

Лекция 14

Космологические решения. Модели Фридмана

До сих пор мы рассматривали различные геометрии пространства-времени, считая, что на достаточно большом расстоянии от источников гравитации пространство-время асимптотически плоское или по крайней мере асимптотическое поведение каким-то образом задано. То есть, мы считали пространство в целом пустым, а космологическую постоянную — равной нулю. Во многих задачах это оказывается вполне разумным приближением, поскольку гравитирующие объекты притягивают друг друга и, чаще всего, собираются в компактные образования (планеты, звезды и звездные системы, скопления звезд, галактики, скопления и сверхскопления галактик), окруженные сравнительной пустотой. Но из наблюдательных данных мы знаем, что в целом для (видимой части) Вселенной это не так. Сверхскопления галактик заполняют пространство довольно равномерно, не говоря уже о неизвестной гравитирующей материи, называемой темной материей, которая не собирается в такой степени в компактные структуры, но средняя плотность которой в несколько раз больше средней плотности известных нам видов материи. Можно считать, что Вселенная довольно однородна на масштабах больше 100 Мпс. Кроме того, наблюдательные данные говорят о высокой изотропии Вселенной: вещество распределено довольно равномерно во всех направлениях. Это предположение подтверждает и высокая (на уровне 10^{-4}) изотропия реликтового излучения.¹ В этой лекции мы рассмотрим простейшие модели вселенной, равномерно и изотропно заполненной веществом и излучением, получим простейшие решения и вкратце обсудим, насколько они подтверждаются наблюдательными данными. Классические космологические модели, основанные на этих предположениях, называются *моделями Фридмана*.

Вопрос об эволюции Вселенной как целого возникает даже в ньютоновской теории гравитации. В самом деле, если заполнить веществом все пространство более или менее равномерно, то вещество не сможет всегда оставаться в стационарном состоянии в силу притяжения. В общей теории относительности проблема усугубляется тем, что само пространство может оказаться искривленным. С другой стороны, это помогло ученым осознать проблему там, где они не видели ее до создания ОТО.

Итак, нам следует наложить условия пространственной однородности и изотропии на кривизну и тензор энергии-импульса. Начнем с кривизны. Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые *пространства постоянной кривизны*. Так называются (псевдо)римановы многообразия, на которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{ijkl}\xi^{ij}\xi^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\xi^{ij}\xi^{kl}} = K, \quad \forall \xi \in T^2M_x. \quad (14.1)$$

так что K не зависит от бивектора ξ^{ij} . Можно доказать, что в этом случае K не зависит от точки² x и кривизна имеет вид

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad R_{ij} = (d-1)Kg_{ij}, \quad R = d(d-1)K, \quad (14.2)$$

где d — размерность многообразия. Иными словами, геометрическая однородность пространства следует из его изотропии.

При изучении эволюции Вселенной нас интересует трехмерное пространство сигнатуры $(+++)$. Давайте построим соответствующую метрику. Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (14.3)$$

Пространство постоянной положительной кривизны легко находится как ограничение метрики плоского четырехмерного евклидова пространства с координатам X^I , $I = 1, \dots, 4$, на трехмерную сферу

¹Наблюдения показывают дипольный вклад в анизотропию реликтового излучения на уровне 10^{-3} , однако этот вклад можно приписать движению Солнечной системы со скоростью примерно 370 km/s относительно системы отсчета, выделенной реликтовым излучением. Его следует вычитать из микроволнового фона, чтобы изучать физику процессов, связанных с образованием и распространением реликтового излучения. С учетом движения Солнечной системы в Галактике и движения Галактики в местной группе галактик, скорость движения местной группы оценивается в 630 km/s в направлении точки в созвездии Гидры.

²За исключением двумерного пространства, где формула (14.1) верна для любых пространств, и независимость K от x принимается за определение пространства постоянной кривизны.

$\sum_{I=1}^4 (X^I)^2 = a^2$. Используя полярные координаты χ, ϑ, φ , получаем

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad K = 1/a^2. \quad (14.4)$$

Как всегда $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Аналогично пространство постоянной отрицательной кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры $(+ + + -)$ плоского пространства на трехмерный двуполостный гиперboloид $\sum_{I=1}^3 (X^I)^2 - (X^4)^2 = -a^2$:

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \quad 0 \leq \chi \leq \infty, \quad K = -1/a^2. \quad (14.5)$$

Вообще говоря, пространства постоянной кривизны топологически могут не совпадать с плоскостью, сферой или гиперboloидом, а представлять собой факторпространства этих пространств по какой-нибудь дискретной группе движений Γ , действующей свободно (без неподвижных точек). В частности, мир с положительной кривизной будет всегда замкнутым и имеющим конечный объем

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \quad (14.6)$$

где N порядок группы Γ . Мы не будем заниматься топологическими вопросами, поскольку они не влияют на решения уравнений Эйнштейна, которые определены локально. Кроме того, мы, по-видимому, можем наблюдать только небольшую часть Вселенной, так что топология не играет роли при интерпретации наблюдений.³

Мы будем называть модели с положительной кривизной замкнутыми, а модели с отрицательной кривизной — открытыми, хотя их открытость в строгом математическом смысле зависит от топологии. Мир с нулевой кривизной мы будем называть плоским.

Теперь перейдем к пространству-времени. Оно уже не должно быть однородным и изотропным, но система координат должна приводиться к виду, в котором $g_{0i} = 0$. В противном случае выделенный вектор $g^{0i} \partial_i$ нарушил бы физическую изотропию пространства. Компонента метрики g_{00} и коэффициент a в пространственных компонентах метрики могут зависеть только от x^0 в силу однородности пространства. Выберем g_{00} равным единице. Это значит, что время $t = x^0$ будет совпадать с собственным временем неподвижного в координатах χ, ϑ, φ наблюдателя. В результате мы имеем синхронную во всем пространстве-времени метрику

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) d\Omega_3^2, \quad (14.7)$$

где

$$d\Omega_3^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \equiv \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (14.8)$$

Величина $d\Omega_3^2$ представляет собой «обезразмеренную» метрику в трехмерном пространстве. Мы будем также использовать обозначение γ^{ij} для элементов матрицы, обратной к (γ_{ij}) . В случае плоского пространства мы сделали замену $r = a(t)\chi$ (хотя эта факторизация неоднозначна), поскольку зависимость масштаба a от времени t определяет геометрию пространства-времени. Здесь и ниже под неподвижными или покоящимися частицами мы будем понимать частицы, покоящиеся в системе координат $t, \chi, \vartheta, \varphi$ с метрикой (14.7), то есть, частицы с $\chi, \vartheta, \varphi = \text{const}$. Собственное для покоящихся частиц время t мы будем называть физическим временем.

Возьмем двух покоящихся наблюдателей в разных точках пространства. Каждый из них, оглядываясь вокруг, будет видеть мир изотропным. Но расстояние между этими наблюдателями будет меняться со временем пропорционально фактору $a(t)$. Таким образом, каждый из наблюдателей будет видеть мир как расширяющийся, если $\dot{a}(t) > 0$ и сжимающийся, если $\dot{a}(t) < 0$. Функцию $a(t)$ называют *масштабным фактором*. Измерение абсолютного значения масштабного фактора в предположении, что

³Эффекты нетривиальной топологии можно было бы наблюдать по анизотропии реликтового излучения. Современные данные говорят о том, что если такая нетривиальная топология имеет место, то расстояние между отождествляемыми точками много больше размера наблюдаемой части Вселенной.

$K \neq 0$, пока не представляется возможным, поскольку наблюдаемая кривизна K пространства слишком мала. Однако можно измерить, во-первых, отношение масштабных факторов в настоящее время и в момент испускания сигнала и, во-вторых, относительную скорость расширения Вселенной. Чтобы разобраться в этом, введем вместо времени t координату η , определенную равенством

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (14.9)$$

Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega_3^2) = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (14.10)$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. Производную по η мы будем обозначать штрихом, производную по t — точкой.

Напишем уравнение эйконала для луча света в этой метрике:

$$a^{-2}(\eta) (\psi_{,\eta}^2 - \gamma^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}) = 0, \quad (14.11)$$

где ψ — эйконал, то есть фаза волны вдоль луча как функция пространственно-временных координат, а коэффициенты γ^{ij} не зависят от η . Решая это уравнение методом разделения переменных, находим

$$\psi(\varepsilon; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\varepsilon\eta + \psi_1(\varepsilon; \chi, \vartheta, \varphi). \quad (14.12)$$

Величина ε имеет естественный смысл частоты в переменной η , и является интегралом движения. Частота ω по отношению к физическому времени t связана с параметром ε очевидным соотношением

$$\omega(t) dt = \varepsilon d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\varepsilon}{a(t)}.$$

То есть частота волны обратно пропорциональна масштабному фактору. Это значит, что в расширяющейся Вселенной свет по мере распространения испытывает красное смещение. Введем величину относительного красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (14.13)$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке *наблюдения* (то есть в настоящий момент времени), а λ, ω — длина волны и частота в точке *испускания*. Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z, \quad (14.14)$$

то есть красное смещение немедленно дает нам отношение масштабных факторов в настоящий момент времени и в момент испускания волны. Величина красного смещения является естественной мерой времени и расстояния до удаленных объектов в астрономии.

Не следует путать описанный эффект *космологического красного смещения* с эффектом Доплера. В отличие от эффекта Доплера космологическое красное смещение зависит не от скорости удаления объектов друг от друга, а только от отношения масштабных факторов в момент регистрации сигнала и его испускания. Даже если бы в моменты испускания и регистрации сигнала масштабный фактор был бы постоянен, но менялся бы в промежутке между этими событиями, мы бы наблюдали космологическое красное (в случае увеличения масштабного фактора между моментами времени t и t_0) или фиолетовое (в случае его уменьшения) смещение. Сходство с эффектом Доплера состоит только в том, что *путь*, проходимый фотоном от момента испускания до момента наблюдения, растет со временем испускания t при $a(t_0) > a(t)$, поскольку чем позже испущен фотон, тем большие значения масштабного фактора будут на участках его пути с теми же координатами χ, ϑ, φ . То есть, мы измеряем не скорость удаления источника, а скорость увеличения пути, проходимого светом.

Рассмотрим случай $z \ll 1$. Тогда

$$z = \frac{a(t_0) - a(t)}{a(t)} \simeq \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0 - t) = H(t_0)L, \quad (14.15)$$

где $L = t_0 - t$ — расстояние до источника, а $H(t)$ — параметр Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (14.16)$$

Для измерения параметра Хаббла необходимо точно измерять расстояния до объектов. Ввиду систематических ошибок в измерении этих расстояний (неудачного выбора стандартных свечей) значение параметра Хаббла долгое время завывшалось, и лишь недавно была получена сравнительно надежная оценка. Различные эксперименты в последнее время дают результаты вблизи значения $H(t_0) \simeq 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc} \simeq 2.2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \simeq 7 \cdot 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$. Тем не менее сохраняется разброс примерно в $\pm 3 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ в зависимости от метода измерения и инструмента. Примерно то же значение дают исследования гравитационных волн. Источники гравитационных волн являются хорошими стандартными свечами, поскольку «абсолютную яркость» гравитационного источника можно определить по форме волны. Пока что точность метода недостаточна для того, чтобы преодолеть разногласия.

Мы хотим выписать уравнения Эйнштейна. В метрике (14.7) ненулевые символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{ij}^t = -\frac{\dot{a}}{a}g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma^{(3)i}_{jk}, \quad (14.17)$$

где $\Gamma^{(3)i}_{jk}$ — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые, как нетрудно убедиться, не зависят от масштабного фактора a в координатах χ, ϑ, φ . Поэтому временные производные от них равны нулю. А это значит, что они вносят вклад только в пространственные компоненты R_{ij} , и причем известный вклад:

$$R_{ij} = R_{ij}^{(3)} + (\text{вклады } \Gamma_{lm}^t, \Gamma_{tm}^l), \quad R_{ij}^{(3)} = 2ka^{-2}(-g_{ij}),$$

где

$$k = \text{sign } K. \quad (14.18)$$

Отсюда нетрудно найти ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_t^t = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_j^i = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}\right)\delta_j^i, \quad R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right). \quad (14.19)$$

Теперь рассмотрим материальную часть уравнений Эйнштейна — тензор энергии-импульса. В силу изотропии пространства (но не пространства-времени) он должен иметь вид

$$T_t^t = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = -p\delta_j^i. \quad (14.20)$$

Компонента t_t уравнения Эйнштейна дает *уравнение Фридмана*

$$\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi G\rho, \quad (14.21)$$

а компонента i_j — *уравнение движения*

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (14.22)$$

Уравнение движения несколько неудобно, потому что это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его не очень трудно проинтегрировать, но результат интегрирования можно получить более простым способом. Именно, давайте воспользуемся ковариантным сохранением тензора энергии-импульса $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$. Без труда получаем

$$0 = T_{t;t}^t + T_{t;i}^i = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (14.23)$$

Умножая на dt , получаем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3 d \log a = 0. \quad (14.24)$$

Это уравнение имеет простой термодинамический смысл. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю. Иными словами, энергия U уменьшается на работу $p dV$, совершаемую материальной частью системы над гравитационным полем. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем

$$V d\rho = -(\rho + p) dV.$$

Так как по смыслу объем V пропорционален a^3 , получаем (14.24).

Если известно уравнение состояния вещества, можно найти зависимость $p(\rho)$ в адиабатическом процессе ($\delta q = 0$).⁴ Тогда уравнение (14.24) интегрируется

$$3 \log a = - \int \frac{d\rho}{\rho + p(\rho)}. \quad (14.25)$$

Вслед за этим интегрируется уравнение Фрийдмана (14.21):

$$t = \pm \int \frac{da}{aH(a)}, \quad (14.26)$$

где

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho - K} \quad (14.27)$$

есть параметр Хаббла как функция масштабного фактора. Из определения координаты η (14.9) очевидно, что

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a^2 H(a)}. \quad (14.28)$$

Из выражения (14.27) ясно, что кривизна пространства однозначно выражается через среднюю плотность энергии вещества во Вселенной и параметр Хаббла:

$$K = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 = \frac{8\pi G(\rho - \rho_c)}{3}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (14.29)$$

Величина ρ_c называется *критической плотностью*. При $\rho > \rho_c$ мир будет замкнутым ($K > 0$), а при плотности $\rho < \rho_c$ — открытым ($K < 0$). Обратите внимание на универсальность этого результата: он не зависит от уравнения состояния вещества.

К сожалению, мы не можем прямо использовать формулу (14.29), чтобы установить кривизну пространства. Проблема состоит в том, что барионная материя, заключения о плотности которой мы можем сделать на основе наблюдения звезд, пыли и газовых облаков, составляет, по-видимому, очень небольшую часть гравитирующей материи в мире. Так называемая «темная материя» или «темное вещество» имеет в среднем по Вселенной гораздо большую массу. Природа темной материи неизвестна, но известно, что она концентрируется вблизи массивных тел. Это заметно по наблюдениям кривых вращения галактик и скоплений галактик. Как выясняется, звезды движутся в галактиках с большими скоростями, чем это следует из информации о массе барионной материи, которая находится внутри их орбит. То же самое касается скоростей галактик в скоплениях. Также темное вещество наблюдается по создаваемому им гравитационному линзированию. Однако на масштабах планетных систем плотность темной материи ничтожно мала. Это связано с тем, что частицы темной материи по-видимому взаимодействуют только (или почти только) гравитационно и длина их свободного пробега имеет астрономические масштабы. Из-за этого они не создают плотных сгустков как барионное вещество. При

⁴Это означает предположение, что на масштабах, на которых материю можно считать однородной и изотропной, устанавливается термодинамическое равновесие. Это предположение буквально неверно. Однако во многих случаях можно установить разумную степень равновесия и учитывать неравновесность системы через эволюцию дополнительных параметров.

этом по современным представлениям скорости этих частиц много меньше скорости света («холодное темное вещество», cold dark matter (CDM)). Механизмом скопления темного вещества является образование каспов — «перехлестов» в результате почти бесстолкновительного движения. Более того, поскольку средняя плотность темного вещества в пять раз больше средней плотности барионного вещества, на больших масштабах (галактики и скопления галактик) движение темного вещества играет определяющую роль: барионное вещество концентрируется вблизи скоплений темного вещества, а не наоборот.

Второй эффект, который ограничивает возможность использования этой формулы для определения кривизны, называют «темной энергией». Темная энергия ведет себя как космологическая постоянная или как вещество с относительно постоянными плотностью ρ и давлением $p \simeq -\rho$. Современные измерения светимости удаленных объектов показывают, что Вселенная удивительно близка к плоскому миру, так что суммарная плотность видимого вещества, темной материи и темной энергии очень близка к ρ_c . В настоящее время плотность барионной материи оценивается примерно в $0.05\rho_c$, плотность темной материи — в $0.26\rho_c$, а остальные 69% принадлежат темной энергии. Вклад электромагнитного излучения составляет, по-видимому, где-то $5 \cdot 10^{-5}\rho_c$. Следует подчеркнуть, что эти величины представляют собой результат интерполяции, так что разделение неизвестных нам эффектов на «темную материю» и «темную энергию» в известном смысле условно. Кроме того, пока нет достаточных наблюдательных данных, чтобы утверждать, что плотность темной энергии не зависит от времени (и, соответственно, абсолютная величина давления в точности совпадает с плотностью). Вполне может оказаться, что и темная материя и темная энергия представляют собой явления, выходящие за рамки общей теории относительности.

Теперь мы рассмотрим простейшие космологические модели. До сравнительно недавнего времени считалось, что давлением материи в современную эпоху можно пренебречь, так что в течение уже длительного времени Вселенная эволюционирует согласно уравнениям (14.25), (14.26) с $p = 0$. Этот случай допускает простое решение. Имеем

$$\rho = C_m a^{-3}, \quad (14.30)$$

где C_m — параметр размерности массы. В этом случае проще взять интеграл для параметра η . Для замкнутой вселенной имеем

$$a(\eta) = A_m \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2} (\eta - \sin \eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad (14.31)$$

где

$$A_m = \frac{8\pi}{3} G C_m. \quad (14.32)$$

Для открытой вселенной

$$a(\eta) = A_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{2} (\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad 0 \leq \eta < \infty. \quad (14.33)$$

Мы выбрали расширяющуюся вселенную как отвечающую наблюдениям. В плоском случае, очевидно,

$$a(\eta) = \frac{A_m}{4} \eta^2, \quad t(\eta) = \frac{A_m}{12} \eta^3, \quad 0 \leq \eta < \infty. \quad (14.34)$$

На ранних стадиях все три решения совпадают и

$$a(t) \simeq \left(\frac{9A_m}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (14.35)$$

Замкнутая вселенная имеет две особые точки: $\eta = 0, 2\pi$. Особая точка $\eta = 0$ представляет собой начальный момент существования вселенной («большой взрыв»). Особая точка $\eta = 2\pi$ — конечный момент. Вне интервала $0 \leq \eta \leq 2\pi$ вселенная не определена, так что вопрос, что было до начальной сингулярности и что будет после конечной не имеет смысла в рамках ОТО. Если угодно, самого «до» не было, и самого «после» не будет. В отличие от замкнутой вселенной, открытая и плоская вселенные имеют начальную сингулярность, но не имеют конечной. Такие вселенные, однажды возникнув, бесконечно расширяются.

Рассмотрим теперь светоподобные геодезические в таких вселенных. Кривая $\varphi = \vartheta = 0$ в пространстве является главной окружностью в замкнутом случае и гиперболой в открытом случае, то есть прямой пространства постоянной кривизны. Мы будем временно считать, что переменная χ пробегает значения $-\pi \leq \chi < \pi$ при $K > 0$ и $-\infty < \chi < \infty$ при $K \leq 0$. Нетрудно понять, что изотропные кривые $\chi = \pm\eta + \text{const}$ являются геодезическими.

Поскольку переменная η в замкнутой вселенной пробегает значения от 0 до 2π , изотропная геодезическая за это время делает полный круг и возвращается в исходную пространственную точку. Таким образом, луч света за время жизни вселенной может обойти ее ровно один раз. В общем случае, если мы возьмем точку вблизи сингулярности $\eta \rightarrow 0$, то с течением времени область в угловых переменных χ, ϑ, φ , до которой может дойти сигнал пропорциональна $\eta \sim t^{1/3}$, то есть растет со временем. Это значит, что если первоначальное распределение материи неоднородно, то эти неоднородности сохранятся и со временем наблюдатель будет их видеть все больше и больше, по мере того, как новые области пространства входят под его горизонт видимости. Таким образом, модель неустойчива по отношению к начальным неоднородностям: в ней нет механизма их сглаживания. Можно думать, что на начальных стадиях эволюции Вселенной действуют другие механизмы.

В самом деле, вблизи сингулярностей, когда плотность вещества велика, вещество наверняка не будет «пылевидным», оно будет создавать давление. Попробуем рассмотреть предельно сжатое вещество — ультрарелятивистский газ. Из статистической механики мы знаем уравнение состояния идеального ультрарелятивистского газа: $\rho = 3p$. Согласно уравнению (14.25) имеем

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \quad (14.36)$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$A_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \quad (14.37)$$

При достаточно малых a имеем $\frac{8\pi}{3} G \rho a^2 = A_r a^{-2} \gg 1$ и результат мало зависит от типа геометрии. Поэтому пренебрежем кривизной под корнем в (14.27) и получим

$$a(t) = A_r^{1/2} \eta = (2A_r)^{1/2} t^{1/2}. \quad (14.38)$$

Это несколько меняет поведение вселенной вблизи сингулярности, но не меняет основного вывода: фридмановские модели, основанные на известных формах материи, неустойчивы относительно первоначальных неоднородностей.⁵ В то же время наблюдения свидетельствуют о высокой однородности и изотропии Вселенной. Класс гипотез, объясняющих эту однородность мы разберем на семинаре.

А сейчас вернемся к описанию современной Вселенной. В 1998 году были опубликованы астрономические исследования, значительно уточняющие параметр Хаббла как функцию времени. Один из выводов этих исследований состоял в том, что стандартные свечи с известным красным смещением выглядят на больших расстояниях темнее, чем они бы выглядели согласно моделям Фридмана с пылевидной материей. Это означает, что Вселенная расширяется быстрее, чем предсказывают эти модели. Более того, наблюдения согласуются с предположением, что в течение последних $4 \div 5$ миллиардов лет (то есть начиная с $z \simeq 0.3$) Вселенная расширяется с ускорением, примерно по экспоненциальному закону $a(t) \sim e^{Ht}$. Хотя различные методы дают разные абсолютные значения параметра Хаббла, все они подтверждают его постоянство в этот период. Для экспоненциального закона имеем

$$\eta \sim \int dt e^{-Ht} \sim -e^{-Ht}, \quad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \quad (14.39)$$

Из (14.27) мы видим, что такая зависимость возникает при $\rho = \text{const}$, $G\rho a^2 \gg 1$. Сравнивая с законом сохранения энергии (14.23), мы получаем $\rho = -p$, что неотличимо от вклада Λ -члена с $\Lambda = 8\pi G\rho$. Этот вклад и принято называть темной энергией.

На самом деле, конечно, $p > -\rho$. Поэтому более точная модель должна сочетать в себе разные виды материи. Давайте разобьем материю на три компоненты: «пыль» (включающую в себя барионную и холодную темную материю) с плотностью ρ_m и давлением $p_m = 0$, излучение (включающее в себя

⁵Эта фаза даже немного ухудшает положение, уменьшая значения параметра η , отсчитываемые от сингулярности.

фотоны, легкие нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы) с плотностью ρ_r и давлением $p_r = \rho_r/3$ и темную энергию с плотностью ρ_e и давлением $p_e = -\rho_e$. Будем пренебрегать возможностью перехода этих трех видов материи друг в друга. Тогда, в силу линейного вида уравнения (14.23), для каждого вида материи имеется своя зависимость плотности от масштабного фактора:

$$\rho_m = C_m a^{-3}, \quad \rho_r = C_r a^{-4}, \quad \rho_e = C_e. \quad (14.40)$$

Полагая $A_i = \frac{8\pi}{3} G C_i$, находим

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{A_r a^{-2} + A_m a^{-1} + A_e a^2 - k}}. \quad (14.41)$$

Этот интеграл берется численно и используется для подгонки под наблюдательные данные. Для сравнения с наблюдениями удобно привести его к данным о настоящем времени. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_m}{a_0^4 H_0^2}, & \Omega_r &= \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_r}{a_0^3 H_0^2}, \\ \Omega_e &= \frac{\rho_e(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{A_e}{a_0^2 H_0^2}, & \Omega_k &= -\frac{k}{a_0^2} = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_e, \end{aligned} \quad (14.42)$$

где $H_0 = H(t_0)$, $a_0 = a(t_0)$ — параметр Хаббла и масштабный фактор в настоящее время $t_0 \simeq 13.8 \cdot 10^9$ yr. Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_r \tilde{a}^{-2} + \Omega_m \tilde{a}^{-1} + \Omega_e \tilde{a}^2 + \Omega_k}} \quad (14.43)$$

Из эмпирических данных имеем $\Omega_m \simeq 0.31$, $\Omega_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_e \simeq 0.69$, $|\Omega_k| \lesssim 10^{-3}$. Вкладом кривизны Ω_k мы практически всюду можем пренебречь. Что касается вкладов разных видов материи, то с большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Отсюда следует, что имеется два характерных значения масштабного параметра

$$a_1 = \frac{A_r}{A_m} \ll a_2 = \left(\frac{A_m}{A_e} \right)^{1/3},$$

так что при $a(t) \ll a_1$ имеет вкладом пылевидной материи и темной энергии можно пренебречь (стадия *радиационного доминирования*), при $a_1 \ll a(t) \ll a_2$ доминирует пылевидная материя (*пылевая стадия*), а при $a(t) \gg a_2$ доминирует космологическая постоянная (стадия *Λ -доминирования*). Легко видеть, что $\tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$ ($z_1 \sim 10^4$, $t_1 \sim 10^4$ yr), $\tilde{a}_2 \simeq 0.77$ ($z_2 \simeq 0.30$, $t_0 - t_2 \simeq 3.8 \cdot 10^9$ yr). Заметим, что даже электроны становятся ультрарелятивистскими только при температуре порядка 10^{10} K, что соответствует значениям масштабного фактора порядка $\tilde{a} \sim 10^{-9} \ll \tilde{a}_1$, так что при больших масштабных факторах их можно считать частью «пыли». Вклад релятивистских нейтрино в области радиационного доминирования и, по крайней мере, в начале пылевой фазы составляет постоянную долю (примерно .7) от вклада фотонов. Позже этот вклад может уменьшиться (и увеличиться вклад нейтрино в нерелятивистскую материю) из-за массы нейтрино, но это уже не будет заметно влиять на эволюцию Вселенной. Это оправдывает первоначальное предположение о постоянстве Ω_i в интересующем нас интервале масштабных факторов.

Описанная модель называется *моделью Λ CDM* (модель холодной темной материи с Λ -членом) и она хорошо согласуется с известными наблюдательными данными.

Задачи

1. Получите формулы (14.4), (14.5) ограничением из плоского четырехмерного пространства. Проверьте также формулы для K . Докажите формулу (14.6).
2. Проверьте формулы для символов Кристоффеля (14.17) и для тензора Риччи (14.19).
3. Получите уравнение (14.24) прямым интегрированием уравнения движения (14.22) с использованием уравнения Фридмана (14.21).

4. Напишите уравнение Гамильтона—Якоби для массивной частицы в модели Фридмана общего вида и найдите решение в квадратурах методом разделения переменных.

5*. Постройте диаграмму Пенроуза для метрики

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} e^{Ht} d\chi^2 = \frac{d\eta^2 - d\chi^2}{H^2 \eta^2}, \quad \eta = -e^{-Ht}.$$

Покажите, что эта система координат не полна (геодезические могут быть продолжены в прошлое). Заменой координат светового конуса найдите полную систему координат и построьте полную диаграмму Пенроуза.

Семинар 14

Проблемы моделей Фридмана. Инфляция

Перечислим основные проблемы моделей Фридмана.

1. Проблема плоской Вселенной. Согласно наблюдениям в настоящий момент времени Вселенная является довольно плоской:

$$|\Omega_k| = \left| \frac{\rho_c(t_0) - \rho(t_0)}{\rho_c(t_0)} \right| \lesssim 10^{-3}. \quad (14.44)$$

Введем функцию времени

$$\delta\Omega = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = -\frac{K}{H^2} = -\frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (14.45)$$

совпадающую с Ω_k при $t = t_0$. Из правой части следует, что если $a(t) \sim t^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), то $\delta\Omega \sim t^{2-2\alpha}$ растёт со временем. Значит, к началу стадии доминирования вещества плотность материи должна была быть намного ближе к критической:

$$|\delta\Omega(t_1)| \simeq \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{2/3} e^{2H(t_0-t_2)} |\delta\Omega_0| \sim 10^{-7}. \quad (14.46)$$

А в эпоху первичного нуклеосинтеза $t_{\text{nucl}} \sim 10^2 \div 10^3$ s, например, должно быть

$$|\delta\Omega(t_{\text{nucl}})| \simeq \frac{t_{\text{nucl}}}{t_1} |\delta\Omega_1| \sim 10^{-16}. \quad (14.47)$$

По современным представлениям стадия радиационного доминирования начинается примерно в момент $t_r \sim 10^{-32}$ s, что должно отвечать фантастически малой величине $\delta\Omega(t_r) \sim 10^{-51}$ отклонения от критической плотности. Почему Вселенная должна быть настолько плоской на начальных этапах?

2. Проблема начальной однородности и проблема горизонтов.

Во фридмановских моделях неоднородности тоже должны расти со временем. Качественно можно думать, что если $a(t) \sim t^\alpha$, то отклонение локальной плотности от средней будет расти по тому же закону $\delta\rho/\rho_c \sim \dot{a}^{-2} \sim t^{2-2\alpha}$, что и $\delta\Omega$. Это касается порядка величины возмущений. Что касается пространственных масштабов возмущений, то мы можем рассуждать следующим образом.

В относительно однородной вселенной возмущения, так же как и другие астрофизические объекты, должны сохранять значения χ , ϑ , φ (если только они не распространяются очень быстро). В этих координатах радиус наблюдаемой нами области в предшествующий момент времени t равен

$$\chi_{\text{max}} = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (14.48)$$

Если $a(t) \sim t^\alpha$, то $\eta \sim t^{1-\alpha}$ и в достаточно далеком прошлом

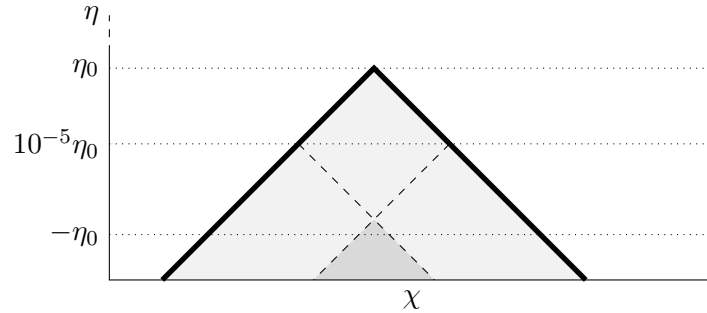
$$\eta \ll \chi_{\text{max}}. \quad (14.49)$$

Фактически самое древнее событие, которое мы можем наблюдать непосредственно, это рекомбинация плазмы, породившая реликтовое излучение. Она случилась в момент времени $t_{\text{rec}} \simeq 4 \cdot 10^5$ yr, $z \simeq 10^3$. Для него

$$\frac{\eta_{\text{rec}}}{\eta_0} \sim \left(\frac{t_{\text{rec}}}{t_2} \right)^{1/3} \simeq 0.04. \quad (14.50)$$

(мы пренебрегли недолгой стадией Λ -доминирования, где η меняется не сильно). Но это значит, что масштабы, в которых могло установиться равновесие за период времени от Большого взрыва до рекомбинации составляет не более 0.04 от видимой области Вселенной. Мы должны были бы наблюдать это как сильную анизотропию реликтового излучения на угловых масштабах порядка нескольких градусов. Эксперимент же показывает чрезвычайно малую анизотропию (порядка 10^{-4}) на этих угловых масштабах.

Как это могло произойти? Каким образом видимая часть Вселенной могла достичь равновесия? Решение проблемы может заключаться в том, что момент $\eta = 0$, начальный во фридмановских моделях, не является начальным моментом реальной Вселенной. Ему должен предшествовать период по крайней мере до значений $\eta < -\eta_0$. Предположительная диаграмма Пенроуза должна выглядеть примерно так:



Затемненная область — это область видимости из нашей точки Вселенной в наше время. Более темная область — эта общая область, которая могла бы влиять на температуру реликтового излучения из противоположных точек на небе.

Одним из наиболее популярных объяснений существования такой области является **гипотеза инфляции**. Гипотеза предполагает, что фридмановской фазе предшествовала краткая в масштабах синхронного времени t , но продолжительная в масштабах параметра η фаза экспоненциального расширения (*инфляции*):

$$a(t) \sim e^{H_* t} \sim -\eta^{-1}, \quad (14.51)$$

где H_* — очень большой и мало меняющийся на протяжении этого периода параметр Хаббла.

При таком быстром расширении основные проблемы можно решить.

1. Инфляция к моменту $t \sim 10^{-32}$ с может подготовить нам достаточно плоскую вселенную. Действительно, при зависимости (14.51) масштабного фактора от времени плотность экспоненциально быстро приближается к критической:

$$|\delta\Omega| = \dot{a}^{-2} \sim e^{-2H_* t}.$$

Предположим, что Вселенная родилась каким-то квантовым образом на масштабах планковской длины

$$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

То есть, будем считать, что при рождении $a \sim l_{\text{Pl}}$, а отклонение плотности от критической порядка единицы: $\delta\Omega_{\text{Pl}} \sim 1$. Тогда необходимое для фридмановских моделей начальное отклонение плотности от критической будет достигнуто при $a \sim 10^{-7}$ см. Согласно современным представлениям начальное время радиационно-доминированной модели Фрийдмана составляет $t_r \sim 10^{-32}$ с. Пусть T_* — продолжительность инфляции. Тогда из оценки $e^{-2H_* T_*} \sim 10^{-52}$ получаем $H_* \gtrsim 60/T_*$. Например, если $T_* \sim t_r$, то $H_* \gtrsim 10^{34} \text{ с}^{-1}$.

2. Масштабы неоднородностей растут во времени в процессе инфляции, а амплитуда их падает. И если на планковских масштабах неоднородности были сравнимы с планковской длиной, то есть с тогдашним масштабом a Вселенной, то после инфляции их масштабы опять же будут порядка a , но видимая нами часть Вселенной, определенная на момент рекомбинации плазмы η_{rec} , оказывается намного меньше этого масштаба. Возможно, что Вселенная в целом содержит значительные

неоднородности, но видимая часть Вселенной есть только маленькая и потому однородная область. Одна из возможностей состоит в том, что на фоне первичного квантового «бульона» возникают отдельные «вздутия», которые производят куски квазиклассического расширяющегося пространства.

3. Инфляция предоставляет достаточно времени для того, чтобы на масштабах видимой части Вселенной устанавливалось термодинамическое равновесие. Действительно, для наблюдателя в конце эпохи инфляции имеем

$$\chi_{\max} \simeq \frac{1}{H_* a(t_r)} (e^{H_* T_*} - 1). \quad (14.52)$$

Для достаточно большого T_* первое слагаемое может быть сделано сколь угодно большим. Например, полагая $T_* \sim t_r$ и используя оценки из первого пункта, мы получаем $\chi_{\max} \sim 10^9$. Это многократно больше, чем нужно для установления равновесия. Увеличение H_* (при постоянном $H_* T_*$) понижает эту оценку, но даже если $H_* \sim 10^{43} \text{ s}^{-1}$, то есть порядка обратного планковского времени, $\chi \sim 1$, что дает возможность установить равновесие в значительных областях.

Какие механизмы могут приводить к инфляции. Рассмотрим простую модель скалярного поля $\Phi(x)$ с действием

$$S[\Phi] = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right). \quad (14.53)$$

Здесь $V(\Phi)$ — некоторый потенциал. Обычно считается, что $V(0) = 0$, $V(\Phi) \geq 0$. Мы не будем обсуждать природу поля. Может быть, это какое-то неизвестное фундаментальное поле, а может быть, это коллективная переменная (например, параметр порядка). Как бы то ни было, его тензор энергии-импульса будет иметь вид

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \Phi \partial_\lambda \Phi \right) + g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (14.54)$$

Предположим, что поле Φ находится в пространстве с метрикой вида (14.7), причем постоянно в пространстве и по какой-то причине медленно меняется со временем. Тогда

$$T_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu} \rho(t), \quad \rho(t) = V(\Phi(t)). \quad (14.55)$$

Это эквивалентно появлению космологической «постоянной», медленно меняющейся со временем. Если потенциал $V > 0$, это может обеспечить инфляционную стадию.

«Разрешим» теперь полю Φ меняться со временем, но будем его считать однородным в пространстве: $\partial_i \Phi = 0$. Тогда тензор энергии-импульса диагонален и пространственно-изотропен, причем

$$\rho = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi), \quad p = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi). \quad (14.56)$$

Напишем уравнения движения для модели (14.53). Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = -\frac{dV}{d\Phi}. \quad (14.57)$$

Полагая пространственную однородность и используя метрику в виде (14.7), находим

$$\frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{d\Phi}{dt} \right) = -a^3 \frac{dV}{d\Phi}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + V'(\Phi) &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi}{3} G \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right). \end{aligned} \quad (14.58)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (14.23) удовлетворяется автоматически.

Как эта задача связана с инфляцией? Если в момент «квантового рождения» Вселенной, поле Φ приобретает какое-то конечное значение (может быть, даже различное в разных точках пространства), то это приводит к ненулевому параметру Хаббла. Позже в результате инфляции неоднородность ослабляется и Вселенная описывается уравнениями (14.58). Далее возможны различные сценарии. В некоторых сценариях потенциал $V(\Phi)$ имеет локальный минимум при некотором ненулевом значении Φ , который постепенно исчезает (например, при понижении температуры, если поле описывает свойства некоторой среды). В других сценариях потенциал может иметь только один минимум в нуле и расти при увеличении Φ (например, как $|\Phi|^n$). В таких сценариях важно, что параметр Хаббла $H = \dot{a}/a$ в первом из уравнений играет роль коэффициента трения. Таким образом, расширение Вселенной тормозит «скатывание» поля в потенциальную яму и, тем самым, продлевает инфляционную стадию. Рассматриваются также модели, содержащие несколько скалярных или даже тензорных полей.