чтобы модель работала, необходимо чрезвычайно точно «приготовить» начальное состояние сразу после Большого Взрыва.

Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (41)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-2}$. Вкладом кривизны Ω_k можно пренебречь. С большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Следовательно, есть два характерных значения масштабного параметра

$$\tilde{a}_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll \tilde{a}_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e} \right)^{1/3},$$

Эти значения разделяют расширение Вселенной на три стадии:

- 1 Стадия **радиационного доминирования**: $\tilde{a} < \tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr).
- 2 **Пылевая** стадия: $\tilde{a}_1 < \tilde{a} < \tilde{a}_2 \simeq 0.77$ ($z_2 \simeq 0.30$, $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$ yr).
- 3 Стадия **Λ -доминирования**: $\tilde{a} > \tilde{a}_2$.

Хотя модель хорошо описывает наблюдательные данные, в ней есть ряд проблем. Чтобы модель работала, необходимо чрезвычайно точно «приготовить» начальное состояние сразу после Большого Взрыва. Для объяснения такой тонкой подгонки было предложено несколько гипотез. Наиболее правдоподобной с точки зрения наблюдательных данных в настоящий момент кажется **гипотеза инфляции**.

1. Проблема плоской Вселенной.

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$.

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$. Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$. При $0 < \alpha < 1$ величина $\delta\Omega$ растет со временем.

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$. Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$. При $0 < \alpha < 1$ величина $\delta\Omega$ растет со временем.

Например, на начало пылевой эпохи имеем

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-6}. \quad (44)$$

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$. Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$. При $0 < \alpha < 1$ величина $\delta\Omega$ растет со временем.

Например, на начало пылевой эпохи имеем

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-6}. \quad (44)$$

На момент окончания нуклеосинтеза $t_{\text{nucl}} \sim 10^3$ s имеем

$$|\delta\Omega(t_{\text{nucl}})| \simeq \frac{t_{\text{nucl}}}{t_1} |\delta\Omega_1| \sim 10^{-15}. \quad (45)$$

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$. Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$. При $0 < \alpha < 1$ величина $\delta\Omega$ растет со временем.

Например, на начало пылевой эпохи имеем

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-6}. \quad (44)$$

На момент окончания нуклеосинтеза $t_{\text{nuc1}} \sim 10^3$ s имеем

$$|\delta\Omega(t_{\text{nuc1}})| \simeq \frac{t_{\text{nuc1}}}{t_1} |\delta\Omega_1| \sim 10^{-15}. \quad (45)$$

По современным представлениям радиационная эпоха началась не позже $t_r \sim 10^{-32}$ s и, значит, $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-50}$.

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент Вселенная в высокой степени плоская:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-2}. \quad (42)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (43)$$

так что $\delta\Omega(t_0) = \Omega_k$. Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$. При $0 < \alpha < 1$ величина $\delta\Omega$ растет со временем.

Например, на начало пылевой эпохи имеем

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-6}. \quad (44)$$

На момент окончания нуклеосинтеза $t_{\text{nucl}} \sim 10^3$ s имеем

$$|\delta\Omega(t_{\text{nucl}})| \simeq \frac{t_{\text{nucl}}}{t_1} |\delta\Omega_1| \sim 10^{-15}. \quad (45)$$

По современным представлениям радиационная эпоха началась не позже $t_r \sim 10^{-32}$ s и, значит, $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-50}$. То есть на начало радиационной фазы Вселенная должна была быть плоской с фантастической точностью.

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов.

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.
Оценим характерные масштабы неоднородности.

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.

Оценим характерные масштабы неоднородности. Если неоднородности не распространяются очень быстро, то они должны сохранять углы χ, ϑ, φ .

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.

Оценим характерные масштабы неоднородности. Если неоднородности не распространяются очень быстро, то они должны сохранять углы χ, ϑ, φ . В этих координатах радиус наблюдаемой нами области в предшествующий момент времени t равен

$$\chi_{\max} = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (46)$$

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.

Оценим характерные масштабы неоднородности. Если неоднородности не распространяются очень быстро, то они должны сохранять углы χ, ϑ, φ . В этих координатах радиус наблюдаемой нами области в предшествующий момент времени t равен

$$\chi_{\max} = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (46)$$

Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\eta \sim t^{1-\alpha}$ и в достаточно далеком прошлом

$$\eta \ll \chi_{\max} \simeq \eta_0. \quad (47)$$

2. Проблема неоднородностей и проблема горизонтов. Амплитуда крупномасштабных флуктуаций плотности $\delta\rho$ меняется по тому же закону, что и $\delta\Omega$, поэтому на начало радиационной стадии Вселенная должна была быть фантастически однородной.

Оценим характерные масштабы неоднородности. Если неоднородности не распространяются очень быстро, то они должны сохранять углы χ, ϑ, φ . В этих координатах радиус наблюдаемой нами области в предшествующий момент времени t равен

$$\chi_{\max} = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (46)$$

Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\eta \sim t^{1-\alpha}$ и в достаточно далеком прошлом

$$\eta \ll \chi_{\max} \simeq \eta_0. \quad (47)$$

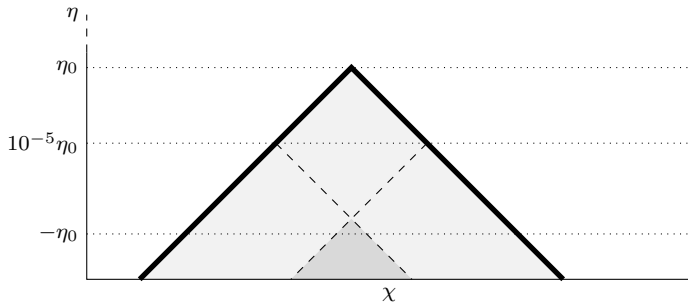
Самое древнее событие, которое мы можем наблюдать непосредственно, это рекомбинация плазмы ($z \simeq 10^3$), породившая реликтовое излучение. Для него

$$t_{\text{rec}} \simeq 4 \cdot 10^5 \text{ yr}, \quad \frac{\eta_{\text{rec}}}{\eta_0} \sim \left(\frac{t_{\text{rec}}}{t_2} \right)^{1/3} \simeq 0.04. \quad (48)$$

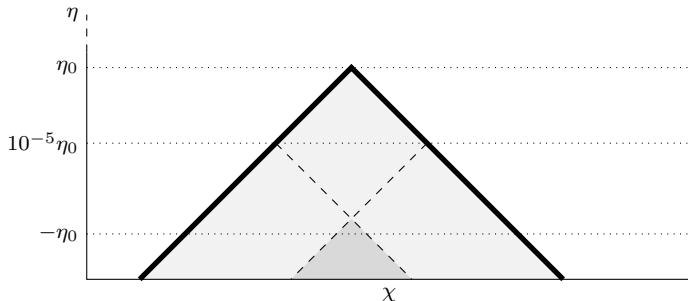
(мы пренебрегли недолгой стадией Λ -доминирования). Мы должны были бы наблюдать это как сильную анизотропию реликтового излучения на угловых масштабах порядка нескольких градусов. Эксперимент же показывает чрезвычайно малую анизотропию (порядка 10^{-4}) на этих угловых масштабах.

Решение проблемы может заключаться в том, что момент $\eta = 0$, начальный во фридмановских моделях, не является начальным моментом реальной Вселенной.

Решение проблемы может заключаться в том, что момент $\eta = 0$, начальный во фридмановских моделях, не является начальным моментом реальной Вселенной. Ему должен предшествовать период по крайней мере до значений $\eta < -\eta_0$:



Решение проблемы может заключаться в том, что момент $\eta = 0$, начальный во фридмановских моделях, не является начальным моментом реальной Вселенной. Ему должен предшествовать период по крайней мере до значений $\eta < -\eta_0$:



Затененная область — это область видимости из нашей точки Вселенной в наше время. Более темная область — эта общая область, которая могла бы влиять на температуру реликтового излучения из противоположных точек на небе.

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**.

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла.

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла. При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла. При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Проблема плоской Вселенной. На инфляционной стадии отклонение плотности от критической **уменьшается**:

$$|\delta\Omega| \sim \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**.

Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла. При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Проблема плоской Вселенной. На инфляционной стадии отклонение плотности от критической **уменьшается**:

$$|\delta\Omega| \sim \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Предположим, что Вселенная родилась каким-то квантовым образом на масштабах планковской длины

$$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла. При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Проблема плоской Вселенной. На инфляционной стадии отклонение плотности от критической **уменьшается**:

$$|\delta\Omega| \sim \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Предположим, что Вселенная родилась каким-то квантовым образом на масштабах планковской длины

$$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

Положим $\delta\Omega_{\text{Pl}} \sim 1$. Тогда $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-52}$ будет достигнуто при $a \sim 10^{-7}$ см.

Одним из объяснений такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (**инфляции**):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (49)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла. При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Проблема плоской Вселенной. На инфляционной стадии отклонение плотности от критической **уменьшается**:

$$|\delta\Omega| \sim \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Предположим, что Вселенная родилась каким-то квантовым образом на масштабах планковской длины

$$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

Положим $\delta\Omega_{\text{Pl}} \sim 1$. Тогда $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-52}$ будет достигнуто при $a \sim 10^{-7}$ см. Предполагая $H_* T_* \simeq 60$ и $T_* \sim t_r \sim 10^{-32}$ с, оцениваем $H_* \gtrsim 10^{34} \text{ с}^{-1}$.

2. Проблема начальной неоднородности. Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c .

2. Проблема начальной неоднородности. Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c . Если при рождении Вселенной масштабы неоднородностей неоднородности были $\sim a \sim l_{\text{Pl}}$, то в процессе инфляции и они растянулись и остаются порядка $a(t_r)$.

2. Проблема начальной неоднородности. Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c . Если при рождении Вселенной масштабы неоднородностей неоднородности были $\sim a \sim l_{P1}$, то в процессе инфляции и они растянулись и остаются порядка $a(t_r)$. Таким образом, и сейчас первичные неоднородности должны иметь масштабы больше видимой части Вселенной.

2. **Проблема начальной неоднородности.** Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c . Если при рождении Вселенной масштабы неоднородностей неоднородности были $\sim a \sim l_{P1}$, то в процессе инфляции и они растянулись и остаются порядка $a(t_r)$. Таким образом, и сейчас первичные неоднородности должны иметь масштабы больше видимой части Вселенной.

3. **Проблема горизонтов.** Для наблюдателя в конце стадии инфляции имеем

$$\chi_{\max} \simeq \frac{1}{H_* a(t_r)} \left(e^{H_* T_*} - 1 \right). \quad (50)$$

2. **Проблема начальной неоднородности.** Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c . Если при рождении Вселенной масштабы неоднородностей неоднородности были $\sim a \sim l_{\text{Pl}}$, то в процессе инфляции и они растянулись и остаются порядка $a(t_r)$. Таким образом, и сейчас первичные неоднородности должны иметь масштабы больше видимой части Вселенной.

3. **Проблема горизонтов.** Для наблюдателя в конце стадии инфляции имеем

$$\chi_{\text{max}} \simeq \frac{1}{H_* a(t_r)} \left(e^{H_* T_*} - 1 \right). \quad (50)$$

Полагая $T_* \sim t_r$ и $a(t_r) \sim 10^{-7}$ см, получаем $\chi_{\text{max}} \sim 10^9$. (Это, конечно, имеет смысл для открытой вселенной.)

2. **Проблема начальной неоднородности.** Амплитуда неоднородностей падает так же как и отклонение от ρ_c . Если при рождении Вселенной масштабы неоднородностей неоднородности были $\sim a \sim l_{\text{Pl}}$, то в процессе инфляции и они растянулись и остаются порядка $a(t_r)$. Таким образом, и сейчас первичные неоднородности должны иметь масштабы больше видимой части Вселенной.

3. **Проблема горизонтов.** Для наблюдателя в конце стадии инфляции имеем

$$\chi_{\text{max}} \simeq \frac{1}{H_* a(t_r)} \left(e^{H_* T_*} - 1 \right). \quad (50)$$

Полагая $T_* \sim t_r$ и $a(t_r) \sim 10^{-7}$ см, получаем $\chi_{\text{max}} \sim 10^9$. (Это, конечно, имеет смысл для открытой вселенной.) Этого достаточно для установления равновесия в видимой части Вселенной.

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$.

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Эффективно это эквивалентно Λ -члену.

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Эффективно это эквивалентно Λ -члену.

Разрешим полю меняться со временем быстрее. Тогда

$$\rho = | \quad \quad \quad p = | \quad (54)$$

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Эффективно это эквивалентно Λ -члену.

Разрешим полю меняться со временем быстрее. Тогда

$$\rho = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \quad p = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi). \quad (54)$$

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Эффективно это эквивалентно Λ -члену.

Разрешим полю меняться со временем быстрее. Тогда

$$\rho = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \quad p = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi). \quad (54)$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = -\frac{dV}{d\Phi} \quad (55)$$

дают

Возможный механизм инфляции. Рассмотрим скалярное поле Φ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (51)$$

Обычно считают $V(\Phi) \geq V(0) = 0$. Тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (52)$$

Если по какой-то причине поле Φ однородно и почти постоянно, имеем

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (53)$$

Эффективно это эквивалентно Λ -члену.

Разрешим полю меняться со временем быстрее. Тогда

$$\rho = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \quad p = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi). \quad (54)$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = -\frac{dV}{d\Phi} \quad (55)$$

дают

$$\frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{d\Phi}{dt} \right) = -a^3 \frac{dV}{d\Phi}.$$

Это уравнение вместе с уравнением Фридмана дает систему

Это уравнение вместе с уравнением Фридмана дает систему

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + V'(\Phi) &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}G \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right).\end{aligned}\tag{56}$$

Это уравнение вместе с уравнением Фридмана дает систему

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + V'(\Phi) &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}G \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right).\end{aligned}\tag{56}$$

Задача. Покажите, что любое решение этих уравнений удовлетворяет уравнению

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.$$

Это уравнение вместе с уравнением Фридмана дает систему

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + V'(\Phi) &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi}{3}G \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right). \end{aligned} \tag{56}$$

Задача. Покажите, что любое решение этих уравнений удовлетворяет уравнению

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.$$

Таким образом, расширение вселенной работает как трение для релаксации поля Φ . Поэтому для инфляции даже не нужно локального минимума поля $V(\Phi)$, достаточно, чтобы $|\Phi|$ было достаточно велико в момент рождения вселенной, а потенциал был достаточно пологим.