

Лекция 1

O(2)-модель и переход Березинского—Костерлица—Таулеса

Здесь мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \quad (1.1)$$

которые называются моделями \mathbf{n} -поля или $O(N)$ -моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$ -симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$ -модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \quad (1.3)$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)} e^{in\varphi(y)} \rangle \sim (-(x-y)^2)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

На самом деле это совсем не так и результат существенно зависит от значения константы g . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.5)$$

в евклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{\vec{q}\vec{x}}(x) = \sum_{a=1}^n q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a) = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{2i} \log \frac{z - z_a}{\bar{z} - \bar{z}_a}, \quad q_a \in \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0, \\ \bar{z} = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют сингулярности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a . В простейшем случае $n = 1$ решение в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ имеет вид

$$\varphi_{q_1 x_1}(x) = q_1 \theta.$$

Важно отметить, что решения (1.6) удовлетворяют уравнению (1.5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \partial_\mu \partial^\mu \arctg \frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r} = 0.$$

Более того, для любой гладкой и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x \varphi(x) \partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \varphi(0) \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r} = 0.$$

Вклады, пропорциональные производным от $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ не дают вклада либо по соображениям симметрии, либо по соображениям конечности в нуле. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\vec{q}\vec{x}} = 0. \quad (1.7)$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (1.6):

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{2}{g} \int d^2x \partial\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \bar{\partial}\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2g} \int d^2x \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b)} \\
&= \frac{1}{2g} \left(\sum_a q_a^2 \int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} + \sum_{a < b} q_a q_b \int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \right)
\end{aligned}$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших, и на малых масштабах:

$$\int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} \simeq 2\pi \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi \log \frac{R}{r_0},$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Имеем

$$\int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \quad (1.8) \quad \boxed{\text{vortici}}$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{1}{2g} \left(\pi \sum_a q_a^2 \log \frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi \sum_{a < b} q_a q_b \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2g} \left(\sum_a q_a \right)^2 \log R^2 - \frac{\pi}{2g} \sum_a q_a^2 \log r_0^2 + \frac{1}{2g} \sum_{a < b} q_a q_b 2\pi \log \frac{1}{|z_a - z_b|^2}.
\end{aligned} \quad (1.9) \quad \boxed{\text{clacti}}$$

Первый член стремится к бесконечности, когда размер системы велик, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$\sum_a q_a = 0. \quad (1.10) \quad \boxed{\text{neutra}}$$

Второе слагаемое в (1.9) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например рассмотрим ее как предел теории вида

$$S[\phi] = \int d^2x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right),$$

эта величина будет конечной и будет зависеть от структуры кода вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \int D\varphi e^{-S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] - (J, \varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}})}, \quad (1.11) \quad \boxed{\text{zj}}$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (1.9) не меняется при перестановках $z_a \leftrightarrow z_b$, $q_a \leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1, \dots, q_n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] = S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g} \int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\bar{q}\bar{x}}.$$

Первый член дается выражением (1.9). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (1.7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - 2n} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} e^{-(J, \varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \quad (1.12)$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi e^{-S[\varphi] - (J, \varphi)}. \quad (1.13)$$

Из отождествления (1.3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{\vec{y}}(x) = -i \sum_{j=1}^k J_j \delta(x - y_j), \quad J_i \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z[J_{\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - \frac{g}{4\pi} \sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} \\ &\quad \times \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j / 2} \prod_{j < j'} |w_j - w_{j'}|^{2\frac{\pi}{g} J_j J_{j'}}, \end{aligned} \quad (1.15) \quad \boxed{\text{ZJfin}}$$

где $w_j = y_j^1 + iy_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского—Костерлица—Таулеса* (БКТ).

Естественно, что мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода БКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри начинают удерживаться в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного, начинают инфракрасно сходиться при больших n . Кроме того, из-за электронейтральности

$$\sum_{a < b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left(\sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g} \left(-\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g < g_{\text{КТ}}$, причем

$$g_{\text{КТ}} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.16) \quad \boxed{\text{gKT}}$$

При $g > g_{\text{КТ}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0 , так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом коре вихря. Заметим, что условие (1.16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - 2n}$ для системы простых вихрей $q = \pm 1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0 , корреляционная длина пропорциональна r_0 , и, таким образом, даже у «идеальной» $O(2)$ -модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (1.15) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \quad (1.17)$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \quad (1.18)$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi \quad (1.19)$$

или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \quad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \quad (1.20)$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z) \phi_R(z') \rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \quad \langle \phi_L(\bar{z}) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \quad \langle \phi_R(z) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = 0 \quad (1.22)$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} \rightarrow r_0^{\alpha^2/2} e^{i\alpha\phi_{R,L}}, \quad e^{i\alpha\phi} \rightarrow r_0^{\alpha^2} e^{i\alpha\phi}, \quad e^{\beta\tilde{\phi}} \rightarrow r_0^{-\beta^2} e^{\beta\tilde{\phi}}. \quad (1.23)$$

Тогда экспоненциальные операторы перестают быть безразмерными и приобретают размерность $d = \alpha^2/2$, α^2 и $-\beta^2$ соответственно. Эта размерность совпадает с *масштабной размерностью* этих операторов. По определению, оператор O обладает масштабной размерностью d_O , если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O(x) \rightarrow s^{d_O} O(sx)$$

во всех операторах.

Корреляционные функции экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)} \dots e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)} \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle e^{i\alpha_1\phi_L(\bar{z}_1)} \dots e^{i\alpha_n\phi_L(\bar{z}_n)} \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\beta_j\tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a\phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{2\beta_a\beta_b} \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum \alpha_a = 0, \\ 0, & \text{в пр. сл.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (1.15) при

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a, \\ \beta_j &= \sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j,\end{aligned}\tag{1.26}$$

Отсюда получаем

$$Z[J\bar{J}\bar{y}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 + \frac{g}{4\pi} \sum J_j^2 - 2n} \int d^2 x_1 \dots d^2 x_n \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a \phi(x_a)} \right\rangle_0.\tag{1.27}$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g \leftrightarrow (2\pi)^2 g^{-1}, \quad k \leftrightarrow n, \quad q_a \leftrightarrow J_j, \quad \phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde{\phi}$. Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \tilde{\phi}(x).\tag{1.28}$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q| > 1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда, исключив несущественный множитель $r_0^{\frac{g}{4\pi} \sum J_j^2}$, производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Z[J\bar{J}\bar{y}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!} \binom{2n}{n} \int d^2 x_1 \dots d^2 x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \prod_{a=n+1}^{2n} e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!} \int d^2 x_1 \dots d^2 x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} \left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right) \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \exp \left(2r_0^{\frac{\pi}{g}-2} \int d^2 x \cos \sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x) \right) \right\rangle_0 \\ &= \int D\phi e^{-S_{\text{SG}}[\phi]} \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)},\end{aligned}\tag{1.29}$$

где

$$S_{\text{SG}}[\phi] = \int d^2 x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu \cos \beta \phi \right)\tag{1.30}$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \quad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}.\tag{1.31}$$

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\text{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\text{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\text{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\text{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода БКТ.

Задачи

1. Возьмите интеграл (1.8)
2. Выведите формулу (1.17).
3. Покажите, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R .

4. Выясните, при каких условиях операторы $e^{i\alpha_1\varphi_R(z)+i\bar{\alpha}_1\varphi_L(\bar{z})}$ и $e^{i\alpha_2\varphi_R(z)+i\bar{\alpha}_2\varphi_L(\bar{z})}$ взаимно-локальны, то есть обладают корреляционными функциями, однозначными при обходе точкой, в которой находится один из этих операторов, вокруг точки, в которой находится другой оператор.

5*. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Покажите, что теория эквивалентна теории поля $\tilde{\phi}(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.

Семинар 1

Экспоненциальные операторы в теории свободного скалярного поля.

Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP \log z + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{ik} z^{-k}, \quad (1.32)$$

где эрмитовы операторы P, Q и операторы рождения-уничтожения $a_k = a_{-k}^+$ удовлетворяют соотношениям

$$[P, Q] = -i, \quad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l,0}. \quad (1.33)$$

Если определить вакуум $|0\rangle$ как

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k > 0). \quad (1.34)$$

Нетрудно проверить, что

$$\langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle = \langle Q^2 \rangle + \langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle_* = \langle Q^2 \rangle + \log \frac{1}{z' - z}, \quad (1.35)$$

то есть неопределенное выражение $\langle Q^2 \rangle$ можно отождествить с инфракрасным членом $\log R$ в (1.22). Нетрудно проверить, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит P справа от Q и a_k ($k > 0$) справа от a_{-k} , отвечает условию

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = :\varphi(z_1)\varphi(z_2): + \langle \varphi(z_1)\varphi(z_2) \rangle_*.$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$$:\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n)\varphi(z): = :\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n)\varphi(z): + \sum_{i=1}^n :\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n): \hat{i} \langle \varphi(z_i)\varphi(z) \rangle_* \quad (1.36)$$

с начальным условием

$$:1: = 1. \quad (1.37)$$

Здесь индекс \hat{i} над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i -тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$:\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_m): :\varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n): =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n}} : \varphi(z_1)^{\widehat{i}_1 \dots \widehat{i}_k} \dots \varphi(z_m) \varphi(w_1)^{\widehat{j}_1 \dots \widehat{j}_k} \dots \varphi(w_n) : \prod_{l=1}^k \langle \varphi(z_{i_l}) \varphi(w_{j_l}) \rangle_* \quad (1.38) \quad \text{normpr}$$

Вернемся к операторным экспонентам $e^{i\alpha\varphi(z)}$. Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]} e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \quad (1.39) \quad \text{exp-pr}$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} \dots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)} \rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i^2} \prod_{i<j} \left(\frac{z_i - z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \quad (1.40) \quad \text{exp-c}$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\dots+\alpha_n)Q} \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2} \quad (1.41) \quad \text{normex}$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: :e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = (z_1 - z_2)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}: \quad (1.42) \quad \text{normex}$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j} \quad (1.43) \quad \text{normex}$$

Сравнивая это с (1.40), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля $\varphi(z)$, представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (1.23). Вне этого пояснения, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (1.43) явно содержит инфракрасную обрезку R , но имеет хороший предел при $R \rightarrow \infty$:

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (1.44) \quad \text{normex}$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (1.45) \quad \text{normex}$$

Лекция 2

Ренормгруппа для перехода Березинского—Костерлица—Таулеса

Рассмотрим переход БКТ с помощью модели синус-Гордона. В этой лекции нам будет удобней пользоваться эвклидовым представлением:

$$S_{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \alpha_0 r_0^{\beta_0^2 - 2} \cos \beta_0 \phi \right), \quad (2.1) \quad \boxed{\text{SG-act}}$$

Мы поставили нолики у констант для того, чтобы подчеркнуть, что это перенормированные константы. Далее мы будем использовать также перенормированные константы α , β . Кроме того, по сравнению с действием в первой лекции мы добавили безразмерную постоянную α_0 . В предыдущей лекции мы объединили константы α_0 и r_0 в постоянную $\mu = \alpha_0 r_0^{\beta_0^2 - 2}$. С точки зрения теории поля следует считать, что корреляционная длина $r_c \sim \mu^{-1/(2-\beta^2)}$ много больше длины ультрафиолетового обрезания r_0 . В случае релевантного возмущения $\beta^2 < 2$ это позволяет развить теорию возмущений по константе μ , так как отвечает случаю $\alpha \ll 1$. В этой лекции мы, наоборот, стартуем со случая $r_c \gtrsim r_0$, более естественного для изучения перехода БКТ и посмотрим, как будет меняться теория по мере роста масштаба. Вообще говоря, это непросто сделать, но, коль скоро нас интересует окрестность точки фазового перехода $\beta^2 = 2 + \delta$, $|\delta| \ll 1$, мы можем использовать ренормгрупповой подход вместе с теорией возмущений [1, 2].

Можно интерпретировать ренормгруппу и чисто теоретико-полевым образом. Давайте рассмотрим систему в режиме $\alpha_0 \ll 1$ ($r_c \gg r_0$), но будем рассматривать корреляционные функции на масштабах r , таких что $r_0 \ll r \ll r_c$. Корреляционные функции на масштабе r , вычисленные по затравочному действию с учетом всех перенормировок, будут вести себя как корреляционные функции в древесном приближении для перенормированного действия с подходящими перенормированными константами связи. Если мы будем знать как «бегут» перенормированные константы связи с масштабом r , мы сможем вычислять корреляционные функции в этой промежуточной области.

Мы говорили, что невозмущенной теории — теории свободного безмассового поля — имеется масштабный параметр R , имеющий смысл размера области, в которой живет теория. Нам будет удобно использовать его в качестве масштабного параметра перенормировки, но потребует его определить несколько более аккуратным способом. Мы в самом деле могли бы рассмотреть теорию на пространстве с компактными измерениями (компактификация). Например, мы могли бы компактифицировать теорию на цилиндр окружности R , но это нарушило бы изотропию. Альтернативная компактификация на сферу чрезмерно усложнила бы вычисления. Поэтому вместо компактификации теории введем в лагранжиан маленький массовый член:

$$S_{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{m_0^2 \phi^2}{8\pi} - \alpha_0 r_0^{\beta_0^2 - 2} \cos \beta_0 \phi \right). \quad (2.2) \quad \boxed{\text{SG-act}}$$

Для ультрафиолетовой же регуляризации будем заменять x^2 на $x^2 + r_0^2$. Тогда при $m_0^2 x^2 \ll 1$ пропагатор свободного поля (с $\alpha_0 = 0$) равен

$$G_0(x - x') = \log \frac{R_0^2}{(x - x')^2 + r_0^2}, \quad R_0 = (cm_0)^{-1}, \quad c = e^{\gamma_E}/2. \quad (2.3) \quad \boxed{\text{GO-def}}$$

Здесь γ_E — постоянная Эйлера. Мы видим, что эффективно включение массового члена меняет корреляционные функции на малых расстояниях так же, как и компактификация.

Теперь напишем перенормированное действие

$$S_{SG}^R[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{m^2 \phi^2}{8\pi} - \frac{\alpha}{R^2} \cos \beta \phi \right), \quad R = (cm)^{-1}, \quad (2.4) \quad \boxed{\text{SG-act}}$$

такое что $S_{SG}[\phi] = S_{SG}^R[Z_\phi^{-1/2} \phi] + S^{\text{ct}}[Z_\phi^{-1/2} \phi]$. Мы потребуем, чтобы контрчленное действие $S^{\text{ct}}[\phi]$ не содержало контрчленов к «массовому» члену:

$$S^{\text{ct}}[\phi] = \int d^2x (\#(\partial_\mu \phi)^2 + \# \cos \beta \phi).$$

Это значит, что поле ϕ перенормируется. Хотя формально в действии буква ϕ — произвольная функция, но, поскольку нам эта буква потребуется как значок в корреляционных функциях, мы будем иногда обозначать перенормированное поле как ϕ_R . Кроме того, ниже мы определим перенормированную константу связи α . Итак, правило перенормировки должно выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi &= Z_\phi^{1/2} \phi_R, \\ \beta_0 &= Z_\phi^{-1/2} \beta, \\ \alpha_0 &= Z_\alpha \alpha, \\ m_0 &= Z_\phi^{-1/2} m, \\ R_0 &= Z_\phi^{1/2} R.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Теперь рассмотрим пропагатор $G_0(x - x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0$ невозмущенной ($\alpha_0 = 0$) теории и пропагатор $G(x - x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle$ полной теории для перенормированного поля. Их можно рассматривать как ядра интегральных операторов $G_0 = 4\pi(-\partial_\mu^2 + m_0^2)^{-1}$ и G соответственно. Между ними имеется связь

$$G^{-1} = G_0^{-1} + \frac{1}{4\pi} \Sigma,\tag{2.6}$$

где оператор Σ называется массовым оператором. Мы нормировали его так, чтобы восстановить его естественный смысл как поправки к квадрату массы.

В теории ренормгруппы используется два подхода. Один подход (подход Каданова) используется чаще в статистической механике, и исследует эволюцию затравочных констант связи по параметру ультрафиолетового обрезания $\Lambda \sim r_0^{-1}$ при заданных перенормированных константах связи. Другой подход, используемый обычно в квантовой теории поля, предполагает, что затравочные константы и параметр обрезания заданы (и, таким образом, задают теорию). В этом случае оказывается, что имеется некоторая неопределенность в определении перенормированных констант связи, зависящая от размерного параметра, например, точки перенормировки κ . Исследуется эволюция констант связи по этому размерному параметру. Достоинство второго метода состоит в том, что из него можно довольно прямыми способами извлекать уравнения для корреляционных функций. Поэтому мы воспользуемся этим подходом. В нашем случае за такой размерный параметр можно принять инфракрасную обрезку R или, эквивалентно, вспомогательную массу m . Давайте потребуем, чтобы вблизи точки $p^2 = 0$ в импульсном пространстве перенормированный пропагатор $G_R(p^2)$ имел естественный вид $4\pi(p^2 + M^2)^{-1}$, где M — некоторый массовый параметр. Мы используем его для определения перенормированной константы связи α . В прямом пространстве

$$G_R(x - x') = Z_\phi^{-1} G(x - x') = \langle \phi_R(x)\phi_R(x') \rangle.\tag{2.7}$$

Наше требование состоит в том, чтобы в импульсном пространстве

$$G_R(p^2) = \frac{4\pi}{p^2 + M^2} + O(p^4) \quad \text{при } p^2 \rightarrow 0,\tag{2.8}$$

причем

$$M^2 = m^2 + \frac{4\pi\alpha\beta^2}{R^2} = m^2(1 + 4\pi c^2 \alpha \beta^2).\tag{2.9}$$

Это условие можно переписать в терминах $\Sigma(p^2) = \Sigma_0 + \Sigma_1 p^2 + O(p^4)$. Действительно,

$$\begin{aligned}4\pi G^{-1}(p^2) &= p^2 + m_0^2 + \Sigma(p^2) = p^2 + m_0^2 + \Sigma_0 + \Sigma_1 p^2 + O(p^4) \\ &= (1 + \Sigma_1) (p^2 + m^2 + \Sigma_0(1 + \Sigma_1)^{-1}) + O(p^4) = 4\pi(1 + \Sigma_1) G_R^{-1}(p^2).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Отсюда следует, что

$$Z_\phi = \frac{1}{1 + \Sigma_1}, \quad M^2 = m^2 + \frac{\Sigma_0}{1 + \Sigma_1}, \quad m^2 = \frac{m_0^2}{1 + \Sigma_1}.\tag{2.11}$$

Вычисление массового оператора нам будет удобно начать с разложения для пропагатора в координатном представлении:

$$\begin{aligned} G(x-x') &= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle = \frac{\langle \phi(x)\phi(x')e^{-S_1[\phi]} \rangle_0}{\langle e^{-S_1[\phi]} \rangle_0} \\ &= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0 - \langle \phi(x)\phi(x')S_1[\phi] \rangle_{0,c} + \frac{1}{2}\langle \phi(x)\phi(x')S_1^2[\phi] \rangle_{0,c} - \frac{1}{6}\langle \phi(x)\phi(x')S_1^3[\phi] \rangle_{0,c} + O(\alpha_0^4). \end{aligned}$$

Здесь знаменатель $\langle e^{-S_1} \rangle_0$ сокращает несвязные диаграммы. Чтобы учесть это, следует вычислять только связные части корреляционных функций, обозначенные здесь как $\langle \dots \rangle_{0,c}$. Мы исключим несвязные диаграммы на ходу. Мы также на ходу исключим одночастично-приводимые диаграммы и легко выбросим множители G_0 на «ногах», так что, по сути, будем сразу вычислять массовый оператор.

Чтобы продемонстрировать технику, вычислим первый порядок теории возмущений:

$$-\langle \phi(x)\phi(x')S_1[\phi] \rangle = \alpha_0 r_0^{\delta_0} \int d^2y \langle \phi(x)\phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0.$$

Среднее в правой части легко вычисляется

$$\langle \phi(x)\phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_0 \langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 - \beta_0^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0 \langle \phi(x')\phi(y) \rangle_0 \langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0.$$

Первое слагаемое представляет собой сумму несвязных диаграмм и сокращается с соответствующим вкладом от $\langle e^{-S_1} \rangle_0$. Второе слагаемое естественно распадается на две «хвостовые» линии и вклад в массовый оператор. Учитывая, что $\langle : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 = R_0^{-\beta_0^2}$, для вклада первого порядка в (минус) массовый оператор имеем

$$-\frac{1}{4\pi} \Sigma^{(1)}(y-y') = -\alpha_0 \beta_0^2 \frac{r_0^{\delta_0}}{R_0^{\beta_0^2}} \delta(y-y').$$

Отсюда

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = \Sigma_0^{(1)} = 4\pi\alpha_0\beta_0^2 R_0^{-2} \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^{\delta_0}. \quad (2.12)$$

Как и следовало ожидать, эта формула согласуется с квазиклассическим пределом $\beta \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow -2$). В этом пределе вклад инфракрасного обрезания исчезает, и $M^2 = m_0^2 + 4\pi\alpha\beta^2 r_0^{-2} = m_0^2 + 4\pi\mu\beta^2$.

В общем случае мы видим, что масса зависит от параметра R инфракрасного обрезания. Здесь надо принять во внимание, что масса M не является массой элементарных возбуждений в теории. Дело в том, что при $\beta^2 \leq 2$ теория является асимптотически свободной, то есть поле ϕ описывает только возбуждения на малых масштабах, в то время как на больших масштабах имеется совершенно другая система возбуждений — солитоны и (при $\beta^2 < 1$) бризеры. Здесь мы будем интересоваться именно массой этих «асимптотических» возбуждений.

Сравнивая ответ с (2.11), (2.9), получаем в этом приближении

$$Z_\phi = 1, \quad Z_\alpha = \left(\frac{R}{r_0} \right)^\delta. \quad (2.13)$$

В первом порядке по теории возмущений метод ренормгруппы не даст нам ничего нового, и я приведу его просто для иллюстрации. Разложим Z_α по малому параметру δ :

$$Z_\alpha = 1 + \delta \log \frac{R}{r_0},$$

Будем считать параметр обрезки r_0 и затравочные константы α_0, δ_0 постоянными, а логарифм инфракрасного масштаба R — ренормгрупповым «временем». Тогда

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha_0\delta, \quad t = \log R.$$

В первом порядке по δ мы должны считать $\alpha_0 = \alpha$. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha\delta,$$

которое имеет решение

$$\alpha \sim R^{-\delta}$$

в согласии с (2.13). Это естественно, поскольку результат (2.13) точен в случае, когда константа связи μ много меньше масштаба обрезки $r_0^{\beta^2-2}$, то есть $\alpha \ll 1$. Точность этого ответа обусловлена применением конформной теории возмущений.

Формально ренормгрупповые траектории выглядят как на Рис. 2.1. Траектории нарисованы в плос-

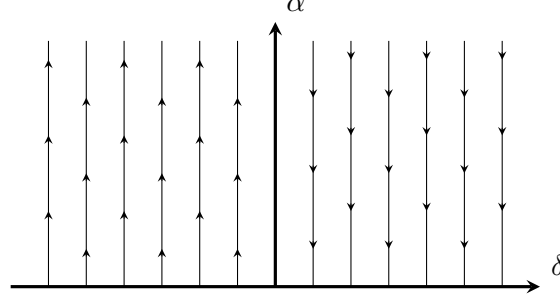


Рис. 2.1. Ренормгрупповые траектории в первом порядке по теории возмущений. Стрелки указывают в направлении роста масштаба R .

кости (δ, α) . Мы видим, что при $\delta < 0$ имеет место асимптотическая свобода: параметр связи α стремится к нулю с уменьшением масштаба и неограниченно растет с ростом масштаба. Точно так же диаграмма выглядит в плоскости затравочных параметров (δ_0, α_0) , но уже по отношению к ультрафиолетовому «времени» $\log r_0$.

Рассмотрим теперь высшие порядки по теории возмущений. Во втором порядке теории возмущений имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \phi(x)\phi(x') S_1^2[\phi] \rangle_{0, \text{conn}} &= \frac{\alpha_0^2 r_0^{2\delta_0}}{2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \langle \phi(x)\phi(x') : \cos \beta_0 \phi(y_1) : : \cos \beta_0 \phi(y_2) : \rangle_{0, \text{conn}} \\ &= \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int d^2 y_1 d^2 y_2 \left(\langle \phi(x)\phi(y_1) \rangle_0 \langle \phi(x')\phi(y_2) \rangle_0 \langle : \sin \beta_0 \phi(y_1) : : \sin \beta_0 \phi(y_2) : \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. - \langle \phi(x)\phi(y_1) \rangle_0 \langle \phi(x')\phi(y_1) \rangle_0 \left(\langle : \cos \beta_0 \phi(y_1) : : \cos \beta_0 \phi(y_2) : \rangle_0 - R_0^{-2\beta_0^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Множитель $R_0^{-2\beta_0^2}$ в последнем слагаемом связан с тем, что каждая вершина дает вклад в диаграмму $R_0^{-\beta_0^2} = \langle : e^{\pm i\beta\phi} : \rangle_0$. Отсюда немедленно находим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \Sigma^{(2)}(x) &= \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \left(\langle : \sin \beta_0 \phi(x) : : \sin \beta_0 \phi(0) : \rangle_0 - \beta_0^2 R_0^{-2\beta_0^2} \langle \phi(x)\phi(0) \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. - \delta(x) \int d^2 y \left(\langle : \cos \beta_0 \phi(0) : : \cos \beta_0 \phi(y) : \rangle_0 - R_0^{-2\beta_0^2} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0}}{2R_0^{2\beta_0^2}} \left(\left(\frac{R_0}{x} \right)^{2\beta_0^2} - \left(\frac{x}{R_0} \right)^{2\beta_0^2} - 2\beta_0^2 \log \frac{R_0^2}{x^2} \right. \\ &\quad \left. - \delta(x) \int d^2 y \left(\left(\frac{R_0}{y} \right)^{2\beta_0^2} + \left(\frac{y}{R_0} \right)^{2\beta_0^2} - 2 \right) \right). \end{aligned}$$

Член с $\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_0$ вычитает одночастично-приводимый вклад. В импульсном представлении имеем

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p^2) &= -2\pi \alpha_0^2 \beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \left(\int d^2 x (e^{ipx} - 1) x^{-2\beta_0^2} \right. \\ &\quad \left. - R_0^{-4\beta_0^2} \int d^2 x (e^{ipx} + 1) x^{2\beta_0^2} - 2\beta_0^2 R_0^{-2\beta_0^2} G_0(p^2) + 2R_0^{2-2\beta_0^2} \right). \end{aligned}$$

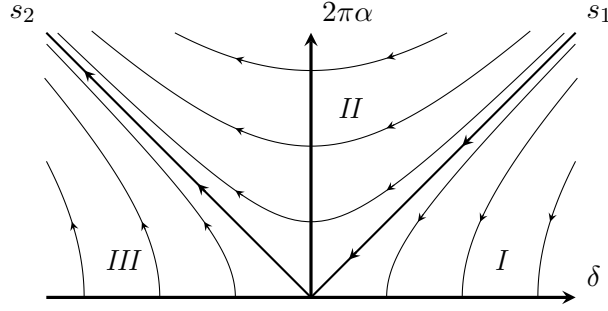


Рис. 2.2. Ренормгрупповые траектории во втором порядке по теории возмущений.

Очевидно, что второй интеграл ультрафиолетово сходится, а инфракрасно растет не быстрее чем $R_0^{2+2\beta_0^2}$, то есть соответствующий вклад мал. Аналогично малы два последних члена в скобке, отвечающие вычитанию одночастично-приводимой и несвязной диаграмм. Первый интеграл дает вклад только в Σ_1 :

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p^2) &= \pi\alpha_0^2\beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int d^2x (px)^2 x^{-2\beta_0^2} + O(p^4) = \pi\alpha_0^2\beta_0^2 r_0^{2\delta_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^{R_0} d\rho p^2 \rho^{3-2\beta_0^2} \cos^2\theta + O(p^4) \\ &= \frac{\pi^2\alpha_0^2\beta_0^2}{2\delta_0} \left(1 - \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^{2\delta_0}\right) p^2 + O(p^4) \simeq \pi^2\alpha_0^2\beta_0^2 p^2 \log \frac{R_0}{r_0} + O(p^4). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Под знаком логарифма мы можем заменить R_0 на R . Отсюда получаем во втором порядке

$$Z_\phi = 1 - \pi^2\alpha_0^2\beta_0^2 \log \frac{R}{r_0}, \quad Z_\alpha = 1 + \delta_0 \log \frac{R}{r_0}. \quad (2.15)$$

Уравнения ренормгруппы во втором порядке по α и в лидирующем порядке по δ имеют вид:

$$\frac{d\alpha}{d \log R} = -\delta\alpha, \quad \frac{d\delta}{d \log R} = -4\pi^2\alpha^2. \quad (2.16)$$

Обратим внимание, что эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d(2\pi\alpha \mp \delta)}{dt} = \pm 2\pi\alpha(2\pi\alpha \mp \delta). \quad (2.16a)$$

Это значит, что прямые $2\pi\alpha = \pm\delta$ являются ренормгрупповыми траекториями. Эти прямые делят полуплоскость (δ, α) на три части. В каждой из этих частей нетрудно качественно построить ренормгрупповые траектории (Рис. 2.2).

О чем говорит эта диаграмма? Прежде всего, область I представляет собой область низкотемпературной («молекулярной») фазы. Точки на правой полуоси δ являются устойчивыми фиксированными точками. Это значит, что в инфракрасном пределе константа связи α стремится к нулю и теория описывается свободным безмассовым бозоном. Сепаратриса s_1 , разделяющая области I и II, является линией критических точек. Любая точка на сепаратрисе течет в точку $\alpha = \delta = 0$. Области II и III являются областями высокотемпературной («плазменной») фазы, причем область III асимптотически свободна, то есть описывается теорией свободного поля в ультрафиолетовом пределе. С ростом масштаба константа взаимодействия α растет, так что возбуждения в инфракрасной области никак не связаны с исходным свободным бозоном. Фактически эти возбуждения являются массивными частицами, причем массивные частицы имеются и в точке $\beta^2 = 2$. Это следует из того, что если мы включим даже слабое взаимодействие в этой точке, мы немедленно попадем в область II, в которой траектории уходят на бесконечность в инфракрасном пределе. С другой стороны, в этой точке теория не описывается безмассовой теорией и на малых масштабах: траектории в области II начинаются тоже на бесконечности.

Как ведут себя траектории дальше? По теории возмущений ее получить нельзя, поскольку теория возмущений дает возможность получить ренормгруппу только в случае почти безразмерной константы связи ($\delta \ll 1$). Предполагается, что в области $1 < \beta^2 < 2$ ($-1 < \delta < 0$) траектории стремятся к линии $\beta^2 = 1$, которая соответствует, как мы увидим в следующей лекции, свободнофермионной точке.

Задачи

1. Решите систему уравнений (2.16) точно. Найдите алгебраическое уравнение для траекторий и явную зависимость от $t = \log R$.

2. Пусть $\varphi(z)$ — киральное (правое) поле. Введем токи масштабной размерности 1:

$$J^0(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial \varphi(z), \quad J^\pm(z) = :e^{\pm i\sqrt{2}\varphi(z)}:.$$

Покажите, что эти токи имеют операторные разложения (эти операторные разложения эквивалентны соотношениям алгебры Каца—Муди \widehat{sl}_2 с центральным зарядом 1):

$$\begin{aligned} J^0(z')J^0(z) &= \frac{1/2}{(z' - z)^2} + O(1), \\ J^+(z')J^-(z) &= \frac{1}{(z' - z)^2} + \frac{2J^0(z)}{z' - z} + O(1), \\ J^\pm(z')J^0(z) &= \mp \frac{J^\pm(z)}{z' - z} + O(1). \end{aligned}$$

Все остальные операторные разложения регулярны. Найдите операторные разложения этих токов с полями $V_\pm(z) = :e^{\pm \frac{i}{\sqrt{2}}\varphi(z)}:.$

3. Пусть $T(z) = -\frac{1}{2}:(\partial\varphi)^2: + i\alpha_0\partial^2\varphi$. Покажите, что

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + O(1), \quad c = 1 - 12\alpha^2.$$

4. В условиях предыдущей задачи покажите, что

$$T(z') :e^{i\alpha\varphi}: = \frac{\Delta_\alpha :e^{i\alpha\varphi}:}{(z' - z)^2} + \frac{\partial :e^{i\alpha\varphi}:}{z' - z} + O(1).$$

5*. Переформулируйте вывод ренормгруппы с помощью разбиения поля ϕ на быстрые и медленные моды. То есть положим

$$\phi_\Lambda(x) = \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \phi_k(x).$$

После этого полагаем Λ' немного меньше Λ и берем функциональный интеграл по быстрым модам:

$$Z'_\Lambda = \int [D\phi_k]_{\Lambda'^2 < k^2 \leq \Lambda^2} e^{-S_{\alpha, \delta}[\phi_\Lambda]}.$$

Если Λ не слишком велико, результат можно переписать в виде

$$Z'_\Lambda = e^{-S_{\alpha', \delta'}[\phi'_\Lambda]} - (\text{иррелевантные вклады})$$

с новыми значениями констант связи α', δ' , выражающимися через α и δ . Эти выражения при малых значениях $\log \frac{\Lambda}{\Lambda'}$ можно представить в виде

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha' - \alpha}{\log(\Lambda/\Lambda')} = F(\alpha, \delta), \quad \dot{\delta} = \frac{\delta' - \delta}{\log(\Lambda/\Lambda')} = G(\alpha, \delta),$$

что дает уравнения ренормгруппы как дифференциальные уравнения по параметру $t = -\log \Lambda$.

Семинар 2

Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона

Рассмотрим конформную теорию поля в евклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x). \tag{2.17}$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Это значит, что для любых локальных операторов Φ_1, \dots, Φ_N имеет место тождество

$$\langle \bar{\partial}T(x)\Phi_1(x_1)\cdots\Phi_N(x_N) \rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \dots, x_N.$$

Когда $x = x_i$ это уравнение может нарушаться. Рассмотрим, например, операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_\Delta(x') &= \frac{\Delta\Phi_\Delta(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_\Delta(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_\Delta(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_\Delta(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Дифференцируя по \bar{z} , получаем

$$\Phi_\Delta(x')\bar{\partial}T(x) = \Delta\Phi_\Delta(x')\bar{\partial}\partial'(z-z')^{-1} + \partial'\Phi_\Delta(x')\bar{\partial}(z-z')^{-1} + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\bar{\partial}\frac{1}{z} = \pi\delta(x). \quad (2.18)$$

Отсюда находим

$$\Phi_\Delta(x')\bar{\partial}T(x) = \pi\Delta\Phi_\Delta(x')\partial'\delta(x-x') + \partial'\Phi_\Delta(x')\delta(x-x') + O(1).$$

и

$$\int d^2x' \Phi_\Delta(x')\bar{\partial}T(x) = \pi(1-\Delta)\partial\Phi_\Delta(x). \quad (2.19)$$

Теперь рассмотрим среднее от $\bar{\partial}T(x)X$ с любым X в виде произведения от локальных операторов в первом порядке теории возмущений:

$$\langle \bar{\partial}T(x)X \rangle = \frac{\langle e^{-S_1}\bar{\partial}T(x)X \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} \simeq -\lambda \int d^2y \langle \Phi_\Delta(y)\bar{\partial}T(x)X \rangle_0 \simeq -\pi(1-\Delta)\lambda \langle \partial\Phi(x)X \rangle.$$

Получаем

$$\bar{\partial}T(x) = \partial\Theta(x), \quad (2.20)$$

где¹

$$\Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1-\Delta)\lambda\Phi(x) + O(\lambda^2). \quad (2.21)$$

Аналогично

$$\partial\bar{T}(x) = \bar{\partial}\Theta(x). \quad (2.22)$$

Выражение (2.21) может оказаться точным, если

$$(z'-z)\Phi(x') \left(\int d^2y \Phi(y) \right)^k T(x) = o(1), \quad \text{если } k > 0. \quad (2.23)$$

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos\beta\phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad \bar{T}(x) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2, \quad \Theta(x) = \pi(1-\beta^2/2)\mu\cos\beta\phi + O(\mu^2). \quad (2.24)$$

Однако условие (2.23) обращения в нуль высших поправок для $\Theta(x)$ не выполняется. Действительно, нетрудно проверить, что левая часть имеет порядок $(z'-z)^{-1}|z'-z|^{2k-k(k+1)\beta^2}$, и при любом значении β условие (2.23) нарушается при достаточно больших k .

Решить эту проблему можно двумя способами. Первый состоит в том, чтобы предположить, что поправки аналитичны по β^2 и если n -тый член теории возмущений обращается в нуль при достаточно малых β^2 , то он обращается в нуль тождественно. Тем не менее, предположение об аналитичности требует некоторого обоснования.

¹Заметим, что мы опускаем и поднимаем индексы с помощью метрики пространства Минковского $g_{z\bar{z}} = -1/2$, $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$.

Лекция 3 Бозонизация модели Тирринга

ization

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (3.1) \quad \boxed{MT}$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2) \quad \boxed{\text{gamma-}}$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3.3) \quad \boxed{MTcurr}$$

В случае $m = 0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu = \bar{\psi}\gamma^3\gamma^\mu\psi = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \quad (3.4) \quad \boxed{MT3curr}$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta\phi \right). \quad (3.5) \quad \boxed{SG}$$

В модели имеется топологическое число

$$q = \frac{\beta}{2\pi}(\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)), \quad (3.6) \quad \boxed{\text{topnum}}$$

принимаяющее целые значения. Его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1\phi(t, x). \quad (3.7)$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi. \quad (3.8) \quad \boxed{\text{topcurr}}$$

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [2,3], причем параметры связаны соотношениями

$$g = \pi(\beta^{-2} - 1), \quad (3.9) \quad \boxed{\text{gbeta}}$$

$$\mu \sim mr_0^{\beta^2-1}, \quad (3.10) \quad \boxed{\text{mum}}$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu. \quad (3.11) \quad \boxed{MT-SG}$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (3.11) играет ключевую роль в бозонизации.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (i\psi_1^+(\partial_0 + \partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 - x^0$, $\bar{z} = x^1 + x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = -2\psi_2^+ \psi_2, \quad j^{\bar{z}} = 2\psi_1^+ \psi_1.$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение[3]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -ig\psi_2^+ \psi_2 \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= ig\psi_1^+ \psi_1 \psi_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из сохранения $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ следует, что ток j^μ можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial^\mu \tilde{\phi}. \tag{3.13}$$

Здесь $\tilde{\phi}$ и ϕ связаны между собой, как это описано в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только z и \bar{z} соответственно. Коэффициент в (3.13) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (3.11).

Мы видим, что безмассовая модель эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из (3.11) и (3.13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi = \psi_1^+ \psi_1, \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+ \psi_2. \tag{3.15}$$

Дальнейшее решение этих уравнений вместе с (3.12) в классическом случае неоднозначно. Проще обстоит дело как раз в квантовом случае. Давайте искать решение уравнений (3.15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i \varphi(z) + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i \varphi(z) - i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \tag{3.16}$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i . Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1. \tag{3.17}$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Поскольку¹

$$\psi_i(x') \psi_j(x) = \eta_i \eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}, \tag{3.18}$$

причем это выражение хорошо продолжается в евклидову область, легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \tag{3.19}$$

Из (3.18) видно, что произведения вроде $\psi_1^+ \psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим произведение, например

$$\psi_1^+(x') \psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} (1 - i\alpha_1(z' - z)\partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x) + \dots). \tag{3.20}$$

¹Мы всюду исключаем R , так как знаем, что инфракрасное обрезание в конечном итоге никуда не войдет.

Усредним это произведение по окружности $|z' - z|^2 = r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (3.21) \quad \text{eq1}$$

Тогда первый и третий члены в разложении (3.20) обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+ \psi_1$. Мы видим, что если бы мы потребовали буквальной эрмитовой сопряженности ψ и ψ^+ , множитель i в $-i\alpha_1 \varphi(z)$ испортил бы нам эрмитовость оператора $\psi_1^+ \psi_1$.

Сравнивая с (3.15), получаем

$$\beta = -ir_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (3.22) \quad \text{betaN1}$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (3.23) \quad \text{eq2}$$

получим

$$\beta = -ir_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (3.24) \quad \text{betaN2}$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (3.12). Подставляя (3.15) и (3.16), получим

$$\begin{aligned} i\beta_1 \bar{\partial} \bar{\varphi} e^{i\alpha_1 \varphi + i\beta_1 \bar{\varphi}} &= -ig \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial} \bar{\varphi} e^{i\alpha_1 \varphi + i\beta_1 \bar{\varphi}}, \\ i\alpha_2 \partial \varphi e^{i\alpha_2 \varphi + i\beta_2 \bar{\varphi}} &= ig \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi e^{i\alpha_2 \varphi + i\beta_2 \bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2\pi} \quad (3.25) \quad \text{eq3}$$

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i , β_i , нужно узнать еще нормировочные множители N_i . Вместо того, чтобы аккуратно извлекать сингулярные члены в антикоммуляторах, давайте просто зафиксируем их так, чтобы член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1)$ был бы пропорционален $\cos \beta\phi$.

Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1 \eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1 \alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1 \beta_2} \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2, \quad (3.26) \quad \text{eq4}$$

что согласуется с (3.21–3.25) и дает, кроме того

$$\alpha_1 = -\beta_2 \quad (3.27) \quad \text{eq4a}$$

Если отождествить $\psi_2^+ \psi_1 \sim e^{i\beta\phi}$, то мы получим

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta, \quad (3.28) \quad \text{eq5}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \beta. \quad (3.29) \quad \text{eq6}$$

Из (3.21), (3.25), (3.27), (3.28) легко получить

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подставляя ответ в (3.25), получаем (3.9).

Из (3.22), (3.24) находим

$$N_1 = -N_2 = ir_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (3.31) \quad \boxed{\text{N12}}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+\psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1\eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+\psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1\eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы $e^{i\beta\phi}$ и $e^{-i\beta\phi}$ должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по φ , $\bar{\varphi}$. Поэтому множители $(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\pm 1}$ тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (3.32) \quad \boxed{\text{psicos}}$$

откуда находим (3.10).

Строго говоря, пока мы нашли только точное решение для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теории возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теории возмущений по $\cos \beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий [4, 5]. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \quad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (3.33) \quad \boxed{\text{mphys}}$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [6].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$.

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (3.4) сохраняется.
2. Выведите (3.18).
3. Покажите, что классическая теория синус-Гордона имеет решения

$$\phi(t, x) = \pm \frac{4}{\beta} \arctg \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

при $m^2 = 4\pi\mu\beta^2$, при $|v| < 1$ и произвольном x_0 . Найдите топологические заряды этих решений.

4. Повторите вывод для случая свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$.

5*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (3.33), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m \left(1 + \frac{g}{\pi} \log \frac{\Lambda}{m} \right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g} A^\mu A_\mu \right).$$

Семинар 3

Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Второй подход заключается в том, чтобы изменить само разбиение действия модели синус-Гордона на действие конформной теории и возмущения. Альтернативное разбиение имеет вид

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}. \quad (3.34)$$

Такое разбиение кажется нефизическим, поскольку функционал действия S'_0 не является вещественным, однако формально ничто не мешает определить соответствующий функциональный интеграл. И хотя этот интеграл описывает теорию со взаимодействием, невозмущенная теория является конформной и тензор энергии-импульса может быть подкручен так, чтобы $T'^\mu{}_\mu = 0$.

Для тензора энергии-импульса теории S'_0 на классическом уровне (в евклидовом пространстве) имеем

$$T'^\mu{}_\nu = L\delta^\mu_\nu - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda = T^\mu{}_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda.$$

Применяя уравнение движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi},$$

получаем

$$T'^\mu{}_\nu = T^\mu{}_\nu + \frac{i}{4\pi\beta} \delta^\mu_\nu \nabla^2 \phi + \partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda.$$

Полагая

$$f^\mu{}_\nu{}^\lambda = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta^\mu_\nu \partial^\lambda \phi - \delta^\lambda_\nu \partial^\mu \phi) \quad (3.35)$$

с $\alpha_0 = \beta^{-1}$, получаем $T'^\mu{}_\mu = 0$. Отсюда легко получить

$$T'(x) = -\frac{1}{2} \partial\phi^2 + i\alpha_0 \partial^2 \phi, \quad \bar{T}'(x) = -\frac{1}{2} \bar{\partial}\phi^2 + i\alpha_0 \bar{\partial}^2 \phi. \quad (3.36)$$

В квантовом случае постоянная α_0 получает поправку. Чтобы ее найти, вычислим конформные размерности полей $e^{i\alpha\phi}$:

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 2\alpha_0).$$

Подберем α_0 таким образом, чтобы $\Delta_{-\beta} = 1$, то есть размерность потенциального члена в S'_0 равнялась единице. Это имеет место при

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}. \quad (3.37)$$

Тогда

$$\left[L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[\bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

и, следовательно, в невозмущенной теории S'_0 бесследовый тензор энергии-импульса сохраняется: $\bar{\partial}T' = \partial\bar{T}' = 0$.

Поскольку $\Delta_\beta = \beta^2 - 1$ в возмущенном случае мы имеем

$$\Theta'(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu e^{i\beta\phi}. \quad (3.38)$$

Это выражение точное, потому что левая часть (2.23) для этого возмущения $(z' - z)^{-1} |z' - z|^{2k+k(k+1)\beta^2}$ имеет нужный порядок малости. «Откручивая» тензор энергии-импульса назад, то есть добавляя $-\partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda$, мы убеждаемся, что поправка $O(\mu^2)$ в (2.24) равна нулю.

Лекция 4

Двухчастичные S -матрицы: теория возмущений

Предположим, что две частицы с массами m_1 и m_2 (и, возможно, с какими-то внутренними состояниями) в двумерном пространстве-времени рассеиваются друг на друге в себя. В двумерном пространстве-времени удобно пользоваться быстройми θ_i :

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i. \quad (4.1)$$

Для начальных быстройми положим $\theta_1 > \theta_2$. Пусть θ'_i — быстрая частицы после рассеяния. Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет единственное решение $\theta'_i = \theta_i$ при $m_1 \neq m_2$ и два решения $\theta'_i = \theta_i$ и $\theta'_1 = \theta_2, \theta'_2 = \theta_1$ при $m_1 = m_2$.

Сначала рассмотрим случай $m_1 \neq m_2$. Матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.2)$$

где $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i, p'_i = m_i \operatorname{sh} \theta'_i$ — пространственные компоненты импульса. Мы рассматриваем S -матрицу как оператор, действующий в произведении пространств двух частиц: $S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$. Чтобы найти связь со стандартной в диаграммной технике амплитудой \mathcal{M} , нужно привести дельта-функцию к виду $\delta(P' - P)$, где P, P' — конечный и начальный суммарный 2-импульс системы. Действительно, по определению

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_i 2\varepsilon_i \prod_j 2\varepsilon'_j}}. \quad (4.3)$$

Здесь $\hat{1}$ обозначает единичный оператор в пространстве состояний (включая дельта-функции по пространственным импульсам). Имеем

$$\delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) = \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) = \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P).$$

Отсюда немедленно находим

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (4.4)$$

Здесь единица в первом слагаемом означает уже единичный оператор в пространстве внутренних состояний частиц.

В случае $m_1 = m_2$ разница заключается только в том, что выражение (4.2) имеет два слагаемых:

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_2) \delta(p'_2 - p_1) P S(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.5)$$

где $P : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$ — оператор перестановки (мы считаем частицы одинаковой массы тождественными). Соотношение (4.4) сохраняет силу.

Рассмотрим теперь конкретные модели. Начнем с модели Тирринга. С помощью вспомогательного векторного поля A^μ действие модели Тирринга можно записать в виде:

$$S^{\text{MTM}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left(\bar{\psi} (i\hat{\partial} - \hat{A} - m) \psi + \frac{1}{2g} A^\mu A_\mu \right). \quad (4.6)$$

Диаграммная техника в этом представлении совпадает с диаграммной техникой квантовой электродинамики с той разницей, что пунктирной линии отвечает пропагатор $\langle A_\mu(x') A_\nu(x) \rangle = i g g_{\mu\nu} \delta(x' - x)$. В импульсном пространстве для внутренних линий и вершины имеем:

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \\ \hline \hat{p} - m + i0 \end{array}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned}
 p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\
 -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\
 p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\
 -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.}
 \end{aligned}$$

Кроме того, каждая фермионная петля дает множитель (-1) , каждая пара внешних антифермионных линий дает (-1) и каждая перестановка двух букв u от стандартного порядка (справа налево для входящих частиц и слева направо — для выходящих) дает (-1) . Эти знаки мы будем выписывать явно.

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0. \quad (4.7)$$

Решение легко написать через быстроту θ :

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ ie^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta + i\pi} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} ie^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Нам понадобятся произведения, отвечающие четырехфермионному взаимодействию:

$$\begin{array}{c}
 p_1 \longrightarrow \longrightarrow p'_1 \\
 \\
 \\
 p_2 \longrightarrow \longrightarrow p'_2
 \end{array} = -ig(\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1})(\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4igm^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим фермион и антифермион как одну частицу с двумерным пространством внутренних состояний $V = \mathbb{C}^2 = \operatorname{span}(e_+, e_-)$. Базисный вектор e_+ отвечает фермиону, а e_- — антифермиону. Двухчастичная S -матрица в пространстве $V \otimes V$ имеет шесть ненулевых матричных элементов. В базисе $e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$ она имеет вид

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} ++ & +- & -+ & -- \\ a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix} \begin{array}{l} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array} \quad (4.10)$$

или

$$S(\theta)_{++}^{++} = S(\theta)_{--}^{--} = a(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{+-} = S(\theta)_{-+}^{-+} = b(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{-+} = S(\theta)_{-+}^{+-} = c(\theta). \quad (4.11)$$

Отметим, что эти амплитуды должны удовлетворять условию перекрестной симметрии:

$$a(\theta) = b(i\pi - \theta), \quad c(\theta) = c(i\pi - \theta). \quad (4.12)$$

Найдем эти матричные элементы в первом порядке по константе связи g . Для вклада в первый матричный элемент $a(\theta)$ имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{++}^{(1)++} &= \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ \\ \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ \\ \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \end{array} \\
 &= -4igm^2 (\operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) - 1) = -8igm^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.
 \end{aligned}$$

Знак минус во втором слагаемом возникает от необходимости переставить \bar{u}_{p_1} и \bar{u}_{p_2} . Совершенно аналогично для вклада в $b(\theta)$ получаем

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)++} = \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ -p_2 \longleftarrow \longleftarrow -p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow -p_2 \end{array} = 4igm^2(\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8igm^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Для вклада в $c(\theta)$ имеем

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)-+} = - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ -p_2 \longleftarrow \longleftarrow -p_1 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_2 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ -p_2 \swarrow \quad \searrow -p_1 \end{array} = -4igm^2(1 + 1) = -8igm^2.$$

Из (4.4) немедленно получаем

$$\begin{aligned} a(\theta) &= 1 - ig \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + O(g^2), \\ b(\theta) &= 1 + ig \operatorname{cth} \frac{\theta}{2} + O(g^2), \\ c(\theta) &= -\frac{2ig}{\operatorname{sh} \theta} + O(g^2). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Теперь обратимся к модели синус-Гордона. При малых значениях β поле ϕ отвечает некоторой частице массы $m = \sqrt{4\pi\mu}\beta$. Найдём двухчастичную матрицу рассеяния для этой частицы на самой себе. В первом порядке по теории возмущений вклад будет давать только четырехчастичная вершина:

$$S^{\text{SG}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{m^2 \beta^2 \phi^4}{4!} + \dots \right),$$

где точки обозначают сумму константы и высших степеней ϕ . Отсюда находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(1)\phi\phi} = \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_2 \end{array} = 4\pi im^2 \beta^2.$$

Нетрудно также получить вклад второго порядка по β^2 :

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_2 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_2 \end{array}$$

Коэффициент $1/2$ перед диаграммами отражает их симметрию: группа перестановок линий и вершин диаграмм содержит два элемента. Петля в середине каждой диаграммы представляет собой интеграл:

$$L(p^2) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} q \quad q-p = - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((p-q)^2 - m^2 + i0)}.$$

Для первой диаграммы $p = 0$, для второй $p = p_1 - p_2$, для третьей $p = p_1 + p_2$. Прямое вычисление дает

$$L(p^2) = \frac{i}{2\pi p^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} - 1}. \tag{4.14}$$

Формула кажется несколько громоздкой, но она может быть записана просто с помощью быстроты. Рассмотрим вторую диаграмму. Пусть $\theta = \theta_1 - \theta_2$, так что

$$p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.15) \quad \text{t-thet}$$

Выражение (4.14) принимает простой вид

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi im^2 \operatorname{sh} \theta}. \quad (4.16) \quad \text{lp2-f i}$$

Отсюда находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi im^2 \beta^2)^2}{8\pi im^2} \left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi im^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Следовательно,¹

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\operatorname{sh} \theta} \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right) + O(\beta^6). \quad (4.17) \quad \text{Smat-2}$$

Отметим, что в этом приближении матрица рассеяния $S_\phi(\theta)$ удовлетворяет двум соотношениям

$$S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta), \quad S_{11}(\theta) S_{11}(-\theta) = 1. \quad (4.18) \quad \text{Smat-p}$$

Первое соотношение является просто соотношением перекрестной симметрии и следует из перекрестной симметрии диаграмм. А вот второе имеет важный смысл: оно означает, что в данном порядке теории возмущений нет других каналов рассеяния двух частиц. Во втором порядке мы могли бы ожидать рассеяния двух частиц в четыре, но соответствующие диаграммы в сумме дают нулевой вклад. На самом деле это верно в любом порядке теории возмущений: в модели синус-Гордона нет множественного рождения частиц.

Теперь вычислим рассеяние частицы ϕ на солитоне. Для этого разложим действие синус-Гордона вблизи солитонного решения. Положим

$$\phi_{x_0,v}^\pm(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.19) \quad \text{SG-sol}$$

и рассмотрим действие $S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi]$ в квадратичном приближении по ϕ . Линейные члены по ϕ сократятся в силу того, что $\phi_{x_0,v}^\pm$ есть решение уравнения движения, и мы получим

$$\delta S[\phi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^\pm \right). \quad (4.20) \quad \text{SSG-ph}$$

Без ограничения общности положим $x_0 = 0$ и $v = 0$. Все остальные случаи можно получить сдвигом и преобразованием Лоренца. Тогда имеем

$$\delta S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 mx^1} \right) \right). \quad (4.21) \quad \text{deltaS}$$

Классическое уравнение движения

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 mx^1} \right) \right) \phi(x) = 0 \quad (4.22) \quad \text{eqmoti}$$

линейно и может рассматриваться как квантовое уравнение на оператор $\phi(x)$. Тогда этот оператор раскладывается по модам

$$\phi(t,x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right), \quad (4.23) \quad \text{phi-sc}$$

¹Значок 11 станет яснее позже. Дело в том, что ϕ является первой частицей в серии так называемых бризеров — связанных состояний солитона и антисолитона.

где $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\text{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0 \quad (4.24) \quad \text{fn-equ}$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Давайте найдем решения уравнения (4.22). Во-первых, имеется связанное состояние с нулевой энергией:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\text{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0. \quad (4.25) \quad \text{f0-мод}$$

Эта мода связана с возможностью перемещать солитон вдоль оси x :

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

С квантовомеханической точки зрения эту моду можно интерпретировать как результат «оживления» солитона, превращения его из заданного руками решения в частицу, обладающую собственной динамикой. Иными словами, операторы a_0, a_0^+ дают нам одну из солитонных степеней свободы.

Больше связанных состояний уравнение (4.22) не имеет. Остальные состояния можно нумеровать импульсами p , в связи с чем соответствующие функции мы будем обозначать f_p . Они имеют вид

$$f_p(x) = N_p e^{ipx} \left(1 + \frac{im}{p} \text{th} mx \right). \quad (4.26) \quad \text{fp-мод}$$

Чтобы их правильно нормировать, нужно найти плотность состояний. Поместим систему в большой ящик длины L с солитоном посередине и наложим циклическое граничное условие:

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} = \frac{p + im \text{th} \frac{mL}{2}}{p - im \text{th} \frac{mL}{2}}. \quad (4.27) \quad \text{fp-усл}$$

Так как нас интересует случай $L \rightarrow \infty$, имеем

$$e^{ipL} = \frac{p + im}{p - im}. \quad (4.28) \quad \text{fp-усл}$$

Логарифмируя это условие, получаем

$$pL = 2\pi n - 2 \arctg \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \quad (4.29) \quad \text{fp-усл}$$

Полуцелые числа n и будут нумеровать состояния. Давайте возьмем два соседних значения импульса отвечающих числам n и $n + 1$. Имеем

$$(p_{n+1} - p_n)L = 2\pi - 2 \arctg \frac{p_{n+1}}{m} + 2 \arctg \frac{p_n}{m}.$$

Так как $p_{n+1} - p_n \sim \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$, в правой части мы можем просто взять производную:

$$(p_{n+1} - p_n) \left(L + \frac{2m}{(m^2 + p^2)} \right) = 2\pi.$$

Отсюда следует выражение для плотности состояний:

$$\rho(p) = \frac{1}{L} \frac{dn}{dp} = \frac{1}{L} \frac{1}{p_{n+1} - p_n} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{2m}{L(m^2 + p^2)} \right). \quad (4.30) \quad \text{rho-ph}$$

В пределе $L \rightarrow \infty$ второе слагаемое исчезает и $\rho(p) \rightarrow 1/2\pi$, как и для бозона в свободном пространстве. Отсюда немедленно следует, что в непрерывном спектре

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{dp}{2\pi}, \quad \delta_{n'n} \rightarrow 2\pi \delta(p' - p), \quad N_p = \frac{p}{\varepsilon_p}. \quad (4.31) \quad \text{fp-con}$$

Тем не менее, мы запомним выражение (4.30), потому что оно имеет смысл, когда бозон движется в газе из солитонов и антисолитонов. В этом случае величина $1/L \ll m$ имеет смысл средней плотности солитонов и антисолитонов.

Итак, окончательно мы можем написать

$$\phi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+). \quad (4.32)$$

Еще раз посмотрим на функцию $f_p(x)$. На больших расстояниях от солитона она имеет вид

$$f_p(x) = e^{ipx} \times \begin{cases} 1 + im/p, & x \rightarrow +\infty; \\ 1 - im/p, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (4.33)$$

Это значит, что поле ϕ проходит через солитон *без отражения*. Отношение асимптотик

$$S_{1\pm}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\pm}^{\phi\pm} = \frac{p + im}{p - im} = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{4}\right)} \quad (4.34)$$

представляет собой матрицу рассеяния частицы ϕ на солитоне или антисолитоне в нулевом приближении.

Задачи

1. Выведите (4.8), (4.9).
2. Выведите (4.14), (4.16).
3. Найдите полную энергию солитонного решения (4.19).
4. Покажите, что функции $f_p(x)$ из (4.26) с $N_p = p/\varepsilon_p$ являются правильно нормированными решениями уравнения (4.24).
- 5*. Найдите простейшее точное решение уравнений (4.18) в тригонометрических функциях, зависящее от β^2 , которое имело бы своим пределом (4.17). Покажите, что решение имеет полюс на физическом листе $0 \leq \text{Re } \theta \leq \pi$. Найдите массу связанного состояния, отвечающего этому полюсу.

Семинар 4

Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вернемся к возмущенной конформной теории с действием (2.17). В исходной конформной теории поля мы имеем операторные разложения для тензора энергии-импульса и примарных операторов. Продолжим их на регулярные члены:

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + \times T^2(z)_{\times} + O(z' - z), \quad (4.35)$$

$$T(z')\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_{\Delta}(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) + \dots \quad (4.36)$$

Операторы \mathcal{L}_k представляют собой образующие алгебры Вирасоро, которые получаются разложением тензора энергии-импульса вблизи точки (z, \bar{z}) , в которой расположен оператор, на который они действуют. Не будем забывать также, что $\mathcal{L}_{-1} = \partial$ при действии на любой локальный оператор.

Выражение (4.35) определяет новый оператор $\times T^2(z)_{\times}$, который мы будем понимать как регуляризованный квадрат компоненты тензора энергии-импульса. В конформной теории он представляет собой сохраняющийся ток: $\partial_{\times} \times T^2(z)_{\times} = 0$. Более того, соответствующий интеграл движения коммутирует с операторами энергии и импульса. Попробуем найти условие, при котором этот оператор является компонентой сохраняющегося тока в возмущенной теории [7]. Для этого возьмем интеграл

$$\int d^2x' \bar{\partial}_{\times} \times T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d^2x' \partial_{\bar{z}} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right) \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}')$$

Будем понимать под $T(z + \delta)$ оператор $T(z + \delta, \bar{z})$. Корректность такого определения можно обосновать переходом к пространству Минковского и обратно. Нам это будет важно, чтобы избавиться от необходимости разложений по $\bar{\delta}$. Пользуясь (2.19), находим

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z)) + \partial(T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) \partial T(z) - \partial T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Далее, нужно применить (4.36) к оставшимся произведениям и разложить слагаемые по степеням δ . Результат оказывается регулярным и равным

$$\int d^2x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') = \pi(1 - \Delta) \left(-2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta - 3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi(z, \bar{z}). \quad (4.37) \quad \boxed{\text{PhiT2}}$$

Второе и третье слагаемое в правой части имеют вид полной производной по z . Но первое слагаемое не имеет нужного вида. Поэтому для произвольного возмущения оператор $\times T^2(z) \times$ не является компонентой сохраняющегося тока.

В каких случаях первое слагаемое могло бы стать полной производной? Это может быть в случае, когда имеется линейное соотношение между $\mathcal{L}_{-3}\Phi_{\Delta}$ и $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}\Phi_{\Delta}$, $\mathcal{L}_{-1}^3\Phi_{\Delta}$, то есть при наличии нуль-вектора на уровне три. Это имеет место при специальных значениях Δ :

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta} = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}.$$

В случае $c < 1$ имеем $\Delta_{31} > 1$, поэтому остается только одно возмущение оператором $\Phi_{13} = \Phi_{\Delta_{13}}$. Отметим, что для разбиения действия модели синус-Гордона (3.34) оператор возмущения $e^{i\beta\phi}$ как раз имеет размерность $\Delta_{13} = \beta^2 - 1$. Таким образом, эта конструкция дает высший интеграл движения для модели синус-Гордона.

Лекция 5

$O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Снова рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (5.1) \quad \boxed{\text{ONmode}}$$

В этой лекции мы обсудим предел больших N и специфическую теорию возмущений, с ним связанную [8] (см. также [9, 10]).

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (5.2) \quad \boxed{\text{ONmode}}$$

где вектор \mathbf{n} теперь пробегает любые значения в \mathbb{R}^N . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (5.3)$$

Интеграл по \mathbf{n} — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left(i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right),$$

где $G(x, x'|\omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x'|\omega) = \delta(x - x'). \quad (5.4) \quad \boxed{\text{Gdef}}$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right), \quad (5.5) \quad \boxed{\text{ZJomeg}}$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (5.6) \quad \boxed{\text{Seff}}$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) &= \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{iV}{4\pi} \left(\omega_0 \log \frac{e\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{e} \right). \quad (5.7) \quad \text{trlog}$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под логарифмом мы пренебрегли ω_0 по сравнению с Λ . Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда находим

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (5.8) \quad \text{omega}$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ следует устремить к нулю и g , причем таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (5.9) \quad \text{beta}$$

Важно то, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (5.10) \quad \text{omega}$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2} \rho(x)$:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) \\ &\quad - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Здесь $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$ и G — соответствующий оператор.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{V}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Мы видим, что скобка обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно показать, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n}x \rho(x_1) G(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G(x_n, x_1). \quad (5.11) \quad \text{Seff}$$

Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (5.2) член вида $\int d^2x \omega^2$, «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

Давайте теперь попробуем вычислить S -матрицу $O(N)$ -модели. Условие совместимости с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \quad (5.17)$$

В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta (S_2(\theta) - 1) = \begin{array}{c} p_1 \quad \text{---} \quad p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \quad \text{---} \quad p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_3(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \quad \text{---} \quad p_2 \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{---} \\ p_2 \quad \text{---} \quad p_1 \end{array}.$$

Используя (5.13), получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Задачи

1. Модель Гросса—Невё для N -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до N ; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp \left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

2. Постройте диаграммную технику для $1/N$ -разложения в модели Гросса—Невё. Найдите S -матрицу в древесном приближении.

3. Найдите расходящуюся часть массового оператора в порядке $1/N$ для $O(N)$ -модели. Покажите, что постоянный вклад квадратично расходится по Λ , а вклад, пропорциональный $p^2 - m^2$ имеет дважды логарифмическую расходимость.

4. Рассмотрите модель с ослабленным условием на \mathbf{n}^2 :

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x \left((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \frac{2\mu^2}{N} (\mathbf{n}^2 - 1)^2 \right), \quad (5.19) \quad \boxed{\text{ON-n4}}$$

где μ — постоянная размерности массы. Покажите, что в пределе $\mu \rightarrow \infty$ модель переходит в сигма-модель (5.1). Покажите, что масса возбуждений в модели (5.19) в главном порядке дается той же формулой (5.8), что и масса возбуждений в сигма-модели. Покажите, что S -матрица в древесном приближении также совпадает с матрицей рассеяния сигма-модели (5.18).

5*. Выведите формулу (5.16).

Семинар 5

**Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля
(продолжение)**

Лекция 6

$O(N)$ -модель: интегрируемость и точная S -матрица

ibility

Рассмотрим $O(N)$ -модель с действием

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1))$$

и классическими уравнениями движения:

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса z, \bar{z} имеем для действия

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (6.1)$$

ONacti

а для уравнений движения

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (6.2)$$

ONeqm

Действие (6.1) инвариантно относительно *псевдоконформных* преобразований

$$z \rightarrow f_1(z), \quad \bar{z} \rightarrow f_2(\bar{z}), \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{f'_1(z)f'_2(\bar{z})}. \quad (6.3)$$

pseud

Преобразования включают в себя масштабное преобразование, для которого

$$f_1(z) = \lambda z, \quad f_2(\bar{z}) = \lambda \bar{z},$$

и преобразование инверсии

$$f_1(z) = 1/z, \quad f_2(\bar{z}) = 1/\bar{z}.$$

При переходе к евклидову пространству трансляции, масштабное преобразование и инверсия образуют глобальную конформную группу, состоящую из конформных преобразований, взаимнооднозначных на сфере $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Локальные конформные преобразования, то есть преобразования, взаимнооднозначные только на каких-то областях, даются в этом случае произвольными аналитическими функциями $f(z) \equiv f_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})}$.

Ну, а пока продолжим рассмотрение в пространстве Минковского. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{zz} = \frac{1}{g} (\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g} (\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g} (\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнениях движения компонента $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$ обращается в нуль, т. е. $T_\mu^\mu = 0$, что выражает масштабную инвариантность модели. Сохранение энергии-импульса записывается в виде

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (6.4)$$

im1cla

В большинстве случаев энергия и импульс составляют единственные локальные интегралы движения, однако в случае $O(N)$ -модели это не так. Нетрудно получить соотношение

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (6.5)$$

im2cla

Сейчас мы покажем, что это уравнение означает существование дополнительного интеграла движения. Поскольку $(\partial \mathbf{n})^2$ сохраняется, с помощью псевдоконформного преобразования $z = f_1(z')$, такого что

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

можно добиться того, чтобы в новых координатах было

$$(\partial \mathbf{n})^2 = 1.$$

Тогда (6.5) преобразуется к виду уравнения непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial\partial\mathbf{n})^2 = \partial(2\partial\mathbf{n}\bar{\partial}\mathbf{n}).$$

На самом деле (хотя это непросто показать) в модели имеется бесконечное число интегралов движения.

Мы знаем, что в квантовом случае (псевдо)конформная инвариантность модели нарушается, так как поле ω приобретает ненулевое среднее значение. Поэтому рассуждения с конформными преобразованиями теряют силу. В квантовом случае в уравнениях, из которых следуют законы сохранения, должны возникать аномалии. Аномальные члены не должны нарушать масштабную инвариантность уравнений, в которые переходят законы сохранения. Поэтому, например, в правой части закона сохранения энергии-импульса допустим только один аномальный член, сводящийся к полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial\mathbf{n})^2 = -\beta\partial\omega. \quad (6.6)$$

Для квадрата тензора энергии-импульса аномальный член уже не будет полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial\mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial\mathbf{n})^2\partial\omega + \partial(\dots). \quad (6.7)$$

То же самое для (6.5):

$$\bar{\partial}(\partial^2\mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial\mathbf{n})^2\partial\omega + \partial(\dots). \quad (6.8)$$

Из этих трех уравнений можно составить один закон сохранения:

$$\bar{\partial} \left((\partial^2\mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial\mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (6.9)$$

Итак, имеется по крайней мере два интеграла движения спина 1 и 3:

$$I_1 = \int dz \frac{1}{2} (\partial\mathbf{n})^2, \quad I_3 = \int dz \left(\frac{1}{2} (\partial^2\mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2(2\beta + \alpha')} (\partial\mathbf{n})^4 \right). \quad (6.10)$$

Эти интегралы удовлетворяют уравнению $\bar{\partial}I_s = 0$. Интегралы I_{-1} , I_{-3} , удовлетворяющие уравнению $\partial I_{-s} = 0$, можно получить заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$. При переходе к обычным координатам x, t и те, и другие величины остаются интегралами движения.

Доказать существование бесконечного набора интегралов движения нечетных спинов можно, но сложно. Но уже из существования второго интеграла движения можно заключить невозможность множественного рождения частиц в столкновениях двух частиц.

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — асимптотическое состояние из n частиц с быстротами $\theta_1, \dots, \theta_n$. Пользуясь тем, что $p_z = me^\theta$, $p_{\bar{z}} = me^{-\theta}$, нетрудно проверить, что

$$I_{\pm 1}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m e^{\pm\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle,$$

$$I_{\pm 3}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m^3 e^{\pm 3\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Отсюда получаем четыре уравнения для рассеяния двух частиц в n частиц:

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Если зафиксировать быстроты частиц в конечном состоянии, то будет четыре уравнения для двух неизвестных. Эти уравнения могут иметь решения только при специальных значениях конечных быстрот $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. Но из аналитичности амплитуд следует, что амплитуды таких процессов должны быть тождественно равны нулю. Единственным исключением является случай $n = 2$, когда в амплитудах могут быть δ -функции, отвечающие граничным значениям полюсов вне массовой поверхности.

В общем случае имеем

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Отсюда следует, что модель допускает только рассеяния n частиц в n , причем частицы могут только обмениваться импульсами.

Теперь сделаем важное

Предположение факторизованного рассеяния. Амплитуда рассеяния n частиц в n распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом порядке с суммированием по внутренним состояниям промежуточных частиц.

Графически это предположение можно изобразить так:

(6.11) factsc

В принципе, гипотезу факторизованного рассеяния можно проверять в диаграммной технике порядок за порядком по $1/N$. Можно воспользоваться следующими качественными рассуждениями. Предположим, что имеется конечный радиус взаимодействия частиц R , за пределами которого виртуальные частицы почти не рождаются. Это значит, что если $|x_i - x_j| \gg R (\forall i, j)$, то волновая функция почти не отличается от волновой функции n свободных частиц. Благодаря существованию $I_{\pm 3}$ парное рассеяние частиц можно свести к прохождению частиц друг через друга с изменением внутренних состояний. Поэтому можно выбрать базис волновых функций без всяких отраженных волн. Пусть σ, τ — элементы группы перестановок S_n чисел $1, \dots, n$. Тогда система n бозонов будет описываться волновой функцией

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

при $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (6.12)$ psifur

Зависимость коэффициентов A от импульсов мы опустили. Легко убедиться, что функция (6.12) симметрична по отношению к перестановке пар $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$.

Мы пока не определили смысл параметров β_i . В принципе, мы можем этого и не делать. Но если мы хотим, чтобы β_i соответствовало, скажем, состоянию α_i входящей частицы i , мы можем потребовать

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\tau] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_{\tau_i}}^{\alpha_i}, \quad \text{если } p_{\tau_1} > p_{\tau_2} > \dots > p_{\tau_n}.$$

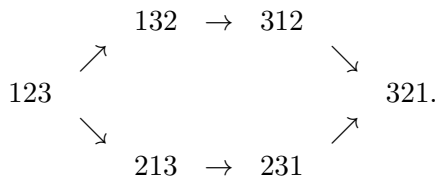
(6.13) psinor

Перестановка двух частиц эквивалентна рассеянию этих частиц. Разумеется, рассеяние меняет настоящие состояния частиц α_i , а не метки волновой функции β_i . Пусть $s^i \in S_n$ — перестановка чисел i и $i+1$, то есть $s^i_i = i+1, s^i_{i+1} = i, s^i_j = j (j \neq i, i+1)$. Тогда

$$A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_n}[\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}^{\alpha_i \alpha_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha'_i \alpha'_{i+1} \dots \alpha_n}[\tau].$$

(6.14) Arelat

Переставим теперь три последовательные частицы, например, $123 \rightarrow 321$. Такой переход можно выполнить двумя способами:



Первый способ приводит к соотношению

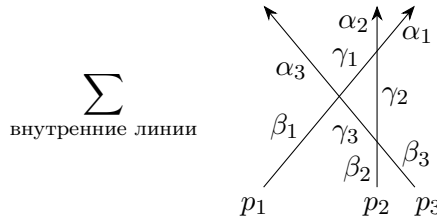
$$A_{\dots}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots}[321 \dots] = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) A_{\dots}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots}[123 \dots].$$

(6.15) rel1

Проще это записать в матричном виде

$$A_{321\dots} = S_{12}(p_1, p_2)S_{13}(p_1, p_3)S_{23}(p_2, p_3)A_{123\dots},$$

где индексы 1, 2, 3 указывают номер пространства, на которое действуют матрицы или в котором живут векторы. Еще удобней это изобразить графически



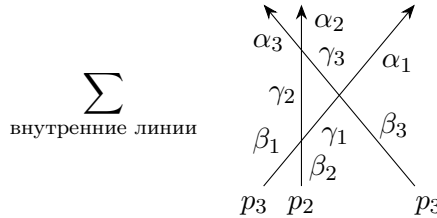
Второй способ приводит другому соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\dots}[321\dots] = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2\gamma_3}^{\alpha_2\alpha_3}(p_2, p_3)S_{\gamma_1\beta_3}^{\alpha_1\gamma_3}(p_1, p_3)S_{\beta_1\beta_2}^{\gamma_1\gamma_2}(p_1, p_2)A_{\dots}^{\beta_1\beta_2\beta_3\dots}[123\dots], \quad (6.16) \quad \boxed{\text{rel2}}$$

или проще

$$A_{321\dots} = S_{23}(p_2, p_3)S_{13}(p_1, p_3)S_{12}(p_1, p_2)A_{123\dots},$$

или графически



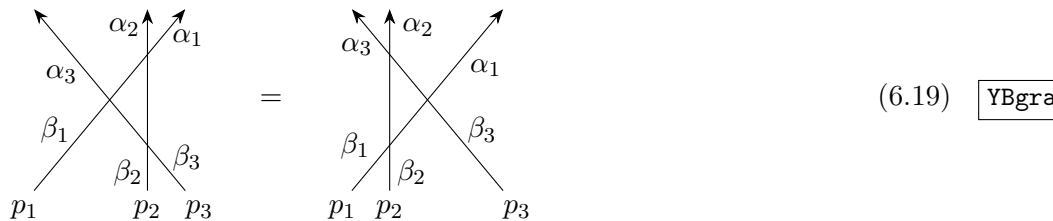
Условие того, что (6.15) и (6.16) приводят к одинаковому соотношению, называется *уравнением Янга—Бакстера* и записывается в виде

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1\gamma_2}^{\alpha_1\alpha_2}(p_1, p_2)S_{\beta_1\gamma_3}^{\gamma_1\alpha_3}(p_1, p_3)S_{\beta_2\beta_3}^{\gamma_2\gamma_3}(p_2, p_3) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2\gamma_3}^{\alpha_2\alpha_3}(p_2, p_3)S_{\gamma_1\beta_3}^{\alpha_1\gamma_3}(p_1, p_3)S_{\beta_1\beta_2}^{\gamma_1\gamma_2}(p_1, p_2), \quad (6.17) \quad \boxed{\text{YBlong}}$$

или более кратко

$$S_{12}(p_1, p_2)S_{13}(p_1, p_3)S_{23}(p_2, p_3) = S_{23}(p_2, p_3)S_{13}(p_1, p_3)S_{12}(p_1, p_2), \quad (6.18) \quad \boxed{\text{YB}}$$

или графически



Два графика на (6.19) отличаются положением одной из линий (например, второй). В первом графике она слева от вершины, где пересекаются первая и третья частицы, а во втором — справа. Иными словами, уравнение Янга—Бакстера выражает условие того, что линии в (6.11) можно как угодно смещать, пронося через вершины. Иными словами, неважно, в каком порядке мы будем рассматривать попарные рассеяния частиц: в любом случае мы получим один и тот же ответ.

Второе условие на S -матрицу более элементарно. Вернемся к соотношению (6.14). Понятно, что если мы дважды переставим два последовательных индекса в коэффициентах A , т. е. произведем преобразования

$$12 \rightarrow 21 \rightarrow 12,$$

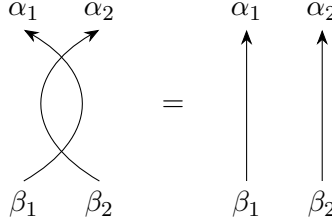
то мы должны получить тождественное преобразование. Отсюда следует *условие унитарности*¹

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_2 \gamma_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(p_2, p_1) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (6.20)$$

или

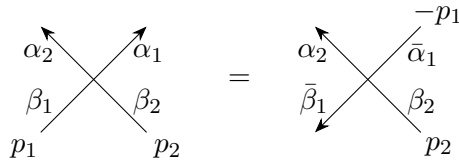
$$S_{21}(p_2, p_1) S_{12}(p_1, p_2) = 1, \quad (6.21)$$

или



$$(6.22)$$

Последнее условие *кроссинг-инвариантности* верно только в релятивистской теории. Его естественно сразу записать графически:



$$(6.23)$$

Здесь импульсы p_1 и p_2 понимаются как пространственно-временные импульсы, черта над индексом внутреннего состояния частицы изображает античастицу. Формульно это записывается так

$$S_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) = S_{\beta_2 \bar{\alpha}_1}^{\alpha_2 \bar{\beta}_1}(p_2, -p_1). \quad (6.24)$$

Если выразить импульсы через быстроты, получим:

1. Уравнение Янга–Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2) S_{13}(\theta_1 - \theta_3) S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3) S_{13}(\theta_1 - \theta_3) S_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (6.25)$$

2. Унитарность

$$S_{12}(\theta) S_{21}(-\theta) = 1 \quad (6.26)$$

3. Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1, \quad (6.27)$$

где C — матрица зарядового сопряжения, а тильда над цифрой 1 означает транспонирование по индексам, отвечающим этому пространству.

Условия *бутстрапа* (6.25–6.27) чрезвычайно ограничительны. Вместе с симметрией модели и условиями аналитичности они позволяют найти точное выражение для S -матрицы. Рассмотрим условия аналитичности. S -матрица является мероморфной функцией θ . Физическому листу отвечает область

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (6.28)$$

причем точка $\theta = i\pi$ отвечает точке ветвления $s = (m_1 - m_2)^2$ по переменной

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta,$$

а точке $\theta = 0$ отвечает точка $s = (m_1 + m_2)^2$. Линии $\text{Im } \theta = \pi$ отвечает в плоскости s левый разрез $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$, а линии $\text{Im } \theta = 0$ — правый разрез $[(m_1 + m_2)^2, \infty)$.

На мнимой оси S -матрица вещественна:

$$S(iu) \in \mathbb{R} \quad \text{при} \quad u \in \mathbb{R}, \quad (6.29)$$

¹Термин не вполне точный, поскольку это условие не означает положительности норм состояний. Это условие гарантирует только отсутствие других каналов рассеяния.

причем все полюсы S -матрицы на физическом листе находятся на мнимой оси. Части этих полюсов отвечают связанные состояния, однако чтобы установить, отвечает ли данный полюс связанному состоянию, обычно требуется дополнительное исследование.

Давайте решим [8] уравнение Янга–Бакстера для $O(N)$ -симметричной ($N \geq 3$) S -матрицы $N \times N$ вида (5.17). Уравнение Янга–Бакстера для нее приобретает вид

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'), \quad (6.30) \quad \text{yb1}$$

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'), \quad (6.31) \quad \text{yb2}$$

$$\begin{aligned} NS_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_1(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ + S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_3(\theta'). \end{aligned} \quad (6.32) \quad \text{yb3}$$

Чтобы решить эту систему, введем обозначение $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Первое уравнение принимает вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (6.33) \quad \text{S32rat}$$

Пусть теперь $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Подставляя (6.33) в (6.31), получаем

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Это уравнение имеет решение

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя это в (6.32), получим

$$\kappa = \frac{N-2}{2}\lambda.$$

Это значит, что

$$S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i(N-2)\lambda/2 - \theta}S_2(\theta). \quad (6.34) \quad \text{S12rat}$$

Это самое общее решение уравнения Янга–Бакстера, зависящее от произвольной функции $S_2(\theta)$ и произвольного параметра λ . Воспользуемся теперь условиями кроссинг-инвариантности и унитарности, чтобы зафиксировать S_2 и λ .

Условие кроссинг-симметрии имеет вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (6.35) \quad \text{cross2}$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (6.36) \quad \text{cross1}$$

Подставляя сюда (6.33) и (6.34), получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (6.37) \quad \text{lambda}$$

Условие унитарности

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (6.38) \quad \text{unit1}$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (6.39) \quad \text{unit2}$$

$$\begin{aligned} NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) \\ + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \end{aligned} \quad (6.40) \quad \text{unit3}$$

удовлетворяется, если

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (6.41) \quad \text{unit22}$$

Теперь нам надо решить совместно уравнения (6.35) и (6.41). Понятно, что решение этих уравнений неоднозначно. Решение переходит в решение, если домножить его на функцию

$$\frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha}$$

с произвольным α . Мы будем искать «минимальное» решение, то есть такое решение, которое будет иметь наименьшее количество нулей и полюсов на физическом листе.

Из (6.41) заключаем, что $S_2(\theta)$ имеет простой нуль в точке $\theta = 0$. Из кроссинг-симметрии (6.35) немедленно заключаем, что простой нуль имеется также в точке $\theta = i\pi$. Из унитарности находим, что в точке $\theta = -i\pi$ имеется полюс. Продолжая поочередно применять кроссинг-симметрию и унитарность, находим набор полюсов и нулей функции $S_2(\theta)$:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.42) \quad \boxed{\text{zp1}}$$

Другой набор нулей и полюсов получается следующим образом. Из (6.41) следует, что S_2 должна иметь полюс в одной из точек $\theta = \mp i\lambda$. Давайте обозначать решения с такими полюсами $S_2^{(\pm)}(\theta)$. Рассуждая как и раньше, получим для $S_2^{(\pm)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = \mp i\lambda - i\pi - 2\pi in, \pm i\lambda + 2\pi i + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = \mp i\lambda - 2\pi in, \pm i\lambda + i\pi + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.43) \quad \boxed{\text{zp2}}$$

Собирая (6.42), (6.43), получим

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(i\pi - \theta), \quad Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(-i \frac{\theta}{2\pi}\right)}. \quad (6.44) \quad \boxed{\text{S2pm}}$$

Раскладывая S -матрицу (6.33), (6.34), (6.44) с учетом (6.37) по $1/N$, получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (6.45) \quad \boxed{\text{S1expa}}$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (6.46) \quad \boxed{\text{S2expa}}$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (6.47) \quad \boxed{\text{S3expa}}$$

Это позволяет отождествить $S^{(+)}(\theta)$ с S -матрицей $O(N)$ -модели, а $S^{(-)}(\theta)$ с S -матрицей N -компонентной модели Невё—Шварца. Заметим, что

$$S_{12}^{(\pm)}(0) = \mp P_{12}, \quad (6.48) \quad \boxed{\text{S0sign}}$$

где $P_{12} : a \times b \mapsto b \times a$ — оператор перестановки пространств 1 и 2. Это означает, что для частиц в $O(N)$ -модели действует принцип Паули, хотя мы и считали частицы бозонами.

На самом деле в двумерном пространстве-времени нельзя сказать, является ли частица бозоном или фермионом. Если говорить о спине, то мы знаем, что такое спин оператора, но не знаем, что такое спин состояния, так как в одномерном пространстве нет вращений. Кроме того, в одном пространственном измерении есть способ построения алгебры Клиффорда (фермионной алгебры) по алгебре Гайзенберга (бозонной алгебре) и наоборот [27]. Это преобразование уважает понятие частицы, но меняет характер взаимодействия. Именно, матрица рассеяния частиц как фермионов отличается от матрицы рассеяния тех же частиц как бозонов знаком.

Задачи

1. Получите уравнение (6.5).

2. Напишите явно асимптотическое выражение для волновой функции (6.12) для двух и трех частиц ($n = 2, 3$). Приняв условие (6.14) для $n = 2$ за определение S -матрицы, убедитесь, что отсюда следует (6.14) для случая $n = 3$. Покажите, что произведение трех S -матриц $S_{12}S_{13}S_{23}$ действительно имеет смысл трехчастичной S -матрицы.

3. Выведите (6.45–6.47).

4. Проверьте (6.48). Покажите, что из $S(0) = -P$ следует принцип Паули для *взаимодействующих бозонов*: две частицы не могут иметь одинаковый импульс.

5*. Найдите, как преобразуется волновая функция, определенная уравнением (6.12), коэффициенты которой заданы условием (6.13), при перестановке пары соседних индексов: $(\beta_i, p_i) \leftrightarrow (\beta_{i+1}, p_{i+1})$.

Семинар 6

Составляем и решаем уравнения Янга—Бакстера,
унитарности и кроссинг-симметрии (в процессе лекции)

Лекция 7

Модель Тирринга и анзац Бете: конструкция и перенормировка массы

В этой лекции мы обсудим решение массивной модели Тирринга

$$S^{TM}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (7.1) \quad \boxed{\text{TM}}$$

методом анзаца Бете (см. книгу [13] и ссылки в ней). Напомним, что гамма-матрицы можно записать в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3.$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H = \int dx \left(-i\psi^+ \sigma^3 \partial_x \psi + m_0 \psi^+ \sigma^2 \psi + 2g\psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_- \right) \quad (7.2) \quad \boxed{\text{TMHam}}$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x), \quad (7.3) \quad \boxed{\text{TMpsi}}$$

причем импульс P и оператор числа частиц Q имеют вид

$$P = -i \int dx \psi^+ \partial_x \psi, \quad Q = \int dx \psi^+ \psi. \quad (7.4) \quad \boxed{\text{TMPQ}}$$

Давайте вспомним картинку Дирака. Спектр $\epsilon^2 - p^2 = m^2$ имеет две ветви: $\epsilon = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Поэтому стандартный вакуум образован «морем» фермионных возбуждений с отрицательными энергиями. Если мы удалим все это «море», то возникнет «голый вакуум» или *псевдовакуум*. Очевидно, голый вакуум имеет бесконечно большую энергию и не может претендовать на роль основного состояния. Тем не менее, истинный вакуум можно найти как «возбуждение» над псевдовакуумом.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов $g = 0$. Обозначим через $|\Omega\rangle$ состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (7.5) \quad \boxed{\text{Omega}}$$

Введем волновую функцию « N -частичного» состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle. \quad (7.6) \quad \boxed{\text{Npart}}$$

Состояния такого вида являются собственными векторами оператора Q :

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний \mathcal{H} распадается в сумму по собственным значениям Q :

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad v \in \mathcal{H}_N \Leftrightarrow Qv = Nv. \quad (7.7)$$

Действие \hat{H}_N гамильтониана на волновую функцию $\chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N)$, определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_1}^+(x_1) \dots \psi_{\alpha_N}^+(x_N) |\Omega\rangle, \quad (7.8) \quad \boxed{\text{Hhat}}$$

имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2),$$

где σ_k^i действует на пространстве k -й частицы. При $N = 1$ собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \text{sh } \lambda}. \quad (7.9)$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана имеет вид

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}). \quad (7.10)$$

Энергия N -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^N \text{ch } \lambda_k. \quad (7.11)$$

Какие значения могут принимать параметры λ ? Если система находится в ящике размера L с циклическими граничными условиями, то «быстроты» λ_k являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \text{sh } \lambda_k} = 1 \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.12)$$

Следовательно,

$$\text{sh } \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что λ_k находится либо на вещественной оси \mathbb{R} , либо на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Последние решения соответствуют отрицательным энергиям и конденсат таких возбуждений может дать истинный вакуум. Очевидно, основному состоянию соответствует состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим $\lambda_k = i\pi + \beta_k$. Чтобы определить вакуумную энергию, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \beta_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (7.13)$$

В термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) m_0 \text{ch } \beta, \quad \rho(\beta) = \frac{1}{L} \left| \frac{dn}{d\beta} \right| = \frac{m_0}{2\pi} \text{ch } \beta.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой θ соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \quad (\text{частица}),$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta + i\pi \quad (\text{античастица}).$$

Поскольку корни уравнений (7.12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с $p = (m \text{ch } \theta, m \text{sh } \theta)$, подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (7.2) коммутирует с оператором числа частиц Q , а по отношению к псевдовакууму $|\Omega\rangle$ нет никаких античастиц. Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств \mathcal{H}_N :

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + g \sum_{k<l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (7.14)$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть:

$$\frac{1}{2}(1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha'_1 +} \delta_{\alpha_1 +} \delta_{\alpha'_2 -} \delta_{\alpha_2 -} + \delta_{\alpha'_1 -} \delta_{\alpha_1 -} \delta_{\alpha'_2 +} \delta_{\alpha_2 +}. \quad (7.15)$$

Член взаимодействия в гамильтониане (7.14) плохо определен. Действительно, из-за дельта-функционального члена волновая функция разрывна при $x_k = x_l$. В то же время, действие гамильтониана зависит от волновой функции как раз в этой точке. Дельта функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольным образом:

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = \delta(x). \quad (7.16)$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)}$$

и при достаточно малых a имеем

$$f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)}.$$

Отсюда в пределе $a \rightarrow 0$ имеем

$$f(+0) = e^c f(-0). \quad (7.17)$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (7.9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при $x_1 = x_2$), при $x_1 \neq x_2$ волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса, рассеяние безотражательно и мы имеем:

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (7.18)$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по (α_1, x_1) , (α_2, x_2) и содержит (с точностью до общего множителя) один свободный параметр A_{21}/A_{12} , который должен зависеть от константы связи g . Прямое вычисление дает

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda - ig}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda + ig}{2}}. \quad (7.19)$$

Функцию $\Phi(\lambda)$ удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \quad (7.20)$$

считая, что разрезы лежат на лучах $(ig, i\infty)$, $(-ig, -i\infty)$. Величины λ_k естественно определены по модулю $2\pi i$.

Заметим, что функция $R(\lambda)$ периодична по g с периодом 2π . Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-\pi < g < \pi. \quad (7.21)$$

Теперь нетрудно построить общее N -частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma\tau} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (7.22)$$

Коэффициенты A удовлетворяют соотношениями

$$A_{\dots, i+1, i, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i, i+1, \dots}. \quad (7.23)$$

Наложим теперь циклическое граничное условие

$$\chi(\dots, x_k + L, \dots) = \chi(\dots, x_k, \dots). \quad (7.24) \quad \boxed{\text{cyclic}}$$

Тогда получим

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_l - \lambda_k). \quad (7.25) \quad \boxed{\text{Bethe}}$$

Эта система уравнений на параметры λ_k называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с N неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях $N \rightarrow \infty$. Тем не менее, сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, удовлетворяющему (7.25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты λ_k решения называются *корнями уравнений Бете*.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad (7.26) \quad \boxed{\text{Bethe}}$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (7.27) \quad \boxed{\text{EP}}$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой $i\pi + \mathbb{R}$. Общие комплексные корни могут располагаться симметрично относительно одной из прямых \mathbb{R} и $i\pi + \mathbb{R}$. Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Можно показать, что решения уравнений Бете взаимнооднозначно связаны с наборами чисел (n_1, \dots, n_N) . Понятно также, что различным n_k соответствуют различные λ_k и наоборот. Из принципа Паули следует, что все λ_k должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k \neq n_l \quad (k \neq l). \quad (7.28) \quad \boxed{\text{nnne}}$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями «голых частиц», т. е. с $\operatorname{Im} \lambda_k = \pi$. Будем писать

$$\lambda_k = i\pi + \beta_k.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа n_k шли через единицу:

$$n_{k+1} - n_k = \pm 1, \quad (7.29) \quad \boxed{\text{ndiff}}$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина β_k росла с k . Поэтому примем

$$n_k = k_0 - k$$

с некоторым k_0 . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \beta_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^N \Phi(\beta_k - \beta_l). \quad (7.30) \quad \boxed{\text{Bethe}}$$

В термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по β_k . Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \beta = 2\pi\rho(\beta) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta')\rho(\beta'). \quad (7.31) \quad \boxed{\text{Bethe}}$$

Здесь

$$\rho(\beta) = \frac{1}{L} \frac{dk}{d\beta} \quad (7.32) \quad \text{rhodef}$$

— плотность состояний, связанная с числом голых частиц N в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho(\beta) = \frac{N}{L}. \quad (7.33) \quad \text{rhonor}$$

При $\Theta \rightarrow \infty$ величина m_0 стремится к нулю при $g > 0$ и к бесконечности при $g < 0$. При $g > 0$ можно показать, что $\rho(\beta)/m_0 \rightarrow \infty$. Поэтому следует искать формальное решение однородного уравнения, которое получается из (7.31) при $m_0 = 0$, $\Theta \rightarrow \infty$. Оно имеет вид

$$\rho(\beta) = \text{const} \cdot \text{ch} \frac{\pi\beta}{\pi + g}. \quad (7.34) \quad \text{rhoso1}$$

Коэффициент пропорциональности можно найти более аккуратным вычислением, и он оказывается конечным.

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками. Для этого обобщим уравнение (7.30):

$$m_0 L \text{sh} \beta_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\beta_k - \beta_l). \quad (7.35) \quad \text{Bethel}$$

Далее, определим $\beta(n)$ уравнением

$$m_0 L \text{sh} \beta(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\beta(n) - \beta_l) \quad (7.36) \quad \text{Bethel}$$

Определим плотность состояний $\rho(\beta)$ и плотность дырок $\rho_h(\beta) = \rho(\beta) - \rho_r(\beta)$ следующим образом:

$$\rho(\beta(n)) = \frac{1}{L|\beta(n+1) - \beta(n)|} \simeq \frac{1}{L} \left| \frac{dn}{d\beta(n)} \right|, \quad \rho_r(\beta) = \left\langle \frac{1}{L|\beta_{k+1} - \beta_k|} \right\rangle_{\beta_k \simeq \beta} = \left\langle \frac{1}{L} \left| \frac{dk}{d\beta_k} \right| \right\rangle_{\beta_k \simeq \beta}. \quad (7.37) \quad \text{rho-rh}$$

В частности для одной дырки с параметром $\beta = \beta_0$ имеем $\rho_h(\beta) = L^{-1} \delta(\beta - \beta_0)$. Тогда система уравнений выглядит следующим образом:

$$m_0 \text{ch} \beta = 2\pi \rho(\beta) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta') (\rho(\beta') - \rho_h(\beta')). \quad (7.38) \quad \text{p-eq2}$$

Обозначив через $\rho_0(\beta)$ решение уравнения (7.31) и вычтя это уравнение из (7.38), получим

$$2\pi \delta \rho(\beta) + \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta') \delta \rho(\beta') = \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta' \Phi'(\beta - \beta') \rho_h(\beta'). \quad (7.39) \quad \text{deltar}$$

Здесь

$$\delta \rho(\beta) = \rho(\beta) - \rho_0(\beta).$$

В пределе $\Theta \rightarrow \infty$ это уравнение легко решить методом Фурье. Действительно, пусть

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta X(\beta) e^{i\beta\omega} \quad (7.40) \quad \text{X-Four}$$

для любой функции X , например Φ' , $\delta \rho$, ρ_h . Применяя преобразование Фурье к уравнению (7.39), получаем алгебраическое уравнение

$$2\pi \delta \tilde{\rho}(\omega) + \tilde{\Phi}'(\omega) \delta \tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\Phi}'(\omega) \tilde{\rho}_h(\omega).$$

Легко проверить, что

$$\tilde{\Phi}'(\omega) = -2\pi \frac{\text{sh} g\omega}{\text{sh} \pi\omega}, \quad \delta \tilde{\rho}(\omega) = -\frac{\text{sh} g\omega}{2 \text{sh} \frac{\pi-g}{2}\omega \text{ch} \frac{\pi+g}{2}\omega} \tilde{\rho}_h(\omega). \quad (7.41) \quad \text{Phi-de}$$

Энергия $E[\rho_h]$ и импульс $P[\rho_h]$ системы являются функционалами плотности дырок ρ_h , причем энергия возбудений определяется как разность $E[\rho_h] - E[0]$. Имеем

$$E[\rho_h] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta (\rho_h(\beta) - \delta\rho(\beta)) \operatorname{ch} \beta,$$

$$P[\rho_h] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta (\rho_h(\beta) - \delta\rho(\beta)) \operatorname{sh} \beta.$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных g .

При $g < 0$ интегралы в этих выражениях сходятся при $\Theta \rightarrow \infty$. Но если мы положим $\Theta = \infty$, мы получим, что $E[\rho_h] - E[0] = P[\rho_h] = 0$, так как $\delta\tilde{\rho}(\pm i) = \tilde{\rho}_h(\pm i)$. Поэтому следует перенормировать затравочную массу m_0 . Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции $\delta\tilde{\rho}(\omega)$ в точках $\omega = \pm \frac{i\pi}{\pi+g}$ дает

$$E[\rho_h] - E[0] = L \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \epsilon(\beta) \rho_h(\beta), \quad P[\rho_h] = L \int_{-\infty}^{\infty} d\beta p(\beta) \rho_h(\beta) \quad (7.42) \quad \boxed{\text{EP-fin}}$$

где

$$\epsilon(\lambda) = m \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda}{\pi+g}, \quad p(\lambda) = m \operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{\pi+g}, \quad m = \frac{M}{g} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\pi-g}{\pi+g} \right), \quad (7.43) \quad \boxed{\text{spectr}}$$

а константа M определяется равенством

$$m_0 = M \exp \left(-\frac{g}{\pi+g} \Theta \right) \sim M \left(\frac{m_0}{\Lambda} \right)^{g/(\pi+g)}. \quad (7.44) \quad \boxed{\text{m0div}}$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\pi\beta}{\pi+g}. \quad (7.45) \quad \boxed{\text{theta-}}$$

Сравнивая (7.44) с нашей предыдущей оценкой

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \quad (7.46)$$

где β — константа связи модели синус-Гордона, получаем соотношение

$$\frac{g}{\pi} = 1 - \beta^2,$$

отличное от соотношения

$$\frac{g}{\pi} = \beta^{-2} - 1,$$

приведенного в Лекции 2. Можно предположить, что нормировка константы связи g_{BA} в анзаце Бете отлична от физической нормировки g_{OPE} , определенной операторными разложениями, за пределами первой поправки по теории возмущений. Тем не менее, если постулировать

$$\frac{g_{\text{BA}}}{\pi} = \frac{g_{\text{OPE}}}{\pi + g_{\text{OPE}}},$$

то результаты, полученные разными способами, совпадают. Заметим, что область определения (7.21) для константы g_{BA} эквивалентна области релевантности возмущения для модели синус-Гордона:

$$0 < \beta^2 < 2.$$

При $g > 0$ ситуация несколько иная. Полюсы функции $\delta\rho_\omega(\lambda)$ при $\omega = \pm i\pi/(\pi+g)$ становятся ближе к вещественной оси, чем точки $\pm i$. Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует $m_0 \rightarrow 0$. Строго говоря, требуется явное вычисление $\delta\rho(\beta, \lambda)$ и затем интегралов для энергии и импульса возбудений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области $g < 0$. Это значит, что формула для перенормировки массы (7.44) верна и в этом случае.

Задачи

1. Получите (7.2) из (7.1). Выведите (7.14).
2. Выведите (7.19).
3. Получите соотношения (7.42)–(7.43).
4. Выведите (7.41).
- 5*. Найдите спектр возбуждений, отвечающих решениям, у которых в дополнение к заполненному морю Дирака имеются вещественные корни Бете. (Это *не будут* тирринговские фермионы!)

Семинар 7

Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера

На семинаре мы применим анзац Бете к квантовому нелинейному уравнению Шрёдингера, то есть системе с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \psi^+ \partial_x \psi}{2m} + \frac{c}{2} \psi^+ \psi^+ \psi \psi \right) \quad (7.47) \quad \text{NLS-H}$$

и коммутационными соотношениями

$$[\psi(x), \psi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\psi(x), \psi(x')] = [\psi^+(x), \psi^+(x')] = 0. \quad (7.48) \quad \text{NLS-c}$$

Оператор числа частиц и оператор импульса

$$Q = \int dx \psi^+ \psi, \quad P = -\frac{i}{2} \int dx (\psi^+ \partial_x \psi - \partial_x \psi^+ \psi) \quad (7.49) \quad \text{QP-NLS}$$

коммутируют с гамильтонианом.

Рассмотрим вакуум $|0\rangle$, определенный соотношениями

$$\psi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi^+(x) = 0.$$

Для каждого состояния $|\chi_N\rangle$ с данным числом частиц N введем волновые функции $\chi(x_1, \dots, x_N)$ соотношением

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \psi^+(x_N) \cdots \psi^+(x_1) |0\rangle. \quad (7.50) \quad \text{chiN-M}$$

Формула, аналогичная (7.8), определяет первично-квантованный гамильтониан

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j). \quad (7.51) \quad \text{Hhat-M}$$

Это — система свободных бозонов с контактным взаимодействием. Отсюда мы найдем, что

$$\frac{A_{\dots j i \dots}}{A_{\dots i j \dots}} = S(p_i - p_j), \quad S(p) = \frac{p + imc}{p - imc}. \quad (7.52) \quad \text{Aratic}$$

На отрезке длины L с циклическими граничными условиями волновые функции удовлетворяют системе уравнений Бете

$$e^{ip_k L} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(p_l - p_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.53) \quad \text{Bethe-}$$

Мы исследуем эти уравнения, найдем вакуум в термодинамическом пределе в случае $c > 0$ и конечной плотности N/L , покажем, что при $c \rightarrow +\infty$ система неотличима от системы свободных бесспиновых фермионов.

В случае $c < 0$ возникают связанные состояния n частиц с энергией $E_n^* = -\frac{n(n^2-1)}{24} mc^2$, отвечающие струнным решениям уравнения Бете: $p_n^{(k)} = p_n^* + \frac{imc}{2}(n+1-2k)$. В силу того, что энергии связанных состояний ограничены снизу только числом частиц, основное состояние отвечает одной частице массы Nm с энергией E_N^* . В этом смысле система не имеет термодинамического предела.

Лекция 8

Модель Тирринга и анзац Бете: заряд частиц и матрица рассеяния

Продолжим исследования решения (7.41). Давайте вычислим заряд дырки. Казалось бы, заряд дырки должен быть равен $N - N_0 = -1$. Однако это не так. Вычисляя заряд частиц, мы должны учитывать ультрафиолетовое обрезание. Когда меняется плотность дырок, меняется и плотность состояний, так что число состояний под обрезкой, то есть, в интервале $-\Theta < \beta < \Theta$ тоже меняется. Нас будут интересовать две величины:

$$\begin{aligned}\Delta N &= -L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \rho_h(\beta) = -\tilde{\rho}_h(0), \\ \Delta Q &= L \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta (\delta\rho(\beta) - \rho_h(\beta)).\end{aligned}\tag{8.1}$$

В последнем равенстве в первой строчке мы использовали то факт, что $\rho_h(\beta) = 0$ при $|\beta| > \Theta$. Отношение

$$z_h = -\frac{\Delta Q}{\Delta N}\tag{8.2}$$

дает заряд дырки. Вычисляя

$$\Delta Q = - \int_{-\Theta}^{\Theta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\beta} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi-g}{2}\omega \text{ ch } \frac{\pi+g}{2}\omega} \tilde{\rho}_h(\omega) \simeq \frac{\pi}{\pi-g} \Delta N,\tag{8.3}$$

находим

$$z_h = -\frac{\pi}{\pi-g}.\tag{8.4}$$

Мы видим, что заряд дырки не является целым числом в терминах псевдочастиц. Иными словами, заряд частиц перенормируется.

Из выражения (7.41) можно немедленно извлечь матрицу рассеяния дырок. Чтобы сделать это, рассмотрим «бесспиновые» фермионы массы m с матрицей рассеяния $a(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Предположим, что эти фермионы живут в пространстве длины L с циклическими граничными условиями. Совершенно аналогично (7.25) получаем

$$e^{imL \text{sh } \theta_k} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N S(\theta_l - \theta_k).\tag{8.5}$$

Прологарифмируем уравнения:

$$mL \text{sh } \theta_k + \sum_{l=1}^N \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k.\tag{8.6}$$

и сделаем термодинамический предел. Для этого определим $\theta(n)$ уравнением

$$mL \text{sh } \theta(n) = \sum_{k=1}^N \Psi(\theta(n) - \theta_k) = 2\pi n.\tag{8.7}$$

Затем расположим n_k по возрастанию и положим

$$\rho^*(\theta(n)) = \frac{1}{L|\theta(n+1) - \theta(n)|} \simeq \frac{1}{L} \left| \frac{dn}{d\theta(n)} \right|, \quad \rho_f^*(\theta) = \left\langle \frac{1}{L|\theta_{k+1} - \theta_k|} \right\rangle_{\theta_k \simeq \theta} = \left\langle \frac{1}{L} \left| \frac{dk}{d\theta_k} \right| \right\rangle_{\theta_k \simeq \theta}.\tag{8.8}$$

Величина $\rho^*(\theta)$ имеет смысл плотности состояний, а величина $\rho_f^*(\theta)$ имеет смысл плотности частиц. Тогда уравнение для плотности состояний примет вид

$$m \text{ch } \theta + \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \Psi'(\theta - \theta') \rho_f^*(\theta') = 2\pi \rho^*(\theta).\tag{8.9}$$

При нулевой плотности частиц ρ_f^* имеем $\rho_0^*(\theta) = \frac{m \text{ch } \theta}{2\pi}$. Полагая $\delta\rho^* = \rho^* - \rho_0^*$, имеем

$$\delta\rho^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \Psi'(\theta - \theta') \rho_f^*(\theta'). \quad (8.10) \quad \text{aux-de}$$

Перейдем к фурье-образам

$$\delta\tilde{\rho}^*(\omega) = \int d\theta \delta\rho^*(\theta) e^{i\theta\omega} \quad \text{и т.д.}$$

Уравнение (8.10) принимает вид

$$\delta\tilde{\rho}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\Psi}'(\omega) \rho_f^*(\omega). \quad (8.11) \quad \text{aux-p-}$$

Теперь предположим, что вспомогательные фермионы и есть наши дырки. С учетом (7.45) отождествляем

$$\delta\rho^*(\theta) = \alpha \delta\rho(\alpha\theta), \quad \rho_f^*(\theta) = \alpha \rho_h(\alpha\theta), \quad \alpha = 1 + \frac{g_{\text{BA}}}{\pi} = 2 - \beta^2, \quad (8.12) \quad \text{rho*-r}$$

имеем

$$\delta\tilde{\rho}^*(\omega) = \tilde{\rho}(\alpha^{-1}\omega), \quad \delta\tilde{\rho}_f^*(\omega) = \tilde{\rho}_h(\alpha^{-1}\omega). \quad (8.13) \quad \text{rho*-r}$$

В этом предположении, сравнивая (8.13) с (7.41), получаем

$$i\Psi(\theta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh } \frac{\pi\omega}{2} \text{sh } \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh } \pi\omega \text{sh } \frac{\pi p\omega}{2}} e^{-i\theta\omega} = 2i \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh } \frac{\pi\omega}{2} \text{sh } \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh } \pi\omega \text{sh } \frac{\pi p\omega}{2}} \sin \theta\omega, \quad (8.14) \quad \text{Psi-fi}$$

где параметр p определен соотношением

$$\beta^2 = 2 \frac{p}{p+1}.$$

Функция $a(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$ является на самом деле компонентой матрицы рассеяния для одного типа частиц — антифермионов в массивной модели Тирринга.

Опишем полную S -матрицу модели Тирринга/синус-Гордона [8]. Фермионная S -матрица является матрицей 4×4 в базисе $(++, +-, -+, --)$ («+» отвечает фермионам, а «-» — антифермионам):

$$S(\theta) = \left(S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\theta) \right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & & \\ & c(\theta) & b(\theta) & & \\ & & & & a(\theta) \end{pmatrix}. \quad (8.15) \quad \text{MT-Sma}$$

Солитонная S -матрица для модели синус-Гордона отличается от этой S -матрицы только знаком:

$$S_{\text{SG}}(\theta)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha'_1\alpha'_2} = -S_{\text{MT}}(\theta)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha'_1\alpha'_2}, \quad \alpha_i, \alpha'_i = \pm. \quad (8.16) \quad \text{SSG-SM}$$

Функцию $a(\theta)$ можно записать в виде

$$a(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(\theta) R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0) R_n(i\pi)}, \quad R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2n-1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \quad (8.17) \quad \text{a-Gamm}$$

Это нетрудно проверить с помощью формулы Бинэ для логарифма гамма-функции:

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-tz} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right).$$

Отношения коэффициентов $b(\theta)/a(\theta)$ и $c(\theta)/a(\theta)$ можно найти, решив уравнение Янга—Бакстера совместно с уравнением кроссинг-симметрии. Ответ имеет вид

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh } \frac{\theta}{p}}{\text{sh } \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh } \frac{i\pi}{p}}{\text{sh } \frac{i\pi - \theta}{p}}. \quad (8.18) \quad \text{ba-ca-}$$

Соотношения (8.18) получаются решением уравнения Янга–Бакстера вместе с условием кроссинг-симметрии:

$$a(i\pi - \theta) = b(\theta), \quad c(i\pi - \theta) = c(\theta). \quad (8.19)$$

Выражение (8.17) можно получить как «минимальное» решение уравнения кроссинг-симметрии вместе с условием унитарности

$$a(\theta)a(-\theta) = 0, \quad b(\theta)b(-\theta) + c(\theta)c(-\theta) = 1, \quad b(\theta)c(-\theta) + c(\theta)b(-\theta) = 0, \quad (8.20)$$

которое сводится в данном случае к одному первому уравнению: $a(\theta)a(-\theta) = 0$.

Формула (8.17) позволяет легко найти особенности функций $a(\theta)$, $b(\theta)$ и $c(\theta)$ на мнимой оси. Особенность в интервале $(0, i\pi)$ (т.е. на физическом листе) отвечает связанному состоянию, если знак вычета по $i\theta$ в ней отрицателен. При $0 < p < 1$ ($0 < \beta^2 < 1$) такие полюсы есть для $b(\theta)$ и $c(\theta)$:

$$\theta_n = i\pi - i\pi pn, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor. \quad (8.21)$$

Это отвечает нейтральным связанным состояниям (бризерам в модели синус-Гордона) с массами

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi pn}{2} \quad (8.22)$$

Матрицы рассеяния связанных состояний можно вычислить по следующему правилу. Пусть частица массы m_c является связанным состоянием частиц масс m_a и m_b . Это значит, что диагональный матричный элемент $S(\theta)_{ab}^{ab}$ матрицы рассеяния имеет полюс с положительным вычетом по $-i\theta$ при $-i\theta = u_{ab}^c + u_{ba}^c$, положение которого определяется кинематическими условиями

$$m_c = m_a e^{\pm iu_{ab}^c} + m_b e^{\mp iu_{ba}^c}, \quad 0 < u_{ab}^c, u_{ba}^c, u_{ab}^c + u_{ba}^c < \pi. \quad (8.23)$$

Более явно

$$\cos(u_{ab}^c + u_{ba}^c) = \frac{m_c^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b}, \quad \frac{\sin u_{ab}^c}{\sin u_{ba}^c} = \frac{m_b}{m_a}. \quad (8.24)$$

Имеем

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i(\Gamma_{ab}^c)^2}{\theta - i(u_{ab}^c + u_{ba}^c)} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow i(u_{ab}^c + u_{ba}^c). \quad (8.25)$$

Знак суммирования по c означает суммирование по различным внутренним состояниям частицы c . Графически изобразим это равенство так

$$-i \operatorname{Res}_{\theta_{ab}=u_{ab}^c+u_{ba}^c} \begin{array}{c} b \nearrow \\ a \nearrow \\ a \searrow \\ b \searrow \end{array} = \begin{array}{c} b \nearrow \\ a \nearrow \\ c \downarrow \\ a \downarrow \\ b \downarrow \end{array} \quad (8.26)$$

Здесь коэффициенты Γ_{ab}^c приписаны вершинам. Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы в правой части и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы d . Поскольку, вообще говоря, нам понадобятся недиагональные элементы матриц рассеяния, будем обозначать a', \dots другие состояния тех же частиц. Имеем

$$\begin{array}{c} c' \uparrow \\ d' \leftarrow \\ a' \leftarrow \\ b' \leftarrow \\ a \searrow \\ d'' \searrow \\ b \searrow \end{array} = \begin{array}{c} d' \leftarrow \\ c' \uparrow \\ c \downarrow \\ a \downarrow \\ b \downarrow \end{array} \quad (8.27)$$

Явно имеем уравнение на S -матрицу рассеяния частиц c и d :

$$\sum_{a',b',d''} \Gamma_{a'b'}^c S(\theta + iu_{ab}^c)_{a'd''}^{a'd'} S(\theta - iu_{ba}^c)_{b'd}^{b'd''} = \sum_c \Gamma_{ab}^c S(\theta)_c^{c'd'}. \quad (8.28)$$

Очень часто можно подобрать базис так, чтобы уравнение имело только одно промежуточное состояние c в правой стороне. Тогда права сумма исчезает, и уравнение превращается в явное выражение для S -матрицы. Иногда можно сделать так, чтобы в уравнение входили только диагональные матричные элементы. Тогда знаки суммы в обеих частях, а также коэффициенты Γ исчезают, и мы получаем простую формулу

$$S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + iu_{ab}^c)_{ad}^{ad} S(\theta - iu_{ba}^c)_{bd}^{bd}. \quad (8.29)$$

В рассматриваемой модели это так, поскольку связанные состояния нейтральны и их пространство внутренних состояний одномерно. Для рассеяния фермиона на связанном состоянии можно получить:

$$S_{\pm n}(\theta) \equiv S(\theta)_{\pm n}^{\pm n} = \prod_{k=1}^n S_{+1} \left(\theta + \frac{i\pi p}{2} (n+1-2k) \right), \quad S_{+1}(\theta) = \frac{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{4} (1-p) \right)}{\text{th} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{4} (1-p) \right)}. \quad (8.30)$$

При этом $S_{\pm n}(\theta) = S_{n\pm}(\theta)$. Рассеяние двух связанных состояний (бризеров) дается выражением:

$$S_{nn'}(\theta) \equiv S(\theta)_{nn'}^{nn'} = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{n'} S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi p}{2} (n-n'-2k+2l) \right), \quad S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{\theta+i\pi p}{2}}{\text{th} \frac{\theta-i\pi p}{2}}. \quad (8.31)$$

Из этих формул нетрудно убедиться, что n -тый бризер является также связанным состоянием $(n-1)$ -го и первого бризеров.

Задачи

1. Возьмите интеграл в (8.3) и получите (8.4).
2. Найдите предел матрицы рассеяния (8.15)–(8.18) в пределе малых g и покажите, что он совпадает с (4.13).
3. Получите матрицы рассеяния $S_{\pm 1}(\theta)$ и $S_{11}(\theta)$ из матрицы рассеяния для фермионов. (*Подсказки:* Выберите правильно состояния a, b, d в (8.27), чтобы уравнение приняло вид (8.29). Воспользуйтесь условием унитарности, чтобы вычислять отношение функций $a(\theta)$ вместо произведения. Не забудьте потом пересобрать бесконечные произведения в гамма-функции.)
4. Найдите квазиклассический в смысле модели синус-Гордона ($\beta^2 \rightarrow 0$) предел матриц рассеяния $S_{11}(\theta)$ и $S_{\pm 1}(\theta)$ и покажите, что он дается формулами (4.17), (4.34).
- 5*. Получите функцию $a(\theta)$ в виде (8.17) путем решения уравнений кроссинг-симметрии и унитарности методом подсчета нулей и полюсов.

Семинар 8

Решение уравнения Янга–Бакстера для модели Тирринга

Лекция 9

Интегрируемые возмущения минимальных моделей двумерной конформной теории поля

Здесь мы рассмотрим интегрируемые возмущения конформной теории поля на примере возмущений минимальных конформных моделей [7]. Пусть S_0 — формальное действие минимальной конформной модели с центральным зарядом $c < 1$. Сначала мы будем интересоваться моделями общего положения, потом специализируемся на рациональные случаи. Рассмотрим возмущенную модель в эвклидовом пространстве с формальным действием

$$S = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_{\text{pert}}(x), \quad (9.1)$$

где $\Phi_{\text{pert}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\text{pert}} < 1$. Пока не будем более ограничивать допустимые значения размерности возмущающего оператора.

В конформной теории поля имеется бесконечно много интегралов движения. Обозначим через \mathcal{L}_n , $\bar{\mathcal{L}}_n$ генераторы двух представлений алгебры Вирасоро, действующих на локальные операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w} - \bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(x),$$

где интегралы берутся по маленьким петлям, охватывающим точку x . Тогда для любого элемента Λ подалгебры универсальной обертывающей алгебры $U(\text{Vir})$ алгебры Вирасоро, порожденной элементами L_{-n} ($n > 0$), можно определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar{\Lambda}(x) = (\bar{\Lambda} 1)(x)$$

в конформном семействе единичного оператора [1]. Например,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{-1} 1)(x) &= \partial 1 = 0, & (\mathcal{L}_{-2} 1)(x) &= T(x), & (\mathcal{L}_{-3} 1)(x) &= (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} 1)(x) = \partial T(x), \\ (\mathcal{L}_{-2}^2 1)(x) &= \times T^2(x) \times, & (\mathcal{L}_{-4} 1)(x) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-3} 1)(x) = \frac{1}{2} \partial^2 T(x) \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Для этих операторов имеем

$$\bar{\partial} \Lambda(x) = 0, \quad \partial \bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (9.2)$$

Среди них имеются серии коммутирующих интегралов движения, которые обеспечивают минимальных конформных моделей.

Изучим, как меняются тождества (9.2) под действием возмущения. Наша задача будет состоять в том, чтобы найти такие операторы $T_s(x)$ спина s среди киральных (правых или левых) потомков единичного оператора и такие операторы $\Theta_s(x)$ спина s , чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{\partial} T_{s+1} &= \partial \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \partial T_{s-1} &= \bar{\partial} \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Тогда мы сможем сказать, что система обладает интегралами движения

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s+1} + \int d\bar{z} \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar{z} T_{s-1} + \int dz \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0; \end{cases} \quad (9.4)$$

Интегралы можно брать вдоль любых контуров (комплексно-сопряженных друг другу для z и \bar{z} в эвклидовом пространстве), уходящих в обе стороны на пространственную бесконечность. Продолжение в пространство Минковского очевидно. Коммутативность этих интегралов движения, несомненно, должна проверяться отдельно.

В первом порядке по теории возмущений имеем

$$\bar{\partial} \Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_{\text{pert}}(y) \bar{\partial} \Lambda(x). \quad (9.5)$$

Если элемент Λ является элементом градуировки $-s$ в $U(Vir)$, в конформной теории поля операторное разложение для оператора $\Lambda(x)$ с примарным оператором $\Phi_\Delta(x)$ имеет вид

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (z' - z)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \quad (9.6) \quad \text{Lambda}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k . Отсюда находим

$$\Phi_{\text{pert}}(y) \bar{\partial}\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\partial}_z (z - w)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_{\text{pert}})(y) = -\pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial_z^k \delta(y - x) (\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\text{pert}})(y).$$

Мы положили $x = (z, \bar{z})$, $y = (w, \bar{w})$ и использовали тождество $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(x)$. Отсюда находим

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k (\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\text{pert}})(x).$$

Снова учитывая разложение (9.6), находим

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^k \Lambda(y) \Phi_{\text{pert}}(x) = \pi\lambda \oint \frac{dw}{2\pi i} \Phi_{\text{pert}}(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}) \quad (9.7) \quad \text{bdLamb}$$

или

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda (\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n-1} \Phi_{\text{pert}}(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9.8) \quad \text{bdLamb}$$

Из стандартного соотношения конформной теории поля

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (9.9) \quad \text{LPhi-c}$$

мы находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_{\text{pert}})(m+1) + n-1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (9.10) \quad \text{LD-con}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!} (\mathcal{L}_{-1}^n \Phi_{\text{pert}})(x). \quad (9.11) \quad \text{D-on1}$$

Применим теперь (9.10) и (9.11) к вычислению правых частей нескольких первых операторов Λ . Мы будем рассматривать только случаи четных значений s , поскольку для нечетных s операторы сводятся к производным от операторов с четными s . Для $T(x)$ имеем

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda \mathcal{D}_1 \mathcal{L}_{-2}1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \mathcal{D}_{-1}1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \mathcal{L}_{-1} \Phi_{\text{pert}} = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \partial \Phi_{\text{pert}}. \quad (9.12) \quad \text{T2-con}$$

Отсюда получаем

$$T_2 = \mathcal{L}_{-2}1, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \Phi_{\text{pert}}. \quad (9.13) \quad \text{T2-The}$$

Аналогично, нетрудно получить

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda \mathcal{D}_1 \mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_{\text{pert}}}{6} \mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\text{pert}}, \quad (9.14) \quad \text{bdL22-}$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \left(3\mathcal{L}_{-2}^2 \mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_{\text{pert}}}{2} \mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3 - \Delta_{\text{pert}})(5 - \Delta_{\text{pert}})}{120} \mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_{\text{pert}}, \quad (9.15) \quad \text{bdL23-}$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda (1 - \Delta_{\text{pert}}) \left(\mathcal{L}_{-3} \mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5 - 2\Delta_{\text{pert}}}{120} \mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_{\text{pert}}. \quad (9.16) \quad \text{bdL32-}$$

Вообще говоря, правые части этих уравнений нельзя представить в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$, поэтому при произвольном возмущении интегралы движения спинов 3 и 5 пропадают.

Рассмотрим сначала правую часть (9.14). Выражение может быть представлено в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$, только если имеется соотношение на третьем уровне. Вспомним, что такие соотношения возникают в вырожденных неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, старшие веса которых даются формулой Каца:

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{4}((\alpha_+ m + \alpha_- n)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2), \quad \alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad c = 1 - 24\alpha_0^2. \quad (9.17) \quad \text{Deltan}$$

Представление со старшим весом Δ_{mn} имеет соотношение на уровне mn . Таким образом, нужное соотношение имеет место, если $\Delta_{\text{pert}} = \Delta_{13}$ или $\Delta_{\text{pert}} = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta}(x) = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}. \quad (9.18) \quad \text{level13}$$

Поскольку $\Delta_{31} > 1$, остается только $\Delta_{\text{pert}} = \Delta_{13}$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi \lambda \frac{(1 - \Delta_{13})(12\Delta_{13}(1 + \Delta_{13})\mathcal{L}_{-2} + (1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})\mathcal{L}_{-1}^2)}{6(1 + \Delta_{13})(2 + \Delta_{13})} \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (9.19) \quad \text{T4-The}$$

Теперь будем искать ток спина 6 в виде

$$T_6 = A\mathcal{L}_{-2}^3 1 + B\mathcal{L}_{-3}^2 1.$$

Выдели в $\bar{\partial}T_6$ слагаемые, не имеющие вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$:

$$\bar{\partial}T_6 \sim (A(3\mathcal{L}_{-2}^2 \mathcal{L}_{-1} 1 + \alpha \mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-1}^3) + B\mathcal{L}_{-3} \mathcal{L}_{-1}^2 + \mathcal{L}_{-1}(\dots)) \Phi_{13}, \quad \alpha = (3 - \Delta_{13})/2.$$

Коммутируя генераторы алгебры Вирасоро, нетрудно привести выражение в скобках к виду

$$\Lambda = 6A\mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-3} + \left(3A - \frac{A\alpha - B}{6} \right) \mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(\dots).$$

Далее, из условия нулевого вектора получаем

$$\mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-3} = \beta \mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} + \gamma \mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-1}^3 = \beta \mathcal{L}_{-5} - \beta \mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-3} - \frac{\gamma}{6} \mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(\dots),$$

где $\beta = 2/(2 + \Delta_{12})$, $\gamma = -1/(1 + \Delta_{13})(2 + \Delta_{13})$. Отсюда выражаем $\mathcal{L}_{-2} \mathcal{L}_{-3}$ через \mathcal{L}_{-5} . Собирая все вместе, можно получить

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c + 2}{2} c \mathcal{L}_{-3}^2 1. \quad (9.20) \quad \text{T6-fin}$$

На шестом уровне можно также доказать, что существует интеграл движения

$$T'_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \left(\frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2 \right) \mathcal{L}_{-3}^2, \quad \text{для } \Delta_{\text{pert}} = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (9.21) \quad \text{T6-122}$$

Таким образом интегрируемые системы можно ожидать для

$$\Delta_{\text{pert}} = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (9.22) \quad \text{Deltap}$$

Однако мы видим, что вычисления становятся все сложнее и сложнее. Использовать явные формулы становится затруднительно. Чтобы продвинуться дальше, Замолотчиков предложил такой прием. Сначала найдем число потомков на каждом уровне, претендующих на то, чтобы давать ток. Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Размерности этих подпространств даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (9.23) \quad \text{chimm-}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Тогда размерность таких пространств подходящих операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (9.24)$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ нужно для того, чтобы исключить операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$, а прибавление символа Кронекера — чтобы скомпенсировать тот факт, что производная от единичного оператора равна нулю. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \quad (9.25)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_s :

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_{\text{pert}})_s - \dim(\mathcal{H}_{\text{pert}})_{s-1}. \quad (9.26)$$

Здесь мы снова вычли из количества всех линейно-независимых операторов количество операторов вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Для соответствующего характера имеем

$$\chi_1(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} l_s q^s = (1-q)\chi_{\text{pert}}(q). \quad (9.27)$$

Вычитая одно из другого, получаем минимальное количество решений $\delta_s = k_s - l_s$ на каждом уровне. В частности, в точках общего положения имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (9.28)$$

Для $\Phi_{\text{pert}} = \Phi_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \quad (9.29)$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Это значит, что, по крайней мере, на уровнях 1, 3, 5, 7 имеются решения. На более высоких уровнях, на самом деле, уравнения избыточны.

Для случаев $\Phi_{\text{pert}} = \Phi_{12}, \Phi_{21}$ имеем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^{10} + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + O(q^{16}). \quad (9.30)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$, то есть, по крайней мере, имеется четыре интеграла движения.

Опишем другой подход к задаче. Пусть T_s — сохраняющийся ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (9.3). Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_{\perp}} dz T_{s+1}. \quad (9.31)$$

Будем рассматривать систему не на плоскости, а на цилиндре окружности R : $x^1 \sim x^1 + R$ и брать интеграл в (9.31) по замкнутому контуру C_{\perp} вокруг цилиндра. Интеграл по контуру $x^2 = \text{const}$ от Φ_{pert} дает гамильтониан возмущения

$$H_{\text{int}} = \lambda \int_0^R dx^1 \Phi_{\text{pert}}(x). \quad (9.32)$$

Однако нам сейчас понадобится формальный гамильтониан в координатах светового конуса, где переменная \bar{z} играет роль времени. В этом случае заменяем интегрирование по x^1 на интегрирование по z , а \bar{z} фиксируем:

$$H_{\text{int}}^+(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_{\perp}} dz \Phi_{\text{pert}}(z, \bar{z}_0). \quad (9.33)$$

Тогда условие, что $\mathcal{D}_1 T_s = \partial(\dots)$ эквивалентно тому, что

$$[I_s^{(0)}, H_{\text{int}}^+] = 0. \quad (9.34)$$

Важно то, что это уравнение можно решать в рамках одной (правой) киральности в конформной теории поля. Давайте перепишем первые сохраняющиеся токи в этом виде. Для этого нужно ввести алгебру Вирасоро на цилиндре. Отообразим цилиндр на плоскость заменой переменных

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \quad (9.35)$$

Это отображение позволяет задать алгебру Вирасоро соотношением

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta) \quad (9.36)$$

и аналогично для левой киральности. Оператор $\tilde{T}(z)$ представляет собой компоненту тензора энергии-импульса в плоскости $(\zeta, \bar{\zeta})$. Далее воспользуемся формулой для конформного преобразования тензора энергии-импульса:

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (9.37)$$

Фигурными скобками обозначена так называемая производная Шварца. В нашем случае шварциан равен $\{z, \zeta\} = 1/2\zeta^2$. Отсюда находим, что

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R} \right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24} \right). \quad (9.38)$$

Подставляя это в (9.36), получаем

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_\perp} dz e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24} \delta_{n0} \right). \quad (9.39)$$

Кроме того, из преобразования (9.35) находим

$$[\mathbb{L}_n, \Phi_\Delta(x)] = \zeta^n \left(\frac{iR}{2\pi} \partial \Phi(x) + n \Delta \Phi_\Delta(x) \right). \quad (9.40)$$

Из (9.39) легко получить первый невозмущенный интеграл движения

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (9.41)$$

Применяя (9.40), получаем

$$[I_1^{(0)}, H_{\text{int}}^+] = -\lambda \frac{(2\pi)^2}{R} \int_{C_\perp} dz [\mathbb{L}_0, \Phi_{\text{pert}}(z, \bar{z}_0)] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_{\text{pert}}(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{\text{pert}} = \Phi_{13}$ и запишем оператор $I_3^{(0)}$ через алгебру Вирасоро:

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 \mathbf{1} = \int_{C_\perp} dz \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z}$$

Контур C_z обходит точку z против часовой стрелки. Для дальнейших преобразований нужно сделать так, чтобы подынтегральное выражение было периодически с периодом R . Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{z} = \frac{\pi}{iR} \left(\text{cth} \frac{\pi}{iR} z + \frac{i\pi}{3R} z + \frac{i\pi^3}{45R^3} z^3 \right) + O(z^5).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
I_3^{(0)} &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \left(\operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{i\pi}{3R}(w-z) + \frac{i\pi^3}{45R^3}(w-z)^3 \right) \\
&= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \left(\oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2i\pi}{3R}T(z) + \frac{i\pi^3 c}{90R^3} \right) \\
&= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали операторное разложение для тензора энергии-импульса. В первом слагаемом превратим интеграл по C_z в разность двух контуров C_\perp смещенных так, чтобы проходить выше и ниже точки z . Это дает коммутатор

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2\pi^2}{3R^2}\mathbb{T}_0 \\
&= \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw \left(T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(z-w) \right) \\
&= \frac{1}{R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R}(z-w).
\end{aligned}$$

Воспользуемся разложением

$$\operatorname{cth} z = \frac{1 + e^{-2z}}{1 - e^{-2z}} = (1 + e^{-2z}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
I_3^{(0)} &= \frac{1}{R} \left(\mathbb{T}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n} \mathbb{T}_n \right) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\
&= \frac{(2\pi)^4}{R^3} \left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n - \frac{1}{6} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right) + \frac{c}{1440} \right). \quad (9.42)
\end{aligned}$$

I03-L

Существенно новый вклад здесь дает $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n$, однако проверить, что этот член коммутирует с H_{int}^+ не так просто. Зато совершенно очевидной оказывается коммутативность двух построенных «невозмущенных» интегралов: $[I_1^{(0)}, I_3^{(0)}] = 0$. Далее для нечетных значений $s > 0$ можно построить серию коммутирующих между собой операторов вида

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz \left(\mathcal{L}_{-\frac{s+1}{2}} + \dots \right) 1 \sim \sum_{n_1 + \dots + n_s = 0} : \mathbb{L}_{n_1} \dots \mathbb{L}_{n_s} : + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{n_1 + \dots + n_k = 0} A_{n_1 \dots n_k} : \mathbb{L}_{n_1} \dots \mathbb{L}_{n_k} :,$$

где знак $:\dots:$ означает упорядочение индексов по возрастанию слева направо. Такие операторы строятся достаточно прямо с помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро. В предположении, что оператор $I_3^{(0)}$ имеет невырожденный спектр на неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, отсюда следует, что все операторы $I_s^{(0)}$ коммутируют с H_{int}^+ . Отсюда следует, что величины I_s в полной теории являются пространственно-однородными интегралами движения, то есть коммутируют с гамильтонианом $H \sim I_1 + I_{-1}$ и импульсом $P \sim I_1 - I_{-1}$. Разумно предположить, что в точках общего положения в возмущенной теории спектр гамильтониана на цилиндре невырожден. В этом случае все операторы, коммутирующие с гамильтонианом, коммутируют между собой.

Заметим, что интегралы движения $I_s^{(0)}$ образуют набор интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость конформной теории поля, и их совместный спектр невырожден в точках общего положения. В квазиклассическом пределе $c \rightarrow -\infty$ интеграл движения $I_3^{(0)}$ представляет собой гамильтониан уравнения Кортевега—де Фриза, а система $I_s^{(0)}$ — соответствующую иерархию, существование которой

доказано методами обратной задачи рассеяния. Существование такого набора интегралов движения в точках общего положения в квантовом случае было доказано методами теории гомологий Б. Фейгиным и Э. Френкелем [14]. Альтернативный подход, близкий к классической теории, развит в работах В. Бажанова, С. Лукьянова и А. Замолотчикова [15].

В общих точках минимальных конформных моделей с $c < 1$ имеется по одному интегралу движения для следующих спинов:

$$\begin{aligned} s = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\text{pert}} = \Phi_{13}; \\ s = 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\text{pert}} = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \tag{9.43}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21} . В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{pert}} = \Phi_{12} \quad p = 3: \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \tag{9.44}$$

Кроме того, нам будут интересны интегралы движения для неминимальной серии $c = 1 - 6(p' - p)^2/pp'$ с $p = 2, p' = 2N + 1$. Для нее

$$c = 1 - \frac{3(2N - 1)^2}{(2N + 1)}, \quad \Phi_{\text{pert}} = \Phi_{13}: \quad s \in (2\mathbb{Z} + 1) \setminus ((2N - 1)\mathbb{Z}). \tag{9.45}$$

В случае $N = 2$ ($c = -22/5$), отвечающем модели Ли–Янга, $\Phi_{13} = \Phi_{12}$ и спектр спинов s является пересечением двух серий в (9.43).

Задачи

1. Выведите (9.10).
2. Получите (9.14)–(9.16).
3. Получите (9.40).
4. Покажите, что для свободного майорановского фермиона (отвечающего минимальной модели с $c = 1/2$) сохраняющиеся токи можно записать в виде

$$T_{2n} = i^{2n+1} : \partial^{n-1} \psi_+ \partial^n \psi_+ :, \quad T_{-2n} = i^{2n-1} : \bar{\partial}^{n-1} \psi_- \bar{\partial}^n \psi_- : \quad (n > 0).$$

Найдите соответствующие компоненты $\Theta_{\pm(2n-2)}$.

5*. Используя характеры (9.25), (9.27), найдите, интегралы движения каких спинов имеются в унитарных моделях с $p = 3, 4, 5$ и в неунитарных моделях с $N = 2, 3$ для $\Phi_{\text{pert}} = \Phi_{13}, \Phi_{12}, \Phi_{21}$.

Лекция 10

Интегралы движения и матрицы рассеяния

ес-IMs

Вернемся к формулам из Лекции 6 для асимптотической волновой функции n частиц

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}} \quad \text{при } x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (10.1)$$

psifun

Мы говорили, что внешние значки β_i можно определить условием

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\tau] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_{\tau_i}}^{\alpha_i}, \quad \text{если } p_{\tau_1} > p_{\tau_2} > \dots > p_{\tau_n}.$$

Давайте несколько изменим условие так, чтобы волновые функции были аналитичны по импульсам:

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}. \quad (10.2)$$

psinor

При $p_1 > \dots > p_n$ оба условия совпадают. В противном случае мы будем считать волновую функцию аналитически продолженной из этой области.

Эти формулы верны не только для $O(N)$ -модели, но для любой системы бозонных частиц. Обратим внимание на симметрию этих функций по отношению к перестановке индексов $\beta_i p_i \leftrightarrow \beta_j p_j$:

$$\psi_{\dots, \beta_i p_i, \beta_{i+1} p_{i+1}, \dots}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\beta'_i \beta'_{i+1}} S(p_i, p_{i+1})_{\beta_i \beta_{i+1}}^{\beta'_i \beta'_{i+1}} \psi_{\dots, \beta'_{i+1} p_{i+1}, \beta'_i p_i, \dots}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n). \quad (10.3)$$

psi-p

Поскольку вывод этой формулы составляет задачу 5 лекции 6, я не привожу здесь вывод полностью. Для ясности приведу вывод для волновой функции двух частиц. Если $x_1 < x_2$, имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) &= \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_2 \alpha_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \left(\delta_{\beta'_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta'_1}^{\alpha_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S^{-1}(p_1, p_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\alpha_1 \alpha_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right) \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \left(\delta_{\beta'_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta'_1}^{\alpha_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S(p_2, p_1)_{\beta'_2 \beta'_1}^{\alpha_2 \alpha_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right) \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \psi_{\beta'_2 p_2, \beta'_1 p_1}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2). \end{aligned}$$

Будем считать, что волновая функция $\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}$ задает состояние $|p_1, \dots, p_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n}$ с точностью до вещественного симметричного по импульсам нормировочного множителя. Поскольку нас будут интересовать релятивистские теории, перейдем от импульсов к быструтам: $p_i = m_i \text{ch } \theta_i$. Тогда

$$|\dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots\rangle_{\dots \beta_i \beta_{i+1} \dots} = \sum_{\beta'_i \beta'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})_{\beta_i \beta_{i+1}}^{\beta'_i \beta'_{i+1}} |\dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots\rangle_{\dots \beta'_{i+1} \beta'_i \dots} \quad (10.4)$$

vec-th

Это равенство можно записать короче, используя обозначение

$$|\nu_1 \theta_1, \dots, \nu_N \theta_N\rangle = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_N} |p_1, \dots, p_N\rangle_{\beta_1 \dots \beta_N} e_{(\nu_1)}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{(\nu_N)}^{\beta_N}, \quad (10.5)$$

vec-sh

где $e_{(\nu)}^{\beta}$ — базисный вектор в пространстве состояний $V^{(\nu)}$ частицы сорта ν . Тогда

$$|\dots, \nu_i \theta_i, \nu_{i+1} \theta_{i+1}, \dots\rangle = S_{i, i+1}^{(\nu_i, \nu_{i+1})}(\theta_i - \theta_{i+1}) |\dots, \nu_{i+1} \theta_{i+1}, \nu_i \theta_i, \dots\rangle. \quad (10.6)$$

vec-th

Введем «операторы рождения» $V_\beta^+(\theta)$ и «уничтожения» $V^\beta(\theta)$:

$$\begin{aligned} V_\beta^+(\theta)|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} &= |\theta, \theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta \beta_1 \dots \beta_n}, \\ V^\beta(\theta)|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} &= \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta - \theta_k) \\ &\times \sum_{\substack{\beta'_1, \dots, \beta'_{k-1} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \delta_{\alpha_1}^\beta \delta_{\beta_k}^{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i - \theta)_{\beta_i \alpha_{i+1}}^{\beta'_i \alpha_i} |\theta_1, \dots, \hat{\theta}_k, \dots, \theta_n\rangle_{\beta'_1 \dots \hat{\beta}_k \dots \beta_n}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

commut

где $C_{\alpha\beta}$ — матрица зарядового сопряжения. Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\beta_1 \beta_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \quad (10.8a)$$

$$V_{\beta_1}^+(\theta_1)V_{\beta_2}^+(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} V_{\beta'_2}^+(\theta_2)V_{\beta'_1}^+(\theta_1) = 0, \quad (10.8b)$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V_{\beta_2}^+(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_2 - \theta_1)_{\beta_2 \beta'_1}^{\beta'_2 \beta_1} V_{\beta'_2}^+(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 2\pi\delta_{\beta_2}^{\beta_1} \delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (10.8c)$$

Алгебра с такими соотношениями называется *алгеброй Фаддеева—Замолотчикова*. Обратим внимание, что, с учетом условия кроссинг-симметрии (6.27), эти уравнения могут быть записаны в одну строчку

$$\begin{aligned} V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\beta_1 \beta_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) &= 2\pi C^{\beta_1 \beta_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) \\ &- 2\pi C^{\beta'_1 \beta'_2} S(-i\pi)_{\beta'_2 \beta'_1}^{\beta_2 \beta_1} \delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi), \end{aligned} \quad (10.9)$$

если положить

$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi). \quad (10.10)$$

Здесь $C_{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}$ — матрица зарядового сопряжения, представляющая собой унитарную ($C^2 = 1$) симметричную матрицу. В уравнении (10.9) мы считаем, что переменные θ_i могут пробегать значения на двух (направленных, по соглашению, слева направо) прямых:

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightarrow} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi). \quad (10.11)$$

Пусть теперь \hat{I}_s — локальный интеграл движения спина s :

$$\hat{I}_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} = I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta_1 \dots \beta_n} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n}, \quad I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta_1 \dots \beta_n} = \sum_{i=1}^n I_{s, \beta_i} e^{s\theta_i}. \quad (10.12)$$

Отсюда очевидно следуют коммутационные соотношения

$$[\hat{I}_s, V_\beta^+(\theta)] = I_{s, \beta} e^{s\theta} V_\beta^+(\theta), \quad [\hat{I}_s, V^\beta(\theta)] = -I_{s, \beta} e^{s\theta} V^\beta(\theta). \quad (10.13)$$

Согласие с условием кроссинг-симметрии в виде (10.10) накладывает на собственные значения ограничение

$$I_{s, \alpha} = (-1)^{s-1} \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} I_{s, \beta}. \quad (10.14)$$

Отсюда немедленно следует

Теорема 10.1 *Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица—античастица с недиагональной матрицей рассеяния, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.*

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок 1×1 с матрицей зарядового сопряжения $C = \pm 1$ на нем. Следовательно, $I_{s,1} = (-1)^{s+1} I_{s,1}$. Следовательно, $I_{2n,1} = 0$ независимо от зарядовой четности.

Пусть теперь в системе имеется частица 1 и античастица $\bar{1}$ с $C = \pm \sigma^1$ (в этом блоке) такие, что матричный элемент $1 + \bar{1} \rightarrow \bar{1} + 1$ не равен нулю. Тогда $I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}$. Рассмотрим процесс рассеяния частицы с быстротой θ_1 и античастицы с быстротой θ_2 . Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения меняться не должны:

$$I_{s,1} e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}} e^{s\theta_1} + I_{s,1} e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что $I_{s,1} = I_{s,\bar{1}} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$. Отсюда заключаем, что $I_{2n,1} = 0$.

Теперь мы видим причину, почему модель синус-Гордона имеет только интегралы движения нечетных спинов. Однако ограничения на спины интегралов движения могут иметь и другой характер: они могут быть связаны со связанными состояниями.

Прежде чем приводить примеры, посмотрим, как ведет себя интегралы движения на связанных состояниях. Вспомним формулу (8.28) и картинку к ней (8.27). Слиянию двух линий на картинке следует сопоставить слияние операторов V :

$$V^c(\theta) = \sum_{a,b} i\Gamma_{ab}^c \operatorname{Res}_{\theta'=\theta} V^a(\theta' + iu_{ab}^c) V^b(\theta - iu_{ba}^c). \quad (10.15)$$

V-bou

Суммирование по a и b ведется только по внутренним состояниям частиц a и b соответственно. Из коммутационных соотношений (10.13) получаем

$$I_{s,c} = I_{s,a} e^{isu_{ab}^c} + I_{s,b} e^{-isu_{ba}^c}. \quad (10.16)$$

Is-bou

Дополнительные ограничения возникают тогда, когда на каком-то этапе построения связанных состояний связанное состояние совпадает с одной из «элементарных» частиц, из которых оно построено.

Приведем пример. Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке $\beta^2 = 4/5$:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\operatorname{th} \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \quad (10.17)$$

S11-p2

Мы хотим построить на основе этой S -матрицы модель, которая содержала бы эту частицу как элементарную. Разумеется, такая модель (если она возможна) будет редукцией модели синус-Гордона, так как ее пространство состояний будет меньше пространства состояний модели синус-Гордона. S -матрица (10.17) имеет полюс на физическом листе: $\theta = 2\pi i/3$, однако знак вычета этого полюса по переменной $u = -i\theta$ отрицательный. В модели синус-Гордона это значило, что этот полюс не отвечает связанному состоянию. Но модель синус-Гордона — унитарная, а редуцированная модель не обязана быть унитарной. Поэтому предположим, что этому полюсу отвечает частица. Назовем ее 2. Нетрудно проверить, что масса частицы 2 равна массе M_1 первого бризера:

$$M_2 = 2M_1 \cos \frac{\pi}{3} = M_1,$$

а ее матрицы рассеяния с первым бризером и с собой совпадают с $S_{11}(\theta)$:

$$S_{21}(\theta) = S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi}{3} \right) S_{11} \left(\theta - \frac{i\pi}{3} \right) = S_{11}(\theta).$$

Вообще говоря, это не значит, что она совпадает с первым бризером, но если это не так, возникает следующее состояние, которое имеет ту же массу и матрицу рассеяния и т.д. Давайте замкнем спектр частиц на одной частице и *постулируем*, что в нашей теории связанное состояние двух частиц 1 является частицей 1: $2 = 1$. Уравнение (10.16) в этом случае имеет вид:

$$I_{s,1} = 2I_{s,1} \cos \frac{\pi s}{3}.$$

Отсюда заключаем, что интегралы движения отвечают только таким спинам, что $\cos \frac{\pi s}{3} = \frac{1}{2}$, то есть $s = \pm 1 \pmod{6}$. Все эти спины нечетные, так что никаких дополнительных ограничений мы не видим. Спектр спинов интегралов движения отвечает Φ_{12} -возмущениям минимальных конформных моделей. Возмущению какой именно модели отвечает эта теория рассеяния? Как правильно научно отвечать на этот вопрос, мы разберем в следующей лекции, а сейчас ограничимся эвристическим рассуждением.

Рассмотрим модель синус-Гордона. Как мы уже это делали на семинаре к лекции 3, разобьем действие следующим образом:

$$S_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}. \quad (10.18)$$

SG-cft

и будем изучать теорию возмущений по S_1 . На семинаре мы уже убедились, что первый член описывает некоторую (вообще говоря, неунитарную) конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Эта теория наверняка шире, чем минимальная конформная теория поля и каким-то образом содержит ее.¹ Сравнивая с (9.17), легко заключить, что $\alpha_+ = \beta/\sqrt{2}$, $\alpha_- = -\sqrt{2}/\beta$. Конформная размерность оператора возмущения $e^{-i\beta\phi}$ в этой конформной теории поля равна

$$\Delta_{\text{pert}} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(3\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 = \Delta_{13}. \quad (10.19)$$

Delta

Гипотеза состоит в том, что некоторые редукции модели синус-Гордона описывают Φ_{13} -возмущения конформных моделей. Поэтому S -матрицы возмущенных минимальных моделей можно получить из S -матриц модели синус-Гордона в подходящем базисе.

Вернемся к модели с матрицей рассеяния (10.17). Эта модель представляет собой редукцию модели синус-Гордона с $\beta^2 = 4/5$, то есть, как мы ожидаем, Φ_{13} -возмущения минимальной конформной модели с центральным зарядом $c = 1 - 6(\sqrt{5/2} - \sqrt{2/5})^2 = -22/5$. Это — минимальная модель $M(2, 5)$, иначе именуемая моделью Ли—Янга. Эта модель содержит всего два примарных поля с размерностями

$$\Delta_{11} = \Delta_{14} = 0, \quad \Delta_{12} = \Delta_{13} = -1/5.$$

Таким образом, в этой модели Φ_{13} -возмущение совпадает с Φ_{12} -возмущением, что объясняет спектр спинов интегралов движения.

Попробуем продолжить серию моделей с частицами, которые даются бризерным сектором модели синус-Гордона. Массы бризеров, как мы помним, даются формулой

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin \frac{\pi p n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, < 1/p, \quad \beta^2 = 2 \frac{p}{p+1}.$$

Давайте продолжим спектр бризеров за предел $1/p$ и потребуем, чтобы спектр частиц после этого допускал замыкание на «правильные» бризеры. Это так, если $2/p$ — целое число. Тогда $M_n = M_{2/p-n}$. Тут возможны два случая. Если $2/p$ четно, это формально соответствует минимальной модели $M(1, 1/p)$, обладающей сложными свойствами. Ее таблица Каца пуста, но в ней есть так называемые логарифмические операторы. В модели синус-Гордона они отвечают так называемым безотражательным точкам, когда амплитуда отражения антисолитона на солитоне $c(\theta) = 0$. Мы не будем рассматривать этот случай.

Изучим второй случай, отвечающий

$$\frac{2}{p} = 2N - 1, \quad N = 2, 3, \dots; \quad M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin \frac{\pi n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N-2). \quad (10.20)$$

ribbon

¹Минимальные конформные теории поля получаются из них так называемой фельдеровской редукцией. Пространства состояний минимальных моделей находятся как когомологии некоторого сложно устроенного нильпотентного оператора.

Этот случай отвечает, как мы ожидаем, Φ_{13} -возмущению «ленточных» минимальных моделей $M(2, 2N + 1)$, примарные операторы $\Phi_{1n} = \Phi_{1,2N+1-n}$ которых имеют размерности

$$\Delta_{1n} = -\frac{(n-1)(2N-n)}{2(2N+1)} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N). \quad (10.21) \quad \text{Delta}$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \quad (10.22) \quad \text{S-ribb}$$

что согласуется с отождествлением частиц $n = (2N - 1 - n)$. Посмотрим, как это отождествление ограничивает набор интегралов движения. Как видно из спектра масс, n -тая частица представляет собой связанное состояние частиц $(n - 1)$ и 1 с параметрами

$$u_{n-1,1}^n = \frac{\pi}{2N-1}, \quad u_{1,n-1}^n = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \quad (10.23) \quad \text{un-rib}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} I_{s,n} &= I_{s,n-1} e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1} e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} = I_{s,1} \sum_{k=1}^n e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)} \\ &= I_{s,1} \times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Потребовав $I_{s,2N-2} = I_{s,1}$, получаем, что $s \neq 0 \pmod{2N-1}$ и $(-1)^{s-1} = 1$, то есть спины нечетны и не кратны $2N - 1$. Это соответствует спектру Φ_{13} -возмущений «ленточных» моделей, описанному в прошлой лекции.

Хотя мы рассматривали очень частные модели, наши рассуждения вполне достаточны для доказательства следующей теоремы:

Теорема 10.2 *Если теория содержит нейтральную частицу обладающую Φ^n -свойством, то есть, если частица является связанным состоянием $(n - 1)$ экземпляра самой себя, собственные значения интегралов движения спинов кратных n равны нулю на этой частице.*

Центральные заряды и конформные размерности в моделях, о которых мы до сих пор говорили, отрицательны, так что модели неунитарны. Попробуем изучить какую-нибудь унитарную модель. Рассмотрим конформную модель $M(3, 4)$ ($c = 1/2$), отвечающую скейлинговому пределу модели Изинга. В этой модели в симметричном секторе имеется три примарных оператора:

$$\Phi_{11} = \Phi^{23} = 1 : \Delta_{11} = 0; \quad \Phi_{21} = \Phi_{13} = \varepsilon : \Delta_{13} = \frac{1}{2}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{33} = \sigma : \Delta_{22} = \frac{1}{16}. \quad (10.24) \quad \text{Ising}$$

Оператор ε принято называть энергетическим оператором, хотя, строго говоря, он отвечает плотности энтропии магнетика. В представлении свободными фермионами это оператор $\bar{\psi}\psi$, а коэффициент при нем есть масса фермиона, которая, как известно, пропорциональна $T - T_c$. Оператор σ пропорционален намагниченности и коэффициент при нем пропорционально внешнему магнитному полю. То есть, общее возмущение теории имеет (в евклидовом пространстве) вид:²

$$S = S_{M(3,4)} + \tau \int d^2x \varepsilon(x) - h \int d^2x \sigma(x), \quad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \quad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. В то же время по-отдельности теории с $h = 0$ (температурное возмущение) и $\tau = 0$ (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

С другой стороны мы знаем, что модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma] = \int d^2x \left(\frac{g}{2} (\nabla\sigma)^2 - h\sigma + \frac{a\tau\sigma^2}{2} + \frac{b\sigma^4}{4!} + \dots \right). \quad (10.25) \quad \text{Ising}$$

²В пространстве Минковского только меняются знаки перед τ и h .

Теория Ландау является теорией среднего поля и теряет применимость в достаточно малой окрестности критической точки (флуктуационной области). Но свободную энергию (10.25) можно использовать как «затравочное действие» для флуктуационной теории.

Рассмотрим сначала температурное возмущение. Теория Ландау здесь совсем не помогает. Зато имеется точное и явное решение, сводящее теорию к свободному майорановским фермиону с эвклидовым действием $S[\psi] = \frac{1}{2} \int d^2x \bar{\psi}(i\hat{\partial} + m)\psi$. Соответственно, если описывать частицы бозонным полем σ , матрица рассеяния будет равна $S(\theta) = -1$. Интегралы движения выражаются явно через фермионное поле (см. задачу к предыдущей лекции).

Теперь рассмотрим возмущение магнитным полем [16]. Размерность константы связи h равна $2 - 1/8 = 15/8$. Так как в теории больше нет размерных постоянных, массы частиц пропорциональны $h^{8/15}$. Пусть m_1 — масса самой легкой частицы 1. Предположим, что это — нейтральная частица, связанная с флуктуациями параметра порядка. Вспомним, что спины интегралов движения модели равны

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \quad (10.26)$$

Обратим внимание, что в этом спектре отсутствуют спины кратные 3. Это может говорить о том, что частица обладает Φ^3 -свойством в согласии с теорией Ландау. Действительно, при $\tau = 0$ параметр порядка σ в свободной энергии Ландау имеет минимум в точке $\sigma = \sigma_0 = (6h/b)^{1/3}$. Вблизи минимума свободную энергию можно разложить по $\varphi = \sigma - \sigma_0$:

$$F[\sigma_0 + \varphi] = \text{const} + \int d^2x \left(\frac{g}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{b^{1/3}(6h)^{2/3}\varphi^2}{4} + h\varphi^3 + \frac{b\varphi^4}{4!} + \dots \right).$$

Заметим, что критические индексы при $T = T_c$ не слишком сильно отличаются от точных критических индексов (что не так при $T \neq T_c$).

Кроме того, в спектре отсутствуют спины кратные 5. Для того, чтобы выполнялось Φ^5 -свойство необходимо, чтобы была еще одна частица 2, которая была бы связанным состоянием $1 + 1$, и при этом частица 1 была бы связанным состоянием $2 + 2$. Из (10.16) находим уравнения

$$I_{s,2} = 2I_{s,1} \cos su_{11}^2, \quad I_{s,1} = 2I_{s,2} \cos su_{22}^1$$

для всех s из (10.26). Отсюда

$$4 \cos su_{11}^2 \cos su_{22}^1 = 1.$$

При условии $2 \cos u_{11}^2 = m_2/m_1 < 1$ эта система уравнений имеет решение

$$u_{11}^2 = \frac{\pi}{5}, \quad u_{22}^1 = \frac{2\pi}{5}. \quad (10.27)$$

Отсюда находим

$$\frac{m_2}{m_1} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \quad (10.28)$$

Теперь нам нужно найти S -матрицу $S_{11}(\theta)$, удовлетворяющую обычным условиям $S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta) = S_{11}^{-1}(-\theta)$ и условию

$$S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi}{3} \right) S_{11} \left(\theta - \frac{i\pi}{3} \right) = S_{11}(\theta), \quad (10.29)$$

как и для модели Ли—Янга, но при этом также имеющую полюс при $-i\theta = \frac{2\pi}{5}$ с положительным вычетом. Из (10.29) немедленно следует, что S -матрица имеет полюсы при $-i\theta = \frac{\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$ от первого сомножителя, причем второй (возникающий в силу кроссинг-симметрии) полюс должен иметь отрицательный вычет, чтобы не было частиц меньшей массы. Возможные полюсы $-i\theta = \frac{11\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$ от второго сомножителя сокращаются нулями от первого сомножителя:

$$S_{11} \left(\frac{11\pi}{15} + \frac{2\pi}{3} \right) = S_{11} \left(\pi + \frac{2\pi}{5} \right) = S_{11} \left(-\frac{2\pi}{5} \right) = S_{11}^{-1} \left(\frac{2\pi}{5} \right) = 0.$$

Легко подобрать S_{11} в виде

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{\theta+2\pi i/3}{2} \text{th} \frac{\theta+2\pi i/5}{2} \text{th} \frac{\theta+\pi i/15}{2}}{\text{th} \frac{\theta-2\pi i/3}{2} \text{th} \frac{\theta-2\pi i/5}{2} \text{th} \frac{\theta-\pi i/15}{2}}. \quad (10.30)$$

Легко проверить, что полюс в точке $-i\theta = \frac{\pi}{15}$ имеет положительный вычет, и, таким образом, в системе имеется еще одна частица 3:

$$u_{11}^3 = \frac{\pi}{30}, \quad \frac{m_3}{m_1} = 2 \cos \frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \quad (10.31) \quad \text{IsingM}$$

Далее, амплитуда рассеяния

$$S_{12}(\theta) = S_{11} \left(\theta + \frac{i\pi}{5} \right) S_{11} \left(\theta - \frac{i\pi}{5} \right) \quad (10.32) \quad \text{IsingM}$$

имеет полюсы в точках $-i\theta = \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$. Первые три легко отождествляются с $u_{12}^a + u_{21}^a$, $a = 1, 2, 3$. Последний соответствует новой частице 4 массы

$$\frac{m_4}{m_1} = 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \quad (10.33) \quad \text{IsingM}$$

Продолжая процедуру дальше, можно найти еще четыре частицы с массами

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{m_1} &= 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \simeq 2.956, & \frac{m_6}{m_1} &= 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{30} \simeq 3.218, \\ \frac{m_7}{m_1} &= 8 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \simeq 3.891, & \frac{m_8}{m_1} &= 8 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \simeq 4.783. \end{aligned} \quad (10.34) \quad \text{IsingM}$$

Частицы 5 и 6 появляются как связанные состояния $2 + 2$, частица 7 появляется в канале $3 + 3$, а частица 8 — в канале $4 + 4$.

Задачи

1. Проверьте, что соотношения (10.8) могут быть записаны в виде (10.9).
2. Покажите, что определение (10.15) согласуется с уравнением (8.28) для матрицы рассеяния связанных состояний.
3. Рассмотрите модель синус-Гордона в безотражательных точках $p = 1/N$. Покажите, что спектр разрешенных спинов интегралов движения состоит из всех нечетных значений s и значений $s = N \pmod{2N}$: $s \in (2\mathbb{Z} + 1) \cup N(2\mathbb{Z} + 1)$.
4. Рассмотрите теорию с парой частица—античастица $(1, \bar{1})$ массы m с матрицей рассеяния

$$S_{11} = \frac{\text{sh}(\theta/2 - i\pi g)}{\text{sh}(\theta/2 + i\pi g)}, \quad S_{1\bar{1}}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta). \quad (10.35) \quad \text{CsG-Sn}$$

Найдите спектр интегралов движения этой теории. Найдите отношения $I_{s,\bar{1}}/I_{s,1}$ для этих интегралов движения. Покажите, что матрица рассеяния (10.35) в первом порядке по теории возмущений совпадает с матрицей рассеяния теории с действием (в пространстве Минковского) *комплексной модели синус-Гордона*:

$$S[\chi, \bar{\chi}] = \int \frac{d^2x}{4\pi} \left(\frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \bar{\chi}}{1 + g\bar{\chi}\chi} - m^2 \bar{\chi}\chi \right). \quad (10.36) \quad \text{CsG-ac}$$

(На самом деле, после подходящей перенормировки массы и константы связи, выражение (10.35) дает точную S -матрицу этой теории.)

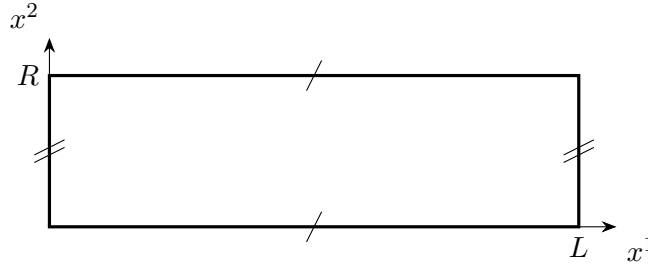
5*. Снова рассмотрим S -матрицу (10.35), но при значениях константы связи $-1 < g < 0$. В этом случае S -матрица имеет полюс при $-i\theta = \pi|g|$ с положительным вычетом. Найдите спектр связанных состояний, порожденных из частиц 1 и $\bar{1}$. При целых значениях величины $-g^{-1} = N \geq 2$ спектр частиц содержит пары частиц одинаковой массы и равного по модулю N заряда. Покажите, что при отождествлении частиц в этих парах теория рассеяния самосогласованна (\mathbb{Z}_N -симметричная модель Изинга). Найдите спектр спинов интегралов движения в этой теории.

Лекция 11

Термодинамический анзац Бете: основы метода

basics

На прошлой лекции мы пытались найти связь между точными S -матрицами и возмущениями конформных теорий, исходя из интегралов движения, а также эвристических соображений. Сегодня мы обсудим метод, позволяющий точно и явно связать данные о рассеянии с параметрами конформной модели — *термодинамический анзац Бете (ТВА)*.¹ Рассмотрим систему в прямоугольной области эвклидова пространства размером $L \times R$, замкнутой в тор $T_{L,R}$ (отождествляемые линии помечены одинаковыми засечками):



Мы можем рассматривать систему двумя способами. Если мы будем считать x^1 пространственной координатой, а x^2 — мнимым временем, то R^{-1} будет температурой системы, живущей в ящике длины L (« L -картина»). Если мы поменяем местами смысл координат, то L^{-1} будет температурой, а R — размером ящика (« R -картина»).

Пусть ξ — корреляционная длина системы. Если мы выберем

$$R \ll \xi \ll L, \tag{11.1}$$

R-xi-L

то в L -картине мы будем иметь большую систему при высокой температуре. Пусть N — общее число частиц. Если теперь

$$L \gg \xi N, \tag{11.2}$$

L-gg-x

систему можно рассматривать как разреженную и изучать термодинамику частиц исходя из матрицы рассеяния. В R -картине, наоборот, температура стремится к нулю, но зато размеры системы настолько малы, что мы можем пользоваться конформной теорией поля (или первыми поправками к ней) для ее исследования. Сравнивая выражения для статистической суммы, вычисленные обоими способами,

$$Z(L, R) = \text{tr}_{\mathcal{H}_L} e^{-RH_L} = \text{tr}_{\mathcal{R}_R} e^{-LH_R}, \tag{11.3}$$

Z(L,R)

мы можем связать ультрафиолетовое поведение системы с инфракрасным.

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико, вклад в статсумму в этой картине дает, в основном, основное состояние, поэтому

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \tag{11.4}$$

Z(L,R)

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}} + 2T_{\bar{3}\bar{3}}),$$

если мы примем $\bar{3} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова² тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}.$$

¹ Не следует путать метод термодинамического анзаца Бете с анзацем Бете при конечных температурах. Хотя первый и использует методы последнего, он к нему не сводится.

² В эвклидовом пространстве и в пространстве Минковского совпадают компоненты T_ν^μ , а компоненты $T_{\mu\nu}$ могут отличаться. В частности, в координатах z, \bar{z} эти компоненты отличаются знаком.

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^{\text{pert}} = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left(\mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_{\text{pert}}) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_{\text{pert}}(x). \end{aligned} \quad (11.5) \quad \boxed{\text{HR-CFT}}$$

Полагая $\lambda = 0$ получаем

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R}, \quad c_{\text{eff}} = c - 12\Delta_{\text{min}} - 12\bar{\Delta}_{\text{min}}. \quad (11.6) \quad \boxed{\text{EOR-CFT}}$$

Размерности $\Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}}$ являются наименьшими размерностями примарных операторов в двух киральных секторах, согласующиеся с граничными условиями. В теориях, инвариантных относительно пространственной инверсии, они совпадают. В унитарных теориях с тривиальными граничными условиями они равны нулю и $c_{\text{eff}} = c$. Величину c_{eff} называют *эффективным центральным зарядом*. Именно эффективный центральный заряд мы будем находить в L -картине. Вычислению термодинамических средних в L -картине соответствуют мацубаровские граничные условия (периодические для бозонных полей и антипериодические для фермионных полей), так что имеем

$$\Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}} \leq 0, \quad c \geq c_{\text{eff}}.$$

Теперь разберемся, как записывается энергия основного состояния в возмущенной теории. Имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_{\infty} R = \frac{\langle H_R e^{-S_{\text{pert}}} \rangle_0}{\langle e^{-S_{\text{pert}}} \rangle_0} - \varepsilon_{\infty} R, \quad S_{\text{pert}} = \lambda \int d^2x \Phi_{\text{pert}}$$

Слагаемое, содержащее $\varepsilon_{\infty} = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$, связано с тем, что в теории поля при вычислении среднего от гамильтониана всегда нужно вычитать вакуумные осцилляции на бесконечной прямой.³ Среднее с индексом 0 понимается как среднее по состоянию с наименьшей конформной размерностью в конформной теории поля:

$$\langle X \rangle_0 = \langle \Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}} | X | \Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}} \rangle. \quad (11.7) \quad \boxed{\text{VEV-CFT}}$$

Поскольку гамильтониан конформной теории поля $H_R^{(0)}$ действует на состояние $|\Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}}\rangle$ собственным значением $\mathcal{E}_0^{(0)}(R)$, а его коммутатор с Φ_{pert} есть полная производная, вклады числителя и знаменатель в среднее значение $H_R^{(0)}$ сокращаются, и мы получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_{\infty} R + (1 - \Delta_{\text{pert}}) \lambda \int dx^2 \frac{\langle \Phi_{\text{pert}} e^{-S_{\text{pert}}} \rangle_0}{\langle e^{-S_{\text{pert}}} \rangle_0}.$$

Роль знаменателя во втором слагаемом состоит в том, чтобы сокращать инфракрасные расходимости (то есть, зависящие от L вклады) в числителе. Поэтому несколько вольно напомним правую часть в виде инфракрасно-перенормированного среднего:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(R) &= \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_{\infty} R + (1 - \Delta_{\text{pert}}) \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_{\text{pert}})-1} \mathbb{M}_n \\ \mathbb{M}_n &= \int_{T_{L/R,1}} d^2x_1 \cdots d^2x_n \langle \Phi_{\text{pert}}(x) \Phi_{\text{pert}}(x_1) \cdots \Phi_{\text{pert}}(x_n) \rangle_{0,c} \end{aligned} \quad (11.8) \quad \boxed{\text{EOR-f}} \quad \boxed{\text{EOR-f}}$$

Интегралы \mathbb{M}_n приведены к безразмерному виду масштабированием с $T_{L,R}$ на $T_{L/R,1}$. В силу трансляционной инвариантности они не зависят от точки x . Конформным преобразованием их можно привести к интегралам по плоскости:

$$\mathbb{M}_n = (2\pi)^{2-(2n+2)(1-\Delta_{\text{pert}})} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x_1 \cdots d^2x_n \langle \Phi_{\text{pert}}(x) \Phi_{\text{pert}}(x_1) \cdots \Phi_{\text{pert}}(x_n) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^n |z_i|^{2\Delta_{\text{pert}}-2} \quad (11.9) \quad \boxed{\text{Mn-int}}$$

³Если связать теорию с гравитацией, величина $-8\pi G \varepsilon_{\infty}$ будет иметь смысл космологической постоянной.

Если Δ_{\min} или $\bar{\Delta}_{\min}$ равно нулю (а это всегда так, когда теория унитарна), имеем $\langle \Phi_{\text{pert}} \rangle_{0,c} = 0$. Это значит, что $M_0 = 0$ и разложение начинается с $n = 1$. В противном случае разложение начинается с $n = 0$. Отсюда заключаем

$$\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R + O(R^\alpha), \quad \alpha = \begin{cases} 1 - 2\Delta_{\text{pert}}, & \text{если } \Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0; \\ 3 - 4\Delta_{\text{pert}}, & \text{если } \Delta_{\min} = 0 \text{ или } \bar{\Delta}_{\min} = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

Теперь обратимся к L -картине. Чтобы понять основной принцип, разберем сначала случай одной нейтральной частицы массы m с матрицей рассеяния $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Как мы уже говорили, будем предполагать, что термодинамика частиц при достаточно больших значениях L полностью определяется асимптотической волновой функцией. Напишем уравнения Бете, которые следуют из периодичности этой волновой функции:

$$e^{imL \text{sh } \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N e^{i\phi(\theta_i - \theta_j)} = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.11)$$

Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \text{sh } \theta_i + \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (11.12)$$

причем $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, если $S(0) = -1$ и $N \in 2\mathbb{Z}$, и $n_i \in \mathbb{Z}$ во всех остальных случаях. Для каждого решения уравнений Бете $\{\theta_i\}$ зададим функцию $\theta(n)$ уравнением

$$mL \text{sh } \theta(n) + \sum_{i=1}^N \phi(\theta(n) - \theta_i) = 2\pi n. \quad (11.13)$$

Очевидно $\theta(n_i) = \theta_i$, а при всех значениях $n \notin \{n_i\}$ значения $\theta(n)$ будут интерпретироваться как «незаполненные состояния». По умолчанию мы будем предполагать, что значения n_i расположены по возрастанию: $n_{i+1} > n_i$. При больших L расстояния $|\theta(n+1) - \theta(n)|$ малы, и можно ввести плотность состояний $\rho(\theta)$ и плотность частиц $\rho^\bullet(\theta)$.⁴

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (11.14)$$

Мы слегка изменили нормировку плотностей для единообразия формул. Очевидно, интеграл от ρ^\bullet дает плотность частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (11.15)$$

а интеграл с весом $m \text{ch } \theta$ дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \text{ch } \theta. \quad (11.16)$$

Все интегралы по θ мы будем понимать по всей прямой \mathbb{R} , если не оговорено иное.

Возьмем разность двух уравнений (11.13) при двух последовательных значениях n и поделим на $L(\theta(n+1) - \theta(n))$. Заменив сумму на интеграл, получим

$$\rho(\theta) = m \text{ch } \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta'). \quad (11.17)$$

Это уравнение позволяет для каждой заданной функции $\rho^\bullet(\theta)$ найти соответствующую плотность состояний $\rho(\theta)$. Но при конечных температурах необходимо просуммировать все возможные наборы $\{n_i\}$

⁴Строго говоря, приведенный здесь вывод отвечает «фермионному» случаю (см. ниже). Но он может быть обобщен на «бозонный» случай введением кратностей.

с гиббсовскими весами. Трудность состоит в нетривиальной мере функционального интегрирования по ρ^\bullet в непрерывном пределе. Вместо прямого суммирования будем искать минимум свободной энергии. Положим

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet], \quad (11.18)$$

TBA-fr

Чтобы найти энтропию, воспользуемся обычными трюками теории растворов. У нас есть две ситуации:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с $S(0) = 1$ или бозонами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может быть заполнено только один раз.
- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с $S(0) = 1$ или фермионами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может заполняться неограниченным числом частиц.

Разобьем вещественную прямую на небольшие интервалы $\Delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$. Полную энтропию S будем понимать как сумму вкладов ΔS_k от значений $\theta \in \Delta_k$. Энтропия ΔS_k понимается как число «микроскопических» состояний, которыми реализуется «макроскопическое» состояние, которое задается числом частиц N_k^\bullet на числе состояний N_k в этом интервале.

В «фермионном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из N_k по N_k^\bullet (раскладываем N_k^\bullet частиц по N_k ящикам, куда помещается одна частица), так что

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

В «бозонном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из $N_k + N_k^\bullet - 1$ по N_k^\bullet . Действительно, возьмем $N_k + N_k^\bullet - 1$ ящиков, расставленных в ряд, и положим в них N_k^\bullet частиц по одному в ящик. Останется $N_k - 1$ пустых мест. Будем считать, возьмем i е слева пустое место. Сосчитаем число l_i частиц лежащих слева от него в ряд до следующего пустого места. Будем считать это числом заполнения i -го состояния. Числом заполнения N_k -го состояния будем считать количество частиц, лежащих между самым правым пустым местом и правым краем. Это дает взаимно-однозначное соответствие между микроскопическими конфигурациями и раскладкой частиц по ящикам. Итак, имеем

$$\Delta S_k = \log \frac{(N_k + N_k^\bullet - 1)!}{N_k^\bullet!(N_k - 1)!} \simeq (N_k + N_k^\bullet) \log(N_k + N_k^\bullet) - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - N_k \log N_k.$$

Устремляя размеры интервалов к нулю и заменяя N_k на $L\rho(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$ и N_k^\bullet на $L\rho^\bullet(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$, получаем

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (11.19)$$

TBA-SF

в «фермионном» случае и

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (11.20)$$

TBA-SB

Давайте введем знаковый множитель

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \quad (11.21)$$

sigma-

Тогда энтропию можно записать в виде

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\sigma\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma\rho^\bullet) - \sigma\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet). \quad (11.22)$$

TBA-en

Теперь нужно найти минимум функционала $F[\rho, \rho^\bullet]$ с учетом условия (11.17):

$$0 = \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma\rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}.$$

Мы учли, что

$$\frac{\delta\rho(\theta')}{\delta\rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi}\phi'(\theta' - \theta).$$

Давайте для вторых слагаемых в скобках введем специальное обозначение:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \quad (11.23)$$

По-другому это можно записать так

$$\frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \quad (11.24)$$

В левой части стоит функция заполнения, и она выражается через $\epsilon(\theta)$ так же, как в случае свободных частиц она выражается через $\beta E(\theta)$. Величину $\epsilon(\theta)$ называют *псевдоэнергией*. В терминах псевдоэнергии полученные уравнения записываются в виде (*уравнение Янга–Янга* [17])

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')}) = mR \operatorname{ch} \theta. \quad (11.25)$$

Покажем, что все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, R)$ этого нелинейного интегрального уравнения.

Прежде всего, с помощью (11.25) и (11.17) можно исключить ρ и ρ^\bullet в выражении для свободной энергии, которая, как мы знаем из (11.4), пропорциональна энергии основного состояния в R -картине $\mathcal{E}_0(R)$:

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}). \quad (11.26)$$

Удобно ввести скейлинговую функцию $f(r)$ соотношением

$$f(mR) = \sigma m R \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) = R\mathcal{E}_0(R). \quad (11.27)$$

Эта функция не зависит от размерных параметров. Через нее легко выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (11.28)$$

Дифференцируя уравнение (11.25) по R и сравнивая результат с (11.17), получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, R)}{\partial R}. \quad (11.29)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, R)}). \quad (11.30)$$

Итак, у нас есть система нелинейных уравнений. В следующий раз мы изучим, как решать эти уравнения.

Довольно несложно обобщить результат на случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния $S_{ab}(\theta) = e^{i\phi_{ab}(\theta)}$. Мы также будем принимать $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (11.31)$$

Совершенно аналогично вводим плотности состояний $\rho_a(\theta)$ и частиц $\rho_a^\bullet(\theta)$, причем

$$N_a = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho_a^\bullet(\theta), \quad E[\rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{a=1}^r \rho_a^\bullet(\theta) m_a \operatorname{ch} \theta_a. \quad (11.32)$$

В термодинамическом пределе имеем

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (11.33)$$

В остальном выводе достаточно просто заменить

$$\rho \rightarrow \rho_a, \quad \rho^\bullet \rightarrow \rho_a^\bullet, \quad \epsilon \rightarrow \epsilon_a, \quad \sigma \rightarrow \sigma_a, \quad \phi(\theta - \theta') \rightarrow \phi_{ab}(\theta - \theta'), \quad \int \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \sum_a \int \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Здесь есть одна тонкость. Предположим, что среди частиц есть пары частица—античастица (a, \bar{a}) . Тогда имеются сохраняющиеся заряды Q_a , собственные значения которых равны $N_a - N_{\bar{a}}$, и мы должны искать минимум с учетом сохранения этих зарядов. Чтобы учесть это, легче использовать большой канонический ансамбль и приписать каждому сорту частиц химический потенциал μ_a . Надо искать минимум термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.34)$$

При этом надо полагать $\mu_a = 0$ для нейтральных частиц и $\mu_{\bar{a}} = -\mu_a$ для пар частица—античастица. Уравнение Янга—Янга принимает вид

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')}) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (11.35)$$

Далее, потенциал имеет тот же вид, что и свободная энергия в случае с нулевыми химпотенциалами:

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)}). \quad (11.36)$$

Плотность состояний вычисляется по несколько другой формуле:

$$\rho_a(\theta) = -\frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m} \operatorname{ch} \theta, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)}). \quad (11.37)$$

где m — общий множитель всех масс. Это значит, что мы записываем массы в виде $m_a = \kappa_a m$, где κ_a — безразмерные константы. Энергия $\mathcal{E}_0(R)$ выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \quad F = \Omega + \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.38)$$

В симметричном случае $N_a = N_{\bar{a}}$ ($\forall a$) все химические потенциалы равны нулю, $\mu_a = 0$, и ответы не отличаются от случая нейтральных частиц. Однако в некоторых задачах интересен и несимметричный случай.

Задачи

1. Покажите, что в модели свободного безмассового фермиона с граничными условиями Невё—Шварца ($\psi(x^1, x^2 + R) = -\psi(x^1, x^2)$) эффективный центральный заряд равен $c_{\text{eff}}^{NS} = \frac{1}{2}$, а в модели с граничными условиями Рамона ($\psi(x^1, x^2 + R) = \psi(x^1, x^2)$) он равен $c_{\text{eff}}^R = -1$.

2. Аналогично найдите эффективный заряд для свободного безмассового нейтрального бозона с периодическими и антипериодическими граничными условиями.

3. Выведите (11.26), (11.29) и (11.30).

4. Найдите свободную энергию и число частиц в системе из одной частицы в пределе низких температур $mR \gg 1$ до членов порядка e^{-2mR} . Получите явные формулы в элементарных функциях в порядке e^{-mR} .

5*. Безмассовые теории можно описать как системы частиц со спектром $p^0 = p^1 = \frac{m}{2}e^\theta$ (правые частицы) или $p^0 = -p^1 = \frac{m}{2}e^{-\theta}$ (левые частицы). Рассмотрим теорию, которая содержит одну правую частицу r и одну левую частицу l с одинаковым параметром m , причем между ними имеется три скалярные матрицы рассеяния $S_{rr}(\theta)$, $S_{ll}(\theta)$ и $S_{rl}(\theta)$. Какие условия накладывают на эти матрицы условия унитарности и кроссинг-симметрии? При каких условиях такая теория масштабно-инвариантна, а при каких — нет? Напишите уравнения термодинамического анзаца Бете и формулы для свободной энергии и чисел частиц в этой теории.

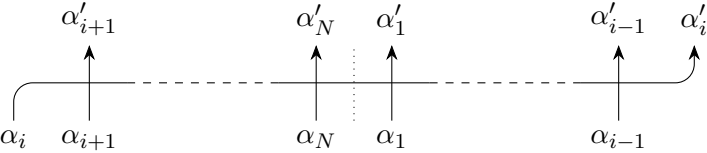
Семинар 11

Иерархический анзац Бете

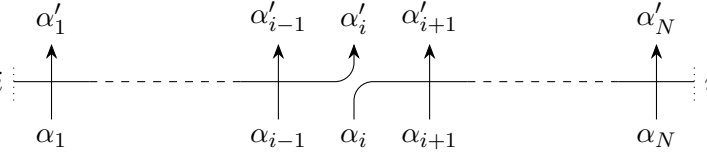
Вопрос такой: а что делать, если матрица рассеяния частиц недиагональна? Рассмотрим модель с S -матрицей $S(\theta)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha'_1\alpha'_2}$. Для простоты будем считать, что имеется одна частица с несколькими внутренними состояниями, например солитон модели синус-Гордона. Условие периодичности для волновой функции имеет вид

$$e^{imL\text{sh}\theta_i} S_{i,i+1}(\theta_i - \theta_{i+1}) \cdots S_{i,N}(\theta_i - \theta_N) |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle S_{i1}(\theta_i - \theta_1) \cdots S_{i,i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) = |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle.$$

Графически произведение S -матриц в этом выражении можно изобразить так:



Переставляя часть справа от пунктирной линии влево, получим



Теперь вспомним, что в большом количестве задач матрица рассеяния в нуле сводится к матрице перестановки: $S(0) = \pm P$. Тогда средний узел можно заменить (с точностью до знака) на матрицу рассеяния:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \alpha'_1 \\ \uparrow \\ \alpha_1 \end{array} \cdots \begin{array}{c} \alpha'_{i-1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_i \\ \uparrow \\ \alpha_i \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_{i+1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i+1} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \alpha'_N \\ \uparrow \\ \alpha_N \end{array} \\ & = \text{tr}_{V_0} S_{0N}(\theta_i - \theta_N) \cdots R_{02}(\theta_i - \theta_2) R_{01}(\theta_i - \theta_1) = T(\theta_i). \end{aligned}$$

Мы видим, что произведение матриц рассеяния вкладывается в семейство коммутирующих трансфер-матриц

$$T(\theta) = \text{tr}_{V_0} L_{1\dots N}(\theta), \quad L_{1\dots N}(\theta) = S_{0N}(\theta - \theta_N) \cdots R_{02}(\theta - \theta_2) R_{01}(\theta - \theta_1), \tag{11.39}$$

где V_0 играет роль вспомогательного пространства, $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ — квантового пространства. Нам нужно найти такие векторы

$$|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \sum_{\{\beta_i\}} A_I^{\beta_1 \dots \beta_N} |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle_{\beta_1 \dots \beta_N}, \quad I = 1, \dots, (\dim V)^N, \tag{11.40}$$

которые бы диагонализировывали трансфер-матрицы $T(\theta)$:

$$T(\theta)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \Lambda_I(\theta; \theta_1, \dots, \theta_N)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle, \tag{11.41}$$

а затем решить уравнения

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \Lambda_I(\theta_i; \theta_1, \dots, \theta_N) = \pm 1. \quad (11.42)$$

Bethe-

Эта система уравнений представляет собой *первичную* систему уравнений Бете.

Диагонализация трансфер-матриц выполняется методом алгебраического анзаца Бете. Рассмотрим самый простой пример — модель синус-Гордона. В этом случае для системы солитонов имеем $S(0) = -P$ (в случае фермионов $S(0) = P$, но мы можем получить ту же -1 накладывая на фермионы граничное условие Невё—Шварца).

Оператор $L(\theta)$ представляет собой матрицу 2×2 во вспомогательном пространстве:

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \quad T(\theta) = A(\theta) + D(\theta). \quad (11.43)$$

L-ABCD

Оператор $C(\theta)$ увеличивает топологическое число состояния на единицу, а $B(\theta)$ — уменьшает. Введем реперное состояние $|\Omega; \vec{\theta}\rangle$, состоящее только из солитонов с топологическим числом $+1$:

$$C(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = 0. \quad (11.44)$$

Omegas

Операторы A, D действуют на этом состоянии просто

$$A(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle, \quad D(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle.$$

Заметим, что правая часть второго тождества обращается в нуль при $\theta = \theta_i$. Поэтому собственное значение

$$\Lambda_\Omega(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)$$

имеет в важных для нас точках вид произведения

$$\Lambda_\Omega(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j). \quad (11.45)$$

Lambda

Теперь построим состояния Бете

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_n; \vec{\theta}\rangle = B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_1) \cdots B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_n)|\Omega; \vec{\theta}\rangle \quad (11.46)$$

Bethes

с топологическим числом $N - 2n$. Слагаемые $\frac{i\pi}{2}$ добавлены, чтобы собственные значения оператора «импульса» в спиновом пространстве $p(\lambda)$,

$$e^{ip(\lambda)} = \frac{b(\frac{i\pi}{2} + \lambda)}{a(\frac{i\pi}{2} + \lambda)} = -e^{i\Phi_{1/2}(\lambda)}, \quad \Phi_x(\lambda) = -i \log \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda + i\pi x}{p}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda - i\pi x}{p}},$$

были вещественны при вещественных λ_i . Состояния (11.46) являются собственными при выполнении *вторичной* системы уравнений Бете. Пусть $u_k = \frac{i\pi}{2} + \lambda_k$. Тогда

$$\prod_{i=1}^N \frac{b(u_k - \theta_i)}{a(u_k - \theta_i)} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{a(u_l - u_k) b(u_k - u_l)}{b(u_l - u_k) a(u_k - u_l)} \quad (11.47)$$

Bethe-

или

$$\prod_{i=1}^N \frac{\operatorname{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda_k - \theta_i}{p}}{\operatorname{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} - \lambda_k + \theta_i}{p}} = \prod_{l=1}^n \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l + i\pi}{p}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l - i\pi}{p}}. \quad (11.48)$$

Bethe-

При этом собственные значения

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(u_k - \theta)}{b(u_k - \theta)} + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(\theta - u_k)}{b(\theta - u_k)} \quad (11.49)$$

Lambda

в интересующих нас точках тоже сводятся к первому слагаемому:

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j) \prod_{k=1}^n \frac{\text{sh} \frac{i\pi - \lambda_k + \theta_i}{p}}{\text{sh} \frac{i\pi + \lambda_k - \theta_i}{p}}. \quad (11.50) \quad \boxed{\text{Lambda}}$$

Факторизованный вид собственных значений позволяет логарифмировать первичные уравнения Бете и получить систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} mL \text{sh} \theta_i - \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) - \sum_{k=1}^n \Phi_{1/2}(\theta_i - \lambda_k) &= 2\pi n_i, & i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \Phi_{1/2}(\lambda_k - \theta_i) - \sum_{l=1}^n \Phi_1(\lambda_k - \lambda_l) &= 2\pi \nu_k, & k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11.51) \quad \boxed{\text{Bethe}}$$

Здесь $\phi(\theta) = -i \log a(\theta)$, а числа n_i, ν_k являются целыми или полуцелыми в зависимости от четности чисел N и n . Система, конечно, сложная, но допускает столь же подробное исследование в термодинамическом пределе, как и обычная система уравнений Бете.

Лекция 12

Термодинамический анзац Бете: результаты

ес-ТВА

Вернемся к случаю одной частицы и рассмотрим предел высоких температур. Легко заметить, что уравнение (11.25) имеет постоянное решение $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ при $R = 0$:

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma \nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi} \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.1)$$

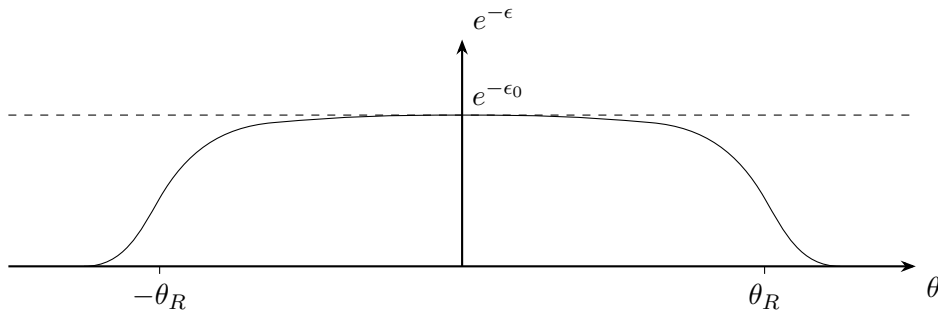
ТВА-еп

Рассмотрим теперь малые, но конечные значения R . В этом случае имеется значение $\theta_R \gg 1$ при котором правая часть (11.25) равна единице:

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR}. \quad (12.2)$$

ТВА-тл

Если $|\theta| < \theta_R - \delta$, где $\delta \sim 1$, правой частью можно пренебречь и $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$. Если же, наоборот, $|\theta| > \theta_R + \delta$, правая часть велика, так что $\epsilon(\theta) \simeq mR \operatorname{ch} \theta$ и $e^{-\epsilon(\theta)} \rightarrow 0$. Нетривиальным оно становится вблизи $\pm\theta_R$, где имеет форму «кинка» для $e^{-\epsilon}$:



Но при больших θ_R решения вблизи этих двух точек не зависят друг от друга и от R . Так как $\epsilon(-\theta) = \epsilon(\theta)$, рассмотрим решение вблизи θ_R . Обозначим $\tilde{\epsilon}(\theta) = \epsilon(\theta_R + \theta)$. Тогда получаем уравнение

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^\theta. \quad (12.3)$$

ТВА-кп

Скейлинговая функция $f(r)$ ($r = mR$) в пределе $r \rightarrow 0$ выражается через кинковое решение:

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) = \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \quad (12.4)$$

ТВА-ф

Продифференцируем уравнение (12.3) по θ :

$$e^\theta = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Подставляя это в правую часть (12.4), мы получаем два слагаемых

$$f_1(0) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta) \tilde{l}(\theta) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}), \quad \text{где } \tilde{l}(\theta) = \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}),$$

и

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta) \tilde{l}(\theta').$$

В силу нечетности и быстрого убывания $\phi''(\theta)$ слагаемое $f_2(r)$ обратилось бы в нуль, если бы интегралы коммутировали. Некоммутативность этих двух интегралов связана с тем, что $\tilde{l}(\theta)$ стремится к конечному значению $\tilde{l}_0 = \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})$ при $\theta \rightarrow -\infty$. Сначала возьмем по частям сначала интеграл по θ' :

$$f_2(0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int d\theta \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int d\theta' (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu) \tilde{l}'(\theta')$$

Постоянное слагаемое $\pi\nu$ (пропадающее при дифференцировании по θ) добавлено к ϕ для того, чтобы интеграл стремился к нулю при $\theta \rightarrow -\infty$. После этого можно взять по частям интеграл по θ :

$$f_2(0) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\pi\nu \int d\theta d\theta' \tilde{l}'(\theta) \tilde{l}'(\theta') + \int d\theta d\theta' \tilde{l}'(\theta) \phi(\theta - \theta') \tilde{l}'(\theta') \right).$$

Второй интеграл равен нулю в силу нечетности функции ϕ и сходимости однократных интегралов, а первый элементарно берется:

$$f_2(0) = \frac{\nu \tilde{l}_0^2}{2\pi} = \sigma \frac{\epsilon_0 \tilde{l}_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi} \left(-\frac{\epsilon_0}{2} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}) \right). \quad (12.5)$$

Эту функцию принято записывать через так называемый *дилогарифм Роджерса*:

$$\begin{aligned} L(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^z du \left(\frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u} \right), \\ L(-z) &= -L\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad L(1/z) = 2L(1) - L(z). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Имеем

$$f(0) = -\frac{\sigma}{\pi} L(\sigma e^{-\epsilon_0}). \quad (12.7)$$

Надо сказать, что дилогарифм Роджерса встречается во множестве задач, связанных с термодинамическим анзацем Бете, и потому хорошо изучен, найдены его значения во множестве специальных точек. Нам будут важны следующие значения:¹

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6} = L(z) + L(1-z), \quad L\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с тривиальных. Для свободной частицы $S(\theta) = 1$, $\nu = 0$ и $\epsilon_0 = 0$. Поэтому имеем

$$c^{FB} = c_{\text{eff}}^{FB} = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1$$

в бозонном случае и

$$c^{FF} = c_{\text{eff}}^{FF} = -\frac{6}{\pi^2} L(-1) = \frac{6}{\pi^2} L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

в фермионном случае (модель Изинга при нулевом магнитном поле).

Теперь перейдем к нетривиальным случаям. Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\text{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \quad (12.9)$$

Начнем со случая $-1 < p < 0$, который соответствует модели sh-Гордона. Это «фермионная» S -матрица для бозонов: $S(0) = -1$. В этой модели имеется всего одна частица, поэтому это рассмотрение кажется осмысленным. В этом случае $\nu = 1$ и уравнение (12.1) не имеет решения. Формально мы можем положить $e^{-\epsilon_0} = +\infty$. Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2} L(-\infty) = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

¹В области $0 < z < 1$ дилогарифм Роджерса связан с дилогарифмом Эйлера–Спенса формулой $L(z) = \text{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \log z \log(1-z)$.

Теперь рассмотрим матрицу (12.9) при $0 < p < 1$. В отличие от предыдущего случая, здесь $\nu = -1$ и уравнение (12.1) имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем эффективный центральный заряд

$$c_{\text{eff}}^{LY} = \frac{2}{5}. \quad (12.10)$$

Очевидно, эта величина имеет смысл только тогда, когда спектр состоит из одной этой частицы. Спектр модели синус-Гордона содержит также солитоны и высшие бризеры (на последнее указывает полюс в $S_{11}(\theta)$). Если учесть все эти частицы, окажется, что эффективный центральный заряд модели синус-Гордона равен единице. То есть, опять же, модель синус-Гордона на малых масштабах ведет себя как свободный безмассовый бозон. Ответ (12.10) верен для случая $p = 2/3$, когда мы отождествляем связанное состояние с одной частицей. Этот ответ согласуется с гипотезой о том, что такая теория является возмущением теории Ли–Янга с центральным зарядом $c = -22/5$ и $\Delta_{\text{min}} = -1/5$.

Оценим число N частиц в системе. Согласно формуле (11.30), имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -\frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно $R \ll \xi$ и, таким образом, предположение (11.2) термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос, почему все же термодинамический анзац Бете работает. Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера[18]. Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году [19], вириальные коэффициенты газа полностью определяются S -матрицей составляющих его частиц. Точные S -матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области $R \gg \xi$. Это значит, что условием применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для системы частиц.

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Уравнение (11.25) в пределе $R \rightarrow 0$ имеет вид

$$\epsilon_{0a} = \sum_b \nu_{ab} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \quad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty) - \phi_{ab}(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.11)$$

Сумма берется по всем частицам в спектре. Формула для значения в нуле скейлинговой функции $f(m_{\text{min}}R) = R\mathcal{E}_0(R)$ имеет практически тот же вид:

$$f(0) = -\frac{1}{\pi} \sum_a \sigma_a \text{L}(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \quad (12.12)$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Как мы помним, эта теория становится замкнутой в точках $p = 2/(2N - 1)$ при отождествлении n -того и $(2N - 1 - n)$ -того бризеров. Константы $\nu_{nn'}$ даются формулами

$$\nu_{nn'} = \begin{cases} 1 - 2n, & n' = n; \\ -2n, & n < n'; \\ -2n', & n' < n. \end{cases} \quad (12.13)$$

Систему уравнений удобно писать в терминах $y_n = e^{-\epsilon_{0n}}$:

$$y_n(1 + y_n)^{2n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (1 + y_m)^{2m} \prod_{m=n+1}^{N-1} (1 + y_m)^{2n} = 1, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (12.14)$$

Эту систему удобно переписать в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \quad (12.15)$$

Эти две системы не эквивалентны, но, во-первых, любое решение системы (12.14) удовлетворяет системе (12.15), а во-вторых, единственное положительное ($\forall n : y_n > 0$) решение второй системы совпадает с единственным положительным решением первой системы.

Для дилогарифма Роджерса есть много теорем о его значениях на решениях систем типа (12.15) (*Y-систем*).² В частности, система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \quad (12.16)$$

имеет единственное положительное решение, и

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} \text{L}(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \quad (12.17)$$

Если мы заметим, что при $l = 2N - 1$ любое решение системы (12.15) является симметричным ($y_{l-n} = y_n$) решением системы (12.16), то

$$c_{\text{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} \text{L}(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1} \quad (12.18)$$

совпадает с эффективным центральным зарядом «ленточных» моделей $M(2, 2N+1)$.

Возьмемся к задаче об одной частице и изучим следующие члены в разложении $f(r)$. В первом приближении надо учесть влияние второй экспоненты на кинк $\tilde{\epsilon}(\theta)$. Добавим вклад второй экспоненты в правую часть (12.3):

$$\tilde{\epsilon}(\theta) + \delta\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta') - \delta\epsilon(\theta')}) = e^\theta + \left(\frac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

Раскладывая по $\delta\epsilon$, получаем

$$\delta\epsilon(\theta) = \left(\frac{mR}{2}\right)^2 \tilde{\psi}_-(\theta), \quad (12.19)$$

где $\tilde{\psi}_-(\theta)$ является решением линейной задачи

$$\psi_\pm(\theta) - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma} = e^{\pm\theta} \quad (12.20)$$

при $\epsilon(\theta) = \tilde{\epsilon}(\theta)$. Найдем решения этой линейной задачи. Заметим, что уравнение для $\tilde{\psi}_+$ получается дифференцированием уравнения (12.3) по θ . Следовательно,

$$\tilde{\psi}_+(\theta) = \tilde{\epsilon}'(\theta). \quad (12.21)$$

Подставляя решение $\tilde{\epsilon} + \delta\epsilon$ вместо $\tilde{\epsilon}$ в правую часть (12.4), получаем

$$f(r) = f(0) + \frac{r^2}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^\theta \tilde{\psi}_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}.$$

Подставляя в правую часть уравнение для ψ_+ , получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\tilde{\psi}_+(\theta)\tilde{\psi}_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\tilde{\psi}_+(\theta)\tilde{\psi}_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Применяя теперь уравнение для ψ_- и используя (12.21), получаем

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\tilde{\psi}_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} = \sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \quad (12.22)$$

²Обзор этих теорем можно найти в работе [20].

Мы видим, что интеграл определяется формой кинка на левом крае. Его нетрудно вычислить, если фаза S -матрицы спадает как

$$\phi(\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (12.23)$$

В этом случае при $\theta \rightarrow -\infty$ имеем

$$-\sigma e^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu) \frac{\partial}{\partial\theta'} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = \sigma A \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{-\theta'} \frac{\partial}{\partial\theta'} \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = Af''(0).$$

С другой стороны разность $\tilde{\epsilon}(\theta) - \epsilon_0 = o(e^\theta)$ при $\theta \rightarrow -\infty$. Это немедленно следует из требования сходимости интеграла в левой части уравнения (12.3). Поэтому, в силу этого же уравнения, левая часть последнего тождества равна

$$e^{-\theta} \left(\epsilon_0 - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) \right) = 1.$$

Следовательно,

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left((\phi(\theta) - \pi\nu) e^\theta \right)^{-1}. \quad (12.24)$$

Отсюда имеем

$$\epsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \quad (12.25)$$

Для S -матрицы (12.9) имеем $A = 4 \sin \pi p$. Следовательно, для модели sh-Гордона ($-1 < p < 0$)

$$\epsilon_\infty = \frac{m^2}{8 \sin \pi(-p)}, \quad (12.26)$$

а для модели Ли–Янга

$$\epsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \quad (12.27)$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение $f(r) - f(0) - \frac{1}{2}f''(0)r^2$ действительно раскладывается по целым степеням r^α с некоторым показателем $\alpha > 0$, что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора $\Delta_{\text{pert}} = 1 - \alpha/2$. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи λ с массой частицы m .

Задачи

1. Выведите (12.11) и (12.12).
2. Покажите, что для S -матриц бризеров в модели синус-Гордона при $0 < p < 1$ набег фазы дается формулой (12.13). Выведите (12.14), (12.15).
3. Покажите, что для моделей, описываемых бризерным сектором модели синус-Гордона в точках $p = 2/(2N - 1)$ с отождествлением частиц $n \sim 2N - 1 - n$ величина ϵ_∞ дается формулой (12.26) с параметром $m = m_1$.
4. Покажите, что при больших значениях θ функция $\epsilon(\theta)$ имеет асимптотику вида

$$\epsilon(\theta) = \frac{mR}{2} e^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(mR) (mR e^\theta)^{-n},$$

где функции $s_n(r)$ конечны при $r \rightarrow 0$. Выразите $s_1(r)$ через $f(r)$. Покажите, что остальные коэффициенты $s_n(r)$ можно представить в виде

$$s_n(mR) = -nA_n \sigma (mR)^n \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{n\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}), \quad \phi(\theta) = \pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\theta},$$

причем $s_n(0) \neq 0$, если $A_n \neq 0$. Оцените значения $s_n(0)$ при больших n . Найдите значения n , при которых $A_n \neq 0$, для модели sh-Гордона и модели Ли–Янга.

5*. Рассмотрите модель с матрицей рассеяния фундаментальной частицы

$$S_{11}(\theta) = S_{1\bar{1}}(i\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{2\pi i}{N} \right)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{2\pi i}{N} \right)}, \quad (12.28) \quad \boxed{\text{S11-ZN}}$$

где $N \geq 2$ — целое число. Эта S -матрица имеет полюс, порождающий серию связанных состояний $n = 2, 3, \dots, N$ (см. задачу 10.5). При отождествлении $\bar{n} = N - n$, спектр замыкается (\mathbb{Z}_N -симметричная модель Изинга). Найдите параметры $\nu_{nn'}$ для этой теории и покажите, что эффективный центральный заряд совпадает с центральным зарядом теории \mathbb{Z}_N -парафермионов:

$$c = 2 - \frac{6}{N + 2}. \quad (12.29) \quad \boxed{\text{c-ZN}}$$

Найдите также значения ϵ_∞ .

Лекция 13

Конформная теория возмущений

ес-СРТ

Снова рассмотрим возмущенную конформную теорию поля с эвклидовым действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{pert}} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_{\text{pert}}(x), \quad (13.1)$$

Spert-

на плоскости. Это действие означает, что корреляционные функции в этой теории должны считаться по правилу

$$\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) \rangle = \frac{\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_{\text{pert}}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_{\text{pert}}} \rangle_0}. \quad (13.2)$$

PCFT-c

Далее, согласно общим правилам следует разложить экспоненту в ряд и вычислять корреляционные функции по теории возмущений. Давайте рассмотрим этот процесс более подробно.

Начнем с конформной теории поля. Пусть $\mathcal{O}_I(x)$ — некоторый базис набора взаимно-локальных операторов в конформной теории поля, обладающий следующими свойствами. Каждый оператор $\mathcal{O}_I(x)$ имеет определенную конформную размерность $(\Delta_I, \bar{\Delta}_I)$. Имеется единственный единичный оператор $\mathcal{O}_0(x) = 1$ конформной размерности $(0, 0)$ и со средним $\langle 1 \rangle_0 = 1$.¹ Средние значения остальных операторов равны нулю: $\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = 0$, $I \neq 0$. Базис замкнут относительно операторных разложений:

$$\mathcal{O}_I(x) \mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}_{IJ}^K(x) \mathcal{O}_K(0), \quad \mathcal{C}_{IJ}^K(x) = \mathcal{C}_{IJ}^K z^{\Delta_K - \Delta_I - \Delta_J} \bar{z}^{\bar{\Delta}_K - \bar{\Delta}_I - \bar{\Delta}_J}. \quad (13.3)$$

CFT-01

Функции $\mathcal{C}_{IJ}^K(x)$ называются *структурными функциями* операторной алгебры. В конформной теории структурные функции тривиально зависят от координат, и существенными параметрами являются *структурные константы* \mathcal{C}_{IJ}^K . Последовательно применяя операторные разложения, мы можем свести корреляционные функции к одночастичным. Поскольку только одна одночастичная функция равна нулю, мы имеем

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle_0 = \sum_{J_1, \dots, J_{N-2}} \mathcal{C}_{I_N J_{N-2}}^0(x_N - x_1) \cdots \mathcal{C}_{I_3 J_1}^{J_2}(x_3 - x_1) \mathcal{C}_{I_2 I_1}^{J_1}(x_2 - x_1) \quad (13.4)$$

CFT-NP

при условии

$$|x_N - x_1| > \cdots > |x_3 - x_1| > |x_2 - x_1|. \quad (13.5)$$

xi-Tor

Давайте ограничимся *квазипримарными* операторами, то есть операторами, удовлетворяющими условию

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{O}_I)(x) = (\bar{\mathcal{L}}_1 \mathcal{O}_I)(x) = 0. \quad (13.6)$$

CFT-qu

Эти операторы являются старшими весами представлений малой конформной алгебры $sl(2)$, порожденной операторами $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{-1}$. Иными словами, эти операторы не получаются действием операторов $\mathcal{L}_{-1} = \partial, \bar{\mathcal{L}}_{-1} = \bar{\partial}$ из других операторов. Зная структурные константы квазипримарных операторов, можно уже найти структурные константы для всех операторов. Для квазипримарных операторов структурные константы $G_{IJ} = \mathcal{C}_{IJ}^0$ равны нулю, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$, так что матрица G_{IJ} на квазипримарных операторов имеет блочно-диагональную структуру. Нам понадобится матрица $(G^{-1})^t$, матричные элементы которой мы будем обозначать G^{IJ} . Введем операторы

$$\mathcal{O}^I(x) = \sum_J' G^{IJ} \mathcal{O}_J(x), \quad (13.7)$$

Osuper

где сумма со штрихом обозначает суммирование только по квазипримарным операторам. В силу блочной диагональности матрицы G конформная размерность оператора \mathcal{O}^I совпадает с Δ_I . Для парной корреляционной функции имеем

$$\langle \mathcal{O}^I(x) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta_J^I z^{-2\Delta_I} \bar{z}^{-2\bar{\Delta}_I}. \quad (13.8)$$

CFT-cC

¹Тем самым мы исключаем из рассмотрения логарифмические конформные теории поля.

Теперь определим оператор «на бесконечности»:

$$\mathcal{O}^I(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} z^{2\Delta_I} \bar{z}^{2\Delta_J} \mathcal{O}(x). \quad (13.9)$$

Тогда, очевидно

$$\langle \mathcal{O}^I(\infty) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta_J^I. \quad (13.10)$$

Казалось бы, в возмущенном случае можно было бы подставить разложение (13.3) в (13.2) и свести корреляционную функцию к одночастичным средним $\langle \mathcal{O}_K \rangle$. Однако это *не так*. Дело в том, что в среднем (13.2) содержатся интегралы от операторов Φ_{pert} , и эти операторы тоже надо включать в упорядочение (13.5) и, соответственно, в разложение (13.4).

Проблема теории возмущений состоит в том, что буквальное применение формулы (13.2) неизбежно приводит к инфракрасным расходимостям. Расходимости возникают из-за того, что конформная теория поля не описывает правильно большие (порядка корреляционной длины) масштабы. Следуя работе Ал. Замолодчикова [21], мы покажем, как вычислять коэффициенты операторных разложений по теории возмущений. Это означает, что структурные функции имеют вид

$$C_{IJ}^K(x) = z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \tilde{C}_{IJ}^K(t), \quad t = \lambda |x|^{2-2\Delta_{\text{pert}}}, \quad d_{K,IJ} = \Delta_K - \Delta_I - \Delta_J, \quad (13.11)$$

где $\tilde{C}_{IJ}^K(t)$ являются целыми функциями переменной t , $\tilde{C}_{IJ}^K(0) = C_{IJ}^K$. Замечательно факт состоит в том, что, как мы увидим, инфракрасные расходимости в выражениях для структурных функций (в отличие от пертурбативных выражений для корреляционных функций) сокращаются. Чтобы получить инфракрасно-конечные корреляционные функции, надо будет учесть *точно* вакуумные средние. Очевидно, что вакуумные средние не равны нулю только для бесспиновых операторов, не являющихся пространственными производными других локальных операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_{\text{pert}}}}, \quad (13.12)$$

где G_I — безразмерная константа. Поэтому корреляционная функция

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \sum_{J_1, \dots, J_{N-1}} C_{I_N J_{N-2}}^{J_{N-1}}(x_N - x_1) \cdots C_{I_3 J_1}^{J_2}(x_3 - x_1) C_{I_2 I_1}^{J_1}(x_2 - x_1) \langle \mathcal{O}_{J_{N-1}} \rangle \quad (13.13)$$

уже не будет целой функцией параметра λ . Мы обсудим два примера точных вакуумных средних, где эти средние можно получить известными нам методами. В общем случае вакуумные средние получают на основе эвристических соображений [22, 23]. Но и это еще не вся история. Дело в том, что теория возмущений для структурных функций может содержать *ультрафиолетовые* расходимости, которые следует исключать добавлением к операторам \mathcal{O}_I операторов меньшей конформной размерности. Перенормированные таким образом операторы мы будем обозначать \mathcal{O}_I .

Наша первая задача будет состоять в том, чтобы вычислить матрицу

$$\mathcal{D}_J^I = \langle \mathcal{O}^I(\infty) \mathcal{O}_J(0) \rangle \quad (13.14)$$

по теории возмущений при ненулевых значениях константы связи λ . Интегралы теории возмущений могут расходиться на больших и малых масштабах, поэтому будем изучать функцию

$$\mathcal{D}_J^I(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{r_0 \leq |y_i| \leq R} d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \langle \mathcal{O}^I(\infty) \Phi_{\text{pert}}(y_n) \cdots \Phi_{\text{pert}}(y_1) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0. \quad (13.15)$$

При этом, чтобы интеграл был не нулевым, спины операторов \mathcal{O}^I и \mathcal{O}_J должны совпадать:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J. \quad (13.16)$$

Давайте сначала рассмотрим член с $n = 1$, то есть первый порядок теории возмущений. Для удобства примем $\mathcal{O}_1 = \Phi_{\text{pert}}$. Под интегралом мы имеем произведение

$$\Phi_{\text{pert}}(y_1) \mathcal{O}_J(0) = C_{1J}^I \mathcal{O}_I(0) |w_1|^{2\Delta_I - 2\Delta_1 - 2\Delta_J} + \cdots, \quad (13.17)$$

где точки обозначают члены, не дающие вклада в интеграл. То есть

$$\mathcal{D}^{(1)I}_J = -\lambda \mathcal{C}_{1J}^I \int d^2 y_1 |y_1|^{2(\Delta_I - \Delta_1 - \Delta_J)} = -\frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{1J}^I}{2d_{IJ}} \left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}} \right),$$

где

$$d_{IJ} = \Delta_I - \Delta_J + 1 - \Delta_1. \quad (13.18) \quad \text{dIJ-de}$$

Интеграл ультрафиолетово расходится, если $d_{IJ} \leq 0$, то есть

$$\Delta_I \leq \Delta_J - (1 - \Delta_1). \quad (13.19) \quad \text{DeltaI}$$

Чтобы он сходился необходимо вычесть из оператора \mathcal{O}_J оператор \mathcal{O}_I с подходящим бесконечным коэффициентом:

$$\mathcal{O}_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I, d_{IJ} < 0} \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{1J}^I}{2d_{IJ}} \mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \quad (13.20) \quad \text{OJ(1)-}$$

Тогда вклад нулевого порядка по теории возмущений сократит ультрафиолетовую расходимость в первом порядке и при условии (13.19) матрица

$$D_J^I(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) \mathcal{O}_J(0) \rangle = \mathcal{D}_J^I - \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{1J}^I}{2d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) = \delta_J^I - \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{1J}^I}{2d_{IJ}} R^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) \quad (13.21) \quad \text{DIJ-n=}$$

не будет зависеть от r_0 .

В общем случае порядка n теории возмущений условие ультрафиолетовой расходимости имеет вид

$$\Delta_I \leq \Delta_J - n(1 - \Delta_1). \quad (13.22) \quad \text{DeltaI}$$

Поэтому ультрафиолетовая перенормировка операторы \mathcal{O}_J имеет вид

$$\mathcal{O}_J(x) = \sum_I U_J^I(r_0) \mathcal{O}_I(x), \quad U_J^I(r_0) = \delta_J^I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n U^{(n)I}_J r_0^{2(\Delta_I - \Delta_J + n(1 - \Delta_1))}, \quad (13.23) \quad \text{OJ-def}$$

причем $U^{(n)I}_J = 0$, если не выполняется условие (13.22). Соответственно, матрица

$$D_J^I(R) = \langle \mathcal{O}^I(x) \mathcal{O}_J(0) \rangle = \sum_I U_J^K(r_0) \mathcal{D}_K^I(R, r_0) \quad (13.24) \quad \text{DIJ-de}$$

не зависит от r_0 и может содержать только инфракрасную расходимость, то есть не иметь конечного предела при $R \rightarrow \infty$.

Тонкий момент возникает, если имеется оператор \mathcal{O}_I , удовлетворяющий *условию резонанса*

$$\Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_1). \quad (13.25) \quad \text{DeltaI}$$

В этом случае, как легко видеть на примере первого порядка по теории возмущений ультрафиолетово-расходящаяся часть пропорциональна $\log r_0$. Отсюда следует, что соответствующий член в (13.23) должен быть пропорционален $\log r_0$. Более точно,

$$\mathcal{O}_J = \mathcal{O}_J - 2C \log \mu r_0, \quad (13.26) \quad \text{OJ-res}$$

где C — некоторая константа, а μ — произвольный параметр размерности массы. Наличие произвольного размерного приводит к неоднозначности определения перенормированного оператора \mathcal{O}_J .

Если в теории есть непрерывный параметр, от которого зависят размерности, резонанс может иметь еще один эффект. В точке резонанса оператора \mathcal{O}_J с оператором \mathcal{O}_I , корреляционные функции оператора \mathcal{O}_J имеют полюс. Выберем параметр так, чтобы в окрестности резонансной точки он совпадал с $d_{IJ}^{(n)} = \Delta_I - \Delta_J + n(1 - \Delta_1)$. Тогда для любой корреляционной функции оператора \mathcal{O}_J имеем

$$\text{Res}_{d_{IJ}^{(n)}=0} \langle \mathcal{O}_J(x) X \rangle = C \langle \mathcal{O}_I(x) X \rangle \quad (13.27) \quad \text{resona}$$

с некоторой константой C . Перенормированный оператор O_J непосредственно в точке $d_{IJ}^{(n)} = 0$ определяется вычитанием этого полюсного члена:

$$\langle O_J(x)X \rangle_{d_{IJ}^{(n)}=0} = \lim_{d_{IJ}^{(n)} \rightarrow 0} \left(\langle O_J(x)X \rangle - \frac{C}{d_{IJ}^{(n)}} \langle O_I X \rangle \right). \quad (13.28)$$

Ясно что оператор $O'_J = O_J + \alpha O_I$ с некоторым коэффициентом α ничем не хуже в качестве перенормированной версии оператора O_J . Эта неоднозначность соответствует неоднозначности параметра μ в конструкции (13.26). Важная роль резонансов состоит в том, что они являются точным пертурбативным эффектом, и резонансные полюсы могут быть использованы в качестве условий бутстрапа при поиске решений эвристическими методами.

Теперь рассмотрим трехточечную функцию

$$\begin{aligned} G_{IJ}^K(x, R) &= \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_I(x) O_J(0) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{|y_i| \leq R} d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \langle \mathcal{O}^K(\infty) \Phi_{\text{pert}}(y_n) \cdots \Phi_{\text{pert}}(y_1) O_I(x) O_J(0) \rangle_0. \end{aligned} \quad (13.29)$$

С другой стороны,

$$G_{IJ}^K(x, R) = \sum_L C_{IJ}^L(x) \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_L(0) \rangle = \sum_L' C_{IJ}^L(x) D_L^K(R). \quad (13.30)$$

Во втором равенстве суммирование по всем операторам заменено на суммирование по квазипримарным оператором, потому что второй множитель под знаком суммы равен нулю, если O_L представляет собой пространственно-временную производную. Таким образом, структурные константы для квази-примарных операторов находятся как

$$C_{IJ}^K(x) = (D^{-1})_L^K(R) G_{IJ}^L(x, R). \quad (13.31)$$

Важный факт состоит в том, что структурные константы не содержат инфракрасных расходимостей. Проверим это в первом порядке по теории возмущений. Имеем

$$\begin{aligned} G_{IJ}^K(x, R) &= C_{IJ}^K(x) - \lambda \int_{|x| < |y_1| < R} d^2 y_1 \sum_L' C_{1L}^K C_{IJ}^L(x) |y_1|^{2d_{KL}-2} \\ &\quad - \lambda \int_{|y_1| < |x|} d^2 y_1 \sum_L' C_{1L}^K(x) C_{IJ}^L |y_1|^{2d_{LJ}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (13.32)$$

где опущены контрчлены к ультрафиолетово-расходящейся части. Они сократят ультрафиолетовую расходимость во втором слагаемом, так что учтем с нем только инфракрасно-расходящуюся часть:

$$G_{IJ}^K(x, R) = C_{IJ}^K(x) - \pi \lambda \sum_L' \left(\frac{C_{1L}^K C_{IJ}^L(x)}{2d_{KL}} (R^{2d_{KL}} - |x|^{2d_{KL}}) + \frac{C_{1L}^K(x) C_{IJ}^L}{2d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2).$$

Подставляя это и (13.21) в (13.31), видим, что слагаемое первого порядка в D^{-1} в точности сокращает слагаемое с R в G . Получаем

$$\begin{aligned} C_{IJ}^K(x) &= C_{IJ}^K(x) + \pi \lambda \sum_L' \left(\frac{C_{1L}^K C_{IJ}^L(x)}{2d_{KL}} |x|^{2d_{KL}} - \frac{C_{1L}^K(x) C_{IJ}^L}{2d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2) \\ &= z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \left(C_{IJ}^K + \pi t \sum_L' \left(\frac{C_{1L}^K C_{IJ}^L}{2d_{KL}} - \frac{C_{1L}^K C_{IJ}^L}{2d_{LJ}} \right) + O(t^2) \right), \quad t = \lambda |x|^{2-2\Delta_1}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Итак, мы видим, что структурные константы допускают сходящееся разложение по теории возмущений для перенормированных операторов. Перейдем ко второй составляющей формулы (13.13) — вакуумным средним. Прежде всего, нужно определить эту величину. Пусть $O_I(x)$ — квазипримарный

оператор нулевого спина. Рассмотрим корреляционную функцию $\langle O^I(x)O_I(0) \rangle$. На малых масштабах мы можем выделить конформный вклад:

$$\langle O^I(x)O_I(0) \rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \dots, \quad |x| \rightarrow 0. \quad (13.34)$$

То, что мы обозначили точками есть вклад возмущения. Он мал при $|x| \rightarrow 0$ в унитарной теории, но в неунитарной (как мы убедимся ниже) он может быть не мал. Тем не менее, даже в неунитарном случае его можно выделить по характерной особенности. Рассмотрим теперь большие расстояния. Даже в безмассовой теории, где корреляционные функции на больших масштабах спадают степенным образом, корреляционные функции в конце концов факторизуются:

$$\langle O^I(x)O_I(0) \rangle \rightarrow \langle O^I(x) \rangle \langle O_I(0) \rangle = \langle O_I(0) \rangle \sum_J' G^{IJ} \langle O_J(0) \rangle, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (13.35)$$

Это уравнение всегда можно решить и найти (с точностью до знака) средние значения $\langle O_I \rangle$ в виде (13.12).

Одно вакуумное среднее немедленно получается из термодинамического анзаца Бете. Вспомним, что в энергии системы на конечной окружности есть вклад $-\varepsilon_\infty R$ пропорциональный длине системы R . Этот вклад, как мы говорили, связан с вычитанием из полной энергии системы энергии нулевых колебаний при $R = \infty$. Таким образом, мы можем интерпретировать $(-\varepsilon_\infty)$ как перенормированную плотность энергии системы. В эвклидовых компонентах тензора энергии-импульса

$$-\varepsilon_\infty = \langle T_{22} \rangle = \langle 2T_{z\bar{z}} - T_{zz} - T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = 2\langle T_{z\bar{z}} \rangle = -\frac{1}{\pi} \langle \Theta \rangle.$$

То есть,

$$\langle \Theta \rangle = \pi\varepsilon_\infty, \quad \langle \Phi_{\text{pert}} \rangle = -\frac{\varepsilon_\infty}{\lambda(1 - \Delta_{\text{pert}})}. \quad (13.36)$$

Последнее равенство верно, когда Θ не содержит вкладов высших порядков теории возмущений.

Другой интересный и важный пример — это оператор $T\bar{T}$. В конформной теории поля это произведение хорошо определено, но в возмущенной теории оно перенормируется добавлением оператора Θ . Также оно находится в резонансе с оператором $\partial\bar{\partial}\Theta$, но этот оператор не является квазипримарным и не дает вклада в вакуумное среднее. Вместо того, чтобы аккуратно учитывать перенормировки, рассмотрим комбинацию [24]

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \frac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x) = -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \quad (13.37)$$

Каждое из трех произведений $T\bar{T}$, $\bar{T}T$, $\Theta\Theta$ расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, но расходящаяся часть имеет вид пространственно-временной производной. В самом деле, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = -\frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\kappa\lambda}\partial_\rho(T^{\nu\lambda}(x+\varepsilon)T^{\kappa\rho}(x)). \quad (13.38)$$

Это значит, что $(T\bar{T})_\varepsilon$ есть некоторый постоянный (то есть, не зависящий от ε) оператор плюс полная дивергенция:

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J_\varepsilon^\mu(x). \quad (13.39)$$

Это определяет конечный оператор $T\bar{T}$ с точностью до пространственно-временных производных. В тоже время из (13.38) немедленно следует, что вакуумное среднее $\langle (T\bar{T})_\varepsilon \rangle$ не зависит от ε :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu} \langle (T\bar{T})_\varepsilon(x) \rangle = 0. \quad (13.40)$$

Отсюда получаем

$$\langle T\bar{T} \rangle = \langle (T\bar{T})_\varepsilon(x) \rangle_{\varepsilon \rightarrow \infty} = -\langle \Theta \rangle^2. \quad (13.41)$$

Мы учли, что $\langle T \rangle = \langle \bar{T} \rangle = 0$, поскольку это операторы ненулевого спина.

Все остальные известные вакуумные средние найдены эвристическими методами. Несмотря на это они хорошо проверены и считаются точными. Приведем один пример. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеется формула [22]:

$$\langle e^{i\alpha\phi} \rangle = M^{\alpha^2} \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)t})}{2 \text{sh } t \text{ sh } pt \text{ sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t} \right). \quad (13.42)$$

Эта интегральная формула верна и для модели sh-Гордона, хотя функция и не продолжается в область $\beta^2 < 0$ аналитически. Параметр M связан с массой m солитона или с параметром взаимодействия μ формулой

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} m = \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)} \mu \right)^{\frac{p+1}{2}}. \quad (13.43)$$

Связь между m и μ была найдена в [25] методом термодинамического анзаца Бете. Для примарных операторов минимальных конформных моделей тоже известна формула [23], но я ее приводить не буду. Замечу только, что в Φ_{13} -возмущенной модели $M(P, P')$ есть $P - 1$ вакуумов, и вакуумное среднее зависит от вакуума s согласно

$$\langle \Phi_{mn} \rangle_s = \frac{\sin \frac{\pi s}{P} |P'm - Pn|}{\sin \frac{\pi s}{P} (P' - P)} Q_{mn}(P, P'), \quad s = 1, \dots, P - 1, \quad (13.44)$$

где $Q_{mn}(P, Q)$ несложно выражается через (13.42).

В качестве простого примера вычисления корреляционной функции методом конформной теории возмущений рассмотрим модель Ли—Янга. В ней имеется всего два примарных оператора $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \mathcal{O}_1 = \varphi$ размерности $-\frac{1}{5}$. Для модели Ли—Янга известно, что массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем масса связана с константой связи согласно [6, 25]

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970 \dots \quad (13.45)$$

Нас будет интересовать парная корреляционная функция $G(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle$. В конформной теории поля для оператора $\varphi(x)$ имеется разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5} \left(1 + \frac{|x|^4}{121} T\bar{T}(0) + O(|x|^{12}) \right) + |x|^{2/5} C_{\varphi\varphi}^{\varphi} (\varphi(0) + O(|x|^8)). \quad (13.46)$$

Структурная константа $C_{\varphi\varphi}^{\varphi}$ равна

$$C_{\varphi\varphi}^{\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2} \gamma^{3/2} \left(\frac{1}{5} \right) \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{5} \right), \quad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \quad (13.47)$$

Интересующие нас вакуумные средние равны

$$\langle \varphi \rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}}, \quad \langle T\bar{T} \rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \quad (13.48)$$

Соответственно,

$$G(x) = C_{\varphi\varphi}^1(x) + \frac{5im^2}{24\sqrt{3}} C_{\varphi\varphi}^{\varphi}(x) - \frac{\pi^2 m^4}{48} C_{\varphi\varphi}^{T\bar{T}}(x) + \dots \quad (13.49)$$

Обратим внимание, что при малых значениях $|x|$ второй член пропорционален $|x|^{2/5}$, в то время как первый — $|x|^{4/5}$. Это значит, что при любых ненулевых значениях константы связи h ультрафиолетовое поведение определяется возмущением, а не конформной теорией поля. Это явление — следствие отрицательной размерности поля $\varphi(x)$.

Структурные функции выражаются в виде (13.33), но проще прямо вычислить интеграл и вычлечь из него инфракрасно расходящуюся часть. В случае $C_{\varphi\varphi}^1(x)$ это можно сделать аналитически и получить

$$C_{\varphi\varphi}^1(x) = |x|^{4/5} + \kappa h \frac{\pi \gamma^2(1/5)}{142 \gamma(2/5)} |x|^{16/5} + O(|x|^{28/5}) = |x|^{4/5} \left(1 + 0.0310 \dots \times (m|x|)^{12/5} + O(|x|^{24/5}) \right). \quad (13.50)$$

В случае $C_{\varphi\varphi}^{\varphi}$ интеграл приходится брать численно и численно же исключать инфракрасную расходимость. Ответ имеет вид

$$C_{\varphi\varphi}^{\varphi}(r) = i\kappa|x|^{2/5} \left(1 + 0.0212\dots \times (mr)^{12/5} + O(|x|^{24/5}) \right). \quad (13.51) \quad \boxed{\text{LY-CPP}}$$

Задачи

1. Покажите, что в (13.32) контрчлены из (13.20) действительно сокращают ультрафиолетовые расходимости. (Не забудьте, что ультрафиолетовые расходимости есть и вблизи точки $y_1 = x$, но они «спрятаны» в суммирование по L .)

2. Оцените ультрафиолетовые расходимости в n том порядке теории возмущений и покажите, что неравенство (13.22) является условием наличия ультрафиолетовой расходимости.

3. Выведите (13.38).

4. Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Покажите, в какой области значений α экспоненциальные операторы $e^{i\alpha\varphi}$ не требуют перенормировки в конформной теории возмущений.

5*. Используя технику, известную вам из конформной теории поля, вычислите интеграл

$$I(a, b; x) = \int d^2y |y|^{2a} |y - x|^{2b}$$

в области его сходимости. Аналитическим продолжением найдите член первого порядка в структурной функции $C_{\varphi\varphi}^1(x)$ теории Ли—Янга.

Лекция 14

Точные формфакторы квазилокальных операторов

lec-FF

Вернемся к алгебре Фаддеева—Замолодчикова. Напомним, что операторы $V_\alpha(\theta)$ определены на двух прямых

$$\theta_i \in \mathcal{C}_\rightarrow \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi) \quad (14.1)$$

cC-two

и удовлетворяю соотношению

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2) - \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\alpha'_1\alpha'_2}^{\alpha_1\alpha_2} V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) - 2\pi \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2} S(-i\pi)_{\alpha'_2\alpha'_1}^{\alpha_2\alpha_1} \delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi), \quad (14.2)$$

VV-uni

При этом операторы на верхней прямой можно интерпретировать как операторы уничтожения, а операторы на нижней прямой — как операторы рождения:

$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi). \quad (14.3)$$

V+-V-r

Можно естественным способом определить нормальное упорядочение:

$$\begin{aligned} :X: &= X, \text{ если } X = V_{\beta_1}^+(\vartheta_1) \cdots V_{\beta_L}^+(\vartheta_L) V^{\alpha_K}(\theta_K) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1), \quad \theta_i, \vartheta_j \in \mathbb{R}; \\ :XV^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)Y: &= \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S_{\alpha'_1\alpha'_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\theta_1 - \theta_2) :XV^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1)Y:. \end{aligned} \quad (14.4)$$

VV-nor

В случаях, когда $S(\theta) = \pm 1$, алгебра Фаддеева—Замолодчикова сводится к алгебре бозонных или фермионных операторов, описывающих систему свободных бозонов или фермионов соответственно.

Давайте определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_\rightarrow} \frac{d\theta_i}{2\pi} e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} :V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \quad (14.5)$$

0-ffde

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1, \dots, \theta_N)$ комплексных переменных θ_i , называемых *формфакторами* оператора O . Здесь

$$P_\alpha^0(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch} \theta, \quad P_\alpha^1(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^\theta}$ с любым положительным τ .

Очевидно, эти операторы являются трансляционно-инвариантными в следующем смысле

$$i\partial_\mu O(x) = [O(x), P_\mu], \quad (14.6)$$

0-tran

где P_μ — оператор импульса. Так как $P_0 = H$ является гамильтонианом, оператор $O(x)$ является решением уравнения Гайзенберга. Легко видеть, что на вещественной оси функции F_O являются матричными элементами вида

$$\langle \text{vac} | O(x) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad \theta_1 > \dots > \theta_n. \quad (14.7)$$

0-vac-

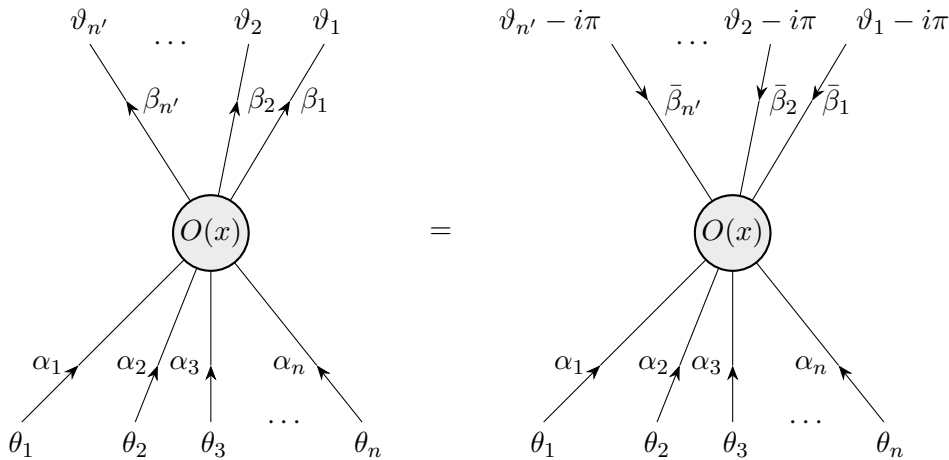
Более общо,

$$\begin{aligned} \beta_1 \dots \beta_{n'} \langle \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n'} | O(x) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \sum_{\{\beta'_i\}} e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i) + ix \sum_{i=1}^{n'} P_{\beta'_i}(\vartheta_i)} \prod_{i=1}^{n'} C_{\beta_i \beta'_i} \\ &\times F_O(\theta_1 - i0, \dots, \theta_n - i0, \vartheta_{n'} - i\pi + i0, \dots, \vartheta_1 - i\pi + i0)_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta'_1 \dots \beta'_1}, \end{aligned} \quad (14.8)$$

0-mate

если $\theta_1 > \dots > \theta_n$, $\vartheta_1 > \dots > \vartheta_{n'}$. Обратим внимание, что функции F_O совпадают с матричными элементами только в точках, где все θ_i различны. Там, где они совпадают, в матричных элементах возникают контактные члены, которые легко извлекаются из определения (14.5). Бесконечно-малые добавки будут пояснены позже.

Графически это равенство можно изобразить так:



Представление оператора в виде разложения по произведениям $V_\alpha(\theta)$ позволяет найти выражения для корреляционных функций в виде *спектральных разложений*. Для двухточечной корреляционной функции, например, имеем

$$\langle O_1(x)O_2(0) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}, \{\alpha'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n \theta}{(2\pi)^n} e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} \prod_{i=1}^n C^{\alpha_i \alpha'_i} \times F_{O_1}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} F_{O_2}(\theta_n - i\pi, \dots, \theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n \dots \alpha'_1}. \quad (14.9)$$

2point

Эта формула получается либо коммутацией операторов $V_\alpha(\theta)$, либо вставкой разложения единицы по собственным векторам. В последнем случае экспоненциальный множитель от суммы импульсов имеет смысл собственного значения оператора эволюции. Ясно, что эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции, только когда ряд убывает. Это верно для больших расстояний между операторами. Действительно, рассмотрим операторы, разделенные мнимым временем τ . Тогда множитель

$$\left| e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} \right| = e^{-\tau \sum_i m_{\alpha_i} \text{ch } \theta_i} \leq e^{-\tau \sum_i m_{\alpha_i}}$$

экспоненциально быстро убывает с числом частиц, причем тем быстрее, чем больше τ .

Из равенства (14.8) немедленно следует условие эрмитовости оператора O :

$$O^+(x) = O(x) \Leftrightarrow (F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n})^* = \sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n'} C_{\alpha_i \alpha'_i} \cdot F_O(\theta_n - i\pi, \dots, \theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n \dots \alpha'_1} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \theta_i \in \mathbb{R}). \quad (14.10)$$

0-herm

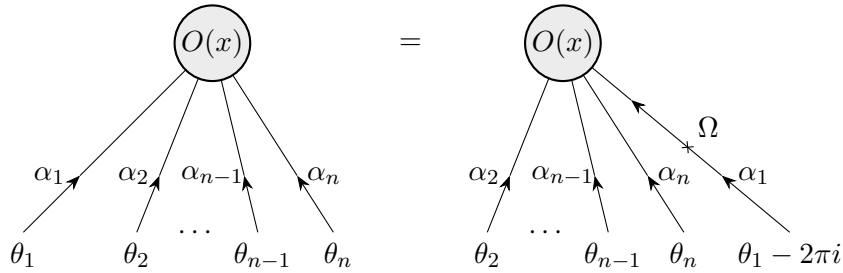
Оператор $O(x)$, определенный в (14.5), является трансляционно-инвариантным, но для функций F_O общего вида он не является локальным. Давайте попробуем наложить условия, которые обеспечили бы в каком-то смысле его локальность. Прежде всего, заметим, что мы можем понимать формулу (14.8) как результат применения кроссинг-симметрии к формуле (14.7). Давайте потребуем, чтобы двукратное применение кроссинг-симметрии переводило бы формфактор в себя. Постулируем *циклическое свойство*:

$$F_O(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \sum_{\alpha'_1} \Omega_{\alpha'_1}^{\alpha_1}(O) F_O(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - 2\pi i)_{\alpha_2 \dots \alpha_n \alpha'_1}. \quad (14.11)$$

F0-cyc

Здесь $\Omega(O)$ — некоторая постоянная матрица, смысл которой мы проясним позднее. По кинематическим соображениям мы потребуем, чтобы матрица имела ненулевые матричные элементы только для

частиц одинаковой массы. Важно, что при двукратном применении кроссинг-симметрии мы переместили быструю θ_n из последней позиции в первую:



Далее, определим лоренцев спин s_O оператора $O(x)$ следующим свойством:

$$F_O(\theta_1 + \lambda, \dots, \theta_n + \lambda)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e^{s_O \lambda} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad (14.12)$$

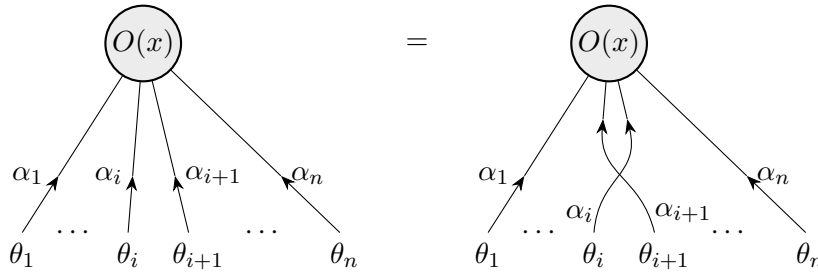
FO-spi

Давайте теперь фиксируем аналитические свойства формфакторов, согласовав их с аналитическими свойствами волновой функции, заданными в лекции 10, то есть потребовав, чтобы за пределами домена, определенного в (14.7), сама формула оставалась верной. Именно, потребуем выполнения *перестановочного свойства*:

$$F_O(\dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots)_{\dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots} = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})_{\alpha_i \alpha_{i+1}}^{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} F_O(\dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots)_{\dots \alpha'_{i+1} \alpha'_i \dots} \quad (14.13)$$

FO-tra

Это требование эквивалентно требованию, чтобы подынтегральное выражение в (14.5) было симметрично по отношению к перестановкам $(\theta_i, \alpha_i) \leftrightarrow (\theta_j, \alpha_j)$. Графически уравнение (14.13) представляется так (суммирование по индексам на внутренних линиях здесь и ниже подразумевается):



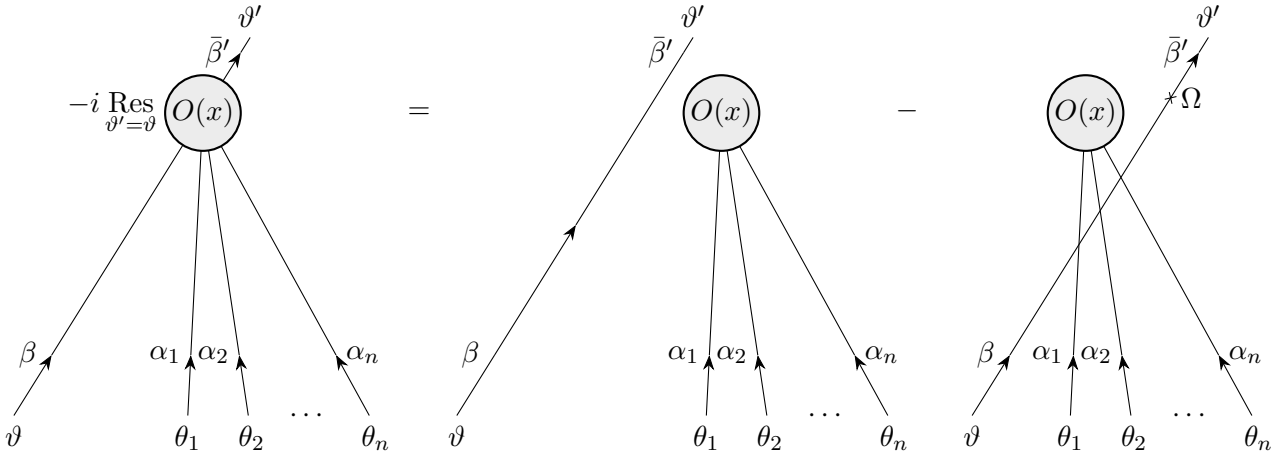
Требования (14.11)–(14.13) описывают свойства функций F_O при фиксированном числе частиц каждого сорта (каждого значения массы). В то же время, ясно, что проверка взаимной локальности двух операторов требует коммутации каждой пары компонент в разложениях (14.5). Было бы странно, если бы коммутативности можно было достичь почленно.

Постулируем два свойства, связывающих формфакторы с различными числами частиц. Положим, что на физическом листе $0 \leq \text{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \leq \pi$ из особенностей имеются только простые полюсы двух типов. Первый тип полюсов, *кинематические полюсы*, расположены в точках $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$ и имеют вычеты, определяемые уравнением

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\vartheta' = \vartheta} F_O(\vartheta' + i\pi, \vartheta, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta' \beta \alpha_1 \dots \alpha_n} &= \\ &= i \sum_{\beta'', \{\alpha'_i\}} C_{\beta' \beta''} \left(\delta_{\beta}^{\beta''} \delta_{\alpha}^{\alpha'} - \sum_{\{\gamma_i\}} \Omega_{\gamma_n}^{\beta''}(O) \delta_{\beta}^{\gamma_0} \prod_{i=1}^n S(\vartheta - \theta_i)_{\gamma_{i-1}}^{\alpha'_i} \right) F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}. \end{aligned} \quad (14.14)$$

FO-kin

Графически это уравнение записывается так:



Вместе с уравнением (14.13) это уравнение задает все кинематические полюсы.

В левой части мы можем перенести частицу с быстротой $v' + i\pi$ из первой позиции в последнюю, используя циклическое свойство (при этом ее быстрота станет равной $v' - i\pi$), а затем, используя перестановочное свойство протаскать ее на вторую позицию. Тогда первое и второе слагаемое в правой части поменяются местами. Для самосогласованности следует потребовать, чтобы

$$\sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha'}^{\alpha}(O) \Omega_{\beta'}^{\beta}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \quad (14.15)$$

COmega

Всегда можно выбрать базис из нескольких нейтральных и нескольких заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид с блоками 1×1 вида ± 1 (нейтральные частицы) и 2×2 вида $\pm \sigma^2$ (заряженные частицы). Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализировать, $\Omega = \text{diag}(\Omega_{\alpha})$, так что

$$\Omega_{\alpha} \Omega_{\bar{\alpha}} = 1.$$

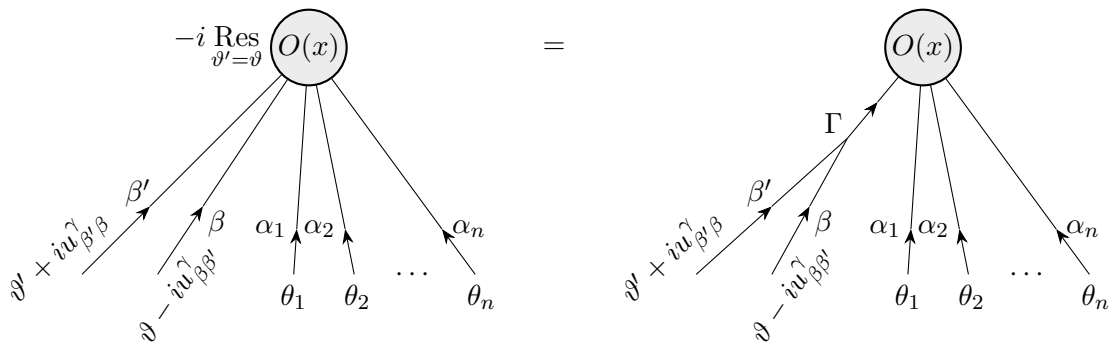
В частности, для нейтральных частиц $\Omega_{\alpha} = \pm 1$. Кроме того, в C -симметричной модели $\Omega_{\bar{\alpha}} = \Omega_{\alpha}^*$, так что $|\Omega_{\alpha}| = 1$.

Второй тип полюсов, *динамические полюсы*, связан с полюсами S -матрицы, отвечающим связанным состояниям: $\theta_i - \theta_{i+1} = i(u_{12}^3 + u_{21}^3)$. Вычеты в этих полюсах определяются уравнением

$$\text{Res}_{v'=v} F_O(v' + iu_{\beta'\beta}^{\gamma}, v - iu_{\beta\beta'}^{\gamma}, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\dots\alpha_n} = i \sum_{\gamma} \Gamma_{\beta'\beta}^{\gamma} F_O(v, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\gamma\alpha_1\dots\alpha_n}. \quad (14.16)$$

FO-dyn

Графически это уравнение имеет вид:



Обратим внимание на то, что кинематический полюс может быть представлен как динамический полюс, в котором частица и античастица связываются в фиктивную частицу нулевой массы. Наличие в вычете двух вкладов связано с циклическим свойством (14.11) и положением полюса на краю физического листа.

Рассмотрим одновременное произведение двух операторов $O_1(x)O_2(y)$. Для определенности положим, что оператор O_1 находится правее O_2 :

$$x^0 = y^0, \quad x^1 > y^1. \quad (14.17)$$

Чтобы формулы выглядели короче, введем такие обозначения. Для любого набора переменных $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем обозначать $\overrightarrow{\xi}$ последовательность ξ_1, \dots, ξ_k , а $\overleftarrow{\xi}$ последовательность ξ_k, \dots, ξ_1 . Там, где порядок будет неважен, будем просто писать ξ . Кроме того, через $(\overrightarrow{\xi})_i$, $(\overleftarrow{\xi})_i$, $(\xi)_i$ будем обозначать соответствующую последовательность без i го элемента. Кроме того, выражения типа $C^{\alpha\beta}$ будут обозначать $\prod_i C^{\alpha_i\beta_i}$. Итак,

$$\begin{aligned} O_1(x)O_2(y) &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\}, \dots, \{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k \xi}{(2\pi)^k} \int_{C_{\Rightarrow}} \frac{d^m \theta}{(2\pi)^m} \int_{C_{\Rightarrow}} \frac{d^n \vartheta}{(2\pi)^n} e^{-iP_{\gamma}(\xi)(x-y) - iP_{\alpha}(\theta)x - iP_{\beta}(\vartheta)y} \\ &\times C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\xi - i0}, \overrightarrow{\theta})_{\overrightarrow{\gamma} \overleftarrow{\alpha}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi - i\pi + i0})_{\overrightarrow{\beta} \overleftarrow{\gamma'}} \\ &\times :V^{\alpha_m}(\theta_m) \dots V^{\alpha_1}(\theta_1) V^{\beta_n}(\vartheta_n) \dots V^{\beta_1}(\vartheta_1):. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Бесконечно-малые слагаемые к ξ_i и $\xi_i - i\pi$ добавлены таким образом, чтобы контуры интегрирования при перемножении матричных элементов правильно обходили кинематические полюсы: во входящем состоянии контур должен проходить под всеми кинематическими полюсами, отвечающими выходящему состоянию, а в выходящем состоянии — над всеми полюсами, отвечающими входящему состоянию.

Теперь сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$. Множитель $e^{-iP_{\gamma}(\xi)(x-y)}$ для $0 < \text{Im } \xi_i < \pi$ стремится к нулю при $\xi_i \rightarrow \pm\infty$ в силу (14.17), так что он не будет нарушать сходимость интегралов. Но интегралы будут зацепляться за кинематические и динамические полюсы. При этом контур мы проведем так, чтобы после сдвига $\xi_i - i0$ в первом формфакторе перешли $\xi_i + i\pi + i0$, непременно зацепившись за все кинематические полюсы, а во втором формфакторе $\xi_i - i\pi + i0$ перешло в $\xi_i - i0$, не зацепившись ни за один кинематический полюс.

Давайте возьмем ξ_k и найдем разность $\left(\int_{\mathbb{R}-i0} - \int_{\mathbb{R}+i\pi+i0} \right) \frac{d\xi_k}{2\pi}$ от всего подынтегрального выражения. Это будет сумма вычетов, умноженная на i . Рассмотрим вычет в полюсе, отвечающем кинематическому полюсу, связанному с θ_1 :

$$\begin{aligned} &- e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y) - iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x - i(P_{\beta}(\vartheta) + P_{\alpha_1}(\theta_1))y} \\ &\times \sum_{\{\alpha\}, \dots, \{\gamma''\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1} \left((\overrightarrow{\xi - i0})_k, (\overrightarrow{\theta})_1 \right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overleftarrow{\alpha'})_1} F_{O_2} \left(\overrightarrow{\vartheta}, \theta_1, (\overleftarrow{\xi - i\pi + i0})_k \right)_{\overrightarrow{\beta}, \alpha'_1, (\overleftarrow{\gamma'})_1} \\ &\times \left(\delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\gamma}^{\gamma''} - \delta_{\alpha_1}^{\delta_1} \Omega_{\delta_{n+k}}^{\alpha'_1} (O_1) \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)_{\delta_{n+i}}^{\delta_{n+i+1} \gamma''_i} \prod_{i=2}^m S(\theta_1 - \theta_i)_{\delta_{i-1}}^{\delta_i \alpha'_i} \right) : \overleftarrow{V}^{\alpha}(\theta) \overleftarrow{V}^{\beta}(\vartheta) :. \end{aligned}$$

Буква θ_1 перекечевала из первого формфактора во второй, превращая его в ϑ_{n+1} . Мы видим, что этот вклад соответствует значениям $k' = k - 1$, $m' = m - 1$, $n' = n + 1$. При этом первое слагаемое в скобках сокращает соответствующий член в разложении, «заменяя» его на второй член в скобках. При этом произведение матриц $S(\theta_1 - \theta_i)$ во втором слагаемом «подтаскивает» $V(\theta_1)$ к $V(\vartheta_n)$. Произведение же матриц $S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)$ протаскивает θ_i в формфакторе F_{O_2} до конца направо. В результате такой процедуры эффективно каждое слагаемое суммы умножается на $\Omega_{\alpha_1}^{\alpha'_1}(O_1)$, а ϑ_n в F_{O_2} протаскивается до конца направо через буквы ξ_i . Возможность выбрать разные ξ_i и θ_j в этой процедуре в качестве «начальных» просто исправляет комбинаторные множители.

Продолжая процедуру, мы домножаем F_{O_2} последовательно на все $\Omega_{\beta_i}^{\beta'_i}(O_1)$, меняем местами $\overleftarrow{V}^{\alpha}(\theta)$ и $\overleftarrow{V}^{\beta}(\vartheta)$ в нормально-упорядоченном произведении и перемещаем $\xi - i\pi$ справа налево в F_{O_2} . После этого остается перенести все ξ_i в F_{O_1} по циклическому свойству, что домножит F_{O_1} на множители $\Omega_{\gamma_i}^{\gamma''_i}(O_1)$.

Теперь нужно разобраться с динамическими полюсами. Нетрудно понять, что динамические полю-

сы сокращают друг друга. Действительно, ξ_k «зацепляется» за два полюса:¹

$$\begin{aligned}\xi_k^{(1)} &= \theta_1 + iu_{\gamma_k\alpha_1}^\delta + iu_{\alpha_1\gamma_k}^\delta, \\ \xi_k^{(2)} &= \vartheta_n + i\pi - iu_{\beta_n\gamma'_k}^{\delta'} - iu_{\gamma'_k\beta_n}^{\delta'}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что в формфакторе F_{O_1} результат слияния $\xi_k^{(1)}$ и θ_1 даст быстроту

$$\theta'_1 = \theta_1 + iu_{\gamma_k\alpha_1}^\delta,$$

а в формфакторе F_{O_1} это даст

$$\vartheta_{k+1} = \xi_k^{(1)} - i\pi = \theta_1 - i(\pi - u_{\gamma_k\alpha_1}^\delta - u_{\alpha_1\gamma_k}^\delta) = \theta_1 - iu_{\gamma_k\bar{\delta}}^{\bar{\alpha}_1}$$

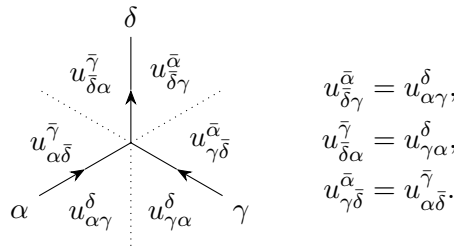
Аналогично, результат слияния ϑ_n с $\xi_k^{(2)} - i\pi$ даст в первом формфакторе

$$\theta_0 = \xi_i^{(2)} = \vartheta_n + i(\pi - u_{\beta_n\gamma'_k}^{\delta'} - iu_{\gamma'_k\beta_n}^{\delta'}) = \vartheta_n + iu_{\beta_n\bar{\delta}'}^{\bar{\gamma}'_k}$$

и во втором формфакторе

$$\vartheta'_k = \xi_i^{(2)} - i\pi + iu_{\gamma_k\beta_n}^{\delta'} = \vartheta_n - iu_{\beta_n\gamma'_k}^{\delta'}.$$

Эти манипуляции легко получаются из такой картинки для первого полюса:



Для второго полюса надо заменить α на β , а к γ и δ пририсовать штрихи.

Теперь выберем такую пару слагаемых, для которых

$$\begin{aligned}m \equiv m^{(1)} = m^{(2)} + 1, \quad n \equiv n^{(2)} = n^{(1)} + 1, \quad k \equiv k^{(1)} = k^{(2)}, \\ \vartheta_n^{(2)} = \theta_1^{(1)}, \quad \beta_n^{(2)} = \alpha_1^{(1)}, \quad \gamma'_k{}^{(2)} = \bar{\delta}^{(1)}, \quad \delta'^{(2)} = \bar{\gamma}_k^{(1)}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\theta_0^{(2)} = \theta_1^{(1)}, \quad \vartheta'_k{}^{(2)} = \vartheta_{k+1}^{(1)}.$$

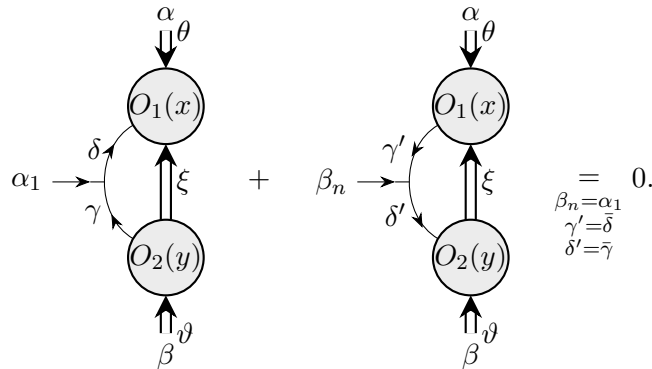
С учетом равенства

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{\beta', \gamma'} \Gamma_{\alpha\gamma'}^{\beta'} C_{\beta\beta'} C^{\gamma\gamma'}, \tag{14.19}$$

Gamma-

которое следует из кроссинг-симметрии, эти два слагаемых совпадают с точностью до знака. Поскольку они содержат множители $(\xi_k - \theta_1)^{-1}$ и $(\vartheta_n - \xi_k + i\pi)^{-1}$ соответственно, знаки будут разными, и слагаемые сократят друг друга.

Графически это выглядит так:



¹На самом деле я упрощаю. Речь идет, конечно, о наборах полюсов.

Итак, вклады динамических полюсов сокращают друг друга, а вклады кинематических, суммированные вместе дают:

$$\begin{aligned}
O_1(x)O_2(y) &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\}, \dots, \{\gamma_i''\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k \xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d^m \theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d^n \vartheta}{(2\pi)^n} e^{-iP_{\gamma}(\xi)(x-y) - iP_{\alpha}(\theta)x - iP_{\beta}(\vartheta)y} \\
&\times \Omega_{\gamma'}''(O_1) \Omega_{\beta}''(O_1) C^{\gamma\gamma'} F_{O_2}(\overrightarrow{\xi - i0}, \overrightarrow{\vartheta})_{\overrightarrow{\gamma}\overrightarrow{\beta}\overrightarrow{\gamma}} F_{O_1}(\overrightarrow{\theta}, \overleftarrow{\xi - i\pi + i0})_{\overleftarrow{\alpha}\overleftarrow{\gamma}} \\
&\times :V^{\beta n}(\vartheta_n) \dots V^{\beta 1}(\vartheta_1) V^{\alpha m}(\theta_m) \dots V^{\alpha 1}(\theta_1):.
\end{aligned} \tag{14.20}$$

0102-p

То, что мы получили, это почти произведение $O_2(y)O_1(x)$. Чтобы действительно получить это произведение, наложим условие. Будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны, если для всех n выполняются равенства

$$\sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^n \Omega_{\alpha_i}^{\alpha_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (I, J) = (1, 2), (2, 1). \tag{14.21}$$

0102-c

Здесь $C(O_I, O_J)$ — числа. В блочно-диагональном базисе частиц легко видеть, что это не такое уж ограничительное условие. Оно просто говорит о том, что для любых n и наборов $\{\alpha_i\}$, для которых имеются ненулевые формфакторы F_{O_J} произведение $\prod_{i=1}^n \Omega_{\alpha_i}(O_I)$ не зависит от n и $\{\alpha_i\}$. Тогда одновременные коммутаторы операторов O_1 и O_2 выглядят так:

$$O_1(x)O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0, x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0, x^1 < y^1. \end{cases} \tag{14.22}$$

0102-c

Это есть основная теорема, доказанная Федором Смирновым. Подробное доказательство и разбор следствий этой теоремы можно найти в книге [26]. Условие сходимости интегралов, условие цикличности (14.11), лоренц-инвариантность в форме (14.12), перестановочное условие (14.13) и условия кинематического (14.14) и динамического (14.16) полюсов называются *формфакторными аксиомами* или *аксиомами Каровского–Вайша–Смирнова*. Кроме теоремы Смирнова о взаимной квазилокальности есть еще *гипотеза Смирнова*, согласно которой все квазилокальные операторы в теории поля могут быть найдены как решения формфакторных аксиом.

Величину $\omega(O_1, O_2)$, определяемую формулой

$$e^{2\pi i \omega(O_1, O_2)} = \Omega(O_1, O_2) = C(O_1, O_2)C(O_2, O_1) \tag{14.23}$$

omega

называют *показателем взаимной локальности* операторов O_1 и O_2 . Величину $\Omega(O_1, O_2)$ обычно называют *индексом взаимной локальности*. Если показатель взаимной локальности равен нулю, операторы O_1 и O_2 называют *взаимно-локальными*. Нетрудно проверить, что если оператор $O(x)$ самолокален (взаимно-локален с собой) и имеет целый или полуцелый спин, то

$$C(O, O) = (-1)^{2s_O}, \tag{14.24}$$

C-spin

то есть коммутирует с собой, если его спин целый, и антикоммутирует, если его спин полуцелый.

Теперь нетрудно понять смысл матрицы $\Omega_{\beta}^{\alpha}(O)$. Давайте рассмотрим оператор

$$A^{\alpha}(x) = \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP_{\alpha}(\theta)x} V^{\alpha}(\theta) + \dots,$$

где точки обозначают вклады высших формфакторов. Этот оператор представляет собой бозонный (нулевого спина) оператор, уничтожающий бозон в данной точке. Хотя этот оператор определен неоднозначно, его коммутатор с любым другим оператором O , с которым он взаимно-квазилокален хорошо определен. Поскольку $F_{A^{\alpha}}(\theta)_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, оператор A^{α} может быть взаимно-квазилокален только с оператором, для которого матрица $\Omega_{\beta}^{\alpha}(O)$ в выбранном базисе диагональна. Тогда числа

$$\Omega_{\alpha}(O) = C(O, A^{\alpha}) = \Omega(O, A^{\alpha}) \tag{14.25}$$

Omega

имеют простой смысл индексов взаимной локальности оператора O с бозонным оператором, уничтожающим элементарное возбуждение α .

Теперь рассмотрим простой пример — скейлинговую модель Изинга при нулевом магнитном поле, то есть Φ_{13} -возмущение минимальной конформной модели $M(3, 4)$ ($c = 1/2$) [27, 28]. В этой модели, как мы помним, имеется один свободный массивный фермион или, на бозонном языке, один бозон с матрицей рассеяния $S(\theta) = -1$. Это значит, что алгебра Фаддеева—Замолодчикова для этой модели имеет вид фермионной алгебры:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Поле свободного фермиона $\psi_{\pm}(x)$ имеет вид

$$\psi_{\pm}(x) = \sqrt{m} \int_{C_{\Rightarrow}} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{2})} V(\theta), \quad s_{\psi_{\pm}} = \pm \frac{1}{2}, \quad \Omega_1(\psi_{\pm}) = -1. \quad (14.26)$$

Формфакторы оператора $F_{\psi_{\pm}}(\theta) = \sqrt{m}e^{\pm \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{2})}$ при $n = 1$ и ноль во всех остальных случаях, очевидно, удовлетворяют формфакторным аксиомам. Пользуясь (14.10), нетрудно проверить эрмитовость операторов $\psi_{\pm}(x)$.

Отсюда легко найти компоненты тензора энергии-импульса. В пространстве Минковского имеем

$$T_{++} = \frac{i}{2} : \psi_- \partial_+ \psi_- :, \quad T_{--} = -\frac{i}{2} : \psi_+ \partial_- \psi_+ :, \quad T_{+-} = \frac{im}{2} : \psi_+ \psi_- :, \quad (14.27)$$

причем нормальное упорядочение совпадает с нормальным упорядочением (14.4). Учитывая, что

$$P_+(\theta) = \frac{m}{2} e^{-\theta}, \quad P_-(\theta) = -\frac{m}{2} e^{\theta}, \quad (14.28)$$

получаем, что единственные ненулевые формфакторы компонент тензора энергии-импульса равны

$$\begin{aligned} F_{T_{++}}(\theta_1, \theta_2) &= im^2 e^{-\theta_1 - \theta_2} \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{++}} &= -2, & \Omega_1(T_{++}) &= 1, \\ F_{T_{--}}(\theta_1, \theta_2) &= im^2 e^{\theta_1 + \theta_2} \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{--}} &= 2, & \Omega_1(T_{--}) &= 1, \\ F_{T_{+-}}(\theta_1, \theta_2) &= im^2 \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{+-}} &= 0, & \Omega_1(T_{+-}) &= 1. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Эти ответы хорошо нам известны из теории свободного Майорановского фермиона. Найдем теперь нетривиальные формфакторы. Поскольку связанных состояний в этой задаче нет, а кинематический полюс связывает формфакторы только для чисел частиц, отличающихся на два, мы можем разбить все операторы на четные, для которых все формфакторы с нечетным числом частиц равны нулю, и нечетные, для которых все формфакторы с четным числом частиц равны нулю. Простейшие такие операторы мы обозначим $\sigma(x)$ и $\mu(x)$. Их формфакторы равны

$$F_{\sigma}(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = i^n G_{\sigma} m^{1/8} \prod_{i < j}^{2n} \operatorname{th} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_{\sigma} = 0, \quad \Omega_1(\sigma) = -1, \quad (14.30)$$

$$F_{\mu}(\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_{\mu} m^{1/8} \prod_{i < j}^{2n+1} \operatorname{th} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_{\mu} = 0, \quad \Omega_1(\mu) = 1, \quad (14.31)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Постоянные G_{σ} и G_{μ} являются безразмерными нормировочными множителями для этих операторов. Их нельзя извлечь непосредственно из формфакторных аксиом. Размерные константы $m^{1/8}$ выбраны из отождествления этих операторов с оператором параметра порядка и параметром беспорядка в модели Изинга чуть ниже точки перехода.

Теперь изучим вопрос о взаимной локальности этих операторов. Очевидно, операторы ψ_{\pm} — фермионные, а все остальные перечисленные операторы — бозонные, причем все операторы самолокальны. Заметим, что для нечетных операторов $C(O, O) = \Omega_1(O)$, а для четных операторов всегда $C(O, O) = 1$. Сопоставляя это с (14.24), приходим к выводу, что не может быть бозонных нечетных операторов с $\Omega_1(O) = -1$, фермионных нечетных операторов с $\Omega_1(O) = 1$, а также фермионных четных операторов. Поэтому остаются следующие классы:

$\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.

$\{\mu\}$: Бозонные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Семейство включает μ .

$\{\sigma\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает σ .

$\{\psi\}$: Фермионные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает ψ_{\pm} .

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$\begin{aligned} \varepsilon(x)\varepsilon(y) &= \varepsilon(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\mu(y) &= \mu(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\sigma(y) &= \sigma(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\psi(y) &= \psi(y)\varepsilon(x), \\ \mu(x)\mu(y) &= \mu(y)\mu(x), & \mu(x)\sigma(y) &= \text{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), & \mu(x)\psi(y) &= \text{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\ \sigma(x)\sigma(y) &= \sigma(y)\sigma(x), & \sigma(x)\psi(y) &= -\text{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\ \psi(x)\psi(y) &= -\psi(y)\psi(x). \end{aligned} \quad (14.32)$$

Эти коммутационные соотношения позволяют разбить все квазилокальные операторы модели Изинга на три сектора взаимно-локальных операторов:

«бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;

«фермионный» сектор $\{\varepsilon, \psi\}$;

«двойственный бозонный» сектор $\{\varepsilon, \sigma\}$.

В «бозонном» секторе оператором, рождающим частицу, является бозонный оператор $\mu(x)$, в «фермионном» — фермионные операторы $\psi_{\pm}(x)$, а в «двойственном бозонном» секторе вообще таких операторов нет. Условно можно сказать, что «бозонный» сектор описывает систему ниже точки перехода, «двойственный бозонный» сектор — выше точки перехода, а «фермионный» сектор описывает вспомогательный майорановский фермион, с помощью которого осуществляется решение модели Изинга. На самом деле, конечно, все эти объекты и представления равноправны. Более того, описанная только что классификация операторов верна для *любой* модели с одной нейтральной частицей без внутренних состояний и без связанных состояний, например, для модели sh-Гордона. В модели, в которой имеются связанные состояния, каких-то секторов может не быть. В модели Ли—Янга, например, со связанным состоянием $1 + 1 \rightarrow 1$, во-первых, операторы нельзя разделить на четные и нечетные, а во-вторых, непременно $\Omega_1(O) = 1$. Поэтому в этой модели имеется только один, «бозонный» сектор.

Итак, решение уравнений на формфакторы, в принципе, позволяет получить любой квазилокальный оператор в теории, однако отождествление таких решений с операторами, определенными в лагранжевом подходе или в рамках конформной теории возмущений, представляет отдельную сложную проблему, которая в общем виде не решена ни для одной теории со взаимодействием.

В качестве примера формфакторов для несвободной теории приведу формфакторы экспоненциальных операторов модели sh-Гордона. Во-первых, определим так называемый минимальный двухчастичный формфактор $R(\theta)$, удовлетворяющий условиям

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S_{11}(\theta)R(-\theta), \quad (14.33)$$

и не имеющий особенностей на полосе $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi$. Действительно, функция $F(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_1 - \theta_2)$ удовлетворяет формфакторным аксиомам для операторов с $\Omega_1(O) = 1$. Функция $R(\theta)$ легко строится по правилу:

$$S(\theta) = \exp i \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t \quad \Rightarrow \quad R(\theta) = R_0 \exp \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \text{sh } \pi t}, \quad (14.34)$$

где R_0 — произвольная константа. В случае модели sh-Гордона $f(t) = O(t^2)$ и константу R_0 удобно выбрать так, чтобы она сокращала -1 в скобках:

$$R(\theta) = \exp \left(4 \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \frac{\text{sh } \frac{\pi t}{2} \text{sh } \frac{\pi p t}{2} \text{sh } \frac{\pi(p+1)t}{2}}{\text{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi)t \right). \quad (14.35)$$

(Напомним: $0 < p < 1$.) В этом случае произведение

$$R(\theta)R(\theta + i\pi) = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \quad f(z) = 1 + \frac{2i \sin \pi p}{z - z^{-1}}. \quad (14.36)$$

Заметим, что

$$\frac{f(e^\theta)}{f(e^{-\theta})} = S_{11}(\theta). \quad (14.37)$$

Введем также константы

$$\rho = (-R(i\pi) \sin \pi p)^{-1/2}. \quad (14.38)$$

Теперь формфакторы из «бозонного» сектора можно записать в виде

$$F_O(\theta_1, \dots, \theta_n) = \rho^n \prod_{i < j}^n R(\theta_i - \theta_j) \cdot J_O(e^\theta_1, \dots, e^\theta_n), \quad (14.39)$$

где $J_O(x_1, \dots, x_n)$ — рациональные симметричные функции с полюсами в точка $x_i = -x_j$:

$$\operatorname{Res}_{z'=-z} J_O(z', z, x_1, \dots, x_n) = -iz \sin \pi p \cdot \left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right) \right) J(x_1, \dots, x_n). \quad (14.40)$$

Множители $f(z/x_i) = f(e^{\vartheta-\theta_i})$ в первом слагаемом сокращают вклады от произведений $R(\vartheta - \theta_i)R(\vartheta - \theta_i + i\pi)$ а функции $f(x_i/z)$ во втором слагаемом поделенные на $f(z/x_i)$ дают произведение S -матриц из (14.14). Рассмотрим решение вида

$$J_a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I_n = I_- \sqcup I_+} e^{i\pi a(\#I_- - \#I_+)} \prod_{\substack{i \in I_- \\ j \in I_+}} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right), \quad (14.41)$$

где $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а сумма берется по всем разбиениям этого множества на два непересекающиеся подмножества. Оказывается, если положить

$$a = \frac{1}{2} - \alpha \sqrt{\frac{(-p)(1+p)}{2}},$$

то функции J_a определяют по формуле (14.39) формфакторы оператора $e^{\alpha\varphi}/\langle e^{\alpha\varphi} \rangle$.

Задачи

1. Покажите, что если набор функций $\{F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ удовлетворяет формфакторным аксиомам, то и набор функций $\{F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$, где I_s — собственные значения локального интеграла движения \hat{I}_s , удовлетворяет формфакторным аксиомам и отвечает оператору $O'(x) = [O(x), \hat{I}_s]$ при целых значениях спина s .

2. Покажите, что выражения (14.29), (14.30), (14.31) удовлетворяют формфакторным аксиомам.

3. Рассмотрим свободный бозон $S(\theta) = 1$. Введем операторы

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathcal{C}_\Rightarrow} \frac{d\theta}{2\pi} V(\theta) e^{-iP(\theta)x},$$

$$\sigma(x) = :e^{\rho(x)}:,$$

$$\psi_\pm(x) = \sqrt{m} \int_{\mathcal{C}_\Rightarrow} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta - \frac{i\pi}{2})} :V(\theta)e^{\rho(x)}:, \quad \rho(x) = - \int_{\mathcal{C}_\Rightarrow} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \frac{e^{-iP(\theta_1, \theta_2)x}}{\operatorname{ch} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} V(\theta_1)V(\theta_2).$$

Покажите, что все эти операторы квазилокальны, причем оператор $\varphi(x)$ принадлежит классу $\{\mu\}$, оператор $\sigma(x)$ принадлежит классу $\{\sigma\}$, а операторы $\psi_\pm(x)$ — классу $\{\psi\}$.

4. Выведите условие (14.40) из условия кинематического полюса (14.14). Покажите, что выражение (14.41) удовлетворяет этому условию и не имеет других полюсов.

5*. Покажите, что функции (14.41) удовлетворяют рекурсионному соотношению

$$J_a(z, x_1, \dots, x_n) = 2 \cos \pi a \cdot J_a(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i R_a(z; x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)}{z + x_i}, \quad (14.42) \quad \boxed{\text{Ja-rec}}$$

где

$$R_a(z; x_1, \dots, x_n) = -i \sin \pi p \cdot \left(\prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right) \right) J_a(x_1, \dots, x_n), \quad (14.43) \quad \boxed{\text{Ja-rec}}$$

с начальным условием

$$J_a(\emptyset) = 1. \quad (14.44) \quad \boxed{\text{Ja-rec}}$$

Покажите отсюда, что выполняется *отражательное соотношение*

$$J_a(x_1, \dots, x_n) = J_{-a}(x_1, \dots, x_n),$$

а формфакторы единичного оператора, кроме нуль-частичного, обращаются в нуль:

$$J_{1/2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Литература

- erlitz [1] J. M. Kosterlitz, The critical properties of the two-dimensional xy model, *J. Phys.* C7 (1974) 1046
- AGG [2] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, G. Grinstein, Renormalization group analysis of the phase transition in the 2D Coulomb gas, Sine-Gordon theory and XY-model, *J. Phys.* A13 (1980) 585
- Thirring [3] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91
- Coleman [4] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088
- Mandelstam [5] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026
- Zamolodchikov [6] Al. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125
- Zamolodchikov [7] A. B. Zamolodchikov, *Adv. Stud. Pure Math.* **19** (1989) 641
- ZZ [8] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- Lukyanov [9] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
- Cvetic [10] А. М. Цвельик, Квантовая теория поля в теории конденсированного состояния.
- SJM [11] М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива, Голономные квантовые поля, М., «Мир», 1983.
- Godin [12] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987
- BIK [13] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992
- FF [14] B. Feigin, E. Frenkel, Integrals of motion and quantum groups, *Lect. Notes Math.* **16** (1993) 139 [arXiv:hep-th/9301039]
- BLZ [15] V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996) 381 [arXiv:hep-th/9412229]; *Commun. Math. Phys.* **190** (1997) 247 [arXiv:hep-th/9604044]; *Commun. Math. Phys.* **200** (1999) 297 [arXiv:hep-th/9805008]
- FZ [16] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 1025
- YY [17] C. N. Yang and C. P. Yang, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1115
- KlMe1 [18] T. Klassen and E. Melzer, *Nucl. Phys.* **B350** (1990) 635
- DMB [19] R. Dashen, S.-K. Ma, H. J. Bernstein, *Phys. Rev.* **187** (1969) 345
- Nak [20] T. Nakanishi, Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case, arXiv:0909.5480
- LZ-CPT [21] Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B348** (1991) 619
- LZ [22] S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B493** (1997) 571 [arXiv:hep-th/9611238]
- FLZZ [23] V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 652 [arXiv:hep-th/9709034]
- TbarT [24] A. Zamolodchikov, arXiv:hep-th/0401146
- Z-mass [25] Al. Zamolodchikov, *J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125
- Y-book [26] F. A. Smirnov, Form factors in completely integrable models of quantum field theory, *Adv. Ser. Math. Phys.* **14** (1992) 1–208
- SJM [27] М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива, Голономные квантовые поля, М. «Мир», 1983
- YZ [28] V. P. Yurov, A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 3419