Лекция 6
Слабое гравитационное поле

В этой лекции мы рассмотрим предел слабого гравитационного поля, то есть теорию гравитации в почти плоском пространстве. Такая задача возникает в двух случаях:

1. Когда компоненты тензора энергии-импульса малы, то есть, грубо говоря, в системах с малой плотностью вещества. К этому случаю относится и нерелятивистский предел, когда, помимо малости кривизны, еще и скорости частиц достаточно малы.

2. Когда мы изучаем гравитационное поле достаточно далеко от гравитирующих тел. В этом случае представляют интерес асимптотические разложения для метрики и кривизны. Мы увидим, как с их помощью можно узнать общую массу и момент импульса источника гравитации.

Кроме того, мы увидим, что уравнения слабого гравитационного поля содержат свободную динамическую часть, которая приводит к новому по сравнению с ньютоновской теорией эффекту — гравитационным волнам.

Приближение слабого гравитационного поля, вообще говоря, не предполагает малых скоростей движения частиц и наблюдателей. Под приближением слабого гравитационного поля мы будем понимать предел

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{6.1}$$

так чтобы уравнения Эйнштейна можно было бы считать линейными. Иными словами, гравитационное поле настолько слабо, что его самодействие пренебрежимо мало. Для этого, разумеется, тензор энергии-импульса материи должен быть достаточно мал

$$G|T^{\mu\nu}|l^2 \ll 1, \tag{6.2}$$

где l — характерные масштабы, на которых меняется метрика. На самом деле, это не значит, что компоненты тензора энергии-импульса должны удовлетворять этому условию во всем пространстве. Линеаризованные уравнения мы можем использовать достаточно далеко областей с большой концентрацией масс, рассматривая области больших масс и сильного поля как «черные ящики», создающие определенное поле на своих границах.

В этом приближении удобно поднимать и опускать индексы с помощью фоновой метрики $\eta_{\mu\nu}$. Чтобы избежать путаницы, мы будем рисовать черточку над соответствующими индексами: $h^{\bar{\mu}}_{\nu} = \eta^{\mu\lambda}h_{\lambda\nu}$ и т.д. В первом порядке по $h_{\mu\nu}$ имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\overline{\mu\nu}}, \qquad g = g(1+h), \qquad h = h^{\bar{\mu}}_{\mu}. \tag{6.3}$$

Для тензора Риччи получаем в первом порядке

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{\lambda\kappa}h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda} - h_{,\mu\nu}\right). \tag{6.4}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\eta^{\lambda\kappa}h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - 2h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}T\right) \tag{6.5}$$

выглядят пока еще довольно устрашающе. Если мы посмотрим на тензор Риччи, то первое слагаемое в нем имеет вид лапласиана от $h_{\mu\nu}$, и хотелось бы как-то избавиться от остальных членов. Два других члена не просто неудобны, они портят картину. Действительно, представим выражение (6.4) в виде

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}h_{\lambda\kappa}, \tag{6.6}$$

где K — дифференциальный оператор вида

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\kappa}_{\nu}\,\Box + \delta^{\lambda}_{\mu}\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^{\kappa}_{\nu}\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\right), \tag{6.7}$$

действующий на симметричных тензорах в пространстве Минковского. Здесь

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{6.8}$$

— лапласиан в пространстве-времени Минковского (иногда его называют *даламбертианом*). Оператор K вырожден. Легко видеть, что любой тензор вида $\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$ является его собственной функцией с нулевым собственным значением. Это означает, что оператор K необратим, и метрика не определяется однозначно тензором Риччи или, в силу уравнений Эйнштейна, тензором энергии-импульса материи. На самом деле, в этом нет ничего удивительного. Как мы уже не раз говорили, геометрия пространства-времени не меняется при произвольном преобразовании координат. Рассмотрим малое преобразование: $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$. Метрика при таком преобразовании меняется как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$. Близость метрики к плоской не фиксирует однозначно систему координат: остается свобода относительно преобразований той же малости, что и тензор h. В первом порядке имеем

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\bar\mu,\nu} + \xi_{\bar\nu,\mu}. \tag{6.9}$$

Полагая $\varphi_\mu = \xi_{\bar\mu}$, мы видим, что именно малые преобразования координат и вырождают оператор K. Чтобы снять это вырождение, мы должны фиксировать калибровку. Ее удобно фиксировать четырьмя условиями

$$\psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu} = 0, \qquad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \tag{6.10}$$

Эти условия приводят к тому, что плохие слагаемые в (6.4) сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}. \tag{6.11}$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (6.10) принимают простой вид

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{6.12}$$

Рассмотрим теперь в рамках приближения слабого поля нерелятивистский предел, определяемый условиями:

1) скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам, большим чем характерные масштабы рассматриваемых областей;

2) плотность энергии совпадает с плотностью массы: $T^{00} = \rho$, а плотности импульса и напряжения малы: $|T^{0i}|, |T^{ik}| \ll \rho$.

Первое условие означает также, что мы можем пренебречь производными по времени от метрики и решать задачу как статическую:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{00}(\boldsymbol{r}) &= 16\pi G\rho(\boldsymbol{r}), \\ \Delta\psi_{0i}(\boldsymbol{r}) &= \Delta\psi_{ik}(\boldsymbol{r}) = 0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1}\partial_i^2$ — пространственный лапласиан. Решение уравнения Лапласа, стремящееся к нулю на бесконечности, известно:

$$\psi_{00}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}, \qquad \psi_{0i}(\boldsymbol{r}) = \psi_{ik}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{6.14}$$

где $S_d = d\pi^{d/2}/\Gamma(d/2+1)$ — площадь поверхности единичной гиперсферы в d-мерном эвклидовом пространстве. Это решение, очевидно, удовлетворяет калибровочному условию (6.10). Из двух последних равенств получаем $h_{ik} = -\frac{h}{2}\delta_{ik}$ и $h_{00} = -\frac{d-3}{2}h = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}$. Следовательно,

$$h_{00}(\boldsymbol{r}) = (d-3)h_{ii}(\boldsymbol{r}) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\int d^{d-1}x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{d-3}}. \tag{6.15}$$

Согласно (3.8) имеем $2\phi(\boldsymbol{r}) = h_{00}$, однако согласно в (3.8) h_{ii} должно быть равно нулю. На самом деле, если $\phi \ll 1$, $v^2 \ll 1$ последнее заключение является превышением точности. Поэтому никакого противоречия с (6.15) нет. Итак, нерелятивистский потенциал системы масс m_i в точках $\boldsymbol{r}_i$ равен

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \sum_i \frac{m_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^{d-3}}. \tag{6.16}$$

При $d = 4$ мы получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(\{\boldsymbol{r}_i\}) = \frac{1}{2}\sum_i \lim_{\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}_i} m_i \left(\phi(\boldsymbol{r}') + G\frac{m_i}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_i|}\right) = -\sum_{i<j} G\frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}. \tag{6.17}$$

Вернемся к релятивистскому случаю, но рассмотрим стационарные (не зависящие от времени) решения вне гравитирующих масс. В этом случае тензор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_i\psi_{0i} = 0, \qquad \partial_i\psi_{ik} = 0. \tag{6.18}$$

Чтобы найти связь решений со свойствами гравитирующего тела, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ через асимптотики решений уравнений (6.18). Отметим, что условие $\psi^{\bar{i}}_{\mu,i} = 0$ не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (6.9) не нарушает это условие, если

$$\Box\,\xi^\mu = 0, \tag{6.19}$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta\xi^\mu = 0. \tag{6.20}$$

Давайте искать решение уравнения Лапласа в виде

$$\begin{aligned}
\psi_{00} &= Ar^{3-d} + B_i\,\partial_i r^{3-d},\\
\psi_{0i} &= A_i r^{3-d} + B_{ik}\,\partial_k r^{3-d},\\
\psi_{ik} &= A_{ik} r^{3-d} + B_{ikl}\,\partial_l r^{3-d}, \quad B_{ikl} = B_{kil}.
\end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{gathered}
A_i\,\partial_i r^{3-d} = A_{ik}\,\partial_k r^{3-d} = 0,\\
B_{ik}\,\partial_i\partial_k r^{3-d} = B_{ikl}\,\partial_k\partial_l r^{3-d} = 0.
\end{gathered}$$

Первая строчка немедленно дает $A_i = A_{ik} = 0$. Из второй строчки получаем, что

$$B_{ik} = B_{[ik]} + C\delta_{ik}, \qquad B_{ikl} = B_{i[kl]} + C_i\delta_{kl} = B_{k[il]} + C_k\delta_{il}.$$

Из последнего равенства нетрудно доказать, что $B_{ikl} = 0$ и, таким образом, $\psi_{ik} = 0$. Выражения для ψ_{00} и ψ_{0i} нетрудно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (6.20). Действительно, преобразованием $\xi^i = -B_i/A, \xi^0 = 0$ можно устранить второй член в выражении для ψ_{00}, а преобразованием $\xi^i = 0, \xi^0 = -Cr^{3-d}$ устранить симметричную часть в B_{ik}.

Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \qquad \psi_{0i} = B_{ik}\partial_k r^{3-d} \quad (B_{ki} = -B_{ik}), \qquad \psi_{ik} = 0. \tag{6.21}$$

Осталось связать константы A и B_{ik} с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами $\chi^{\mu 0kl}$.

В компоненту χ^{00kl} вносит вклад как ψ_{00}, так и ψ_{0i}, но поскольку на больших расстояниях $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$, мы можем сохранить только вклад ψ_{00}. Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки ψ_{00}, а второй — ψ_{0i}. Поэтому вторым множителем можно пренебречь. Первая поправка в $|g|$ также содержит ψ_{00}, так что членами, содержащими ψ_{0i} пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}(1 - Ar^{3-d}), \qquad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k. \tag{6.22}$$

Подставляя в (5.12) получаем полную массу гравитирующей системы

$$M = P^0 = \oint dS_{0i}\,\tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}\oint \frac{dS_{0i}\,x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}. \tag{6.23}$$

Вклад ψ_{0i} в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при $r \to \infty$, что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}} \tag{6.24}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (6.14). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \qquad (d = 4). \tag{6.25}$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}).$$

Оба слагаемых содержат множитель вида $g^{0i} = h_{0i} = \psi_{0i}$, поэтому мы можем положить $|g| = 1$, $g_{ik} = -\delta_{ik}$. Находим

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{(\delta^{kl}B_{im} - \delta^{ik}B_{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B_{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^k x^m)}{r^{d+1}}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Так как $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$ интеграл по поверхности для P^i обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0, \tag{6.27}$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (5.14) дает

$$B_{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}}J_{ij}. \tag{6.28}$$

В четырехмерном случае имеем

$$B_{ij} = 2GJ_{ij} \qquad (d = 4). \tag{6.29}$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов» $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях мы можем узнать общие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

Задачи

1. Покажите, что для оператора K, определенного в (6.7), $K(h) = 0$, если $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$.

2. Выведите формулы (6.22) и (6.26).

3. Выразите риманову кривизну $R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ через величины $h_{\mu\nu}$ в линейном приближении. Можно ли выразить ее через тензор энергии-импульса?

4. *Условие стационарности системы.* Пусть псевдориманово пространство имеет времениподобное векторное поле Киллинга ξ^μ, то есть векторное поле, удовлетворяющего условию $\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu} = 0$, времениподобное во всех точках. Мы можем выбрать координаты так, чтобы время текло вдоль этого вектора Киллинга: $\xi = \partial_0$ (т.е. $\xi^0 = 1, \xi^i = 0$). Покажите, что в этой системе координат метрика стационарна: $g_{\mu\nu,0} = 0$.

5. Рассмотрим «постоянное», но, вообще говоря, сильное гравитационное поле, то есть поле, описываемое метрикой, не зависящей от x^0. Покажите, что

$$\sqrt{|g|}R^0_0 = \partial_i(\sqrt{|g|}g^{0\mu}\Gamma^i_{0\mu}). \tag{6.30}$$

Предположим, что поле создается массами, расположенными в конечном объеме, так что на достаточно большом расстоянии поле становится слабым. С помощью (6.30) и (6.23) покажите, что в этом случае полная энергия вещества и гравитационного поля может быть выражена через интеграл от тензора энергии-импульса материи по пространственному объему:

$$M = \int d^{d-1}x\,\sqrt{|g|}\left(T^0_0 - \frac{1}{d-3}T^i_i\right). \tag{6.31}$$

6. Рассмотрим сферически симметричную тонкую сферу массы M и радиуса R, вращающуюся как твердое тело с постоянной угловой скоростью Ω, $\Omega R \ll 1$. В предположении применимости линейного приближения ($GM \ll l \ll R$, где l — толщина сферы) найдите создаваемое сферой гравитационное поле (метрику) в линейном приближении в первом порядке по $R\Omega$ и покажите, что метрика внутри сферы может быть описана как плоская метрика, вращающаяся с угловой скоростью

$$\omega = \frac{4}{3}\frac{GM\Omega}{R}.$$

(Для этого вам надо будет в сферических координатах сделать замену координат $\varphi = \varphi' + \omega t$ и подобрать ω так, чтобы метрика приобрела плоский вид $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi'^2)$.)

Семинар 6

Задачи о гравитационном поле в линейном приближении

Мы рассмотрим несколько задач о гравитационном поле в линейном приближении:

1. Гравитационное поле частицы, движущейся с постоянной скоростью.
2. Равномерно движущиеся стержни и плоскости.
3. Гравитационное поле луча света.