Лекция 13
Космологические решения. Модели Фридмана

До сих пор мы рассматривали различные геометрии пространства-времени, считая, что на достаточно большом расстоянии от источников гравитации пространство-время является асимптотически плоским или, по крайней мере, асимптотическое поведение каким-то образом задано. Сейчас мы хотим задаться другим вопросом. Это верно, если пространство можно считать в целом пустым, а космологическую постоянную — равной нулю. Во многих задачах это оказывается вполне разумным приближением, поскольку гравитирующие объекты притягивают друг друга и, чаще всего, собираются в компактные образования (планеты, звезды и звездные системы, скопления звезд, галактики), окруженные сравнительной пустотой. Но мы знаем, что в целом это не так. Скопления галактик заполняют пространство довольно равномерно, не говоря уже о неизвестной гравитирующей материи, называемой темной материей, которая не собирается в такой степени в компактные структуры, но средняя плотность которой, по крайней мере, не меньше средней плотности известных нам видов материи. Кроме того, наблюдательные данные говорят о высокой изотропии Вселенной: вещество распределено довольно равномерно во всех направлениях. Это предположение подтверждает и высокая (на уровне 10^{-4}) изотропия реликтового излучения.[14] В этой лекции мы рассмотрим простейшие модели вселенной, равномерно и изотропно заполненной веществом и излучением, получим простейшие решения и вкратце обсудим, насколько они подтверждаются наблюдательными данными. Классические космологические модели, основанные на этих предположениях, называются *моделями Фридмана.*

Вопрос об эволюции Вселенной как целого, на самом деле, возникает даже в ньютоновской теории гравитации. В самом деле, если заполнить веществом все пространство более или менее равномерно, то вещество не сможет всегда оставаться в стационарном состоянии в силу притяжения. В общей теории относительности проблема усугубляется тем, что само пространство может оказаться искривленным. С другой стороны, это помогло ученым осознать проблему там, где они не видели ее до создания ОТО.

Итак, нам следует наложить условия однородности и изотропии на кривизну и тензор энергии-импульса. Начнем с кривизны. Условиям однородности и изотропии удовлетворяют только так называемые *пространства постоянной кривизны.* Так называются пространства, для которых в каждой точке выполняется равенство

$$\frac{R_{\kappa\lambda\mu\nu}\xi^{\kappa\lambda}\xi^{\mu\nu}}{(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}-g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})\xi^{\kappa\lambda}\xi^{\mu\nu}}=K,\quad \forall\xi\in T^2M_x. \tag{13.1}$$

так что K не зависит от бивектора $\xi^{\mu\nu}$. Можно доказать, что в этом случае K не зависит от точки[15] x и кривизна имеет вид

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu}=K(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu}-g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}),\qquad R_{\mu\nu}=(d-1)Kg_{\mu\nu},\qquad R=d(d-1)K. \tag{13.2}$$

Иными словами, геометрическая однородность пространства следует из его изотропии.

В данном случае нас интересует трехмерное пространство сигнатуры $(+{+}+)$. Давайте построим соответствующую метрику. Пространство нулевой кривизны — это плоское пространство с метрикой

$$dl^2=\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j=dr^2+r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2). \tag{13.3}$$

Пространство постоянной положительной кривизны легко находится как ограничение метрики плоского четырехмерного эвклидова пространства на поверхность $\sum_{i=1}^4(X^i)^2=a^2$. Используя полярные координаты χ,ϑ,φ, получаем

$$dl^2=a^2(d\chi^2+\sin^2\chi\,(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2)),\qquad 0\le\chi\le\pi,\qquad K=1/a^2. \tag{13.4}$$

[14] Наблюдения показывают дипольный вклад в анизотропию реликтового излучения на уровне 10^{-3}, однако этот вклад вызван движением Солнечной системы со скоростью примерно 370 км/с относительно системы отсчета, выделенной реликтовым излучением. Его следует вычитать из микроволнового фона, чтобы изучать физику процессов, связанных с образованием и распространением реликтового излучения. С учетом движения Солнечной системы в Галактике и движение Галактики в местной группе галактик, скорость движения местной группы оценивается в 630 км/с в направлении точки в созвездии Гидры.

[15] За исключением двумерного пространства, где формула (13.1) верна для любых пространств, и независимость K от x принимается за определение.

Как всегда $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Аналогично, пространство постоянной отрицательной кривизны получается как ограничение метрики сигнатуры $(+++-)$ плоского пространства на поверхность $\sum_{i=1}^{3}(X^i)^2 - (X^4)^2 = -a^2$:

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)), \qquad 0 \le \chi \le +\infty, \qquad K = -1/a^2. \tag{13.5}$$

Вообще говоря, пространства постоянной кривизны топологически могут не совпадать с плоскостью, сферой или гиперболоидом, а представлять собой факторпространства этих пространств по какой-нибудь дискретной группе движений Γ, действующих свободно (без неподвижных точек). Мы не будем заниматься топологическими вопросами, поскольку они не влияют на решения уравнений Эйнштейна, которые определены локально. Кроме того, пока что мы, по-видимому, наблюдаем достаточно небольшую часть Вселенной, так что топология не играет роли при интерпретации наблюдений. В частности, мир с положительной кривизной будет всегда замкнутым и имеющим конечный объем

$$V = \frac{2\pi^2 a^3}{N}, \tag{13.6}$$

где N порядок группы Γ.

Мы будем называть модели с положительной кривизной замкнутыми, а модели с отрицательной кривизной — открытыми, хотя их открытость в строгом математическом смысле зависит от топологии. Мир с нулевой кривизной мы будем называть плоским.

Теперь перейдем к пространству-времени. Оно уже не должно быть однородным и изотропным, но система координат должна приводиться к глобально синхронному виду. В противном случае выделенный вектор g^{0i} нарушит физическую изотропию пространства. Время можно выбирать произвольно, но параметр a может зависеть от времени. Выберем метрику в виде

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t)\,d\Omega^2, \tag{13.7}$$

где

$$d\Omega^2 = \begin{cases} d\chi^2 + \chi^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) & \text{при } K = 0; \\ d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) & \text{при } K > 0; \\ d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) & \text{при } K < 0. \end{cases} \tag{13.8}$$

В случае плоского пространства мы сделали замену $r = a(t)\chi$, поскольку зависимость $a(t)$ влияет на геометрию пространства-времени. Возьмем двух наблюдателей в разных точках пространства, покоящихся в данной системе координат. Каждый из них, оглядываясь вокруг будет видеть мир как изотропный. Но расстояние между этими наблюдателями будет меняться со временем пропорционально фактору $a(t)$. Таким образом, каждый из наблюдателей будет видеть мир как расширяющийся, если $\dot a(t) > 0$ и сжимающийся, если $\dot a(t) < 0$. Функцию $a(t)$ называют *масштабным фактором*. Измерение масштабного фактора в случае $K \ne 0$ пока невозможно, поскольку наблюдаемая кривизна пространства слишком мала. Однако можно измерить, во-первых, отношение масштабных факторов в настоящее время и в момент испускания сигнала и, во-вторых, относительную скорость расширения Вселенной. Чтобы разобраться в этом, введем вместо времени t координату η, определенную равенством

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \tag{13.9}$$

Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\Omega^2), \tag{13.10}$$

где $a(\eta)$ понимается как $a(t(\eta))$. Производную по η мы будем обозначать штрихом.

Напишем уравнение эйконала для луча света в этой метрике:

$$a^{-2}(\eta)\left(\psi_{,\eta}^2 - \alpha^{ij}\psi_{,i}\psi_{,j}\right) = 0, \tag{13.11}$$

где ψ — эйконал, то есть фаза волны вдоль луча как функция пространственно-временных координат, $\alpha^{ij} = -g^{ij}a^2(\eta)$ — не зависящие от η в координатах χ, ϑ, φ величины. Решая это уравнение методом разделения переменных, находим

$$\psi(\gamma; \eta, \chi, \vartheta, \varphi) = -\gamma\eta + \psi_1(\gamma; \chi, \vartheta, \varphi). \tag{13.12}$$

Величина γ имеет естественный смысл частоты в переменной η, и является интегралом движения. Частота ω по отношению к физическому времени t связана с параметром γ очевидным соотношением

$$\omega(t)\,dt = \gamma\,d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \frac{\gamma}{a(t)}.$$

То есть частота волны обратно пропорциональна масштабному фактору. Введем величину относительного красного смещения

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \tag{13.13}$$

где λ_0, ω_0 — длина волны и частота в точке *наблюдения* (то есть в настоящий момент времени), а λ, ω — длина волны и частота в точке *испускания*. Тогда, очевидно, имеем

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z, \tag{13.14}$$

то есть красное смещение немедленно дает нам отношение масштабных факторов в настоящий момент времени и в момент испускания волны.

Рассмотрим случай $z \ll 1$. Тогда

$$z = \frac{a(t_0) - a(t)}{a(t)} \simeq \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t_0 - t) = H(t_0)L, \tag{13.15}$$

где $L = t_0 - t$ — расстояние до источника, а $H(t)$ — *постоянная Хаббла*:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{13.16}$$

Для измерения постоянной Хаббла необходимо точно измерять расстояния до объектов. Ввиду систематических ошибок (неправильного выбора стандартных свечей) в измерении этих расстояний значение постоянной Хаббла долгое время завышалась, и лишь недавно была получена сравнительно надежная оценка. Различные эксперименты в последнее время дают результаты в районе 70 км/с $\cdot$ Мпк $\simeq 2.2 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$.

Теперь выпишем уравнения Эйнштейна. В метрике (13.10) ненулевые символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta} = \frac{a'}{a}, \qquad \Gamma^{\eta}_{ik} = -\frac{a'}{a^3}g_{ik}, \qquad \Gamma^{i}_{\eta k} = \frac{a'}{a}\delta^i_k, \qquad \Gamma^{i}_{kl} = \Gamma^{(3)}{}^i_{kl}, \tag{13.17}$$

где $\Gamma^{(3)}{}^i_{kl}$ — символы Кристоффеля трехмерного пространства, которые, как нетрудно убедиться, не зависят от a в координатах χ, ϑ, φ. Поэтому производные от них по η равны нулю. А это значит, что они вносят вклад только в R_{ik} и причем известный вклад:

$$R_{ik} = R^{(3)}_{ik} + (\text{вклады } \Gamma^{\eta}_{lm}, \Gamma^{l}_{\eta m}), \qquad R^{(3)}_{ik} = 2\varepsilon a^{-2} g_{ik},$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{sign} K.$$

Теперь нетрудно найти компоненты тензора Риччи:

$$R^{\eta}_{\eta} = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa''), \qquad R^{i}_{j} = -\frac{1}{a^4}(2\varepsilon a^2 + a'^2 + aa'')\delta^i_j, \qquad R = -\frac{6}{a^3}(\varepsilon a^2 + aa''). \tag{13.18}$$

Теперь рассмотрим материальную часть уравнений Эйнштейна — тензор энергии-импульса. В силу изотропии пространства (но не пространства-времени) он должен иметь вид

$$T^{\eta}_{\eta} = \rho, \qquad T^{\eta}_{i} = 0, \qquad T^{i}_{j} = -p\delta^i_j. \tag{13.19}$$

Отсюда мы легко находим уравнения

$$\frac{3(a'^2 + \varepsilon a^2)}{a^4} = 8\pi G\rho, \tag{13.20}$$

$$-\frac{2aa'' - a'^2 + \varepsilon a^2}{a^4} = 8\pi G p. \qquad (13.21)$$

Второе уравнение несколько неудобно, потому что оно — второго порядка. Его не очень трудно проинтегрировать, но результат интегрирования можно получить более простым способом. Именно, давайте воспользуемся ковариантным сохранением тензора энергии-импульса $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$. Без труда получаем

$$0 = T^{\eta}_{\eta;\eta} + T^{i}_{\eta;i} = \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p). \qquad (13.22)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\rho}{\rho + p} + 3\, d\log a = 0. \qquad (13.23)$$

Интересно, что уравнение (13.23) можно получить из термодинамических соображений. Согласно первому закону термодинамики изменение внутренней энергии системы равно

$$dU = \delta q - \delta A = \delta q - p\, dV,$$

где δq — теплота, поступающая в систему, A — работа, совершаемая системой, V — объем. Так как в замкнутую систему не может поступать тепло, первый член равен нулю. Учитывая, что $U = \rho V$, получаем

$$V\, d\rho = -(\rho + p)\, dV.$$

Так как, по смыслу объем V пропорционален a^3, мы поучаем (13.23).

Если известно уравнение состояния вещества, то есть, зависимость $p(\rho)$, уравнение (13.23) интегрируется

$$3\log a = -\int \frac{d\rho}{\rho + p}. \qquad (13.24)$$

Вслед за тем интегрируется уравнение (13.20):

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho a^2 - \varepsilon}}. \qquad (13.25)$$

Из определения координаты η (13.9) очевидно, что

$$t = \pm \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho a^2 - \varepsilon}}. \qquad (13.26)$$

Отсюда мы немедленно находим постоянную Хаббла как функция масштабного параметра:

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{\varepsilon}{a^2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho - K}. \qquad (13.27)$$

Из этого выражения ясно, что зная плотность вещества во Вселенной и постоянную Хаббла, мы можем найти кривизну пространства:

$$K = \frac{8\pi G\rho}{3} - H^2 = \frac{8\pi G(\rho - \rho_c)}{3}, \qquad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \qquad (13.28)$$

Величина ρ_c называется *критической плотностью*. При $\rho > \rho_c$ мир будет замкнутым ($K > 0$), а при плотности $\rho < \rho_c$ — открытым ($K < 0$). Обратите внимание на универсальность этого результата: он не зависит от уравнения состояния вещества.

К сожалению, мы не можем использовать формулу (13.28), чтобы установить кривизну пространства. Проблема состоит в том, что барионная материя, заключения о плотности которой мы можем сделать на основе наблюдения звезд, пыли и газовых облаков, составляет, по-видимому, очень небольшую часть гравитирующей материи в мире. Значительно большую часть составляет так называемая «темная материя» имеет в среднем по Вселенной гораздо большую массу. Природа темной материи неизвестна, но известно, что она концентрируется вблизи массивных тел. Это заметно по наблюдениям кривых вращения галактик. Как выясняется, звезды движутся в галактиках с большими скоростями, чем это следует из информации о той массе, которая находится внутри их орбит. Однако это уплотнение незначительно по сравнению с уплотнением обычной материи, так что на масштабах планетных систем плотность темной материи ничтожно мала. Возможно, что она состоит из каких-то слабо взаимодействующих (во всяком случае, не взаимодействующих с электромагнитным полем) частиц. Пока неясно, что мешает темной материи концентрироваться и образовывать каспы в центрах галактик.

Второй эффект, который влияет на возможность использования этой формулы, называют «темной энергией». Темная энергия ведет себя как космологическая постоянная или как вещество с относительно постоянными плотностью ρ и давлением $p \simeq -\rho$. Современные измерения светимости удаленных объектов показывают, что Вселенная удивительно близка к плоскому миру, так что суммарная плотность видимого вещества, темной материи и темной энергии очень близка к ρ_c. В настоящее время плотность барионной материи оценивается примерно в $0.049\rho_c$, плотность темной материи — в $0.269\rho_c$, а остальные 69% принадлежат темной энергии. Вклад излучения составляет, по-видимому, где-то $5 \cdot 10^{-5}\rho_c$. Следует подчеркнуть, что эти величины представляют собой результат интерполяции, так что разделение неизвестных нам эффектов на «темную материю» и «темную энергию» в известном смысле условно. Кроме того, пока нет достаточных наблюдательных данных, чтобы утверждать, что плотность темной энергии не зависит от времени (и, соответственно, абсолютная величина давления в точности совпадает с плотностью). Вполне может оказаться, что и темная материя и темная энергия представляют собой явления, выходящие за рамки общей теории относительности.

Теперь мы рассмотрим простейшие космологические модели. До сравнительно недавнего времени считалось, что давлением материи в современную эпоху можно пренебречь, так что в течение уже длительного времени Вселенная эволюционирует согласно уравнениям (13.24), (13.25) с $p = 0$. Этот случай допускает простое решение. Имеем

$$\rho = C_m a^{-3}, \tag{13.29}$$

где C_m — параметр размерности массы. В случае замкнутой вселенной имеем решение

$$a(\eta) = \Omega_m \sin^2 \frac{\eta}{2}, \qquad t(\eta) = \frac{\Omega_m}{2}(\eta - \sin\eta), \qquad 0 \le \eta \le 2\pi, \tag{13.30}$$

где

$$\Omega_m = \frac{8\pi}{3} G C_m. \tag{13.31}$$

В случае открытой вселенной

$$a(\eta) = \Omega_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \qquad t(\eta) = \frac{\Omega_m}{2}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \qquad 0 \le \eta < \infty. \tag{13.32}$$

Мы выбрали расширяющуюся вселенную, как отвечающую наблюдениям. В плоском случае, очевидно,

$$a(\eta) = \frac{\Omega_m}{4}\eta^2, \qquad t(\eta) = \frac{\Omega_m}{12}\eta^3, \qquad 0 \le \eta < \infty. \tag{13.33}$$

Очевидно, на ранних стадиях все решения совпадают и

$$a(t) \simeq \left(\frac{9\Omega_m}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}. \tag{13.34}$$

Замкнутая вселенная имеет две особые точки: $\eta = 0, 2\pi$. Особая точка $\eta = 0$ представляет собой начальный момент существования вселенной («большой взрыв»). Особая точка $\eta = 2\pi$ — конечный момент. Вне интервала $0 \le \eta \le 2\pi$ вселенная не определена, так что вопрос, что было до начальной сингулярности и что будет после конечной не имеет смысла в рамках ОТО. Если угодно, самого «до» не было, и самого «после» не будет. В отличие от замкнутой вселенной, открытая и плоская вселенные имеют начальную сингулярность, но не имеет конечной. Эти вселенные, однажды возникнув, бесконечно расширяются.

Рассмотрим теперь светоподобные геодезические в таких вселенных. Кривая $\varphi = \vartheta = 0$ в пространстве является главной окружностью в замкнутом случае и гиперболой в открытом случае, то есть прямой пространства постоянной кривизны. Мы будем временно считать, что переменная χ пробегает значения $-\pi \le \chi < \pi$ при $K > 0$ и $-\infty < \chi < \infty$ при $K \le 0$. Нетрудно понять, что изотропные кривые $\chi = \pm\eta + \text{const}$ являются геодезическими.

Поскольку переменная η в замкнутой вселенной пробегает значения от 0 до 2π, изотропная геодезическая за это время делает полный круг и возвращается в исходную пространственную точку. Таким образом, луч света за время жизни вселенной может обойти ее ровно один раз. В общем случае, если мы возьмем точку вблизи сингулярности $\eta \to 0$, то с течением времени область, до которой может дойти сигнал пропорциональна $\eta \sim t^{1/3}$. Это значит, что если первоначальное распределение материи неоднородно, то эти неоднородности сохранятся и со временем наблюдатель будет их видеть все больше и больше, по мере того, как новые области пространства входят под его горизонт видимости. Таким образом, модель неустойчива по отношению к начальным неоднородностям: в ней нет механизма их сглаживания. Можно думать, что на начальных стадиях эволюции Вселенной действуют другие механизмы.

В самом деле, когда плотность вещества велика, вещество наверняка не будет «пылевидным», оно будет создавать давление. Попробуем рассмотреть предельно сжатое вещество — ультрарелятивистский газ. Из статистической механики мы знаем уравнение состояния идеального ультрарелятивистского газа: $\rho = 3p$. Согласно уравнению (13.24) имеем

$$\rho = C_r a^{-4}, \quad \text{если } \rho = 3p, \tag{13.35}$$

где C_r — постоянная. Аналогично введем

$$\Omega_r = \frac{8\pi}{3} G C_r. \tag{13.36}$$

При достаточно малых a имеем $\frac{8\pi}{3} G\rho a^2 = \Omega_r a^{-2} \gg 1$ и результат мало зависит от типа геометрии. Поэтому пренебрежем ε под корнем в (13.25), (13.26) и получим

$$a(t) = \Omega_r^{1/2}\eta = (2\Omega_r)^{1/2} t^{1/2}. \tag{13.37}$$

Это несколько меняет поведение вселенной вблизи сингулярности, но не меняет основного вывода: фридмановские модели, основанные на известных формах материи, неустойчивы относительно первоначальных неоднородностей.[16] В то же время наблюдения свидетельствуют о высокой однородности и изотропии Вселенной. Класс теорий, объясняющих эту однородность мы разберем в следующей лекции.

А сейчас вернемся к модели с пылевидной материей. В 1998 году были опубликованы астрономические исследования, значительно уточняющие значения постоянной Хаббла. Один из выводов этих исследований состоял в том, что стандартные свечи с известным красным смещением выглядят темнее, чем они бы выглядели согласно моделям Фридмана с пылевидной материей. Это означает, что Вселенная расширяется быстрее, чем предсказывают эти модели. Более того, наблюдения согласуются с предположением, что в течение последних $4 \div 5$ миллиардов лет Вселенная расширяется с ускорением, стремясь к экспоненциальному закону $a(t) \sim \mathrm{e}^{Ht}$. Для экспоненциального закона имеем

$$\eta \sim \int dt\, \mathrm{e}^{-Ht} \sim -\mathrm{e}^{-Ht}, \qquad a(\eta) = -\frac{C}{\eta}. \tag{13.38}$$

Из (13.27) мы видим, что такая зависимость возникает при $\rho = \text{const}$, $G\rho a^2 \gg 1$. Сравнивая с законом сохранения энергии (13.22), мы получаем $\rho = -p$, что неотличимо от вклада Λ-члена с $\Lambda = 8\pi G\rho$. Этот вклад и принято называть темной энергией.

На самом деле, конечно, $-p < \rho$. Поэтому более точная модель должна сочетать в себе разные виды материи. Давайте разобьем материю на три компонента: пыль (включающую в себя барионную и холодную темную материю) с плотностью ρ_m и давлением $p_m = 0$, излучение (включающее в себя фотоны, нейтрино и, возможно, какие-то другие легкие частицы) с плотностью ρ_r и давлением $p_r = \rho_r/3$ и темную энергию с плотностью ρ_e и давлением $p_e = -\rho_e$. Мы будем пренебрегать возможностью перехода этих трех видов материи друг в друга. Тогда, в силу линейного вида уравнения (13.22), для каждого вида материи имеется своя зависимость плотности от масштабного фактора:

$$\rho_m = C_m a^{-3}, \qquad \rho_r = C_r a^{-4}, \qquad \rho_e = C_e. \tag{13.39}$$

[16] Даже немного ухудшает ситуацию, уменьшая значения параметра η, отсчитываемые от сингулярности.

Вводя $\Omega_i = \frac{8\pi}{3} G C_i$, находим в пренебрежении кривизной пространства

$$t = \int \frac{da}{\sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_e a^2}}. \tag{13.40}$$

Это уже эллиптический интеграл, который берется, по-сути, только численно и используется для подгонки под наблюдательные данные. Для сравнения с наблюдениями удобно привести его к данным о настоящем времени. Положим

$$\tilde{\Omega}_m = \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{\Omega_m}{a_0^4 H_0^2}, \qquad \tilde{\Omega}_r = \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{\Omega_r}{a_0^3 H_0^2}, \qquad \tilde{\Omega}_e = \frac{\rho_e(t_0)}{\rho_c(t_0)} = \frac{\Omega_r}{a_0^2 H_0^2}, \tag{13.41}$$

где $H_0 = H(t_0)$, $a_0 = a(t_0)$ — постоянная Хаббла и масштабный фактор в настоящее время. Вводя $\tilde{a}(t) = a(t)/a_0$, получаем уравнение

$$t = \frac{1}{H_0} \int \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{\Omega}_r \tilde{a}^{-2} + \tilde{\Omega}_m \tilde{a}^{-1} + \tilde{\Omega}_e \tilde{a}^2}} \tag{13.42}$$

Из эмпирических данных имеем $\tilde{\Omega}_m \simeq 0.31$, $\tilde{\Omega}_r \simeq 5 \cdot 10^{-5}$, $\tilde{\Omega}_e \simeq 0.69$. Мы видим, что с большим запасом выполняется неравенство $\Omega_m^{4/3} \gg \Omega_r \Omega_e^{1/3}$. Отсюда следует, что имеется два характерных значения масштабного параметра

$$a_1 = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \ll a_2 = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_e}\right)^{1/3},$$

так что при $a(t) \ll a_1$ имеет вкладом пылевидной материи и темной энергии можно пренебречь (стадия *радиационного доминирования*), при $a_1 \ll a(t) \ll a_2$ доминирует пылевидная материя (*пылевая* стадия), а при $a(t) \gg a_2$ доминирует космологическая постоянная (стадия Λ-*доминирования*). Легко видеть, что $\tilde{a}_1 \sim 10^{-4}$, $\tilde{a}_2 \simeq 0.77$.

Проблема начальной однородности Вселенной в рамках этой модели не решается. Мы обсудим эту проблему на следующей лекции.

Задачи

1. Получите формулы (13.4), (13.5) ограничением из плоского четырехмерного пространства. Проверьте также формулы для K.

2. Используя координаты (13.4), докажите формулу (13.6).

3. Проверьте формулы для тензора Риччи (13.18).

4. Проверьте уравнение (13.22).

5. Получите уравнение (13.23) прямым интегрированием уравнения (13.21). (Подсказка: избавьтесь сначала от a' с помощью уравнения (13.20), а затем найдите интеграл движения.)

6. Напишите уравнение Якоби для массивной частицы в модели Фридмана и найдите решение в квадратурах методом разделения переменных.

Семинар 13

Свойства изотропных гиперповерхностей и оптические скаляры

Будут рассмотрены свойства изотропных гиперповерхностей:

1. Изотропная гиперповерхность представляет собой конгруэнцию изотропных геодезических.

2. Если мы рассмотрим два экрана на пути такой конгруэнции, ортогональную геодезическим, в произвольных локальных системах отсчета, то лучи, которые пересекли первый экран одновременно, пересекают второй экран одновременно. Изображение на каждом из экранов не зависит от системы отсчета.

3. Изменение изображения описывается оптическими скалярами ρ и σ, которые дают сжатие изображения и его вытягивание.

4. Эволюция оптического скаляра ρ определяется тензором Риччи (а, значит, тензором энергии-импульса). Эволюция оптического скаляра σ определяется тензором Вейля и, таким образом, не зависит напрямую от материи.