Лекция 7
Гравитационные волны

До сих пор мы рассматривали специальное решение линейной системы (6.12), (6.10). В стационарном случае мы выделяли это специальное решение условием стационарности самого решения. Но мы знаем, что общее решение неоднородной линейной системы равно сумме любого специального решения и общего решения однородной системы, в данном случае

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu} = 0. \tag{7.1}$$

Подставляя функции $\psi_{\mu\nu}$ в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{7.2}$$

получаем спектр

$$k^0 = \pm\sqrt{(k^i)^2} = \pm|\boldsymbol{k}| \tag{7.3}$$

и дополнительное условие

$$k_{\bar\mu}A^{\bar\mu}_{\nu} = 0. \tag{7.4}$$

Общее решение имеет вид линейной комбинации всех возможных плоских волн

$$\begin{gathered}\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\varepsilon\mathrm{i}|\boldsymbol{k}|x^0+\mathrm{i}\boldsymbol{kr}},\\ |\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k}) \pm k^iA^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k}) = 0, \qquad A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \qquad A^{-}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = \left(A^{+}_{\mu\nu}(-\boldsymbol{k})\right)^*.\end{gathered} \tag{7.5}$$

Последнее равенство во второй строчке представляет собой условие вещественности решения.

Рассмотрим одну монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^0 = k^1 = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re} A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0-x^1)}. \tag{7.6}$$

Для удобства мы здесь будем обозначать индексы $0, 1$ начальными буквами греческого алфавита, а индексы $2,\dots,d-1$ — латинского:

$$\alpha,\beta,\ldots = 0,1; \qquad a,b,\ldots = 2,\ldots,d-1.$$

Условие калибровки (6.10) дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7.7}$$

Таким образом, из $d(d+1)/2$ величин $A_{\mu\nu}$ осталось $d(d-1)/2$. Тем не менее, количество физически различных поляризаций меньше. Как мы уже отмечали, условие (6.10) не фиксирует калибровку полностью. Остаются еще преобразования

$$\psi_{\mu\nu} = \psi'_{\mu\nu} + \xi_{\bar\mu,\nu} + \xi_{\bar\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}. \tag{7.8}$$

удовлетворяющие уравнению (6.19): $\Box\,\xi^\mu = 0$. Возьмем вектор ξ^μ вида

$$\xi^\mu = \operatorname{Re} X^\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0-x^1)}. \tag{7.9}$$

Из (7.8) получаем

$$\begin{aligned}A_{00} &= A'_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0+X^1),\\ A_{0a} &= A'_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a,\\ A_{ab} &= A'_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0-X^1)\delta_{ab}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Таким образом, калибровочные преобразования позволяют устранить еще d компонент. Например, положив

$$X^0+X^1 = \mathrm{i}\omega^{-1}A_{00}, \qquad X^a = -\mathrm{i}\omega^{-1}A_{0a}, \qquad X^0-X^1 = \frac{\mathrm{i}\omega^{-1}}{d-2}\sum_{a=1}^{d-2}A_{aa},$$

мы получаем $A'_{\alpha\mu} = 0$, $A'^{\bar\mu}_{\mu} = 0$, то есть волна стала поперечной и бесследовой. Всего «живых» компонент остается $d(d-3)/2$. В четырехмерном пространстве удобно выбрать две калибровочно-инвариантные компоненты ψ_{23} и $\psi_{22} - \psi_{33}$. Чтобы задача Коши для гравитационного поля имела единственное решение, необходимо задать значения этих «живых» компонент и их первых производных по времени, то есть $d(d-3)$ функции пространственных координат. В четырехмерном пространстве-времени нужно задать четыре функции. Решения однородного уравнения в размерностях $d \le 3$ полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы. Хотя мы рассматривали слабые возмущения плоского пространства-времени, эти выводы имеют общий характер.

Изучая плоские волны, мы можем рассуждать по-другому. Рассмотрим общее решение уравнений (7.1), не зависящее от координат x^a. В плоскости (x^0, x^1) удобно перейти к *координатам светового конуса* $x^\pm = x^0 \pm x^1$. Тогда

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{7.11}$$

Уравнения (7.1) переписываются для постоянных по x^a функций принимают вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \tag{7.12}$$

Из первого уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \tag{7.13}$$

Функция $\psi^R_{\mu\nu}(x^-)$ описывает волну, движущуюся направо, а функция $\psi^L_{\mu\nu}(x^+)$ — волну, движущуюся налево. Калибровочное условие дает $\dot\psi^L_{-\mu}(x^+) = -\dot\psi^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть этого уравнения зависит только от x^+, а правая — только от x^-. Это значит, что и то и другое есть константа. Исключая линейные решения для $\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ как не соответствующие физическому условию малости и постоянные ненулевые решения, как отвечающие другой задаче (мы еще обсудим это в следующей лекции), находим:

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0. \tag{7.14}$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием вида (7.8) можно обратить в нуль компоненты $\psi^R_{-\mu}, \psi^L_{+\mu}$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu}\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ (поперечная калибровка). Тогда $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h^R_{ab}(x^-) + h^L_{ab}(x^+), \qquad h_{\alpha\mu} = 0, \qquad \eta^{ab} h^{R,L}_{ab} = 0. \tag{7.15}$$

Мы видим, что эволюция системы волн определяется $d(d-3)$ функциями h^R_{ab}, h^L_{ab} $((a,b) \neq (d-1, d-1))$ в согласии с нашими предыдущими соображениями.

Оставив только одну движущуюся направо волну, изучим, как меняются в ней пространственные расстояния. Так как поперечная калибровка означает использование синхронной системы координат ($g_{0i} = 0$), имеем

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{7.16}$$

Если мы возьмем $(d-2)$-мерную сферу в плоскости, перпендикулярной волне, то функции h_{ab} описывают небольшие центрально-симметричные деформации такой сферы, причем h_{aa} (без суммирования) дает нам сжатие сферы в направлении оси x^a, а h_{ab} ($a \neq b$) дает сжатие сферы в диагональном направлении в плоскости (x^a, x^b) и растяжение в перпендикулярном ему направлении. В силу бесследовости объем сферы в первом порядке по h_{ab} сохраняется: $\det(\delta_{ab} + h_{ab}) \simeq 1 + \mathrm{tr}(h_{ab}) = 1$.

Рассмотрим подробно случай $d = 4$. В этом случае имеется две компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{7.17}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times\, dx^2\, dx^3. \tag{7.18}$$

Если мы воспользуемся полярными координатами в начале одной из точек инфинитезимального интервала

$$dx^2 = dr\,\cos\theta, \qquad dx^3 = dr\,\sin\theta,$$

получим
$$dl_2 = dr\,\left(1 - \frac{h_+}{2}\cos 2\theta - \frac{h_\times}{2}\sin 2\theta\right) = dr\,\left(1 - \frac{h_*}{2}\cos 2(\theta - \varphi)\right), \tag{7.19}$$
где
$$h_+ = h_* \cos 2\varphi, \qquad h_\times = h_* \sin 2\varphi.$$
Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Предположим, мы имеем плоскую волну, в которой h_+ и $h_\times$ пропорциональны (в случае монохромной волны это значит, что отношение A_{22}/A_{23} вещественно), то есть $\varphi = \text{const}$. Тогда кольцо, которое до прохождения волны расположили перпендикулярно направлению распространения волны (в плоскости x^2x^3), будет сжиматься и растягиваться вдоль прямой, повернутом под углом φ к оси x^2, и одновременно растягиваться и сжиматься вдоль перпендикулярной ей прямой. Это отвечает плоской поляризации гравитационной волны.

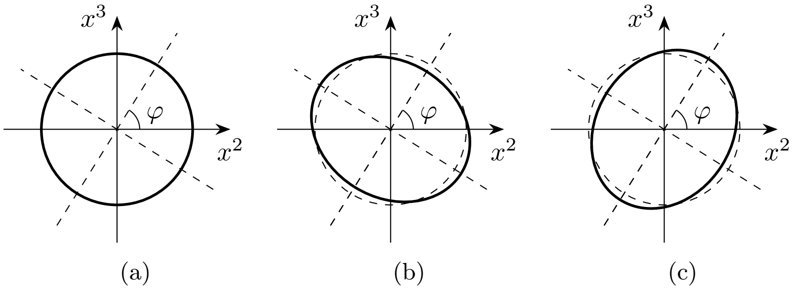

Рис. 7.1. Изменение формы пространственной окружности в линейно поляризованной гравитационной волне в поперечной плоскости: (a) исходная окружность до того, как ее достигла волна; (b) фаза $h_* > 0$; фаза $h_* < 0$ (в случае монохромной волны, например, через полпериода после фазы (b)).

Наличие двух независимых коэффициентов h_+ и $h_\times$ означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с $\varphi = 0$ (определяемой функцией h_+) и с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (определяемой функцией $h_\times$).

Теперь выясним, какую энергию переносят гравитационные волны. Рассмотрим плоскую гравитационную волну в виде (7.15). Наша цель состоит в том, чтобы вычислить псевдотензор энергии-импульса. Согласно определению
$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{7.20}$$
Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$, однако здесь возникает одна проблема. Дело в том, что мы рассматриваем гравитационные волны в линейном приближении, а плотности и потоки энергии и импульса — величины *второго порядка* по $h_{\mu\nu}$. Наше решение зануляет только вклад первого порядка в $T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$, а вклад второго порядка оказывается ненулевым. Есть два способа решить эту проблему. Первый способ состоит в том, чтобы получить явную формулу для $t^{\mu\nu}$ и увидеть, что она представляет собой линейную комбинацию членов, содержащих произведения вида $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}g^{\rho\sigma}{}_{,\kappa}$. В первом порядке $g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = -h^{\mu\nu}_{,\lambda}$, поэтому все эти произведения — второго порядка, а, значит, во всех коэффициентах можно заменить $g_{\mu\nu}$ на $\eta_{\mu\nu}$. Этот метод дает правильный ответ, но требует дополнительного обоснования. Поэтому мы используем другой, более последовательный метод. Мы получим уравнения для поправок второго порядка в гравитационной волне и, подставив их в выражение для $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, покажем что в выражении для псевдотензора энергии-импульса $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$ соответствующие вклады можно выразить через решения линейного уравнения (7.1).

Давайте рассмотрим разложение:
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots. \tag{7.21}$$
Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ — решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, в нашей задаче — (7.1), а $h^{(k)}_{\mu\nu}$ — поправка k-го порядка. Мы немного изменим обозначения: буквы h, ψ без индексов теперь будут

обозначать матрицы, отвечающие соответствующим тензорам, а следы будут обозначаться значком tr: $\operatorname{tr} a = a^{\bar\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu} a_{\mu\nu}$, $(ab)_{\mu\nu} = a^{\bar\lambda}_{\mu} b_{\lambda\nu}$ и т.п. Отсюда легко находим:

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + \cdots, \\
|g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} h^{(1)})^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots.
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

В нашей задаче в силу калибровочных условий $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$. Отсюда получаем во втором порядке

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \\
g^{\alpha b} &= -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\
g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\
|g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}.
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля. При этом на поправки второго порядка наложим такое же калибровочное условие, как и на поправки первого порядка:

$$
\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0, \qquad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \operatorname{tr} h^{(2)}. \tag{7.24}
$$

Вклады $h^{(2)}_{\mu\nu}$ легко отделяются:

$$
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{7.25}
$$

где $\tilde\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ содержат только вклады $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Нетрудно проверить, что

$$
\tilde\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}}) h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}, \qquad \tilde\Gamma^{\lambda}_{ab} = -\frac{1}{2} h^{(1),\lambda}_{ab}, \tag{7.26}
$$

Отсюда следует, что единственные ненулевые компоненты равны

$$
\tilde\Gamma^{c}_{\alpha b} = \frac{1}{2}(\eta^{cd} - h^{(1)\overline{cd}}) h^{(1)}_{bd,\alpha}, \qquad \tilde\Gamma^{\gamma}_{ab} = -\frac{1}{2} h^{(1),\gamma}_{ab}. \tag{7.27}
$$

Кроме того, для следа символов Кристоффеля имеем

$$
\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(h^{(2)} - \frac{1}{2} h^{(1)\bar a}{}_{b} h^{(1)\bar b}{}_{a}\right)_{,\alpha}, \qquad \Gamma^{\lambda}_{a\lambda} = 0. \tag{7.28}
$$

Отсюда во втором порядке немедленно получаем

$$
R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde R_{\mu\nu}, \tag{7.29}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\tilde R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(h^{(1)} h^{(1)}{}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}(h^{(1)}{}_{,\alpha} h^{(1)}{}_{,\beta}), \qquad \tilde R_{\alpha b} = 0, \qquad \tilde R_{ab} = \frac{1}{2}(h^{(1),\alpha} h^{(1)}{}_{,\alpha})_{ab}, \\
\tilde R = \frac{3}{4}\operatorname{tr}(h^{(1),\alpha} h^{(1)}{}_{,\alpha}).
\end{gathered}
\tag{7.30}
$$

Так как это уже выражения второго порядка, мы можем здесь поднимать индексы с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а $|g|$ в коэффициентах при тензоре Риччи положить равным единице.

Из уравнений Эйнштейна в вакууме $R_{\mu\nu} = 0$ мы немедленно получаем уравнение для поправки второго порядка к метрике:

$$
\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = 2\tilde R_{\mu\nu}. \tag{7.31}
$$

Для плоской волны имеем

$$
\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \operatorname{tr} h^{(1)}_{,\alpha} h^{(1)}_{,\beta}\right), \tag{7.32a}
$$

$$\Box\, h^{(2)}_{\alpha b} = 0, \tag{7.32b}$$

$$\Box\, h^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}\,\Box (h^{(1)2})_{ab}. \tag{7.32c}$$

Также имеем

$$\Box \operatorname{tr} h^{(2)} = \frac{3}{4}\,\Box \operatorname{tr} h^{(1)2}. \tag{7.33}$$

Мы всюду учитывали уравнение движения для вклада первого порядка $\Box\, h^{(1)}_{ab} = 0$.

Теперь мы готовы вычислить $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$. Подставляя (7.23) в определение (5.6), получаем

$$\begin{aligned} 16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}) \\ &\quad - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta}h^{(2)\overline{\gamma\delta}} + h^{(2)\overline{\alpha\gamma}}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{\beta\delta}}, \end{aligned} \tag{7.34a}$$

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{b\delta}}, \tag{7.34b}$$

$$16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} = \left(\operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)\eta^{ab}\eta^{\gamma\delta} - \left(h^{(1)\overline{ab}} + h^{(2)\overline{ab}} - (h^{(1)2})^{\overline{ab}}\right)\eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab}h^{(2)\gamma\delta}. \tag{7.34c}$$

Теперь надо продифференцировать по x^γ, x^δ. Начнем со второй строчки. Легко получаем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\,\Box\, h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar\alpha} = 0$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения движения (7.32b), а второе слагаемое — в силу калибровочного условия (7.24). Мы получили естественный результат, что плотность импульса (= плотность потока энергии) в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, равна нулю. Аналогично применяя уравнения движения (7.32) и калибровочное условие (7.24) к производным от правых частей (7.34a) и (7.34c) и опуская индекс (1) и черточки над индексами, получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha}h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\,\Box \operatorname{tr} h^2\right), \tag{7.35a}$$

$$t^{\alpha b} = 0, \tag{7.35b}$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G}\left(\Box (h^2)^{ab} - \frac{1}{4}\eta^{ab}\,\Box \operatorname{tr} h^2\right). \tag{7.35c}$$

Немного удивляет ненулевой псевдотензор напряжений t^{ab}, однако вспомним, что этот результат получен для произвольного двумерного решения уравнения (7.1) вида

$$h_{\mu\nu}(x) = h^R_{\mu\nu}(x^0 - x^1) + h^L_{\mu\nu}(x^0 + x^1),$$

то есть для двух встречных волн. Если мы положим $h^L_{\mu\nu} = 0$ (волна распространяется только вправо), то все члены, содержащие лапласиан $\Box$ в правых частях будут обращаться в нуль, так как будут лапласианами от функций вида $F(x^0 - x^1)$. Таким образом, для распространяющейся вправо волны получим

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h^{a,\alpha}_{b} h^{b,\beta}_{a}, \qquad t^{\alpha b} = 0, \qquad t^{ab} = 0. \tag{7.36}$$

В лоренц-инвариантном виде можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\operatorname{tr} h^{,\mu}h^{,\nu} = \frac{1}{32\pi G} h^{\lambda,\mu}_{\kappa} h^{\kappa,\nu}_{\lambda}. \tag{7.37}$$

Эту формулу мы используем ниже, чтобы узнать потери энергии движущегося тела на излучение гравитационных волн.

Задачи

1. Покажите, что калибровочным преобразованием вида (7.8) решение (7.13) с условием (7.14) можно привести к калибровке (7.15).

2. Вычислите тензор Римана $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ для плоской волны (7.15) в первом порядке. Вычислите также тензор Римана $R^{\text{пр}}_{ijkl}$ соответствующей пространственной метрики $\gamma_{ij} = \delta_{ij} - h_{ij}$.

3. Для монохромной волны (7.6) найдите такое соотношение на A_{22}, A_{23}, при котором угол φ меняется линейно со временем (*круговая поляризация*). Сколько имеется таких круговых поляризаций?

4. Выведите формулы (7.25), (7.26), (7.29), (7.30), (7.35) со всеми подробностями. Покажите, что добавление любых ненулевых *постоянных* вкладов в $h^{(1)}_{\alpha\beta}$ не меняет ответов.

5. Покажите, что если подставить в правую часть (7.20) вместо $R_{\mu\nu}$ величины $\tilde{R}_{\mu\nu}$, а вместо $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ величины $\tilde{\chi}^{\mu\nu\lambda\kappa}$, отличающиеся тем, что в них $h^{(2)}$ положено равным нулю, ответ будет совпадать с (7.35). Объясните, почему ответы совпали.

Семинар 7

Другие случаи гравитационных волн в вакууме

Здесь мы рассмотрим две задачи:

1. Гравитационная волна на искривленном фоне.

2. Сильная гравитационная волна.