

## Лекция 1

### O(2)-модель и переход Березинского—Костерлица—Таулеса

В этих лекциях мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \quad (1.1)$$

которые называются моделями  $\mathbf{n}$ -поля или  $O(N)$ -моделями. Эти модели обладают явной  $O(N)$ -симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии —  $O(2)$ -модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \quad (1.3)$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$  эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)} e^{in\varphi(y)} \rangle \sim (-(x-y)^2)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

На самом деле это совсем не так, и результат существенно зависит от значения константы  $g$ . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.5)$$

в евклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{q\bar{x}}(x) = \sum_{a=1}^n q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a) = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{2i} \log \frac{z - z_a}{\bar{z} - \bar{z}_a}, \quad q_a \in \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0, \\ \bar{z} = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют особенности (неопределенные значения) в точках  $z = z_a$ , очень важны. Они представляют собой решения с  $n$  вихрями в точках  $z_a$  с завихренностями  $q_a$ . В простейшем случае  $n = 1$  в радиальных координатах  $z - z_1 = r e^{i\theta}$  решение имеет вид

$$\varphi_{q_1 x_1}(x) = q_1 \theta.$$

Мы видим, что это вихрь в точке 0, при обходе вокруг которого поле  $\varphi$  увеличивается на  $2\pi q_1$ .

Важно отметить, что решения (1.6) удовлетворяют уравнению (1.5) даже в точках  $x = x_a$ . Действительно,

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \partial_\mu \partial^\mu \arctg \frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r} = 0.$$

Более того, для любой гладкой и достаточно быстро спадающей функции  $\varphi(x)$  мы имеем

$$\int d^2x \varphi(x) \partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \int d^2x (\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi(x)) \log \frac{1}{r} = 0,$$

так как интеграл от логарифма в точке  $x = 0$  сходится. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{q\bar{x}} = 0. \quad (1.7)$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (1.6):

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{2}{g} \int d^2x \partial\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \bar{\partial}\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \\
&= \frac{1}{2g} \int d^2x \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b)} \\
&= \frac{1}{2g} \left( \sum_a q_a^2 \int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} + \sum_{a < b} q_a q_b \int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \right)
\end{aligned}$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших и на малых масштабах:

$$\int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} \simeq 2\pi \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi \log \frac{R}{r_0},$$

где  $R$  и  $r_0$  — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Имеем

$$\int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \quad (1.8)$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$\begin{aligned}
S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{1}{2g} \left( \pi \sum_a q_a^2 \log \frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi \sum_{a < b} q_a q_b \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \right) \\
&= \frac{\pi}{2g} \left( \sum_a q_a \right)^2 \log R^2 - \frac{\pi}{2g} \sum_a q_a^2 \log r_0^2 + \frac{1}{2g} \sum_{a < b} q_a q_b 2\pi \log \frac{1}{|z_a - z_b|^2}.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Первый член стремится к бесконечности с ростом размера системы, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$\sum_a q_a = 0. \quad (1.10)$$

Второе слагаемое в (1.9) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например, рассмотрим ее как предел теории с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left( |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right),$$

это слагаемое будет конечным и будет зависеть от структуры кода вихрей. Ниже мы увидим, что значение  $r_0$  не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \int D\varphi e^{-S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] - (J, \varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}})}, \quad (1.11)$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям  $\varphi$  без всякого отождествления. Множитель  $1/n!$  происходит от того, что решение (1.9) не меняется при перестановках  $z_a \leftrightarrow z_b$ ,  $q_a \leftrightarrow q_b$ . Таким образом, суммирование  $\sum_{q_1, \dots, q_n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n$  учитывает одни и те же конфигурации  $n!$  раз. Множитель  $r_0^{-2n}$  добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера  $\sim r_0$ .

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] = S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g} \int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\bar{q}\bar{x}}.$$

Первый член дается выражением (1.9). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (1.7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 - 2n} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} e^{-(J, \varphi_{\vec{q}x})}, \quad (1.12)$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi e^{-S[\varphi] - (J, \varphi)}. \quad (1.13)$$

Из отождествления (1.3) следует, что мы можем рассматривать только источники  $J$  вида

$$J_{\vec{j}y}(x) = -i \sum_{j=1}^k J_j \delta(x - y_j), \quad J_i \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z[J_{\vec{j}y}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 + \frac{g}{4\pi} \sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b} \\ &\quad \times \prod_{a,j} \left( \frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j / 2} \prod_{j < j'} |w_j - w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi} J_j J_{j'}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $w_j = y_j^1 + iy_j^2$ .

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц  $\varphi$  сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи  $g$  («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших  $g$  («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского—Костерлица—Таулеса (БКТ)*.

Конечно, мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода БКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри удерживаются в конечном объеме, то есть интеграл инфракрасно сходятся при больших  $n$ . При этом следует исключить один двумерный интеграл — интеграл по «центру масс», поскольку он сводится к объему системы. Кроме того, в силу условия нейтральности

$$\sum_{a < b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left( \sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}.$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g} \left( -\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших  $n$  получаем, что безмассовой фазе отвечают  $g < g_{\text{ВКТ}}$ , причем

$$g_{\text{ВКТ}} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.16)$$

При  $g > g_{\text{ВКТ}}$  вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания  $r_0$ , так что фазовый переход имеет место при сколь угодно большой энергии вихря. Заметим, что условие (1.16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель  $r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 - 2n}$  для системы простых вихрей  $q_a = \pm 1$ . Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме  $r_0$ , корреляционная длина пропорциональна  $r_0$ , и, таким образом, даже у «идеальной»  $O(2)$ -модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (1.15) можно переписать по-другому, введя новое поле  $\phi(x)$ . Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \quad (1.17)$$

и потому  $\log \frac{R^2}{|x|^2}$  представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \quad (1.18)$$

Обратим внимание, что здесь дельта-функция понимается как двумерная дельта-функция в эвклидовом пространстве  $\delta(x) = \delta_E(x) = \delta(x^1)\delta(x^2)$ . Двумерная дельта-функция в пространстве Минковского, отвечающая виковскому повороту, записывается как

$$\delta_M(x) \equiv \delta(x^1)\delta(x^0) = i\delta_E(x).$$

Таким образом, в пространстве Минковского уравнение (1.17) должно писаться как

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{4\pi} \log(-x^2) = i\delta_M(x) \quad (1.19)$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле  $\tilde{\phi}$  условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \quad (1.20m)$$

в пространстве Минковского, или

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -i\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \quad (1.20e)$$

в эвклидовом пространстве, или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \quad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \quad (1.21)$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля  $\phi_R(z)$  и  $\phi_L(\bar{z})$  уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z) \phi_R(z') \rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \quad \langle \phi_L(\bar{z}) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \quad \langle \phi_R(z) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = 0 \quad (1.23)$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\phi_{R,L}}:, \quad e^{i\alpha\phi} = r_0^{\alpha^2} :e^{i\alpha\phi}:, \quad e^{i\alpha\tilde{\phi}} = r_0^{\alpha^2} :e^{i\alpha\tilde{\phi}}:. \quad (1.24)$$

Тогда экспоненциальные операторы  $:e^{(\dots)}:$  уже не безразмерные и имеют размерности  $d = \alpha^2/2$  для киральных операторов и  $\alpha^2$  для экспонент от полей  $\phi, \tilde{\phi}$ . Эти размерности совпадают с масштабными размерностями операторов. По определению, мы говорим, что имеется набор операторов  $O_i$  с масштабными размерностями  $d_i$ , если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O_i(x) \rightarrow s^{d_i} O_i(sx)$$

во всех операторах одновременно.

Корреляционные функции операторных экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle :e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)}: \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle :e^{i\alpha_1\phi_L(\bar{z}_1)}: \dots :e^{i\alpha_n\phi_L(\bar{z}_n)}: \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\beta_j\tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a\phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= r_0^{\sum_a \alpha_a^2 + \sum_j \beta_j^2} \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{2\beta_j\beta_{j'}} \prod_{a,j} \left( \frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum \alpha_a = \sum \beta_j = 0; \\ 0 & \text{в пр. сл.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (1.15) при

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a, \\ \beta_j &= \sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j, \end{aligned} \quad (1.27)$$

Отсюда получаем

$$Z[J\tilde{J}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{-2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a \phi(x_a)} \right\rangle_0. \quad (1.28)$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g \leftrightarrow (2\pi)^2 g^{-1}, \quad k \leftrightarrow n, \quad q_a \leftrightarrow J_j, \quad \phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля  $\phi$  и  $\tilde{\phi}$ . Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \tilde{\phi}(x). \quad (1.29)$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с  $|q| > 1$ , поскольку их вклад падает с уменьшением  $r_0$  быстрее вклада  $|q|$  штук вихрей заряда 1. Тогда производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z[J\tilde{J}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \binom{2n}{n} \int d^2x_1 \dots d^2x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \prod_{a=n+1}^{2n} e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \int d^2x_1 \dots d^2x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} \left( e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right) \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \exp \left( 2r_0^{-2} \int d^2x \cos \sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x) \right) \right\rangle_0 \\ &= \int D\phi e^{-S_{\text{SG}}[\phi]} \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$S_{\text{SG}}[\phi] = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu : \cos \beta \phi : \right) \quad (1.31)$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \quad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \quad (1.32)$$

Действие мы переписали через перенормированные экспоненты. В дальнейшем мы будем большей частью опускать значки  $\cdots$  и понимать под экспонентами именно перенормированные экспоненты.

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\text{pert}} = \beta^2.$$

Когда  $d_{\text{pert}} < 2$  возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда  $d_{\text{pert}} > 2$  возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай  $d_{\text{pert}} = 2$  называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода БКТ.

### Задачи

1. Возьмите интеграл (1.8)
2. Выведите формулу (1.17).
3. Покажите, что для свободного поля  $\phi$  с действием  $S_0[\phi]$  парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания  $R$ .

4. Выясните, при каких условиях операторы  $e^{i\alpha_1\varphi_R(z)+i\beta_1\varphi_L(\bar{z})}$  и  $e^{i\alpha_2\varphi_R(z')+i\beta_2\varphi_L(\bar{z}' )}$  взаимно-локальны, то есть обладают корреляционными функциями, однозначными при обходе  $x$  вокруг  $x'$ .

5\*. Предположим, что поле  $\phi(x)$  с действием  $S_0[\phi]$  определено на окружности радиуса  $R$  ( $\phi \sim \phi + 2\pi R$ ) и живет на пространственной окружности ( $x^1 \sim x^1 + 2\pi$ ) с периодическими граничными условиями. Покажите, что теория эквивалентна теории поля  $\tilde{\phi}(x)$ , определенного на окружности радиуса  $2/R$  (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности  $2\pi R$  (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.

### Семинар 1

#### Экспоненциальные операторы в теории свободного скалярного поля.

Для простоты мы ограничимся функционалами от поля  $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$ . Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP \log z + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{ik} z^{-k}, \quad (1.33)$$

где эрмитовы операторы  $P, Q$  и операторы рождения-уничтожения  $a_k = a_{-k}^\dagger$  удовлетворяют соотношениям

$$[P, Q] = -i, \quad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l,0}. \quad (1.34)$$

Если определить вакуум  $|0\rangle$  как

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k > 0), \quad (1.35)$$

то нетрудно проверить, что

$$\langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle = \langle Q^2 \rangle + \langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle_* = \langle Q^2 \rangle + \log \frac{1}{z' - z}. \quad (1.36)$$

Неопределенное выражение  $\langle Q^2 \rangle$  можно отождествить с инфракрасным членом  $\log R$  в (1.23). Также легко видеть, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит  $P$  справа от  $Q$  и  $a_k$  ( $k > 0$ ) справа от  $a_{-k}$ , отвечает условию

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = :\varphi(z_1)\varphi(z_2): + \langle \varphi(z_1)\varphi(z_2) \rangle_*$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$$:\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n): \varphi(z) = :\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)\varphi(z): + \sum_{i=1}^n :\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n): \langle \varphi(z_i)\varphi(z) \rangle_* \quad (1.37)$$

с начальным условием

$$:1: = 1. \quad (1.38)$$

Здесь индекс  $\hat{i}$  над многоточием означает, что из нормального произведения исключен  $i$ -тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} :\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_m): :\varphi(w_1)\cdots\varphi(w_n): &= \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} :\varphi(z_1)^{\hat{i}_1} \cdots \varphi(z_m)^{\hat{i}_k} \varphi(w_1)^{\hat{j}_1} \cdots \varphi(w_n)^{\hat{j}_k}: \prod_{l=1}^k \langle \varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l}) \rangle_*. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Вернемся к операторным экспонентам  $e^{i\alpha\varphi(z)}$ . Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]} e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \quad (1.40)$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} \dots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)} \rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i^2} \prod_{i<j} \left(\frac{z_i - z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \quad (1.41)$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\dots+\alpha_n)Q} \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2}. \quad (1.42)$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: :e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = (z_1 - z_2)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}:. \quad (1.43)$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \quad (1.44)$$

Сравнивая это с (1.41), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля  $\varphi(z)$ , представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (1.24). В следующих лекциях, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (1.44) явно содержит инфракрасную обрезку  $R$ , но имеет хороший предел при  $R \rightarrow \infty$ :

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

## Лекция 2

### Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:<sup>1</sup>

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (2.1)$$

Здесь  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле,  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака, а  $\hat{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ . Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.3)$$

В случае  $m = 0$  имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^\mu \psi = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu. \quad (2.4)$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (2.5)$$

В этой модели имеется топологическое число

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)), \quad (2.6)$$

принимаяющее целые значения. Его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi(t, x). \quad (2.7)$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.8)$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности  $\partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = 0$  в силу антисимметрии символа  $\epsilon^{\mu\nu}$  и коммутативности производных.

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [4, 5], причем параметры двух моделей связаны соотношениями

$$g = \beta^{-2} - 1, \quad (2.9)$$

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (2.10)$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu. \quad (2.11)$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (2.11) играет ключевую роль в бозонизации.

<sup>1</sup>Множитель  $\pi$  перед константой  $g$  добавлен, чтобы упростить вид точных ответов.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (i\psi_1^+(\partial_0 + \partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+(\partial_0 - \partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя  $z = x^1 - x^0$ ,  $\bar{z} = x^1 + x^0$ , получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+\bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+\partial\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = -2\psi_2^+\psi_2, \quad j^{\bar{z}} = 2\psi_1^+\psi_1.$$

Рассмотрим случай  $m = 0$ , который допускает точное решение[3]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+\psi_2\psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+\psi_1\psi_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из сохранения тока  $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu$  следует, что ток  $j^\mu$  можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial^\mu \tilde{\phi}. \quad (2.13)$$

Здесь  $\tilde{\phi}$  и  $\phi$  связаны между собой соотношением дуальности (1.20), описанным в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\varphi(z)$  и  $\bar{\varphi}(\bar{z})$  — произвольные функции только  $z$  и  $\bar{z}$  соответственно. Коэффициент в (2.13) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (2.11).

Мы видим, что безмассовая модель Тирринга эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из соотношения (2.13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi = \psi_1^+\psi_1, \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2. \quad (2.15)$$

Если продолжать искать классическое решение, следует подставить эти функции в уравнения (2.12). Решая последние, находим

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)} \quad (2.16)$$

с произвольными функциями  $F_i$ . Подставляя обратно в (2.15), получаем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi(z) = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z}) = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}), \quad (2.17)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение функции в предположении вещественности аргумента. Остается проинтегрировать эти уравнения и подставить результат в (2.16). В результате поля  $\psi_i$  выражаются через две функции  $F_i$  и две константы интегрирования.

Перейдем к квантовому случаю. Давайте искать решение уравнений (2.15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (2.18)$$

где  $\eta_i$  — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей  $\psi_i$ . Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \quad (2.19)$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля  $\psi_i(x)$  вели себя как фермионы. Рассмотрим произведение

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i\alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i\beta_j} e^{i\alpha_i\varphi(z') + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j\varphi(z) + i\beta_j\bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (2.20)$$

Это выражение хорошо продолжается в эвклидову область. Из требования антикоммутируемости легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Из (2.20) видно, что произведения вроде  $\psi_1^+\psi_1$  плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим другое произведение:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} (1 - i\alpha_1(z' - z)\partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x) + \dots). \quad (2.22)$$

Усредним это произведение по окружности  $|z' - z|^2 = r_0^2$  и будем считать  $r_0$  малым. Старший член в разложении по  $r_0$  примем за  $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$ . Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (2.23)$$

Тогда первый и третий члены в разложении (2.22) при усреднении обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left( \frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi} \right).$$

Его мы и отождествляем с  $\psi_1^+\psi_1$ . Мы видим, что если бы мы потребовали буквальной эрмитовой сопряженности  $\psi$  и  $\psi^+$ , множитель  $i$  в  $-i\alpha_1\varphi(z)$  испортил бы нам эрмитовость оператора  $\psi_1^+\psi_1$ .

Сравнивая с (2.15), получаем

$$\beta = -ir_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (2.24)$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (2.25)$$

получим

$$\beta = -ir_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (2.26)$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (2.12). Подставляя (2.15) и (2.18), получим

$$\begin{aligned} i\beta_1\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}} &= -i\frac{g\beta}{2}\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}}, \\ i\alpha_2\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}} &= i\frac{g\beta}{2}\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2}, \quad (2.27)$$

что, конечно же, согласуется с классическим решением.

Чтобы зафиксировать коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$ , нужно самосогласованно определить массовый член таким образом, чтобы он коммутировал с фермионным током

$$Q = \int df_\mu j^\mu, \quad (2.28)$$

где  $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu$  — элемент одномерной поверхности. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \left( e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2, \quad (2.29)$$

что согласуется с (2.23–2.27) и дает, кроме того,

$$\alpha_1 = -\beta_2. \quad (2.30)$$

Усредняя по углам, получаем определения для произведений

$$\begin{aligned} \psi_2^+ \psi_1 &= -\eta_1 \eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}, \\ \psi_1^+ \psi_2 &= -\eta_2 \eta_1^{-1} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1 \alpha_2} e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)\phi}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Проверим теперь, что так определенные операторы коммутируют с  $Q$ . Пусть  $O(x)$  — локальный оператор. Вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [O(0), Q] &= \oint df_\mu j^\mu(x) O(0) = \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(x) O(0) = -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \tilde{\phi}(x) O(0) \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\lambda \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \Delta \phi(x) O(0), \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь  $\Delta \phi(x)$  — приращение поля  $\phi(x)$  при обходе  $x$  вокруг нуля против часовой стрелки. Теперь применим эту формулу к оператору  $O(x) = e^{i\alpha\varphi(z) + i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$ :

$$\begin{aligned} [e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}, Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left( \alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Коммутатор  $[Q, O(x)] = 0$ , если  $\alpha = \alpha'$  и, следовательно,  $O(x) = e^{i\alpha\phi(x)}$ . Очевидно, это условие выполнено для операторов, определенных в (2.31).

Теперь зафиксируем параметр  $\beta$ . Для этого положим  $O(x) = \psi_i(x)$  в (2.33). Так как операторы  $\psi_i$  имеют фермионный заряд  $-1$ , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1}, \quad (2.34)$$

откуда немедленно получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta \quad (2.35)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} - \beta \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставляя ответ в (2.27), получаем (2.9).

Из (2.24), (2.26) находим

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (2.37)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы  $e^{i\beta\phi}$  и  $e^{-i\beta\phi}$  должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по  $\varphi, \bar{\varphi}$ . Поэтому множители  $(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\pm 1}$  тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$(i\eta_1\eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (2.38)$$

откуда находим (2.10).

Строго говоря, пока мы нашли точное решение только для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теория возмущений по члену  $m\bar{\psi}\psi$  для модели Тирринга и теория возмущений по  $\cos \beta\phi$  для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий [4, 5]. Отметим, что константа связи  $g$  в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса»  $m$  не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член  $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$  имеет масштабную размерность  $\beta^2$  из-за переопределения произведения полей. Измерима константа  $\mu$  модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \quad m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g}{1+g}}, \quad (2.39)$$

где  $m_{\text{phys}}$  — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром  $\mu$  и  $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$  известен точно [6].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами  $q = \pm 1$ .

## Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (2.4) сохраняется. Найдите дивергенцию этого тока при ненулевой массе.
2. В модели свободных безмассовых дираковских фермионов ( $m = 0, g = 0$ ) найдите парные корреляционные функции фермионных полей  $\langle \psi_i^+(x')\psi_j(x) \rangle$ .
3. Получите все классические решения уравнения синус-Гордона  $\phi(t, x)$  с конечной энергией, зависящие только от  $x - vt$  с некоторой константой  $v, |v| < 1$ . Найдите топологические заряды этих решений.
4. Повторите рассуждения лекции в специальном случае свободного фермиона ( $g = 0$ ). Проверьте, что в этом случае  $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$ .
- 5\*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (2.39), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m \left( 1 + g \log \frac{\Lambda}{m} \right),$$

где  $\Lambda$  — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

## Семинар 2

### Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием  $S_0$  и тензором энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  ( $T_\mu^\mu = 0$ ). Пусть  $\Phi_\Delta(x)$  — примарный (первичный) оператор конформной размерности  $\Delta$ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x). \quad (2.40)$$

Рассмотрим компоненту  $T = -2\pi T_{zz}$  тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Это значит, что для любых локальных операторов  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  имеет место тождество

$$\langle \bar{\partial}T(x) \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N) \rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \dots, x_N.$$

Когда  $x = x_i$  это уравнение может нарушаться. Рассмотрим, например, операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x) \Phi_\Delta(x') &= \frac{\Delta \Phi_\Delta(x')}{(z - z')^2} + \frac{\partial' \Phi_\Delta(x')}{z - z'} + O(1) \\ &= \Delta \Phi_\Delta(x') \partial \frac{1}{z - z'} + \frac{\partial' \Phi_\Delta(x')}{z' - z} + O(1). \end{aligned}$$

Дифференцируя по  $\bar{z}$ , получаем

$$\Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \Delta \Phi_\Delta(x') \bar{\partial} \partial' (z - z')^{-1} + \partial' \Phi_\Delta(x') \bar{\partial} (z - z')^{-1} + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\bar{\partial} \frac{1}{z} = \pi \delta(x). \quad (2.41)$$

Отсюда находим

$$\Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \pi \Delta \Phi_\Delta(x') \partial' \delta(x - x') + \partial' \Phi_\Delta(x') \delta(x - x') + O(1).$$

и

$$\int d^2x' \Phi_\Delta(x') \bar{\partial}T(x) = \pi(1 - \Delta) \partial \Phi_\Delta(x). \quad (2.42)$$

Теперь рассмотрим среднее от  $\bar{\partial}T(x)X$  с любым  $X$  в виде произведения от локальных операторов в первом порядке теории возмущений:

$$\langle \bar{\partial}T(x)X \rangle = \frac{\langle e^{-S_1} \bar{\partial}T(x)X \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} \simeq -\lambda \int d^2y \langle \Phi_\Delta(y) \bar{\partial}T(x)X \rangle_0 \simeq -\pi(1 - \Delta) \lambda \langle \partial \Phi(x)X \rangle.$$

Получаем

$$\bar{\partial}T(x) = \partial \Theta(x), \quad (2.43)$$

где<sup>2</sup>

$$\Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1 - \Delta) \lambda \Phi(x) + O(\lambda^2). \quad (2.44)$$

Аналогично

$$\partial \bar{T}(x) = \bar{\partial} \Theta(x). \quad (2.45)$$

Выражение (2.44) может оказаться точным, если

$$(z' - z) \Phi(x') \left( \int d^2y \Phi(y) \right)^k T(x) = o(1), \quad \text{если } k > 0. \quad (2.46)$$

<sup>2</sup>Заметим, что мы опускаем и поднимаем индексы с помощью метрики пространства Минковского  $g_{z\bar{z}} = -1/2$ ,  $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ .

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos \beta\phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad \bar{T}(x) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2, \quad \Theta(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu \cos \beta\phi + O(\mu^2). \quad (2.47)$$

Однако условие (2.46) обращения в нуль высших поправок для  $\Theta(x)$  не выполняется. Действительно, нетрудно проверить, что левая часть имеет порядок  $(z' - z)^{-1}|z' - z|^{2k - k(k+1)\beta^2}$ , и при любом значении  $\beta$  условие (2.46) нарушается при достаточно больших  $k$ .

Решить эту проблему можно двумя способами. Первый состоит в том, чтобы предположить, что поправки аналитичны по  $\beta^2$  и если  $n$ -тый член теории возмущений обращается в нуль при достаточно малых  $\beta^2$ , то он обращается в нуль тождественно. Тем не менее, предположение об аналитичности требует некоторого обоснования.

### Лекция 3

#### Двухчастичные $S$ -матрицы: теория возмущений

Предположим, что две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  (и, возможно, с какими-то внутренними состояниями) в двумерном пространстве-времени рассеиваются друг на друге в себя. В двумерном пространстве-времени удобно пользоваться быстройми  $\theta_i$ :

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i. \quad (3.1)$$

Для начальных быстройми положим  $\theta_1 > \theta_2$ . Пусть  $\theta'_i$  — быстрая  $i$ -й частицы после рассеяния. Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения. Одно из них  $\theta'_i = \theta_i$  представляет собой прохождение частиц друг сквозь друга. Другое решение представляет собой отскок и находится так. Пусть  $\theta_0$  является быстройми центра масс:

$$m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0.$$

Тогда второе решение имеет вид  $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$ ,  $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$ . В случае одинаковых масс  $m_1 = m_2$  это решение имеет тривиальный вид  $\theta'_1 = \theta_2$ ,  $\theta'_2 = \theta_1$  и, по сути, не отличается от первого решения. В случае  $m_1 \neq m_2$  мы будем рассматривать только первое решение, поскольку в интегрируемых случаях реализуется именно оно.

Сначала рассмотрим случай  $m_1 \neq m_2$ . Матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.2)$$

где  $p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i$ ,  $p'_i = m_i \operatorname{sh} \theta'_i$  — пространственные компоненты импульса. Мы рассматриваем  $S$ -матрицу как оператор, действующий в произведении пространств двух частиц:  $S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ . Чтобы найти связь со стандартной в диаграммной технике амплитудой  $\mathcal{M}$ , нужно привести дельта-функцию к виду  $\delta(P' - P)$ , где  $P, P'$  — конечный и начальный суммарный 2-импульс системы. Действительно, по определению

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_i 2\varepsilon_i \prod_j 2\varepsilon'_j}}. \quad (3.3)$$

Здесь  $\hat{1}$  обозначает единичный оператор в пространстве состояний (включая дельта-функции по пространственным импульсам). Имеем

$$\delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) = \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) = \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P).$$

Отсюда немедленно находим

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (3.4)$$

Здесь единица в первом слагаемом означает уже единичный оператор в пространстве внутренних состояний частиц.

В случае  $m_1 = m_2$  разница заключается только в том, что выражение (3.2) имеет два слагаемых:

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_2) \delta(p'_2 - p_1) P S(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.5)$$

где  $P : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1$  — оператор перестановки (мы считаем частицы одинаковой массы тождественными). Соотношение (3.4) сохраняет силу.

Рассмотрим теперь конкретные модели. Начнем с модели Тирринга. С помощью вспомогательного векторного поля  $A^\mu$  действие модели Тирринга можно записать в виде:

$$S^{\text{МТ}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left( \bar{\psi} (i\hat{\partial} - \hat{A} - m) \psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right). \quad (3.6)$$

Диаграммная техника в этом представлении совпадает с диаграммной техникой квантовой электродинамики с той разницей, что пунктирной линии отвечает пропагатор  $\langle A_\mu(x')A_\nu(x) \rangle = i\pi g g_{\mu\nu} \delta(x' - x)$ . В импульсном пространстве для внутренних линий и вершины имеем:

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \\ \hline \hat{p} - m + i0 \end{array}, \quad \mu \text{-----} \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Кроме того, каждая фермионная петля дает множитель  $(-1)$ , каждая пара внешних антифермионных линий дает  $(-1)$ , и каждая перестановка двух букв  $u$  от стандартного порядка (справа налево для входящих частиц и слева направо — для выходящих) дает  $(-1)$ . Эти знаки мы будем выписывать явно.

Буквы  $u_p$  для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0. \quad (3.7)$$

Решение легко написать через быстроту  $\theta$ :

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ i e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} i e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Нам понадобятся произведения, отвечающие четырехфермионному взаимодействию:

$$\begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p'_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p'_2 \end{array} = -i\pi g (\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1}) (\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим фермион и антифермион как одну частицу с двумерным пространством внутренних состояний  $V = \mathbb{C}^2 = \operatorname{span}(e_+, e_-)$ . Базисный вектор  $e_+$  отвечает фермиону, а  $e_-$  — антифермиону. Двухчастичная  $S$ -матрица в пространстве  $V \otimes V$  имеет шесть ненулевых матричных элементов. В базисе  $e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$  она имеет вид

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} ++ & +- & -+ & -- \\ a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix} \begin{array}{l} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{array} \quad (3.10)$$

или

$$S(\theta)_{++}^{++} = S(\theta)_{--}^{--} = a(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{+-} = S(\theta)_{-+}^{-+} = b(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{-+} = S(\theta)_{-+}^{+-} = c(\theta). \quad (3.11)$$

Отметим, что эти амплитуды должны удовлетворять условию перекрестной симметрии:

$$a(\theta) = b(i\pi - \theta), \quad c(\theta) = c(i\pi - \theta). \quad (3.12)$$

Найдем эти матричные элементы в первом порядке по константе связи  $g$ . Для вклада в первый матричный элемент  $a(\theta)$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++}^{(1)++} &= \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \end{array} \\ &= -4\pi i g m^2 (\operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) - 1) = -8\pi i g m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Знак минус во втором слагаемом возникает от необходимости переставить  $\bar{u}_{p_1}$  и  $\bar{u}_{p_2}$ . Совершенно аналогично для вклада в  $b(\theta)$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{+-}^{(1)_{+-}} = & \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ -p_2 \longleftarrow \longleftarrow -p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \vdots \\ -p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_1 \searrow \swarrow \\ -p_2 \nearrow \nwarrow \end{array} \\ & = 4\pi igm^2(\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8\pi igm^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Для вклада в  $c(\theta)$  имеем

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)_{-+}} = - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ -p_2 \longleftarrow \longleftarrow -p_1 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \vdots \\ -p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_1 \searrow \swarrow \\ -p_1 \nearrow \nwarrow \end{array} = -4\pi igm^2(1 + 1) = -8\pi igm^2.$$

Из (3.4) немедленно получаем

$$\begin{aligned} a(\theta) &= 1 - i\pi g \text{th} \frac{\theta}{2} + O(g^2), \\ b(\theta) &= 1 + i\pi g \text{cth} \frac{\theta}{2} + O(g^2), \\ c(\theta) &= -\frac{2\pi ig}{\text{sh} \theta} + O(g^2). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Теперь обратимся к модели синус-Гордона. При малых значениях  $\beta$  поле  $\phi$  отвечает некоторой частице массы  $m = \sqrt{4\pi\mu}\beta^2$ . Найдем двухчастичную матрицу рассеяния для этой частицы на самой себе. В первом порядке по теории возмущений вклад будет давать только четырехчастичная вершина:

$$S^{\text{SG}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{m^2 \beta^2 \phi^4}{4!} - \frac{m^2 \beta^4 \phi^6}{6!} + \dots \right),$$

где точки обозначают сумму константы и высших степеней  $\phi$ . Будем понимать произведения полей в этом действии как нормально упорядоченные. Это немедленно исключает все диаграммы, содержащие петли из одной линии: .

Отсюда находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(1)\phi\phi} = \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \times \\ p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_1 \searrow \swarrow \\ p_2 \nearrow \nwarrow \end{array} = 4\pi im^2 \beta^2.$$

Нетрудно также получить вклад второго порядка по  $\beta^2$ :

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \text{loop} \\ p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_1 \searrow \swarrow \\ p_2 \nearrow \nwarrow \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \text{loop} \\ p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_1 \searrow \swarrow \\ p_1 \nearrow \nwarrow \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ \text{loop} \\ p_2 \nearrow \nwarrow \\ p_2 \searrow \swarrow \\ p_1 \nearrow \nwarrow \end{array}$$

Коэффициент  $1/2$  перед диаграммами отражает их симметрию: группа перестановок линий и вершин диаграмм содержит два элемента. Петля в середине каждой диаграммы представляет собой интеграл:

$$L(p^2) = q \begin{array}{c} \text{loop} \\ \text{p} - q \end{array} = - \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((p-q)^2 - m^2 + i0)}.$$

Для первой диаграммы  $p = 0$ , для второй  $p = p_1 - p_2$ , для третьей  $p = p_1 + p_2$ . Прямое вычисление дает

$$L(p^2) = \frac{i}{2\pi p^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} - 1}. \tag{3.14}$$

Формула кажется несколько громоздкой, но она может быть записана просто через быстроты. Рассмотрим вторую диаграмму, для которой  $p = p_1 - p_2$ . Пусть  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ , так что

$$p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.14) принимает простой вид

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2 \operatorname{sh} \theta}. \quad (3.16)$$

Отсюда находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left( 1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left( 1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Следовательно,<sup>1</sup>

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\operatorname{sh} \theta} \left( 1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right) + O(\beta^6). \quad (3.17)$$

Отметим, что в этом приближении матрица рассеяния  $S_\phi(\theta)$  удовлетворяет двум соотношениям

$$S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta), \quad S_{11}(\theta) S_{11}(-\theta) = 1. \quad (3.18)$$

Первое соотношение является просто соотношением перекрестной симметрии и следует из перекрестной симметрии диаграмм. А вот второе имеет важный смысл: оно означает, что в данном порядке теории возмущений нет других каналов рассеяния двух частиц. Во втором порядке мы могли бы ожидать рассеяния двух частиц в четыре, но соответствующие диаграммы в сумме дают нулевой вклад. На самом деле это верно в любом порядке теории возмущений: в модели синус-Гордона нет множественного рождения частиц.

Теперь вычислим рассеяние частицы  $\phi$  на солитоне. Для этого разложим действие синус-Гордона вблизи солитонного решения. Положим

$$\phi_{x_0,v}^\pm(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.19)$$

и рассмотрим действие  $S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi]$  в квадратичном приближении по  $\phi$ . Линейные члены по  $\phi$  сократятся в силу того, что  $\phi_{x_0,v}^\pm$  есть решение уравнения движения, и мы получим

$$\delta S[\phi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm + \phi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^\pm] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^\pm \right). \quad (3.20)$$

Без ограничения общности положим  $x_0 = 0$  и  $v = 0$ . Все остальные случаи можно получить сдвигом и преобразованием Лоренца. Тогда имеем

$$\delta S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 m x^1} \right) \right). \quad (3.21)$$

Классическое уравнение движения

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \left( 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 m x^1} \right) \right) \phi(x) = 0 \quad (3.22)$$

линейно и может рассматриваться как квантовое уравнение на оператор  $\phi(x)$ . Тогда этот оператор раскладывается по модам

$$\phi(t,x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left( e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right), \quad (3.23)$$

<sup>1</sup>Значок 11 станет яснее позже. Дело в том, что  $\phi$  является первой частицей в серии так называемых бризеров — связанных состояний солитона и антисолитона.

где  $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$ , а  $f_n(x)$  — решения уравнения

$$\left( \partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\text{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0 \quad (3.24)$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Давайте найдем решения уравнения (3.22). Во-первых, имеется связанное состояние с нулевой энергией:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\text{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0. \quad (3.25)$$

Эта мода связана с возможностью перемещать солитон вдоль оси  $x$ :

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

С квантовомеханической точки зрения эту моду можно интерпретировать как результат «оживления» солитона, превращения его из заданного руками решения в частицу, обладающую собственной динамикой. Иными словами, операторы  $a_0, a_0^+$  дают нам одну из солитонных степеней свободы.

Больше связанных состояний уравнение (3.22) не имеет. Остальные состояния можно нумеровать импульсами  $p$ , в связи с чем соответствующие функции мы будем обозначать  $f_p$ . Они имеют вид

$$f_p(x) = N_p e^{ipx} \left( 1 + \frac{im}{p} \text{th} mx \right). \quad (3.26)$$

Чтобы их правильно нормировать, нужно найти плотность состояний. Поместим систему в большой ящик длины  $L$  с солитоном посередине и наложим циклическое граничное условие:<sup>2</sup>

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \text{th} \frac{mL}{2}}{p - im \text{th} \frac{mL}{2}} = 1. \quad (3.27)$$

Так как нас интересует случай  $L \rightarrow \infty$ , имеем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1. \quad (3.28)$$

Логарифмируя это условие, получаем

$$pL = 2\pi n + 2 \arctg \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Полуцелые числа  $n$  и будут нумеровать состояния. Давайте возьмем два соседних значения импульса отвечающих числам  $n$  и  $n + 1$ . Имеем

$$(p_{n+1} - p_n)L = 2\pi + 2 \arctg \frac{p_{n+1}}{m} - 2 \arctg \frac{p_n}{m}.$$

Так как  $p_{n+1} - p_n \sim \frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$ , в правой части мы можем просто взять производную:

$$(p_{n+1} - p_n) \left( L - \frac{2m}{(m^2 + p_n^2)} \right) = 2\pi.$$

Отсюда следует выражение для плотности состояний:

$$\rho(p) = \frac{2\pi}{L} \frac{dn}{dp} = \frac{2\pi}{L(p_{n+1} - p_n)} = 1 - \frac{2m}{L(m^2 + p^2)}. \quad (3.30)$$

<sup>2</sup>При этом мы, конечно, должны отождествить  $\phi$  и  $\phi + 2\pi/\beta$  в классическом решении. В пределе  $L \rightarrow \infty$  ответ принципиально не будет зависеть от типа граничных условий, но с циклическими граничными условиями его получить проще.

В пределе  $L \rightarrow \infty$  второе слагаемое исчезает и  $\rho(p) \rightarrow 1$ , как и для бозона в свободном пространстве. Отсюда немедленно следует, что в непрерывном спектре

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{dp}{2\pi}, \quad \delta_{n'n} \rightarrow 2\pi\delta(p' - p), \quad N_p = \frac{p}{\varepsilon_p}. \quad (3.31)$$

Тем не менее, мы запомним выражение (3.30), потому что оно имеет смысл, когда бозон движется в газе из солитонов и антисолитонов. В этом случае величина  $1/L \ll m$  имеет смысл средней плотности солитонов и антисолитонов.

Итак, окончательно мы можем написать

$$\phi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+). \quad (3.32)$$

Еще раз посмотрим на функцию  $f_p(x)$ . На больших расстояниях от солитона она имеет вид

$$f_p(x) = e^{ipx} \times \begin{cases} 1 + im/p, & x \rightarrow +\infty; \\ 1 - im/p, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.33)$$

Это значит, что поле  $\phi$  проходит через солитон *без отражения*. Отношение асимптотик

$$S_{1\pm}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\pm}^{\phi\pm} = \frac{p + im}{p - im} = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{4}\right)} \quad (3.34)$$

представляет собой матрицу рассеяния частицы  $\phi$  на солитоне или антисолитоне в нулевом приближении.

### Задачи

1. Выведите (3.8), (3.9).
2. Выведите (3.14), (3.16).
3. Найдите полную энергию солитонного решения (3.19). Выразите ответ через массу  $m$  частицы  $\phi$  и параметр  $\beta$ .
4. Покажите, что функции  $f_p(x)$  из (3.26) с  $N_p = p/\varepsilon_p$  являются правильно нормированными решениями уравнения (3.24).
- 5\*. Найдите простейшее точное решение уравнений (3.18) в тригонометрических функциях, зависящее от  $\beta^2$ , которое имело бы своим пределом (3.17). Покажите, что решение имеет полюс на физическом листе  $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi$ . Найдите массу связанного состояния, отвечающего этому полюсу.

### Семинар 3

#### Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Второй подход заключается в том, чтобы изменить само разбиение действия модели синус-Гордона на действие конформной теории и возмущения. Альтернативное разбиение имеет вид

$$S'_0 = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}. \quad (3.35)$$

Такое разбиение кажется нефизическим, поскольку функционал действия  $S'_0$  не является вещественным, однако формально ничто не мешает определить соответствующий функциональный интеграл. И хотя этот интеграл описывает теорию со взаимодействием, эта теория является конформной и тензор энергии-импульса может быть подкручен так, чтобы  $T'^\mu{}_\mu = 0$ .

Для тензора энергии-импульса теории  $S'_0$  на классическом уровне (в эвклидовом пространстве) имеем

$$T'^\mu{}_\nu = L\delta^\mu{}_\nu - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f'_\nu{}^{\mu\lambda} = T^\mu{}_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu{}_\nu + \partial_\lambda f'_\nu{}^{\mu\lambda}.$$

Применяя уравнение движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi},$$

получаем

$$T'{}^\mu{}_\nu = T_\nu^\mu + \frac{i}{4\pi\beta} \delta_\nu^\mu \nabla^2 \phi + \partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda}.$$

Полагая

$$f_\nu^{\mu\lambda} = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta_\nu^\mu \partial^\lambda \phi - \delta_\nu^\lambda \partial^\mu \phi) \quad (3.36)$$

с  $\alpha_0 = \beta^{-1}$ , получаем  $T'{}^\mu{}_\mu = 0$ . Отсюда легко получить

$$T'(x) = -\frac{1}{2} \partial\phi^2 + i\alpha_0 \partial^2 \phi, \quad \bar{T}'(x) = -\frac{1}{2} \bar{\partial}\phi^2 + i\alpha_0 \bar{\partial}^2 \phi. \quad (3.37)$$

В квантовом случае постоянная  $\alpha_0$  получает поправку. Чтобы ее найти, вычислим конформные размерности полей  $e^{i\alpha\phi}$ :

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 2\alpha_0).$$

Подберем  $\alpha_0$  таким образом, чтобы  $\Delta_{-\beta} = 1$ , то есть размерность потенциального члена в  $S'_0$  равнялась единице. Это имеет место при

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}. \quad (3.38)$$

Тогда

$$\left[ L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[ \bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

и, следовательно, в невозмущенной теории  $S'_0$  бесследовый тензор энергии-импульса сохраняется:  $\bar{\partial}T' = \partial\bar{T}' = 0$ .

Поскольку  $\Delta_\beta = \beta^2 - 1$  в возмущенном случае мы имеем

$$\Theta'(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu e^{i\beta\phi}. \quad (3.39)$$

Это выражение точное, потому что левая часть (2.46) для этого возмущения  $(z' - z)^{-1} |z' - z|^{2k+k(k+1)\beta^2}$  имеет нужный порядок малости. «Откручивая» тензор энергии-импульса назад, то есть добавляя  $-\partial_\lambda f_\nu^{\mu\lambda}$ , мы убеждаемся, что поправка  $O(\mu^2)$  в (2.47) равна нулю.

## Лекция 4

### $O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Снова рассмотрим общую  $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (4.1)$$

В этой лекции мы обсудим предел больших  $N$  и специфическую теорию возмущений, с ним связанную [8] (см. также [9, 10]).

Удобно ввести вспомогательное поле  $\omega(x)$  и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (4.2)$$

где вектор  $\mathbf{n}$  теперь пробегает любые значения в  $\mathbb{R}^N$ . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (4.3)$$

Интеграл по  $\mathbf{n}$  — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left( \frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left( iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left( i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right),$$

где  $G(x, x'|\omega)$  — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x'|\omega) = \delta(x - x'). \quad (4.4)$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left( iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right), \quad (4.5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (4.6)$$

Найдем точку перевала этого интеграла при  $N \rightarrow \infty$ . Предположим, что точке перевала отвечает постоянное решение:

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) &= \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[ u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left( (\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) = \frac{iV}{4\pi} \left( \omega_0 \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $\Lambda$  — параметр ультрафиолетового обрезания. Под знаком логарифма мы пренебрегли  $\omega_0$  в выражении  $\Lambda^2 + \omega_0$  в первом слагаемом. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left( -\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left( -\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (4.8)$$

Мы видим, что в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  следует устремить к нулю  $g$  таким образом, чтобы величина  $\omega_0 = m^2$  оставалась конечной. Для бета-функции при больших  $N$  находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (4.9)$$

Важно, что в теории возникает параметр  $m$  размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру  $1/N$ . Представим  $\omega(x)$  в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (4.10)$$

и разложим эффективное действие по степеням  $N^{-1/2} \rho(x)$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left( 1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log (1 + i (2/N)^{1/2} \rho G_0) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left( \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left( \frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G_0 \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr} (\rho G_0)^n. \end{aligned}$$

Здесь  $G_0 = -i(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}$  — оператор с ядром  $G_0(x, x') = G(x, x' | m^2)$ .

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что  $\omega = m^2$  является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G_0 &= \int d^2x \rho(x) G_0(x, x) = G_0(0, 0) \int d^2x \rho(x) = G_0(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Мы видим, что скобка в самом деле обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ( $n = 2$ ), можно убедиться, что точка  $\omega = m^2$  является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n}x \rho(x_1) G_0(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G_0(x_n, x_1). \quad (4.11)$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2} \int d^2x_1 d^2x_2 \rho(x_1) G_0(x_1, x_2) \rho(x_2) G_0(x_2, x_1).$$

Поэтому пропагатор  $D(x_1, x_2)$  поля  $\rho(x)$  есть ядро оператора, обратного к оператору с ядром

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G_0(x_1, x_2)G_0(x_2, x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель  $(2/N)^{1/2}$  перед  $\rho$ . Он позволил избавиться от коэффициента  $2/N$  в пропагаторе  $D(x_1, x_2)$ .

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k) = \text{-----}^k\text{-----} = L^{-1}(k^2) = - \left( \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (4.12)$$

Мы уже вычисляли эту величину на прошлой лекции:

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\text{sh } \theta}{\theta}, \quad k^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.13)$$

Кроме того, оператор  $G(x, x'|\omega)$ , входящий в (4.5), тоже следует разложить по  $\rho(x)$ :

$$G[\omega] = \frac{1}{G_0^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G_0(\rho G_0)^n$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G_0(x_1, y_1)\rho(y_1)G_0(y_1, y_2) \dots \rho(y_n)G_0(y_n, x_2).$$

Изобразим  $G_0(x_1, x_2)$  сплошной линией:

$$G_0(p)_{ij} = \text{---}^p\text{---}^j = G_0(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (4.14)$$

Если еще ввести вершину

$$\text{---}^i \text{---}^j = -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}, \quad (4.15)$$

можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (4.12), сплошных линий (4.14) и вершин (4.15).
2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам  $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$ .
3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи  $g$ . Порядок диаграммы по  $1/N$  равен  $\frac{1}{2}V - L$ , где  $V$  — число вершин, а  $L$  — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи  $g$ , массой  $m$  и параметром обрезания  $\Lambda$  можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке  $1/N$  можно получить:

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \quad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2 \log(\Lambda^2/m^2)}. \quad (4.16)$$

Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (4.2) член вида  $\int d^2x \omega^2$ , «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

Давайте теперь попробуем вычислить  $S$ -матрицу  $O(N)$ -модели. Условие совместимости с  $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \quad (4.17)$$

В порядке  $1/N$  матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \\ \diagdown \\ \phantom{p_1} \\ \diagup \\ p_2 \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p_1 \\ \diagup \\ \phantom{p_1} \\ \diagdown \\ p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta (S_2(\theta) - 1) = \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_1 \\ | \\ p_2 \text{---} p_2 \end{array},$$

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_3(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_2 \\ | \\ p_2 \text{---} p_1 \end{array}.$$

Используя (4.13), получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

### Задачи

**1.** Модель Гросса—Невё для  $N$ -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми  $\gamma$ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до  $N$ ; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами  $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$ ).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp \left( -\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

**2.** Постройте диаграммную технику для  $1/N$ -разложения в модели Гросса—Невё. Найдите  $S$ -матрицу в древесном приближении.

**3.** Найдите расходящуюся часть массового оператора в порядке  $1/N$  для  $O(N)$ -модели. Покажите, что постоянный вклад квадратично расходится по  $\Lambda$ , а вклад, пропорциональный  $p^2 - m^2$  имеет дважды логарифмическую расходимость.

**4.** Рассмотрите модель с ослабленным условием на  $\mathbf{n}^2$ :

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x \left( (\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \frac{2\mu^2}{g} (\mathbf{n}^2 - 1)^2 \right), \quad (4.19)$$

где  $\mu$  — постоянная размерности массы. Покажите, что в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  модель переходит в сигма-модель (4.1). Найдите массу возбуждений в модели (4.19) в главном порядке. Покажите, что  $S$ -матрица в древесном приближении также совпадает с матрицей рассеяния сигма-модели (4.18).

**5\*.** Выведите формулу (4.16).

## Семинар 4

### Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Возьмем возмущенную конформную теорию с действием (2.40). В исходной конформной теории поля мы имеем операторные разложения для тензора энергии-импульса и примарных операторов. Продолжим их на регулярные члены:

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + \times T^2(z) \times + O(z' - z), \quad (4.20)$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + \dots \quad (4.21)$$

Операторы  $\mathcal{L}_k$  представляют собой образующие алгебры Вирасоро, действующий на пространстве локальных операторов:

$$\mathcal{L}_k \mathcal{O}(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \mathcal{O}(z, \bar{z}),$$

где интеграл берется по маленькой окружности вокруг точки  $z$ . Не будем забывать также, что  $\mathcal{L}_{-1} = \partial$  при действии на любой локальный оператор.

Выражение (4.20) определяет новый оператор  $\times T^2(z) \times$ , который мы будем понимать как регуляризованный квадрат компоненты тензора энергии-импульса. В конформной теории он представляет собой сохраняющийся ток:  $\bar{\partial} \times T^2(z) \times = 0$ . Более того, соответствующий интеграл движения коммутирует с операторами энергии и импульса. Попробуем найти условие, при котором этот оператор является компонентой сохраняющегося тока в возмущенной теории [7]. Для этого возьмем интеграл

$$\int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int d^2 x' \partial_{\bar{z}} \left( T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right) \Phi_\Delta(z', \bar{z}')$$

Будем понимать под  $T(z + \delta)$  оператор  $T(z + \delta, \bar{z})$ . Корректность такого определения можно обосновать переходом к пространству Минковского и обратно. Нам это будет важно, чтобы избавиться от необходимости разложений по  $\bar{\delta}$ . Пользуясь (2.42), находим

$$\begin{aligned} & \int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \partial\Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})T(z) + T(z + \delta)\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z}) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1 - \Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \partial(\Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_\Delta(z, \bar{z})) \right. \\ & \quad \left. - \Phi_\Delta(z + \delta, \bar{z})\partial T(z) - \partial T(z + \delta)\Phi_\Delta(z, \bar{z}) - \frac{2\partial\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Далее, нужно применить (4.21) к оставшимся произведениям и разложить слагаемые по степеням  $\delta$ . Результат оказывается регулярным и равным

$$\int d^2 x' \bar{\partial} \times T^2(z) \times \Phi_\Delta(z', \bar{z}') = \pi(1 - \Delta) \left( -2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta - 3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_\Delta(z, \bar{z}). \quad (4.22)$$

Второе и третье слагаемое в правой части имеют вид полной производной по  $z$ . Но первое слагаемое не имеет нужного вида. Поэтому для произвольного возмущения оператор  $\times T^2(z) \times$  не является компонентой сохраняющегося тока.

В каких случаях первое слагаемое могло бы стать полной производной? Это может быть в случае, когда имеется линейное соотношение между  $\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta$  и  $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta$ ,  $\mathcal{L}_{-1}^3\Phi_\Delta$ , то есть при наличии нуль-вектора на уровне три. Это имеет место при специальных значениях  $\Delta$ :

$$\left( \mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_\Delta = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}.$$

В случае  $c < 1$  конформная размерность  $\Delta_{31}$  больше единицы и возмущение оператором  $\Phi_{31}$  irrelevantно. Единственным релевантным возмущением остается возмущение оператором  $\Phi_{13} = \Phi_{\Delta_{13}}$ . Отметим, что для разбиения действия модели синус-Гордона (3.35) оператор возмущения  $e^{i\beta\phi}$  как раз имеет размерность  $\Delta_{13} = \beta^2 - 1$ . Таким образом, эта конструкция дает высший интеграл движения для модели синус-Гордона.

## Лекция 5

### $O(N)$ -модель: интегрируемость и точная $S$ -матрица

Рассмотрим  $O(N)$ -модель с действием

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1))$$

и классическими уравнениями движения:

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса  $z, \bar{z}$  имеем для действия

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{2}{g} \int d^2x \left( \partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (5.1)$$

а для уравнений движения

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (5.2)$$

Действие (5.1) инвариантно относительно *псевдоконформных* преобразований

$$\mathbf{n}(z, \bar{z}) \rightarrow \mathbf{n}(f_1(z), f_2(\bar{z})), \quad \omega(z, \bar{z}) \rightarrow f_1'(z) f_2'(\bar{z}) \omega(f_1(z), f_2(\bar{z})). \quad (5.3)$$

Эти преобразования включают, в частности, трансляции

$$f_1(z) = z + c, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{c},$$

масштабное преобразование и преобразование Лоренца в виде

$$f_1(z) = \lambda z, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{\lambda} \bar{z},$$

и преобразование инверсии

$$f_1(z) = 1/z, \quad f_2(\bar{z}) = 1/\bar{z}.$$

В пространстве Минковского параметры с черточкой и без вещественны и независимы, тогда как в евклидовом пространстве они комплексные и комплексно-сопряженные друг другу.

При переходе к евклидову пространству трансляции, масштабное преобразование и инверсия образуют глобальную конформную группу, состоящую из конформных преобразований, взаимнооднозначных на сфере  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Локальные конформные преобразования, то есть преобразования, взаимнооднозначные только на каких-то областях, даются в этом случае произвольными аналитическими функциями  $f(z) \equiv f_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})}$ .

Ну а пока продолжим рассмотрение в пространстве Минковского. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{zz} = \frac{1}{g} (\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g} (\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g} (\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнениях движения компонента  $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$  обращается в нуль, т. е.  $T_\mu^\mu = 0$ , что выражает масштабную инвариантность модели. Сохранение энергии-импульса записывается в виде

$$\bar{\partial} (\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial (\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (5.4)$$

В большинстве двумерных теорий энергия и импульс составляют единственные локальные интегралы движения, однако в случае  $O(N)$ -модели это не так. Во-первых, есть тривиальный интеграл движения в виде квадрата тензора энергии-импульса, следующий из конформной симметрии:

$$\bar{\partial} (\partial \mathbf{n})^4 = 0, \quad \partial (\bar{\partial} \mathbf{n})^4 = 0. \quad (5.5)$$

Во-вторых, нетрудно получить соотношения

$$4\bar{\partial} (\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial (\omega (\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial \omega (\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial (\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial} (\omega (\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial} \omega (\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5.6)$$

Сейчас мы покажем, что это уравнение означает существование дополнительного интеграла движения. Поскольку  $(\partial \mathbf{n})^2$  сохраняется, с помощью псевдоконформного преобразования  $z = f_1(z')$ , такого что

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

можно добиться того, чтобы в новых координатах было

$$(\partial \mathbf{n})^2 = 1.$$

Тогда (5.6) преобразуется к виду уравнения непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial \partial \mathbf{n})^2 = \partial(2\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n}).$$

На самом деле (хотя это непросто показать) в модели имеется бесконечное число интегралов движения.

Мы знаем, что в квантовом случае (псевдо)конформная инвариантность модели нарушается, так как поле  $\omega$  приобретает ненулевое среднее значение. Поэтому рассуждения с конформными преобразованиями теряют силу. В квантовом случае в уравнениях, из которых следуют законы сохранения, должны возникать аномалии. Аномальные члены не должны нарушать масштабную инвариантность уравнений, в которые переходят законы сохранения. Поэтому, например, в правой части закона сохранения энергии-импульса допустим только один аномальный член, сводящийся к полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega. \quad (5.7)$$

Аналогично модифицируется соотношение (5.5). Правая часть уже не будет полной производной:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (5.8)$$

То же самое для (5.6):

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (5.9)$$

Из этих трех уравнений можно составить один закон сохранения:

$$\bar{\partial} \left( 4(\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (5.10)$$

Итак, имеется по крайней мере два интеграла движения спина 1 и 3:

$$I_1 = \int dz (\partial \mathbf{n})^2, \quad I_3 = \int dz \left( 4(\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right). \quad (5.11)$$

Эти интегралы удовлетворяют уравнению  $\bar{\partial} I_s = 0$ . Интегралы  $I_{-1}$ ,  $I_{-3}$ , удовлетворяющие уравнению  $\partial I_{-s} = 0$ , можно получить заменой  $z \leftrightarrow \bar{z}$ . При переходе к обычным координатам  $x, t$  и те, и другие величины остаются интегралами движения.

Можно показать, что эти интегралы коммутируют. Из существования четырех коммутативных интегралов движения можно заключить невозможность множественного рождения частиц в столкновениях двух частиц.

Пусть  $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$  — асимптотическое состояние из  $n$  частиц с быстройми  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Пользуясь тем, что  $p_z = -\frac{m}{2} e^\theta$ ,  $p_{\bar{z}} = \frac{m}{2} e^{-\theta}$ , нетрудно проверить, что

$$I_s |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = P_s(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}) |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle,$$

где функция  $P_s$  однородна степени  $s$ :

$$P_s(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s P_s(x_1, \dots, x_n).$$

Если мы рассмотрим «далекое прошлое» или «далекое будущее», где частицы находятся достаточно далеко друг от друга, интегралы (5.11) будут отличны от нуля только вблизи частиц. Так что функция

$P_s$  распадется в одночастичные функции:  $P_s(x_1, \dots, x_n) = P_s(x_1) + \dots + P_s(x_n)$ . Очевидно,  $P_s(x) \sim x^s$ , поэтому

$$I_{\pm 1}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m e^{\pm \theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle,$$

$$I_{\pm 3}|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n m^3 e^{\pm 3\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Отсюда получаем четыре уравнения для рассеяния двух частиц в  $n$  частиц:

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Если зафиксировать быстроты частиц в конечном состоянии, будет четыре уравнения для двух неизвестных  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . Эти уравнения могут иметь решения только при специальных значениях конечных быстрот  $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ . Но из аналитичности амплитуд следует, что амплитуды таких процессов должны быть тождественно равны нулю. Единственным исключением является случай  $n = 2$ , когда в амплитудах могут быть  $\delta$ -функции, отвечающие граничным значениям полюсов вне массовой поверхности.

Можно показать, что в модели имеется бесконечно много коммутирующих интегралов движения  $I_s$  с нечетными спинами  $s$ . В общем случае имеем

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle. \quad (5.12)$$

Аналогично предыдущему заключаем, что модель допускает только рассеяния  $n$  частиц в  $n$ , причем частицы сохраняют импульсы и только меняют внутренние состояния.

Теперь сделаем важное

**Предположение факторизованного рассеяния.** Амплитуда рассеяния  $n$  частиц в  $n$  распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом порядке с суммированием по внутренним состояниям промежуточных частиц.

Графически это предположение можно изобразить так:

$$\text{Diagram (Left)} = \text{Diagram (Right)} \quad (5.13)$$

В принципе, гипотезу факторизованного рассеяния можно проверять в диаграммной технике порядок за порядком по  $1/N$ . А можно воспользоваться следующими качественными рассуждениями. Предположим, что имеется конечный радиус взаимодействия частиц  $R$ , за пределами которого виртуальные частицы почти не рождаются. Это значит, что если  $|x_i - x_j| \gg R$  ( $\forall i, j$ ), волновая функция почти не отличается от волновой функции  $n$  свободных частиц. Благодаря существованию  $I_{\pm 3}$  парное рассеяние частиц можно свести к прохождению частиц друг через друга с изменением внутренних состояний. Поэтому можно выбрать базис волновых функций без отраженных волн. Пусть  $\sigma, \tau$  — элементы группы перестановок  $S_n$  чисел  $1, \dots, n$ . Тогда система  $n$  бозонов будет описываться волновой функцией

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

при  $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (5.14)$

Зависимость коэффициентов  $A$  от импульсов мы опустили. Легко убедиться, что функция (5.14) симметрична по отношению к перестановкам пар  $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$ .

Мы пока не определили смысл параметров  $\beta_i$ . В принципе, мы можем этого и не делать. Но если мы хотим, чтобы  $\beta_i$  соответствовало, скажем, состоянию  $\alpha_i$  входящей частицы  $i$ , мы можем потребовать

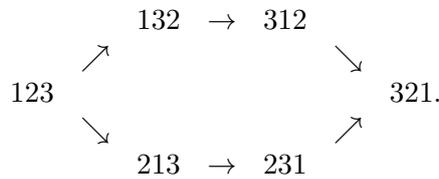
$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} [\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}. \quad (5.15)$$

Если при этом  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ , параметры  $\beta_i$  естественно описывают внутренние состояния падающих частиц. Хотя эта нормировка нарушает симметрию по импульсам (см. задачу 5), она будет нам удобна, поскольку обеспечивает аналитичность волновых функций как функций импульсов.

Перестановка двух частиц эквивалентна рассеянию этих частиц. Разумеется, рассеяние меняет настоящие состояния частиц  $\alpha_i$ , а не метки волновой функции  $\beta_i$ . Пусть  $s^i \in S_n$  — перестановка чисел  $i$  и  $i + 1$ , то есть  $s^i_i = i + 1$ ,  $s^i_{i+1} = i$ ,  $s^i_j = j$  ( $j \neq i, i + 1$ ). Тогда

$$A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_n} [\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}^{\alpha_i \alpha_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha'_i \alpha'_{i+1} \dots \alpha_n} [\tau]. \quad (5.16)$$

Переставим теперь три последовательные частицы, например,  $123 \rightarrow 321$ . Такой переход можно выполнить двумя способами:



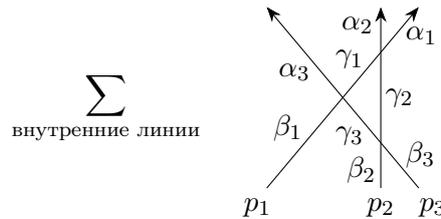
Первый способ приводит к соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left( \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \right) A_{\dots}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots]. \quad (5.17)$$

Проще это записать в матричном виде

$$A_{321 \dots} = S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) A_{123 \dots},$$

где индексы 1, 2, 3 указывают номер пространства, на которое действуют матрицы или в котором живут векторы. Еще удобней это изобразить графически



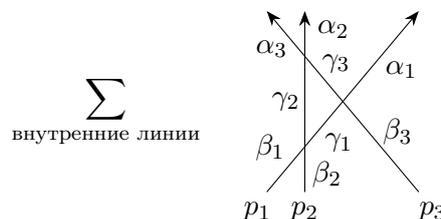
Второй способ приводит другому соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left( \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) \right) A_{\dots}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots], \quad (5.18)$$

или проще

$$A_{321 \dots} = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2) A_{123 \dots},$$

или графически



Условие того, что (5.17) и (5.18) приводят к одинаковому соотношению, называется *уравнением Янга—Бакстера* и записывается в виде

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2), \quad (5.19)$$

или более кратко

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2), \quad (5.20)$$

или графически

$$\text{Diagram (5.21)} \quad (5.21)$$

Два графика на (5.21) отличаются положением одной из линий относительно пересечения двух других. На первом графике, например, вторая проходит слева от вершины, где пересекаются первая и третья частицы, а на втором — справа. Иными словами, уравнение Янга—Бакстера выражает условие того, что линии в (5.13) можно как угодно смещать, пронося через вершины. То есть неважно, в каком порядке мы будем рассматривать попарные рассеяния частиц; в любом случае мы получим один и тот же ответ.

Второе условие на  $S$ -матрицу более элементарно. Вернемся к соотношению (5.16). Понятно, что если мы дважды переставим два последовательных индекса в коэффициентах  $A$ , т. е. произведем преобразования

$$12 \rightarrow 21 \rightarrow 12,$$

мы должны получить тождественное преобразование. Отсюда следует *условие унитарности*<sup>1</sup>

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_2 \gamma_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(p_2, p_1) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (5.22)$$

или

$$S_{21}(p_2, p_1) S_{12}(p_1, p_2) = 1, \quad (5.23)$$

или

$$\text{Diagram (5.24)} \quad (5.24)$$

Последнее условие *перекрестной* или *кроссинг-инвариантности* верно только в релятивистской теории. Его естественно сразу записать графически:

$$\text{Diagram (5.25)} \quad (5.25)$$

Здесь импульсы  $p_1$  и  $p_2$  понимаются как пространственно-временные импульсы, черта над индексом внутреннего состояния частицы изображает античастицу. Формульно это записывается так

$$S_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha'_1 \beta'_1} C_{\beta_1 \beta'_1} S_{\beta_2 \alpha'_1}^{\alpha_2 \beta'_1}(p_2, -p_1) C_{\alpha'_1 \alpha_1}, \quad (5.26)$$

<sup>1</sup>Термин не вполне точный, поскольку это условие не означает положительности норм состояний. Это условие гарантирует только отсутствие других каналов рассеяния.

где  $C$  — матрица  $CPT$ -сопряжения.

Если выразить импульсы через быстроты, получим:

1. Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.27)$$

2. Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1 \quad (5.28)$$

3. Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1, \quad (5.29)$$

где тильда над цифрой 1 означает транспонирование по индексам, отвечающим этому пространству.

Условия *бутстрапа* (5.27–5.29) чрезвычайно ограничительны. Вместе с симметрией модели и условиями аналитичности они позволяют найти точное выражение для  $S$ -матрицы. Рассмотрим условия аналитичности.  $S$ -матрица является мероморфной функцией  $\theta$ . Физическому листу отвечает область

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (5.30)$$

причем точка  $\theta = i\pi$  отвечает точке ветвления  $s = (m_1 - m_2)^2$  по переменной

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta,$$

а точке  $\theta = 0$  отвечает точка  $s = (m_1 + m_2)^2$ . Линии  $\text{Im } \theta = \pi$  отвечает в плоскости  $s$  левый разрез  $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$ , а линии  $\text{Im } \theta = 0$  — правый разрез  $[(m_1 + m_2)^2, \infty)$ .

На мнимой оси  $S$ -матрица вещественна:

$$S(iu) \in \mathbb{R} \quad \text{при } u \in \mathbb{R}, \quad (5.31)$$

причем все полюсы  $S$ -матрицы на физическом листе находятся на мнимой оси. Части этих полюсов отвечают связанные состояния, однако чтобы установить, отвечает ли данный полюс связанному состоянию, обычно требуется дополнительное исследование.

Давайте решим [8] уравнение Янга—Бакстера для  $O(N)$ -симметричной ( $N \geq 3$ )  $S$ -матрицы  $N^2 \times N^2$  вида (4.17). Уравнение Янга—Бакстера для нее приобретает вид (Рис. 5.1)

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'), \quad (5.32)$$

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'), \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} NS_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_1(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ + S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_3(\theta'). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Чтобы решить эту систему, введем обозначение  $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$ . Первое уравнение принимает вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно  $h(\theta) \sim \theta$  и

$$S_3(\theta) = -i \frac{\lambda}{\theta} S_2(\theta). \quad (5.35)$$

Пусть теперь  $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$ . Подставляя (5.35) в (5.33), получаем

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Это уравнение имеет решение

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя это в (5.34), получим

$$\kappa = \frac{N - 2}{2} \lambda.$$

$$\begin{aligned} & \text{Crossing of red and blue lines} + \text{Crossing of green and blue lines} = \text{Crossing of red and green lines} & (5.32) \\ & \text{Crossing of red and green lines} + \text{Crossing of red and blue lines} = \text{Crossing of green and blue lines} & (5.33) \\ & \text{Crossing of red and blue lines} + \text{Crossing of red and green lines} + \text{Crossing of green and blue lines} = \text{Crossing of red and green lines} & (5.34) \end{aligned}$$

Рис. 5.1. Схематичное изображение уравнений (5.32)–(5.34). Соединению двух линий одного цвета в вершине соответствует символ Кронекера в  $S$ -матрице. На пересечениях линий одного цвета помечено, какие вклады в  $S$ -матрицу им соответствуют.

$$\begin{aligned} & \text{Loop of red and blue lines} + \text{Loop of red and blue lines} = \text{Two parallel lines (red and blue)} & (5.40) \\ & \text{Loop of red and blue lines} + \text{Loop of red and blue lines} = 0 & (5.41) \\ & \text{Loop of red and blue lines} + \text{Loop of red and blue lines} + \text{Loop of red and blue lines} = 0 & (5.42) \end{aligned}$$

Рис. 5.2. Схематичное изображение уравнений (5.40)–(5.42).

Это значит, что

$$S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i(N-2)\lambda/2 - \theta} S_2(\theta). \quad (5.36)$$

Это самое общее решение уравнения Янга–Бакстера, зависящее от произвольной функции  $S_2(\theta)$  и произвольного параметра  $\lambda$ . Воспользуемся теперь условиями кроссинг-инвариантности и унитарности, чтобы зафиксировать  $S_2$  и  $\lambda$ .

Условие кроссинг-симметрии имеет вид

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (5.37)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (5.38)$$

Подставляя сюда (5.35) и (5.36), получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (5.39)$$

Условие унитарности (Рис. 5.2)

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (5.40)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} & NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) \\ & + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

удовлетворяется, если

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (5.43)$$

Теперь нам надо решить совместно уравнения (5.37) и (5.43). Понятно, что решение этих уравнений неоднозначно. Решение переходит в решение, если домножить его на функцию

$$\frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha}$$

с произвольным  $\alpha$ . Мы будем искать «минимальное» решение, то есть такое решение, которое будет иметь наименьшее количество нулей и полюсов на физическом листе.

Из (5.43) заключаем, что  $S_2(\theta)$  имеет простой нуль в точке  $\theta = 0$ . Из кроссинг-симметрии (5.37) немедленно заключаем, что простой нуль имеется также в точке  $\theta = i\pi$ . Из унитарности находим, что в точке  $\theta = -i\pi$  имеется полюс. Продолжая поочередно применять кроссинг-симметрию и унитарность, находим набор полюсов и нулей функции  $S_2(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.44)$$

Другой набор нулей и полюсов получается следующим образом. Из (5.43) следует, что  $S_2$  должна иметь полюс в одной из точек  $\theta = \mp i\lambda$ . Давайте обозначать решения с такими полюсами  $S_2^{(\pm)}(\theta)$ . Рассуждая как и раньше, получим для  $S_2^{(\pm)}(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = \mp i\lambda - i\pi - 2\pi in, \pm i\lambda + 2\pi i + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = \mp i\lambda - 2\pi in, \pm i\lambda + i\pi + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.45)$$

Собирая (5.44), (5.45), получим

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(i\pi - \theta), \quad Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm\frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-i\frac{\theta}{2\pi}\right)}. \quad (5.46)$$

Раскладывая  $S$ -матрицу (5.35), (5.36), (5.46) с учетом (5.39) по  $1/N$ , получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (5.47)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (5.48)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (5.49)$$

Это позволяет отождествить  $S^{(+)}(\theta)$  с  $S$ -матрицей  $O(N)$ -модели, а  $S^{(-)}(\theta)$  с  $S$ -матрицей  $N$ -компонентной модели Гросса—Невё. Заметим, что  $S_1^{(\pm)}(0) = S_2^{(\pm)}(0) = 0$ ,  $S_3^{(\pm)}(0) = \mp 1$ . Отсюда следует

$$S_{12}^{(\pm)}(0) = \mp P_{12}, \quad (5.50)$$

где  $P_{12} : a \times b \mapsto b \times a$  — оператор перестановки пространств 1 и 2. Это означает, что для частиц в  $O(N)$ -модели действует принцип Паули, хотя мы и считали частицы бозонами. Этот принцип Паули даже более сильный, чем в случае свободных фермионов: две частицы не могут иметь одинаковые импульсы.

На самом деле в двумерном пространстве-времени нельзя сказать, является ли частица бозоном или фермионом. Если говорить о спине, то мы знаем, что такое спин оператора, но не знаем, что такое спин состояния, так как в одномерном пространстве нет вращений. Кроме того, в одном пространственном измерении есть способ построения алгебры Клиффорда (фермионной алгебры) по алгебре Гайзенберга (бозонной алгебре) и наоборот [11]. Это преобразование уважает понятие частицы, но меняет характер взаимодействия. Именно, матрица рассеяния частиц как фермионов отличается от матрицы рассеяния тех же частиц как бозонов знаком.

## Задачи

1. Получите уравнение (5.6).

**2.** Напишите явно асимптотическое выражение для волновой функции (5.14) для двух и трех частиц ( $n = 2, 3$ ). Приняв условие (5.16) для  $n = 2$  за определение  $S$ -матрицы, убедитесь, что отсюда следует (5.16) для случая  $n = 3$ . Покажите, что произведение трех  $S$ -матриц  $S_{12}S_{13}S_{23}$  действительно имеет смысл трехчастичной  $S$ -матрицы.

**3.** Выведите (5.47–5.49).

**4.** Проверьте (5.50). Покажите, что из  $S(0) = -P$  следует принцип Паули для *взаимодействующих бозонов*: две частицы не могут иметь одинаковые импульсы.

**5\*.** Найдите, как преобразуется волновая функция, определенная уравнением (5.14), коэффициенты которой заданы условием (5.15), при перестановке пары соседних индексов:  $(\beta_i, p_i) \leftrightarrow (\beta_{i+1}, p_{i+1})$ .

## Семинар 5

Составляем и решаем уравнения Янга—Бакстера,  
унитарности и кроссинг-симметрии (в процессе лекции)

## Лекция 6

### Бозоны и фермионы с контактным взаимодействием

В этой лекции мы рассмотрим две простые точно решаемые нерелятивистские модели, которые хорошо демонстрируют устройство анзаца Бете. Эти модели являются простейшими примерами так называемых моделей Янга—Годена с четырехчастичным взаимодействием.

Пусть  $\varphi(t, x)$ ,  $\varphi^+(t, x)$  — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0. \quad (6.1)$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left( \frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right). \quad (6.2)$$

Приглядевшись, мы видим, что это гамильтониан нелинейного уравнения Шрёдингера. Действительно, уравнение Гайзенберга для оператора  $\varphi$  имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2. \quad (6.3)$$

Чтобы найти классический предел, нужно сделать замену  $\varphi \rightarrow \hbar^{-1/2} \varphi$ ,  $c \rightarrow \hbar c$  и устремить  $\hbar$  к нулю. В этом пределе коммутатор стремится к нулю, а скобка  $\frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$  переходит в скобку Пуассона. Уравнение (6.3) не меняет вид, но приобретает смысл классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Заметим, что два оператора

$$Q = \int dx \varphi^+ \varphi, \quad P = -i \int dx \varphi^+ \partial_x \varphi \quad (6.4)$$

коммутируют с гамильтонианом. Легко видеть, что эти операторы представляют собой оператор числа частиц и оператор импульса. Можно ввести вакуум  $|0\rangle$  с нулевыми энергией и импульсом, определяемый соотношениями

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0. \quad (6.5)$$

Состояния вида

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle, \quad (6.6)$$

образуют собственное подпространство  $\mathcal{H}_N$  оператора  $Q$ . Определим оператор  $\hat{H}_N$  на симметрических функциях  $N$  переменных по формуле

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle. \quad (6.7)$$

Этот оператор представляет собой первично-квантованный гамильтониан и имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j). \quad (6.8)$$

Мы видим, что на собственном подпространстве  $\mathcal{H}_N$  гамильтониан (6.2) действует как гамильтониан (6.8) системы бозонов с дельтаобразным потенциалом взаимодействия. Такую систему называют системой Либа—Линихера. Покажем, что система Либа—Линихера допускает точное решение.

Начнем со случая  $N = 1$ . Он тривиален. Член со взаимодействием отсутствует и решение стационарной задачи представляет собой плоскую волну:

$$\chi(x) = e^{ipx}, \quad E = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.9)$$

Перейдем теперь к случаю  $N = 2$ . При  $x_1 \neq x_2$  член взаимодействия равен нулю, поэтому решение должно представлять собой суперпозицию плоских волн. В силу симметрии волновой функции и сохранения энергии и импульса базисные решения имеют вид

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (6.10)$$

Энергия такой системы, очевидно, равна

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

а взаимодействие в гамильтониане определяет только сшивку волновых функций при  $x_1 = x_2$ . Заметим, что эта функция непрерывна при  $x_1 = x_2$ , но, вообще говоря, не дифференцируема в этой точке: производная испытывает скачок. Давайте его найдем. Перейдем к координатам центра масс  $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  и относительного положения частиц  $x = x_1 - x_2$ . Гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{4m}\partial_X^2 - \frac{1}{m}\partial_x^2 + c\delta(x),$$

а волновая функция равна

$$\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right) = e^{i(p_1+p_2)X} \times \begin{cases} A_{12}e^{ipx/2} + A_{21}e^{-ipx/2}, & \text{при } x < 0; \\ A_{21}e^{ipx/2} + A_{12}e^{-ipx/2}, & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad p = p_1 - p_2. \quad (6.11)$$

Проинтегрируем уравнение Шрёдингера  $\hat{H}_2\chi = E\chi$  по переменной  $x$  по маленькому интервалу  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Интеграл от правой части стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу конечности  $\chi$ . По той же причине стремится к нулю член с  $\partial_X^2\chi$ . Поэтому имеем

$$0 = -\frac{1}{m}\partial_x\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-0}^{x=+0} + c\chi(X, X) = \frac{1}{2m}(\partial_{x_2}\chi(x_1, x_2) - \partial_{x_1}\chi(x_1, x_2))\Bigg|_{x_1=x_2-0}^{x_1=x_2+0} + c\chi(x_2, x_2).$$

Подставляя волновую функцию в виде (6.11), находим отношение коэффициентов:

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = S(p_1 - p_2), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}. \quad (6.12)$$

Функция  $S(p)$  является матрицей рассеяния двух частиц. В дальнейшем нам понадобится величина  $\Phi(p)$ , отличающаяся на константу  $\pi$  от фазы рассеяния. Ее удобно будет доопределить условием нечетности

$$\Phi(-p) = -\Phi(p). \quad (6.13)$$

При  $c > 0$  функция  $\Phi(p)$  монотонно возрастает, причем  $\Phi(p) \rightarrow \pm\pi$  при  $p \rightarrow \pm\infty$ . При  $c < 0$  убывает в тех же пределах.

Рассмотрим теперь общие волновые функции для  $N$  частиц. Легко видеть, что эти функции должны быть линейными комбинациями плоских волн при всех различных  $x_i$ , а их производные должны иметь разрывы при  $x_i = x_j$ :

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(x_i, x_j) - \partial_{x_i}\chi(x_i, x_j))\Bigg|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(x_j, x_j) = 0 \quad (i \neq j). \quad (6.14)$$

Будем искать волновые функции в виде *анзаца (подстановки) Бёте*

$$\chi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} A_\tau \exp\left(i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}\right), \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (6.15)$$

Эти функции очевидным образом симметричны, а условия (6.14) эквивалентны уравнениям на коэффициенты

$$\frac{A_{\dots j i \dots}}{A_{\dots i j \dots}} = S(p_i - p_j). \quad (6.16)$$

Наложим на систему периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (6.17)$$

Если, например,  $x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_1 + L$ , члены в левой и правой частях должны попарно совпасть для перестановок  $\tau$ , отличающихся в разных частях циклической перестановкой  $(12 \dots N) \rightarrow (2 \dots N1)$ . Отсюда получаем систему *уравнений Бете*

$$e^{ip_i L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(p_i - p_j) = 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.18)$$

Любому решению уравнений Бете отвечает некоторая волновая функция. Можно показать (см. задачу к предыдущей лекции), что если два импульса совпадают  $p_i = p_j$  ( $i \neq j$ ), то волновая функция обращается в нуль. Но все решения с различными импульсами ( $p_i \neq p_j$  для любых  $i \neq j$ ) ненулевые и, более того, отвечают линейно независимым состояниям. Полный импульс и полная энергия бетевского состояния равны

$$P = \sum_{i=1}^N p_i, \quad E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \quad (6.19)$$

причем полный импульс квантуется просто:

$$e^{iPL} = \prod_{i \neq j} S(p_j - p_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\pi\nu}{L} \quad (\nu \in \mathbb{Z}). \quad (6.20)$$

Более того, величины

$$I_n = \sum_{i=1}^N p_i^n \quad (6.21)$$

представляют собой собственные значения некоторых коммутирующих интегралов движения

$$\mathcal{I}_n = (-i)^n \int dx (\varphi^+ \partial_x^n \varphi + \dots), \quad [\mathcal{I}_n, H] = 0, \quad [\mathcal{I}_m, \mathcal{I}_n] = 0.$$

Точки означают члены более высокого порядка по  $\varphi, \varphi^+$ . Собственно, сохранение этих интегралов движения и обеспечивает отсутствие отраженных волн в состоянии (6.15) и, соответственно, точную интегрируемость задачи.

Прологарифмируем уравнения Бете (6.18):

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}, \quad (6.22)$$

где  $\Phi(p)$  определена выше в (6.12), (6.13). Числа  $n_i$  все полуцелые или все целые в зависимости от четности числа частиц  $N$ . Это следует из множителя  $(-1)^{N-1}$ , содержащегося в произведении в (6.18). Можно показать, что каждому набору попарно различных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^N$  отвечает единственное решение  $\{p_i\}_{i=1}^N$  уравнений Бете. Заметим, что это кардинально отличает ситуацию  $c \neq 0$  от ситуации  $c = 0$ , в которой числа  $n_i$  всегда целые и, главное, могут совпадать. Всюду ниже мы будем полагать  $c > 0$ , то есть рассматривать систему с отталкиванием.

Зафиксируем какое-то решение уравнений Бете набором целых чисел  $\{n_i\}$ . Рассмотрим уравнение

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n, \quad (6.23)$$

связывающее два числа  $p$  и  $n$ . В силу монотонного роста функции  $\Phi(p)$  величина  $n$  монотонно растет с  $p$ . Поэтому эта связь взаимно-однозначна. Мы будем обозначать  $p(n)$  единственное решение этого

уравнения при данном  $n$ . Очевидно, что  $p(n_i) = p_i$ . Мы будем говорить о числах  $n_i$  как о «заполненных состояниях», а о числах  $n \neq n_i$  для всех  $i$  как о «вакантных состояниях».

Итак, мы нашли вид волновых функций в модели Либа—Линихера, матрицу рассеяния частиц и уравнения, определяющие спектр системы в конечном объеме. Мы хотим найти основное состояние системы  $N$  частиц. Вообще говоря, эта задача сводится к (численному) решению системы нелинейных уравнений (6.22) и подбору значений  $n_i$ , отвечающих наименьшей энергии. Задача значительно упрощается в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$ ,  $N/L = \text{const}$ .

Чтобы понять структуру основного состояния, удобно начать анализ не со слабого взаимодействия, а с сильного  $c \rightarrow +\infty$ . В этом пределе  $\Phi(p) = 0$  и уравнения Бете принимают вид  $p_i L = 2\pi n_i$ . Все импульсы независимы, но не равны друг другу, так что основному состоянию отвечает случай  $|p| \leq p_{\max}$ . Числа  $n_i$  плотно заполняют интервал от  $-\frac{N-1}{2}$  до  $\frac{N-1}{2}$ . Отсюда имеем  $p_{\max} = \frac{\pi(N-1)}{L}$ . Энергия такой системы равна

$$E = \frac{\pi^2}{2mL^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{N-1-2k}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2 N(N-1)(2N-1)}{48mL^2} \simeq \frac{\pi^2 N^3}{24mL^2}.$$

Теперь будем уменьшать постоянную  $c$ . При этом максимальный импульс  $p_{\max}$  будет уменьшаться, в то время как максимальное значение  $\frac{N-1}{2}$  чисел  $|n_i|$  не изменится. Будет уменьшаться и энергия системы. В конце концов, при  $c = 0$  функция  $\Phi(p)$  станет ступенчатой, а  $p_{\max}$  и полная энергия системы обратятся в нуль, что отвечает бозе-конденсации. В термодинамическом пределе расстояние между соседними импульсами оказывается порядка  $1/L$ , а спектральная плотность состояний на единицу длины

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp} \simeq \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \quad (6.24)$$

остается конечной. Поэтому сумму в уравнении (6.22) в основном состоянии можно заменить на интеграл. Для этого введем также спектральную плотность заполненных состояний. Расположим  $n_i$  в порядке возрастания:  $n_1 < n_2 < \dots$  и положим

$$\rho^\bullet(p) = \frac{2\pi di}{L dp} \simeq \frac{2\pi}{L(p_{i+1} - p_i)}. \quad (6.25)$$

Теперь возьмем разность двух уравнений (6.23) с  $n+1$  и  $n$  в правой части и поделим их на  $L(p(n+1) - p(n))$ . Получим

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} = \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}.$$

Заменяя сумму по  $j$  на интеграл по  $dp_j$ , а отношение под суммой приближая производной  $\Phi'(p) = \frac{d}{dp} \Phi(p)$ , получим

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p). \quad (6.26)$$

Это уравнение связывает плотность заполненных состояний и плотность состояний. Но процедура вычитания исключило одно уравнение из системы. Поэтому дополним систему условием равенства числа заполненных состояний числу частиц:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) = \frac{N}{L}. \quad (6.27)$$

В случае основного состояния эти две величины связаны еще и условием того, что заполненные состояния плотно заполняют интервал  $[-p_{\max}, p_{\max}]$ :

$$\rho^\bullet(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases} \quad (6.28)$$

Отсюда получаем интегральное уравнение

$$1 + \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p-p')\rho(p') = \rho(p), \quad \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) = \frac{N}{L}. \quad (6.29)$$

Это уравнение решается, вообще говоря, численно и позволяет найти энергию основного состояния

$$\frac{E}{L} = \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) \frac{p^2}{2m}. \quad (6.30)$$

Численно решить уравнения Бете, тем более, в термодинамическом пределе, намного проще, чем численно диагонализировать матрицу, которая получается ограничением гамильтониана (6.2) на какое-либо конечное подпространство. Более того, результаты, получаемые решением уравнений Бете, одинаково хороши для любых размеров системы и значений константы связи. В этом смысле мы будем говорить, что уравнения Бете дают точное решение задачи. В следующей лекции мы применим анзац Бете к релятивистской системе и увидим, что для нее можно получить точные *аналитические* результаты в задаче, напоминающей термодинамический предел в модели Либа—Линихера.

Теперь рассмотрим аналогичную фермионную задачу с дельтаобразным взаимодействием. В этом случае член со взаимодействием не равен нулю, только если у нас есть как минимум два сорта фермионов. Это могут быть, например, фермионы спина 1/2. Обозначим их  $\psi_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \pm$ . Коммутационные соотношения имеют вид

$$\{\psi_\varepsilon(x), \psi_{\varepsilon'}^+(x')\} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta(x-x'), \quad \{\psi_\varepsilon(x), \psi_{\varepsilon'}(x')\} = \{\psi_\varepsilon^+(x), \psi_{\varepsilon'}^+(x')\} = 0, \quad (6.31)$$

где фигурные скобки обозначают антикоммутатор. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left( \sum_{\varepsilon=\pm} \frac{\partial_x \psi_\varepsilon^+ \partial_x \psi_\varepsilon}{2m} + c \psi_+^+ \psi_-^+ \psi_- \psi_+ \right). \quad (6.32)$$

Обратим внимание на существенную разницу между гамильтонианами (6.2) и (6.32). В случае модели Либа—Линихера все частицы взаимодействовали между собой. В фермионной модели имеется два сорта частиц, причем число частиц каждого сорта сохраняется, но взаимодействуют только частицы разных сортов.

Итак, в системе имеются следующие сохраняющиеся величины:

$$Q_\varepsilon = \int dx \psi_\varepsilon^+ \psi_\varepsilon, \quad P = -i \sum_{\varepsilon=\pm} \int dx \psi_\varepsilon^+ \partial_x \psi_\varepsilon. \quad (6.33)$$

Аналогично бозонному случаю определим вакуум

$$\psi_\varepsilon(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_\varepsilon^+(x) = 0 \quad (6.34)$$

и состояния с фиксированным количеством частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^+(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^+(x_1) |0\rangle. \quad (6.35)$$

Первично-квантованный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + \frac{c}{2} \sum_{i<j} (1 - \sigma_i^3 \sigma_j^3) \delta(x_i - x_j), \quad (6.36)$$

где  $\sigma_i^3$  — это матрица  $\sigma^3 = \text{diag}(1, -1)$ , действующая в пространстве  $i$ го спина.

При  $N = 1$  плоские волны

$$\chi^\varepsilon(x) = A^\varepsilon e^{ipx} \quad (6.37)$$

являются собственными функциями гамильтониана с импульсом  $P = p$  и энергией  $E = \frac{p^2}{2m}$ . При  $N = 2$  будем искать собственные функции в виде

$$\chi^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} - A_{21}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}, & x_1 < x_2; \\ A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} - A_{12}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2}, & x_1 > x_2. \end{cases} \quad (6.38)$$

Функция, очевидно, антисимметрична по отношению к перестановке пар  $(\varepsilon_1, x_1) \leftrightarrow (\varepsilon_2, x_2)$ . Чтобы найти коэффициенты в правой части, подействуем гамильтонианом (6.36) на эту функцию. Предполагая непрерывность функции  $\chi$ ,

$$A_{12}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - A_{21}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} - A_{12}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1},$$

мы получим следующие соотношения:

$$A_{21}^{\varepsilon_2 \varepsilon_1} = \sum_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} S(p_1 - p_2)_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} A_{12}^{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}, \quad S(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{p}{p+imc} & \frac{imc}{p+imc} & \\ & \frac{imc}{p+imc} & \frac{p}{p+imc} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

где матрица  $S(p)$  записана в базисе  $++, +-, -+, --$ . Эта матрица представляет собой двухчастичную матрицу рассеяния фермионов в вакууме. Легко проверить, что матрица  $S(p)$  удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера:

$$S_{12}(p_1 - p_2) S_{13}(p_1 - p_3) S_{23}(p_2 - p_3) = S_{23}(p_2 - p_3) S_{13}(p_1 - p_3) S_{12}(p_1 - p_2) \quad (6.40)$$

Заметим также, что  $S(0)$  представляет собой матрицу перестановки  $P$ . Графически это представляется в виде

$$S(0) = \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \text{ } \\ \searrow \quad \nearrow \\ p \quad p \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \text{ } \\ \searrow \quad \nearrow \\ p \quad p \end{array} = P. \quad (6.41)$$

Многочастичную волновую функцию в этой задаче тоже легко написать:

$$\chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} (-1)^{\sigma \tau} A_{\tau}^{\varepsilon_{\sigma_1} \dots \varepsilon_{\sigma_N}} e^{i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}, \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (6.42)$$

Действуя на эту функцию гамильтонианом, нетрудно найти условие на коэффициенты

$$A_{\dots j i \dots} = S_{ij}(p_i - p_j) A_{\dots i j \dots}, \quad (6.43)$$

где индексы у  $S$ -матрицы означают пару пространств, на которых она действует.

Наложим теперь условие периодичности. Совершенно аналогично (6.18), получаем

$$e^{ip_i L} T^{(i)}(p_1, \dots, p_N) A_{1 \dots N} = A_{1 \dots N}, \quad T^{(i)}(p_1, \dots, p_N) = \prod_{j=1}^{\widehat{i-1}} S_{ij}(p_i - p_j) \prod_{j=i+1}^{\widehat{N}} S_{ij}(p_i - p_j) \quad (6.44)$$

Мы видим, что задача о нахождении периодических функций свелась к задаче о диагонализации операторов  $T^{(j)}$  в «спиновом» пространстве, причем все эти операторы должны диагонализировываться на одном и том же базисе. Для этого они должны коммутировать. Покажем, что это так. Для этого удобно представить матрицы графически:

$$T^{(i)} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \dots \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{ } \\ \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \\ i-1 \quad 1 \quad N \quad i+1 \quad i \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \right) \\
&\quad N \qquad i+1 \quad i \quad i-1 \qquad 1 \\
&= \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 0 \right) = T(p_i; p_1, \dots, p_N), \quad (6.45) \\
&\quad p_i \qquad N \qquad i+1 \quad i \quad i-1 \qquad 1
\end{aligned}$$

где

$$T(p) \equiv T(p; p_1, \dots, p_N) = \text{tr}_0(S_{N0}(p_N - p) \cdots S_{20}(p_2 - p) S_{10}(p_1 - p)). \quad (6.46)$$

След берется по некоторому вспомогательному пространству, обозначенному здесь через 0. Мы использовали соотношение (6.41) при переходе от второй к третьей строчке.

Оператор  $T(p)$  имеет вид трансфер-матрицы некоторой решеточной модели, а именно шестивершинной модели в точке перехода между щелевой и бесщелевой фазами<sup>1</sup>. Мы знаем, что построенные так трансфер-матрицы коммутируют:

$$[T(p), T(p')] = 0, \quad (6.47)$$

если  $R$ -матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (6.40). Отсюда немедленно следует, что

$$[T^{(i)}, T^{(j)}] = 0. \quad (6.48)$$

Диагонализировать семейство матриц  $T(p)$  можно с помощью стандартной техники алгебраического анзаца Бете. Уравнения Бете пишутся на набор переменных  $(u_1, \dots, u_n)$ . Количество переменных  $n \leq N$  связано с (сохраняющимся) спином состояния:

$$S^z = \frac{N}{2} - n. \quad (6.49)$$

Система *вторичных* уравнений Бете имеют вид

$$\prod_{i=1}^N \frac{u_a - p_i + \frac{imc}{2}}{u_a - p_i - \frac{imc}{2}} = \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n \frac{u_a - u_b + imc}{u_a - u_b - imc}, \quad a = 1, \dots, n. \quad (6.50)$$

Каждому решению этих уравнений Бете отвечает собственное значение трансфер-матрицы  $T(p)$  вида

$$\Lambda(p; \{p_k\}; \{u_b\}) = \prod_{a=1}^n \frac{u_a - p - \frac{imc}{2}}{u_a - p + \frac{imc}{2}} + \prod_{i=1}^N \frac{p - p_i}{p - p_i - imc} \prod_{a=1}^n \frac{p - u_a - \frac{3imc}{2}}{p - u_a - \frac{imc}{2}} \quad (6.51)$$

В случае  $p = p_j$  второй член пропадает и мы получаем *первичные* уравнения Бете в виде

$$e^{ip_i L} = \prod_{a=1}^n \frac{u_a - p_i + \frac{imc}{2}}{u_a - p_i - \frac{imc}{2}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.52)$$

Система уравнений (6.50), (6.52) представляет собой систему уравнений Бете на переменные  $p_1, \dots, p_N$ ,  $u_1, \dots, u_n$ , позволяющую построить все собственные векторы и найти все собственные значения гамильтониана (6.32). Полный импульс и энергия даются теми же формулами (6.19), что и в случае модели Либа–Линихера, причем полный импульс удовлетворяет тому же условию квантования (6.20).

В термодинамическом пределе для основного состояния и низколежащих возбуждений эти уравнения могут быть сведены к линейным интегральным уравнениям. Мы не будем подробно обсуждать эту тему. Мне важно было обратить ваше внимание на эту связь между интегрируемыми решеточными моделями статистической механики и динамикой внутренних состояний частиц в многочастичной системе.

<sup>1</sup>В свою очередь, эта модель в однородном случае эквивалентна XXX-цепочке Гайзенберга.

## Задачи

1. Покажите, что  $\mathcal{S}_3 = i \int dx (\varphi^+ \partial_x^3 \varphi - 3mc(\varphi^+)^2 \varphi \partial_x \varphi)$ .
2. Покажите, что модель Либба—Линихера при  $c \rightarrow +\infty$  имеет спектр модели свободных бесспиновых фермионов с зависящим от числа частиц циклическим граничным условием.
3. Найдите все решения уравнения (6.22) в пределе  $c \rightarrow +0$ , то есть для  $\Phi(p) \rightarrow \pi \operatorname{sign} p$ . Покажите, что в этом пределе уровни могут вырождаться. Найдите уравнение для расщепления  $k$  вырожденных уровней при малых, но ненулевых значениях  $c$ .
4. Выведите (6.39).
- 5\*. Покажите, что в модели Либба—Линихера при  $c < 0$  для любого целого положительного  $n$  имеется связанное состояние  $n$  частиц с энергией  $E_n^* = -\frac{n(n^2-1)}{24}mc^2$ . Опишите основное состояние системы  $N$  частиц.

## Семинар 6

### Вычеты $S$ -матрицы и связанные состояния

Мы рассмотрим (асимптотическую) волновые функции Бете системы двух нерелятивистских бозонов без внутренних состояний для разностей импульсов вблизи полюса  $S$ -матрицы и найдем условие существования связанного состояния.

## Лекция 7

### Решение модели Тирринга методом анзаца Бете: построение собственных состояний

В этой лекции мы обсудим решение массивной модели Тирринга

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left( \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi - \frac{\pi g}{2} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right) \quad (7.1)$$

методом анзаца Бете (см. книгу [13] и ссылки в ней). Напомним, что гамма-матрицы можно записать в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} = i\sigma^1, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3.$$

Гамильтониан модели Тирринга имеет вид

$$H = \int dx \left( -i\psi^+\sigma^3\partial_x\psi + m_0\psi^+\sigma^2\psi + 2\pi g\psi_+^\dagger\psi_-^\dagger\psi_-\psi_+ \right) \quad (7.2)$$

с коммутационными соотношениями

$$\psi_{\alpha'}^+(x')\psi_\alpha(x) + \psi_\alpha(x)\psi_{\alpha'}^+(x') = \delta_{\alpha'\alpha}\delta(x' - x), \quad (7.3)$$

причем импульс  $P$  и оператор фермионного числа  $Q$  имеют вид

$$P = -i \int dx \psi^+\partial_x\psi, \quad Q = \int dx \psi^+\psi. \quad (7.4)$$

Давайте вспомним картину Дирака. Спектр  $\epsilon^2 - p^2 = m^2$  имеет две ветви:  $\epsilon = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$ . Согласно принципу Паули в одном состоянии может находиться одно возбуждение. Состояние системы, в котором все одночастичные состояния вакантны, мы будем называть «голым вакуумом» или *псевдовакуумом*. Если начать заполнять состояния с отрицательной энергией фермионами, энергия системы будет уменьшаться. Поэтому псевдовакуум не является основным состоянием системы. Основное состояние (физический вакуум) получится, когда мы заполним все состояния отрицательной энергии («море Дирака»). «Элементарные возбуждения» над псевдовакуумом мы будем называть *псевдочастицами*. Попробуем формализовать эту процедуру.

Рассмотрим сначала случай свободных фермионов  $g = 0$ . Обозначим через  $|\Omega\rangle$  состояние, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle = 0, \quad \langle\Omega|\psi_\alpha^+(x) = 0. \quad (7.5)$$

Введем волновую функцию состояния  $N$  псевдочастиц:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_N}^+(x_N) \dots \psi_{\alpha_1}^+(x_1) |\Omega\rangle. \quad (7.6)$$

Состояния такого вида являются собственными векторами оператора  $Q$ :

$$Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle.$$

Таким образом, полное пространство состояний  $\mathcal{H}$  распадается в сумму по собственным значениям  $Q$ :

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N, \quad v \in \mathcal{H}_N \Leftrightarrow Qv = Nv. \quad (7.7)$$

Оператор фермионного числа в этой картине становится оператором числа псевдочастиц.

Действие  $\hat{H}_N$  гамильтониана на волновую функцию  $\chi^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N)$ , определенное уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\alpha_N}^+(x_N) \dots \psi_{\alpha_1}^+(x_1) |\Omega\rangle, \quad (7.8)$$

имеет вид

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2),$$

где  $\sigma_k^i$  действует на пространстве  $k$ -й частицы. При  $N = 1$  собственное состояние имеет вид

$$\chi_\lambda(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} \\ ie^{-\lambda/2} \end{pmatrix} e^{ixm_0 \operatorname{sh} \lambda}. \quad (7.9)$$

Многочастичное решение свободнополевого гамильтониана дается слэтеровским детерминантом:

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_k}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}). \quad (7.10)$$

Энергия  $N$ -частичного состояния равна

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{k=1}^N \operatorname{ch} \lambda_k. \quad (7.11)$$

Какие значения могут принимать параметры  $\lambda$ ? Если система находится в ящике размера  $L$  с циклическими граничными условиями, «быстроты»  $\lambda_k$  являются решениями уравнений

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} = 1 \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.12)$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} \lambda_k = \frac{2\pi n_k}{m_0 L}, \quad n_k \in \mathbb{Z}.$$

Это значит, что  $\lambda_k$  находится либо на вещественной оси  $\mathbb{R}$ , либо на прямой  $-\pi + \mathbb{R}$ . Последние решения соответствуют отрицательным энергиям. Очевидно, основным является состояние, в котором все состояния отрицательной энергии заполнены. Положим  $\lambda_k = -i\pi + \xi_k$ . Чтобы определить энергию вакуума, введем ультрафиолетовое обрезание

$$-\Theta < \xi_k < \Theta, \quad \Theta \simeq \log \frac{\Lambda}{m_0}. \quad (7.13)$$

В термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  энергия вакуума равна

$$E_0 = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) m_0 \operatorname{ch} \xi, \quad \rho(\xi) = \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi} \right| = m_0 \operatorname{ch} \xi.$$

Конечно, энергия основного состояния сама по себе бессмысленна, интересны энергии возбужденных состояний. Возбуждению с быстротой  $\theta$  соответствует дополнительный корень в точке

$$\lambda_k = \theta \quad (\text{частица}),$$

или дырка (отсутствие корня) в точке

$$\lambda_k = \theta - i\pi \quad (\text{античастица}).$$

Поскольку корни уравнений (7.12) никак не связаны друг с другом, мы получаем систему невзаимодействующих частиц и античастиц с  $p = (m \operatorname{ch} \theta, m \operatorname{sh} \theta)$ , подчиняющихся принципу Паули, то есть то, что мы и должны были получить.

Теперь включим взаимодействие. Оператор взаимодействия в (7.2) коммутирует с оператором числа псевдочастиц  $Q$ . Поэтому оператор взаимодействия действует внутри пространств  $\mathcal{H}_N$ :

$$\hat{H}_N = \sum_{k=1}^N (-i\sigma_k^3 \partial_{x_k} + m_0 \sigma_k^2) + \pi g \sum_{k < l}^N \delta(x_k - x_l) (1 - \sigma_k^3 \sigma_l^3). \quad (7.14)$$

Конструкция из сигма-матриц в правой части есть

$$\frac{1}{2}(1 \otimes 1 - \sigma^3 \otimes \sigma^3)^{\alpha'_1 \alpha'_2} = \delta_{\alpha_1}^{\alpha'_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha'_2} \delta_{\alpha_1, -\alpha_2}, \quad (7.15)$$

то есть взаимодействуют между собой только частицы противоположных спинов.

Член взаимодействия в гамильтониане (7.14) плохо определен. Действительно, уравнение на собственные функции является дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому дельта-функциональный член приводит к скачку волновой функции на поверхности  $x_k = x_l$ . В то же время действие гамильтониана зависит от значений волновой функции как раз на этой поверхности. Дельта-функцию следует регуляризовать. Покажем, что ответ не зависит от регуляризации. Рассмотрим уравнение

$$f'(x) - c\delta(x)f(x) = g(x, f(x))$$

Регуляризуем дельта-функцию произвольной интегрируемой функцией  $\delta_a(x)$  с носителем  $[-a, a]$ :

$$f'(x) - c\delta_a(x)f(x) = g(x, f(x)), \quad \int_{-a}^a dx \delta_a(x) = 1. \quad (7.16)$$

Пусть

$$\delta_a(x) = \epsilon'_a(x).$$

Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c\epsilon'_a(x) + \frac{g(x, f(x))}{f(x)}.$$

При достаточно малых  $a$  вторым слагаемым можно пренебречь, и мы имеем

$$f(x) = \text{const } e^{c\epsilon_a(x)} \quad \Rightarrow \quad f(+a) = e^{c(\epsilon_a(a) - \epsilon_a(-a))} f(-a) = e^c f(-a).$$

Отсюда в пределе  $a \rightarrow 0$  получаем

$$f(+0) = e^c f(-0). \quad (7.17)$$

Одночастичные состояния опять описываются решениями (7.9). Рассмотрим двухчастичное состояние. Поскольку взаимодействие контактное (отлично от нуля только при  $x_1 = x_2$ ), при  $x_1 \neq x_2$  волновая функция представляет собой решение уравнений для свободных фермионов. Благодаря законам сохранения энергии и импульса рассеяние безотражательно, и волновая функция имеет вид

$$\chi_{\lambda_1 \lambda_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{21} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \\ A_{21} \chi_{\lambda_1}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_2}^{\alpha_2}(x_2) - A_{12} \chi_{\lambda_2}^{\alpha_1}(x_1) \chi_{\lambda_1}^{\alpha_2}(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases} \quad (7.18)$$

Эта функция, очевидно, антисимметрична по  $(\alpha_1, x_1)$ ,  $(\alpha_2, x_2)$  и содержит (с точностью до нормировки) один свободный параметр  $A_{21}/A_{12}$ , который должен зависеть от константы связи  $g$ . Прямое вычисление с помощью (7.17) дает

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = R(\lambda_1 - \lambda_2), \quad R(\lambda) = e^{i\Phi(\lambda)} = \frac{\text{ch } \frac{\lambda - i\pi g}{2}}{\text{ch } \frac{\lambda + i\pi g}{2}}. \quad (7.19)$$

Функция  $R(\lambda)$  имеет смысл матрицы рассеяния псевдочастиц. Фазу рассеяния  $\Phi(\lambda)$  удобно фиксировать условием кососимметричности

$$\Phi(-\lambda) = -\Phi(\lambda), \quad (7.20)$$

считая, что разрезы лежат на лучах  $(i\pi(1 - |g|), i\infty)$ ,  $(-i\pi(1 - |g|), -i\infty)$ . Величины  $\lambda_k$  естественно определены по модулю  $2\pi i$ .

Заметим, что функция  $R(\lambda)$  периодична по  $g$  с периодом 2. Так как мы будем строить вакуум, близкий к вакууму свободных фермионов, следует считать, что решение имеет смысл при

$$-1 < g < 1. \quad (7.21)$$

Теперь нетрудно построить общее  $N$ -частичное решение (*анзац Бете*):

$$\chi_{\lambda_1 \dots \lambda_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma_{\tau}} A_{\tau} \prod_{k=1}^N \chi_{\lambda_{\tau k}}^{\alpha_{\sigma k}}(x_{\sigma k}) \quad \text{при } x_{\sigma_1} < \dots < x_{\sigma_N}. \quad (7.22)$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют соотношениям

$$A_{\dots, i+1, i, \dots} = R(\lambda_i - \lambda_{i+1}) A_{\dots, i, i+1, \dots}. \quad (7.23)$$

Наложим циклическое граничное условие

$$\chi(\dots, x_k + L, \dots) = \chi(\dots, x_k, \dots). \quad (7.24)$$

Получаем

$$e^{im_0 L \operatorname{sh} \lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N R(\lambda_k - \lambda_l) = 1. \quad (7.25)$$

Эта система уравнений на параметры  $\lambda_k$  называется системой *уравнений Бете*. Уравнения Бете — нелинейные уравнения с  $N$  неизвестными, причем, как ожидается, в физически интересных случаях  $N \rightarrow \infty$ . Тем не менее сделан огромный шаг: решение задачи сведено к решению системы алгебраических уравнений. Каждому решению этой системы, т. е. каждому набору (с точностью до перестановки) чисел  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , удовлетворяющему (7.25), соответствует единственное состояние системы. Компоненты  $\lambda_k$  решения называются *корнями* уравнений Бете.

Логарифмируя уравнения Бете, найдем

$$m_0 L \operatorname{sh} \lambda_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\lambda_k - \lambda_l) = 2\pi n_k, \quad (7.26)$$

причем энергия и импульс состояния равны

$$E_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{ch} \lambda_i, \quad P_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = m_0 \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} \lambda_i. \quad (7.27)$$

Зададимся вопросом: как могут располагаться корни уравнений Бете? Естественно, подходят вещественные корни и корни на прямой  $-i\pi + \mathbb{R}$ . Общие комплексные корни могут располагаться парами симметрично относительно одной из прямых  $\mathbb{R}$  и  $-i\pi + \mathbb{R}$ . Более подробный анализ показывает, что других типов решений не может быть.

Уравнения Бете сопоставляют каждому решению  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  набор чисел  $(n_1, \dots, n_N)$ , причем можно показать, что  $n_k = n_l$ , только если  $\lambda_k = \lambda_l$ . Из принципа Паули следует, что все  $\lambda_k$  должны быть различны и что, следовательно,

$$n_k \neq n_l \quad (k \neq l). \quad (7.28)$$

Естественно предположить, что наименьшей энергии отвечает решение уравнений Бете с отрицательными энергиями псевдочастиц, т. е. с  $\operatorname{Im} \lambda_k = -\pi$ . Будем писать

$$\lambda_k = \xi_k - i\pi.$$

Чтобы минимизировать энергию, надо заполнить все состояния отрицательной энергии, поэтому надо, чтобы целые числа  $n_k$  шли через единицу:

$$n_{k+1} - n_k = \pm 1, \quad (7.29)$$

причем удобно выбрать знак так, чтобы величина  $\xi_k$  росла с  $k$ . Поэтому примем

$$n_k = k_0 - k$$

с некоторым  $k_0$ . Тогда

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = 2\pi(k - k_0) + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (7.30)$$

В термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  расстояние между уровнями стремится к нулю и можно продифференцировать это уравнение по  $\xi_k$ . Мы получим

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho(\xi'). \quad (7.31)$$

Здесь

$$\rho(\xi) = \frac{2\pi}{L} \frac{dk}{d\xi} \quad (7.32)$$

— спектральная плотность состояний, связанная с числом псевдочастиц  $N$  в состоянии формулой

$$\int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho(\xi) = \frac{N}{L}. \quad (7.33)$$

При  $\Theta \rightarrow \infty$  величина  $m_0$  стремится к нулю при  $g > 0$  и к бесконечности при  $g < 0$ .<sup>1</sup> При  $g > 0$  есть несложный способ найти решение. Положим сначала  $\Theta = \infty$  и  $m_0 = 0$ . Тогда получается однородное уравнение

$$\rho(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho(\xi') = 0, \quad (7.34)$$

которое можно решать методом Фурье. Для любой величины  $X(\xi)$  определим фурье-образ

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} X(\xi) e^{i\xi\omega}. \quad (7.35)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (7.34), получаем

$$\left(1 + \tilde{\Phi}'(\omega)\right) \tilde{\rho}(\omega) = 0, \quad (7.36)$$

где

$$\tilde{\Phi}'(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} \pi g \omega}{\operatorname{sh} \pi \omega}. \quad (7.37)$$

Формально,  $\tilde{\rho}(\omega)$  должно быть линейной комбинацией дельта-функций с носителем в нулях выражения в скобках. Поскольку все эти нули  $\omega = \pm i\alpha_k$  чисто мнимые, соответствующие дельта-функции производят экспоненциальные множители вида  $e^{\mp\alpha_k \xi}$ . Выберем наименее расходящийся вклад, отвечающий двум ближайшим к вещественной оси полюсам:  $\alpha_1 = (1 + g)^{-1}$ . В силу симметрии модели относительно пространственных отражений интересующее нас решение должно быть четным:

$$\rho(\xi) = M \operatorname{ch} \frac{\xi}{1 + g} \quad (7.38)$$

с некоторым коэффициентом  $M$ . Его можно найти, подставив это решение в уравнение (7.31) с конечными  $\Theta \gg 1$  и  $m_0$ , и он оказывается конечным в масштабе физической массы модели.

## Задачи

1. Получите (7.2) из (7.1). Выведите (7.14).
2. Выведите (7.19).
3. Проверьте (7.37) и найдите нули выражения  $1 + \tilde{\Phi}'(\omega)$ .

<sup>1</sup>Заметим, что эти рассуждения верны только при  $g \geq -\frac{1}{3}$ . При  $g < -\frac{1}{3}$  вакуум перестраивается и содержит комплексные корни уравнений Бете. Тем не менее, окончательные результаты, касающиеся спектра частиц и матриц рассеяния оказываются верными вплоть до  $g = -1$ .

4. Покажите, что коэффициент в решении (7.38) имеет порядок величины  $M = m_0 e^{\frac{g}{1+g}\Theta}$ . Разберите оба случая  $g > 0$  и  $-\frac{1}{3} < g < 0$ .

5\*. Рассмотрите асимптотические волновые функции для фермионов вида (7.22) с некоторыми многокомпонентными одночастичными волновыми функциями  $\chi_\lambda^\alpha(x)$  и с некоторой скалярной матрицей рассеяния  $R(\lambda)$  общего вида, удовлетворяющей только условию унитарности  $R(\lambda)R(-\lambda) = 1$ . Покажите, что для каждой такой функции можно построить асимптотическую волновую функцию системы бозонов с матрицей рассеяния  $S(\lambda) = -R(\lambda)$ . Как нужно изменить циклические граничные условия, чтобы уравнения Бете для обеих теорий в точности совпадали? Как свойства теории зависят от знака  $R(0)$ ?

## Семинар 7

### Комплексные решения уравнений Бете

Мы продолжим изучение (асимптотических) волновых функций Бете системы нерелятивистских бозонов без внутренних состояний для разностей импульсов вблизи полюса  $S$ -матрицы. Мы покажем, что связанным состояниям в пределе больших размеров отвечают так называемые струны комплексных корней Бете. Мы построим уравнения Бете для систем, содержащих такие струны.

## Лекция 8

### Решение модели Тирринга методом анзаца Бете: спектр частиц и матрица рассеяния

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками. Для этого обобщим уравнение (7.30):

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi_k - \xi_l). \quad (8.1)$$

Далее, определим  $\xi(n)$  уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^N \Phi(\xi(n) - \xi_l) \quad (8.2)$$

В термодинамическом пределе определим спектральную плотность состояний  $\rho(\xi)$  и спектральную плотность частиц  $\rho^\bullet(\xi)$  следующим образом:

$$\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\xi(n)} \right|, \quad \rho^\bullet(\xi) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\xi_{k+1} - \xi_k|} \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi} = \left\langle \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dk}{d\xi_k} \right| \right\rangle_{\xi_k \simeq \xi}. \quad (8.3)$$

Вместо спектральной плотности частиц нам будет удобнее использовать спектральную плотность дырок  $\rho^\circ(\xi) = \rho(\xi) - \rho^\bullet(\xi)$ . В частности для одной дырки с параметром  $\xi = \xi_0$  имеем  $\rho^\circ(\xi) = 2\pi L^{-1} \delta(\xi - \xi_0)$ . Совершенно аналогично выводу уравнения (6.26) получим интегральное уравнение

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') (\rho(\xi') - \rho^\circ(\xi')). \quad (8.4)$$

Обозначив через  $\rho_0(\xi)$  вакуумную плотность, то есть решение уравнения (7.31), и вычтя это уравнение из (8.4), получим

$$\delta\rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \delta\rho(\xi') = \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi} \Phi'(\xi - \xi') \rho^\circ(\xi'). \quad (8.5)$$

Здесь

$$\delta\rho(\xi) = \rho(\xi) - \rho_0(\xi).$$

В пределе  $\Theta \rightarrow \infty$  это уравнение легко решить методом Фурье. Применяя преобразование Фурье (7.35), получаем алгебраическое уравнение

$$\delta\tilde{\rho}(\omega) + \tilde{\Phi}'(\omega) \delta\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\Phi}'(\omega) \tilde{\rho}^\circ(\omega).$$

Легко проверить, что

$$\delta\tilde{\rho}(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} \pi g \omega}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi(1+g)\omega}{2}} \tilde{\rho}^\circ(\omega). \quad (8.6)$$

Начнем исследование решения (8.6) с вычисления заряда возбуждения, отвечающего дырке. Кажется бы, заряд дырки должен быть равен  $N - N_0 = -1$ . Однако это не так из-за ультрафиолетового обрезания. Когда меняется плотность дырок, меняется и плотность состояний, так что число состояний под обрезкой, то есть, в интервале  $-\Theta < \xi < \Theta$  тоже меняется. Нас будут интересовать две величины:

$$\begin{aligned} \Delta N &= -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \rho^\circ(\xi) = -L \tilde{\rho}^\circ(0), \\ \Delta Q &= L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\delta\rho(\xi) - \rho^\circ(\xi)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

В первой строчке мы предполагаем, что все дырки находятся под обрезкой, то есть  $\rho^\circ(\xi) = 0$  при  $|\xi| > \Theta$ . Отношение

$$z^\circ = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} \quad (8.8)$$

дает заряд дырки. Вычисляя

$$\Delta Q = -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\xi} \frac{\text{sh } \pi\omega}{2 \text{sh } \frac{\pi(1-g)}{2}\omega \text{ ch } \frac{\pi(1+g)}{2}\omega} \tilde{\rho}^{\circ}(\omega) \simeq \frac{\Delta N}{1-g}, \quad (8.9)$$

находим

$$z^{\circ} = -\frac{1}{1-g}. \quad (8.10)$$

Мы видим, что заряд дырки не является целым числом в терминах псевдочастиц. Иными словами, заряд частиц перенормируется.

Эта перенормировка имеет существенное последствие. Чтобы понять его, вернемся к выводу гамильтониана (7.2). Мы формально выводили его по классическим правилам из классического действия. Квантовый эффект состоит в том, что одна физическая частица составляет  $|z^{\circ}|$  псевдочастиц, определенных в (7.6):

$$Q = |z^{\circ}| \int dx \psi_{\text{phys}}^+ \psi_{\text{phys}} + \text{const}, \quad (8.11)$$

где  $\psi_{\text{phys}}$  — физические поля, то есть именно те поля, которые обсуждались в лекции 2. Это значит, что

$$\psi = |z^{\circ}|^{1/2} \psi_{\text{phys}}. \quad (8.12)$$

Подставляя это в гамильтониан (7.2), мы видим, что физическая константа  $g_{\text{phys}}$  (которая была обозначена как  $g$  в лекции 2) связана с формальной константой  $g$  соотношением

$$g_{\text{phys}} = g|z^{\circ}| = \frac{g}{1-g} \quad \Leftrightarrow \quad g_{\text{phys}}^{-1} = g^{-1} - 1. \quad (8.13)$$

Если формальная константа связи меняется в пределах  $-1 \leq g < 1$ , то физическая меняется в пределах  $-\frac{1}{2} \leq g_{\text{phys}} < \infty$  в согласии с результатами бозонизации.

Теперь вычислим энергию и импульс возбуждений. Энергия  $E[\rho^{\circ}]$  и импульс  $P[\rho^{\circ}]$  системы являются функционалами плотности дырок  $\rho^{\circ}$ , причем энергия, связанная с возбуждениями, определяется как разность  $E[\rho^{\circ}] - E[0]$ . Имеем

$$E[\rho^{\circ}] - E[0] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^{\circ}(\xi) - \delta\rho(\xi)) \text{ch } \xi,$$

$$P[\rho^{\circ}] = m_0 L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi} (\rho^{\circ}(\xi) - \delta\rho(\xi)) \text{sh } \xi.$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных  $g$ .

При  $g < 0$  интегралы в этих выражениях сходятся при  $\Theta \rightarrow \infty$ . Но если мы положим  $\Theta = \infty$ , мы получим, что  $E[\rho^{\circ}] - E[0] = P[\rho^{\circ}] = 0$ , так как  $\delta\tilde{\rho}(\pm i) = \tilde{\rho}^{\circ}(\pm i)$ . Поэтому следует перенормировать затравочную массу  $m_0$ . Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции  $\delta\tilde{\rho}(\omega)$  в точках  $\omega = \pm i(1+g)^{-1}$  дает

$$E[\rho^{\circ}] - E[0] = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \epsilon(\xi) \rho^{\circ}(\xi), \quad P[\rho^{\circ}] = L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} p(\xi) \rho^{\circ}(\xi) \quad (8.14)$$

где

$$\epsilon(\lambda) = m \text{ch } \frac{\lambda}{1+g}, \quad p(\lambda) = m \text{sh } \frac{\lambda}{1+g}, \quad m = \frac{M}{\pi g} \text{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \frac{1-g}{1+g} \right), \quad (8.15)$$

а константа  $M$  определяется равенством

$$m_0 = M \exp \left( -\frac{g}{1+g} \Theta \right) \sim M \left( \frac{m_0}{\Lambda} \right)^{g/(1+g)}. \quad (8.16)$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}. \quad (8.17)$$

Вспоминая (2.39) и учитывая, что  $\mu$  пропорционально  $m_0$ , получаем

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \quad (8.18)$$

где  $\beta$  — константа связи модели синус-Гордона. Сравнивая это с (8.16), получаем соотношение

$$g = 1 - \beta^2.$$

В терминах физической константы связи имеем

$$g_{\text{phys}} = \beta^{-2} - 1,$$

что согласуется с (2.9). Заметим, что в первом порядке по теории возмущений по константе  $g$  разница между формальной и физической константами связи отсутствует. Она появляется в высших порядках теории возмущений, и важна для правильной интерпретации точных результатов.

При  $g > 0$  ситуация несколько иная. Полюсы функции  $\delta\tilde{\rho}(\omega)$  при  $\omega = \pm i(1+g)^{-1}$  становятся ближе к вещественной оси, чем точки  $\pm i$ . Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует  $m_0 \rightarrow 0$ . Строго говоря, требуется явное вычисление  $\delta\rho(\xi)$  и затем интегралов для энергии и импульса возмущений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области  $g < 0$ . Поэтому формула для перенормировки массы (8.16) верна и в этом случае.

Из выражения (8.6) можно немедленно извлечь матрицу рассеяния дырок. Чтобы сделать это, сравним изменение плотности состояний в модели Тирринга под влиянием дырок с изменением плотности состояний под влиянием частиц во вспомогательной модели частиц с заданной матрицей рассеяния. Именно, рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов массы  $m$  с матрицей рассеяния  $a(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$ ,  $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$ . Предположим, что эти фермионы живут в пространстве длины  $L$  с циклическими граничными условиями. Совершенно аналогично (7.25) получаем

$$e^{imL \text{sh } \theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N a(\theta_k - \theta_l) = 1. \quad (8.19)$$

Прологарифмируем уравнения:

$$mL \text{sh } \theta_k + \sum_{l=1}^N \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \quad (8.20)$$

и сделаем термодинамический предел. Для этого определим  $\theta(n)$  уравнением

$$mL \text{sh } \theta(n) + \sum_{k=1}^N \Psi(\theta(n) - \theta_k) = 2\pi n. \quad (8.21)$$

Затем расположим  $n_k$  по возрастанию и положим

$$\rho_*(\theta(n)) = \frac{2\pi}{L|\theta(n+1) - \theta(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dn}{d\theta(n)} \right|, \quad \rho_*^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\theta_{k+1} - \theta_k|} \right\rangle_{\theta_k \simeq \theta} = \left\langle \frac{2\pi}{L} \left| \frac{dk}{d\theta_k} \right| \right\rangle_{\theta_k \simeq \theta}. \quad (8.22)$$

Величина  $\rho_*(\theta)$  имеет смысл плотности состояний, а величина  $\rho_*^\bullet(\theta)$  имеет смысл плотности частиц. Тогда уравнение для плотности состояний примет вид

$$m \text{ch } \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \quad (8.23)$$

При нулевой плотности частиц  $\rho_*^\bullet$  имеем  $\rho_{*0}(\theta) = m \text{ch } \theta$ . Полагая  $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*0}$ , имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Psi'(\theta - \theta') \rho_*^\bullet(\theta'). \quad (8.24)$$

Перейдем к фурье-образам

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \delta\rho_*(\theta)e^{i\theta\omega} \quad \text{и т.д.}$$

Уравнение (8.24) принимает вид

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \tilde{\Psi}'(\omega)\rho_*^\bullet(\omega). \quad (8.25)$$

Теперь предположим, что вспомогательные фермионы и есть наши дырки. С учетом (8.17) отождествляем

$$\delta\rho_*(\theta) = \alpha\delta\rho(\alpha\theta), \quad \rho_*^\bullet(\theta) = \alpha\rho^\circ(\alpha\theta), \quad \alpha = 1 + g = 2 - \beta^2. \quad (8.26)$$

Имеем

$$\delta\tilde{\rho}_*(\omega) = \delta\tilde{\rho}(\alpha^{-1}\omega), \quad \tilde{\rho}_*^\bullet(\omega) = \tilde{\rho}^\circ(\alpha^{-1}\omega). \quad (8.27)$$

В этом предположении, сравнивая (8.27) с (8.6), получаем

$$i\Psi(\theta) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh} \frac{\pi\omega}{2} \text{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh} \pi\omega \text{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} e^{-i\theta\omega} = 2i \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{sh} \frac{\pi\omega}{2} \text{sh} \frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\text{sh} \pi\omega \text{sh} \frac{\pi p\omega}{2}} \sin \theta\omega, \quad (8.28)$$

где параметр  $p$  определен соотношением

$$\beta^2 = 2 \frac{p}{p+1}.$$

Таким образом, функция  $a(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$  является на самом деле компонентой матрицы рассеяния для одного типа частиц — антифермионов в массивной модели Тирринга. Опишем полную  $S$ -матрицу модели Тирринга/синус-Гордона [8]. Фермионная  $S$ -матрица является матрицей  $4 \times 4$  в базисе  $(++, +-, -+, --)$  («+» отвечает фермионам, а «-» — антифермионам):

$$S_{\text{MT}}(\theta) = \left( S_{\text{MT}}(\theta)_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} \right) = \begin{pmatrix} a(\theta) & & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & & \\ & c(\theta) & b(\theta) & & \\ & & & & a(\theta) \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

Солитонная (бозонная)  $S$ -матрица для модели синус-Гордона отличается от этой  $S$ -матрицы только знаком:

$$S_{\text{SG}}(\theta)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha'_1\alpha'_2} = -S_{\text{MT}}(\theta)_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha'_1\alpha'_2}, \quad \alpha_i, \alpha'_i = \pm. \quad (8.30)$$

Именно эту матрицу мы будем ниже обозначать через  $S(\theta)$ . Функцию  $a(\theta)$  можно записать в виде

$$a(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(\theta)R_n(i\pi - \theta)}{R_n(0)R_n(i\pi)}, \quad R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2n}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2n-1}{p} + \frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \quad (8.31)$$

Это нетрудно проверить с помощью формулы Бинэ для логарифма гамма-функции:

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{\log 2\pi}{2} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-tz} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right).$$

Отношения коэффициентов  $b(\theta)/a(\theta)$  и  $c(\theta)/a(\theta)$  можно найти, решив уравнение Янга—Бакстера совместно с уравнением кроссинг-симметрии. Ответ имеет вид

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh} \frac{\theta}{p}}{\text{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}, \quad \frac{c(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\text{sh} \frac{i\pi}{p}}{\text{sh} \frac{i\pi - \theta}{p}}. \quad (8.32)$$

Соотношения (8.32) получаются решением уравнения Янга—Бакстера вместе с условием кроссинг-симметрии:

$$a(i\pi - \theta) = b(\theta), \quad c(i\pi - \theta) = c(\theta). \quad (8.33)$$

Выражение (8.31) можно получить как «минимальное» решение уравнения кроссинг-симметрии вместе с условием унитарности

$$a(\theta)a(-\theta) = 1, \quad b(\theta)b(-\theta) + c(\theta)c(-\theta) = 1, \quad b(\theta)c(-\theta) + c(\theta)b(-\theta) = 0, \quad (8.34)$$

которое сводится в данном случае к одному первому уравнению:  $a(\theta)a(-\theta) = 1$ .

Формула (8.31) позволяет легко найти особенности функций  $a(\theta)$ ,  $b(\theta)$  и  $c(\theta)$  на мнимой оси. Особенности в интервале  $(0, i\pi)$  (т.е. на физическом листе) отвечает связанному состоянию, если знак вычета по переменной  $u = -i\theta$  в бозонной  $S$ -матрице положителен. При  $0 < p < 1$  ( $0 < \beta^2 < 1$ ) такие полюсы есть у  $b(\theta)$  и  $c(\theta)$ :

$$u_n = -i\theta_n = \pi - \pi pn, \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor. \quad (8.35)$$

Это отвечает нейтральным связанным состояниям (бризерам в модели синус-Гордона) с массами

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi pn}{2} \quad (8.36)$$

Матрицы рассеяния связанных состояний можно вычислить по следующему правилу. Пусть частица массы  $m_c$  является связанным состоянием частиц масс  $m_a$  и  $m_b$ , то есть диагональный матричный элемент  $S(iu)_{ab}^{ab}$  бозонной матрицы рассеяния имеет полюс при  $u = u_{ab}^c$  с положительным вычетом. Графически изобразим это так:

$$\begin{aligned} u_{ab}^c + u_{ca}^b + u_{bc}^a &= 2\pi, \\ 0 < u_{ab}^c, u_{ca}^b, u_{bc}^a &< \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ab}^c &= \pi - u_{ab}^c, \\ \bar{u}_{ca}^b &= \pi - u_{ca}^b, \\ \bar{u}_{bc}^a &= \pi - u_{bc}^a. \end{aligned}$$

(8.37)

Массы и угловые переменные связаны кинематическим соотношением

$$m_c = m_a e^{\pm i\bar{u}_{ca}^b} + m_b e^{\mp i\bar{u}_{bc}^a}. \quad (8.38)$$

Более явно

$$\cos u_{ab}^c = \frac{m_c^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_a m_b}, \quad \frac{\sin u_{ca}^b}{\sin u_{bc}^a} = \frac{m_b}{m_a}. \quad (8.39)$$

Очевидно, что при условиях (8.37) выполняется неравенство

$$|m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b. \quad (8.40)$$

Все уравнения обладают симметрией относительно перестановок  $a, b, c$ . В симметричном виде можно написать

$$\sin u_{ab}^c = \frac{\sqrt{2m_a^2 m_b^2 + 2m_a^2 m_c^2 + 2m_b^2 m_c^2 - m_a^4 - m_b^4 - m_c^4}}{2m_a m_b}. \quad (8.41)$$

Имеем

$$S(\theta)_{ab}^{ab} = \sum_c \frac{i\Gamma_{ab}^c \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}}{\theta - iu_{ab}^c} + O(1) \quad \text{при } \theta \rightarrow iu_{ab}^c. \quad (8.42)$$

Знак суммирования по  $c$  означает суммирование по различным внутренним состояниям частицы  $c$ . Графически изобразим это равенство так

$-i \operatorname{Res}_{\theta=iu_{ab}^c}$

=

(8.43)

Здесь коэффициенты  $\Gamma_{ab}^c$  приписаны вершинам. Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы в правой части и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы  $d$ . Поскольку, вообще говоря, нам

понадобятся недиагональные элементы матриц рассеяния, будем штрихами ( $a', \dots$ ) другие состояния тех же частиц. Имеем

$$(8.44)$$

Явно имеем уравнение на  $S$ -матрицу рассеяния частиц  $c$  и  $d$ :

$$\sum_{a', b', d''} \Gamma_{a' b'}^{c'} S(\theta + i\bar{u}_{ca}^{\bar{b}})_{a' d''}^{a' d'} S(\theta - i\bar{u}_{bc}^{\bar{a}})_{b' d}^{b' d''} = \sum_c \Gamma_{ab}^c S(\theta)_c^{c' d'} \quad (8.45)$$

Очень часто можно подобрать базис так, чтобы уравнение имело только одно промежуточное состояние  $c$  в правой стороне. Тогда правая сумма исчезает, и уравнение превращается в явное выражение для  $S$ -матрицы. Иногда можно сделать так, чтобы в уравнение входили только диагональные матричные элементы. Тогда знаки суммы в обеих частях, а также коэффициенты  $\Gamma$  исчезают, и мы получаем простую формулу

$$S(\theta)_{cd}^{cd} = S(\theta + i\bar{u}_{ca}^{\bar{b}})_{ad}^{ad} S(\theta - i\bar{u}_{bc}^{\bar{a}})_{bd}^{bd}. \quad (8.46)$$

В рассматриваемой модели это так, поскольку связанные состояния нейтральны и пространства их внутренних состояний одномерны. Для рассеяния фермиона на связанном состоянии можно получить:

$$S_{\pm n}(\theta) \equiv S(\theta)_{\pm n}^{\pm n} = \prod_{k=1}^n S_{+1}\left(\theta + \frac{i\pi p(n+1-2k)}{2}\right), \quad S_{+1}(\theta) = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}. \quad (8.47)$$

При этом  $S_{\pm n}(\theta) = S_{n\pm}(\theta)$ . Рассеяние двух связанных состояний (бризеров) дается выражением:

$$S_{nn'}(\theta) \equiv S(\theta)_{nn'}^{nn'} = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{n'} S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi p(n-n'-2k+2l)}{2}\right), \quad S_{11}(\theta) = \frac{\text{th}\frac{\theta+i\pi p}{2}}{\text{th}\frac{\theta-i\pi p}{2}}. \quad (8.48)$$

Из этих формул нетрудно убедиться, что  $n$ -тый бризер является также связанным состоянием  $m$ -го и  $m'$ -го бризеров при  $|m - m'| \leq n \leq m + m'$ ,  $n - m - m' \in 2\mathbb{Z}$ .

### Задачи

1. Возьмите интеграл в (8.9) и получите (8.10).
2. Получите соотношения (8.14)–(8.15).
3. Найдите предел матрицы рассеяния (8.29)–(8.32) в пределе малых  $g$  и покажите, что он совпадает с (3.13).
4. Найдите квазиклассический в смысле модели синус-Гордона ( $\beta^2 \rightarrow 0$ ) предел матриц рассеяния  $S_{11}(\theta)$  и  $S_{\pm 1}(\theta)$  и покажите, что он дается формулами (3.17), (3.34).
- 5\*. Найдите спектр возбуждений, отвечающих решениям, у которых в дополнение к до конца заполненному морю Дирака имеются вещественные корни Бете. Найдите заряд этих возбуждений и их матрицу рассеяния. Отдельно рассмотрите случаи  $-\frac{1}{3} < g < 0$  и  $g > 0$ .

### Семинар 8

#### Решение уравнения Янга–Бакстера для модели Тирринга

## Лекция 9

### Интегрируемые возмущения минимальных моделей двумерной конформной теории поля

Здесь мы рассмотрим интегрируемые возмущения конформной теории поля на примере возмущений минимальных конформных моделей [7]. Пусть  $\mathcal{S}_0$  — формальное действие минимальной конформной модели с центральным зарядом  $c < 1$ . Сначала мы будем интересоваться моделями общего положения, а потом обсудим рациональные случаи. Рассмотрим возмущенную модель в евклидовом пространстве с формальным действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (9.1)$$

где  $\Phi_p(x)$  — примарный оператор нулевого спина и размерности  $\Delta_p < 1$ . Пока никак более не будем ограничивать допустимые значения размерности возмущающего оператора.

В конформной теории поля имеется бесконечно много интегралов движения. Обозначим через  $\mathcal{L}_n$ ,  $\bar{\mathcal{L}}_n$  генераторы двух представлений алгебры Вирасоро, действующих на локальные операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w} - \bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(x),$$

где интегралы берутся по маленьким петлям, охватывающим точку  $x$ . Тогда для любого элемента  $\Lambda$  подалгебры универсальной обертывающей алгебры  $U(\text{Vir})$  алгебры Вирасоро, порожденной элементами  $L_{-n}$  ( $n > 0$ ), можно определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar{\Lambda}(x) = (\bar{\Lambda} 1)(x)$$

в конформном семействе единичного оператора [1]. Например,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{-1} 1)(x) &= \partial 1 = 0, & (\mathcal{L}_{-2} 1)(x) &= T(x), & (\mathcal{L}_{-3} 1)(x) &= (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} 1)(x) = \partial T(x), \\ (\mathcal{L}_{-2}^2 1)(x) &= \times T^2(x) \times, & (\mathcal{L}_{-4} 1)(x) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-3} 1)(x) = \frac{1}{2} \partial^2 T(x) \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Для этих операторов имеем

$$\bar{\partial} \Lambda(x) = 0, \quad \partial \bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (9.2)$$

Вообще говоря, соответствующие интегралы движения не коммутируют. Но среди них имеются серии коммутирующих интегралов движения, которые обеспечивают интегрируемость минимальных конформных моделей.

Изучим, как меняются тождества (9.2) под действием возмущения. Наша задача будет состоять в том, чтобы найти такие операторы  $T_s(x)$  спина  $s$  среди киральных (правых или левых) потомков единичного оператора и такие операторы  $\Theta_s(x)$  спина  $s$ , чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{\partial} T_{s+1} &= \partial \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \partial T_{s-1} &= \bar{\partial} \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Тогда мы сможем сказать, что система обладает интегралами движения

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s+1} + \int d\bar{z} \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar{z} T_{s-1} + \int dz \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0; \end{cases} \quad (9.4)$$

Интегралы можно брать вдоль любых контуров (комплексно-сопряженных друг другу для  $z$  и  $\bar{z}$  в евклидовом пространстве), уходящих в обе стороны на пространственную бесконечность. Продолжение в пространство Минковского очевидно. Коммутативность этих интегралов движения, несомненно, должна проверяться отдельно.

В первом порядке по теории возмущений имеем

$$\bar{\partial} \Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_p(y) \bar{\partial} \Lambda(x) \Big|_{\text{CFT}}. \quad (9.5)$$

В правой части предполагается, что вычисление выполняется в конформной теории поля. Конечно, это равенство имеет смысл в той мере, в которой интеграл локализуется в окрестности точки  $x$ . В дальнейшем я буду опускать это напоминание.

Если элемент  $\Lambda$  является элементом градуировки  $(-s)$  в  $U(Vir)$ , операторное разложение для оператора  $\Lambda(x)$  с примарным оператором  $\Phi_\Delta(x)$  в конформной теории поля имеет вид

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (z' - z)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \quad (9.6)$$

Здесь  $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$  — некоторый правый (киральный) потомок оператора  $\Phi_\Delta$  уровня  $k$ . Отсюда находим

$$\Phi_p(y)\bar{\partial}\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\partial}_z(z-w)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_p)(y) = \pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_z^k \delta(y-x) (\Lambda_{k-s+1}\Phi_p)(y).$$

Мы положили  $x = (z, \bar{z})$ ,  $y = (w, \bar{w})$  и использовали тождество  $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(x)$ . Из (9.5) находим

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k (\Lambda_{k-s+1}\Phi_p)(x).$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку члены с  $k \geq s$  равны нулю. Снова учитывая разложение (9.6), находим

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(y)\Phi_p(x)$$

Воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k f(w, z) &= \oint \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \partial_z^k f(z-u, z) \\ &= \oint \frac{du}{2\pi i} f(z, z+u) = \oint \frac{dw}{2\pi i} f(z, w). \end{aligned}$$

Интеграл по  $u = z - w$  берется по маленькой окружности вокруг нуля. Окончательно находим

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint \frac{dw}{2\pi i} \Phi_p(w, \bar{z})\Lambda(z, \bar{z}) \quad (9.7)$$

или

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_p(w, \bar{z})\Lambda(z, \bar{z}). \quad (9.8)$$

Из стандартного соотношения конформной теории поля

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (9.9)$$

мы находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_p)(m+1) + n-1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (9.10)$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!} (\mathcal{L}_{-1}^n \Phi_p)(x). \quad (9.11)$$

Применим теперь (9.10) и (9.11) к вычислению правых частей нескольких первых операторов  $\Lambda$ . Мы будем рассматривать только случаи четных значений  $s$ , поскольку для нечетных  $s$  операторы сводятся к производным от операторов с четными  $s$ . Для  $T(x)$  имеем

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda \mathcal{D}_1 \mathcal{L}_{-2}1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \mathcal{D}_{-1}1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \mathcal{L}_{-1} \Phi_p = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \partial \Phi_p. \quad (9.12)$$

Отсюда получаем

$$T_2 = \mathcal{L}_{-2}1, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p)\Phi_p. \quad (9.13)$$

Аналогично, нетрудно получить

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left( 2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_p, \quad (9.14)$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left( 3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3 - \Delta_p)(5 - \Delta_p)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p, \quad (9.15)$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left( \mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5 - 2\Delta_p}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p. \quad (9.16)$$

Вообще говоря, правые части этих уравнений нельзя представить в виде  $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$ , поэтому при произвольном возмущении интегралов движения спинов 3 и 5 нет.

Рассмотрим сначала правую часть (9.14). Выражение может быть представлено в виде  $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$ , только если имеется соотношение на третьем уровне, позволяющее выразить действие  $\mathcal{L}_{-3}$  как комбинацию действий  $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$  и  $\mathcal{L}_{-1}^3$ . Вспомним, что такого рода соотношения возникают для вырожденных неприводимых представлений алгебры Вирасоро, старшие веса которых даются формулой Каца:

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{4} \left( (\alpha_+ m + \alpha_- n)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2 \right), \quad \alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad c = 1 - 24\alpha_0^2. \quad (9.17)$$

Представление со старшим весом  $\Delta_{mn}$  имеет соотношение на уровне  $mn$ . Таким образом, нужное соотношение имеет место, если  $\Delta_p = \Delta_{13}$  или  $\Delta_p = \Delta_{31}$ :

$$\left( \mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta + 2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta}(x) = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}. \quad (9.18)$$

Поскольку  $\Delta_{31} > 1$ , только для  $\Delta_p = \Delta_{13}$  возмущение будет релевантным. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left( 2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})}\mathcal{L}_{-1}^2 \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Теперь будем искать ток спина 6 в виде

$$T_6 = A\mathcal{L}_{-2}^3 1 + B\mathcal{L}_{-3}^2 1.$$

Выделим в  $\bar{\partial}T_6$  слагаемые, не имеющие вида  $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$ :

$$\bar{\partial}T_6 \sim (A(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1}1 + \alpha\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3) + B\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 + \mathcal{L}_{-1}(\dots))\Phi_{13}, \quad \alpha = (3 - \Delta_{13})/2.$$

Коммутируя генераторы алгебры Вирасоро, нетрудно привести выражение в скобках к виду

$$\Lambda = 6A\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} + \left( 3A - \frac{A\alpha - B}{6} \right) \mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(\dots).$$

Далее, из условия нулевого вектора получаем

$$\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} = \beta\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \gamma\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 = \beta\mathcal{L}_{-5} - \beta\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3} - \frac{\gamma}{6}\mathcal{L}_{-5} + \mathcal{L}_{-1}(\dots),$$

где  $\beta = 2/(2 + \Delta_{12})$ ,  $\gamma = -1/(1 + \Delta_{13})(2 + \Delta_{13})$ . Отсюда выражаем  $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-3}$  через  $\mathcal{L}_{-5}$ . После этого, приравняв коэффициент при  $\mathcal{L}_{-5}$  к нулю, можно получить, что ток

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c + 2}{2}\mathcal{L}_{-3}^2 1 \quad (9.20)$$

порождает сохраняющийся заряд. На шестом уровне можно также доказать, что существует интеграл движения с током

$$T'_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \left( \frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2 \right) \mathcal{L}_{-3}^2 \quad \text{для } \Delta_p = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (9.21)$$

Таким образом при  $c < 1$  интегрируемость можно ожидать для

$$\Delta_p = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (9.22)$$

Однако с ростом спина вычисления становятся все сложнее и сложнее. Использовать явные формулы становится затруднительно. Чтобы продвинуться дальше, А. Замолотчиков предложил такой прием. Сначала найдем число потомков на каждом уровне, претендующих на то, чтобы давать ток. Пусть  $\mathcal{H}_{mn}$  — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом  $\Delta_{mn}$ , а  $(\mathcal{H}_{mn})_s$  — подпространство уровня  $s$ . Размерности этих подпространств даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (9.23)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Тогда размерность таких пространств подходящих операторов, из которых мы можем построить  $T_{s+1}$  есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (9.24)$$

Вычитание  $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$  нужно для того, чтобы исключить операторы вида  $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$ , а прибавление символа Кронекера — чтобы скомпенсировать тот факт, что производная от единичного оператора равна нулю. Для величин  $k_s$  имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = (q^{-1} - 1)(\chi_{11}(q) - 1). \quad (9.25)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе  $T_{s+1}$ :

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_p)_s - \dim(\mathcal{H}_p)_{s-1}. \quad (9.26)$$

Здесь мы снова вычли из количества всех линейно-независимых операторов количество операторов вида  $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$ . Для соответствующего характера имеем

$$\chi_1(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} l_s q^s = (1 - q)\chi_p(q). \quad (9.27)$$

Вычитая одно из другого, получаем нижнюю границу  $\delta_s = k_s - l_s$  количества решений на каждом уровне. В частности, в точках общего положения по  $c$  имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (9.28)$$

Для  $\Phi_p = \Phi_{13}$  получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \quad (9.29)$$

Мы видим, что  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$ , а все остальные  $\delta_s \leq 0$ . Это значит, что, по крайней мере, на для спинов  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$  имеются решения. На более высоких уровнях на самом деле уравнения избыточны.

Для случаев  $\Phi_p = \Phi_{12}, \Phi_{21}$  имеем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^{10} + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + O(q^{16}). \quad (9.30)$$

Мы получаем  $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$ , то есть, по крайней мере, имеется восемь интегралов движения. Такие рассуждения не решают полностью задачу подсчета интегралов движения, но все же расширяют наши возможности.

Опишем другой подход к задаче. Пусть  $T_s$  — сохраняющийся ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (9.3). Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz T_{s+1}. \quad (9.31)$$

Будем рассматривать систему не на плоскости, а на цилиндре окружности  $R$ :  $x^1 \sim x^1 + R$  и брать интеграл в (9.31) по замкнутому контуру  $C_\perp$  вокруг цилиндра. Интеграл по контуру  $x^2 = \text{const}$  от  $\Phi_p$  дает гамильтониан возмущения

$$H_p = \lambda \int_0^R dx^1 \Phi_p(x). \quad (9.32)$$

Однако нам сейчас понадобится формальный гамильтониан в координатах светового конуса, где переменная  $\bar{z}$  играет роль времени. В этом случае заменяем интегрирование по  $x^1$  на интегрирование по  $z$ , а  $\bar{z}$  фиксируем:

$$H_p^+(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz \Phi_p(z, \bar{z}_0). \quad (9.33)$$

Тогда условие, что  $\mathcal{D}_1 T_{s+1} = \partial(\dots)$  эквивалентно тому, что

$$[I_s^{(0)}, H_p^+] = 0. \quad (9.34)$$

Важно, что это уравнение можно решать в рамках одной (правой) киральности в конформной теории поля. Давайте переписем первые сохраняющиеся токи в этом виде. Для этого нужно ввести алгебру Вирасоро на цилиндре. Отобразим цилиндр на плоскость заменой переменных

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \quad (9.35)$$

Это отображение позволяет задать алгебру Вирасоро соотношением

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta) \quad (9.36)$$

и аналогично для левой киральности. Оператор  $\tilde{T}(z)$  представляет собой компоненту тензора энергии-импульса в плоскости  $(\zeta, \bar{\zeta})$ . Далее воспользуемся формулой для конформного преобразования тензора энергии-импульса:

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2. \quad (9.37)$$

Фигурными скобками обозначена так называемая производная Шварца. В нашем случае шварциан равен  $\{\zeta, z\} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2\pi i}{R} \right)^2$ . Отсюда находим, что

$$T(z) = \left( \frac{2\pi i}{R} \right)^2 \left( \zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24} \right). \quad (9.38)$$

Подставляя это в (9.36), получаем

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_\perp} dz e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left( \mathbb{L}_n - \frac{c}{24} \delta_{n0} \right). \quad (9.39)$$

Кроме того, из преобразования (9.35) находим

$$[\mathbb{L}_n, \Phi_\Delta(x)] = \zeta^n \left( \frac{iR}{2\pi} \partial \Phi(x) + n \Delta \Phi_\Delta(x) \right). \quad (9.40)$$

Из (9.39) легко получить первый невозмущенный интеграл движения

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left( \mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (9.41)$$

Применяя (9.40), получаем

$$[I_1^{(0)}, H_p^+] = -\lambda \frac{(2\pi)^2}{R} \int_{C_\perp} dz [\mathbb{L}_0, \Phi_p(z, \bar{z}_0)] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_p(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь случай  $\Phi_p = \Phi_{13}$  и запишем оператор  $I_3^{(0)}$  через алгебру Вирасоро:

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z} \quad (9.42)$$

Контур  $C_z$  обходит точку  $z$  против часовой стрелки. Далее надо записать выражение в периодическом по  $z$  и  $w$  виде и разложить его по степеням  $e^{-2\pi i(w-z)/R}$ . После утомительных вычислений (которые мы проделаем на семинаре), получим

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R} \left( \mathbb{T}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n} \mathbb{T}_n \right) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3} \left( \left( \mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n - \frac{1}{6} \left( \mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right) + \frac{c}{1440} \right). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Существенно новый вклад здесь дает  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n$ , однако проверить, что этот член коммутирует с  $H_p^+$  не так просто. Зато совершенно очевидной оказывается коммутативность двух построенных «невозмущенных» интегралов:  $[I_1^{(0)}, I_3^{(0)}] = 0$ . Далее для нечетных значений  $s > 0$  можно построить серию коммутирующих с  $I_1$  и  $I_3$  операторов вида

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz \left( \mathcal{L}_{-\frac{s+1}{2}} + \dots \right) 1 \sim \sum_{n_1 + \dots + n_s = 0} : \mathbb{L}_{n_1} \dots \mathbb{L}_{n_s} : + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{n_1 + \dots + n_k = 0} A_{n_1 \dots n_k} : \mathbb{L}_{n_1} \dots \mathbb{L}_{n_k} :,$$

где знак  $:\dots:$  означает упорядочение индексов по возрастанию слева направо. Такие операторы строятся достаточно прямо с помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро. В предположении, что оператор  $I_3^{(0)}$  имеет невырожденный спектр на неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, отсюда следует, что все операторы  $I_s^{(0)}$  коммутируют с  $H_p^+$  и между собой. Поэтому величины  $I_s$  в полной теории являются пространственно-однородными интегралами движения, то есть коммутируют с гамильтонианом  $H \sim I_1 + I_{-1}$  и импульсом  $P \sim I_1 - I_{-1}$ . Разумно предположить, что в точках общего положения в возмущенной теории спектр гамильтониана на цилиндре невырожден. В этом случае все операторы, коммутирующие с гамильтонианом, коммутируют между собой.

Заметим, что интегралы движения  $I_s^{(0)}$  образуют набор интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость конформной теории поля, и их совместный спектр невырожден в точках общего положения. В квазиклассическом пределе  $c \rightarrow -\infty$  интеграл движения  $I_3^{(0)}$  представляет собой гамильтониан уравнения Кортевега—де Фриза, а система  $I_s^{(0)}$  — соответствующую иерархию, существование которой доказано методами обратной задачи рассеяния. Существование такого набора интегралов движения в точках общего положения в квантовом случае было доказано методами теории гомологий Б. Фейгиным и Э. Френкелем [14]. Альтернативный подход, обобщающий подход классической теории, развит в работах В. Бажанова, С. Лукьянова и А. Замолодчикова [15].

В общих точках минимальных конформных моделей с  $c < 1$  имеется по одному интегралу движения для следующих спинов:

$$\begin{aligned} s &= 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{13}; \\ s &= 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с  $c = 1 - 6/p(p+1)$  для  $p \geq 3$  в случае возмущения  $\Phi_{13}$  и для  $p \geq 6$  в случае возмущений  $\Phi_{12}, \Phi_{21}$ . В случае  $\Phi_{12}$  для моделей с  $p = 3, 4, 5$  имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_p = \Phi_{12} \quad p = 3: \quad & s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ & p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ & p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Кроме того, нам будут интересны интегралы движения для неминимальной серии  $c = 1 - 6(p' - p)^2/pp'$  с  $p = 2$ ,  $p' = 2N + 1$ . Для нее

$$c = 1 - \frac{3(2N - 1)^2}{(2N + 1)}, \quad \Phi_p = \Phi_{13} : \quad s \in (2\mathbb{Z} + 1) \setminus ((2N - 1)\mathbb{Z}). \quad (9.46)$$

В случае  $N = 2$  ( $c = -22/5$ ), отвечающем модели Ли–Янга,  $\Phi_{13} = \Phi_{12}$  и спектр спинов  $s$  является пересечением двух серий в (9.44).

### Задачи

1. Выведите (9.10).
2. Получите (9.14)–(9.16).
3. Получите (9.40).
4. Покажите, что для свободного майорановского фермиона (отвечающего минимальной модели с  $c = 1/2$ ) сохраняющиеся токи можно записать в виде

$$T_{2n} = i^{2n+1} : \partial^{n-1} \psi_+ \partial^n \psi_+ : , \quad T_{-2n} = i^{2n-1} : \bar{\partial}^{n-1} \psi_- \bar{\partial}^n \psi_- : \quad (n > 0).$$

Найдите соответствующие компоненты  $\Theta_{\pm(2n-2)}$ .

**5\***. Используя характеры (9.25), (9.27), найдите, интегралы движения каких спинов имеются в унитарных моделях с  $p = 3, 4, 5$  и в неунитарных моделях с  $N = 2, 3$  для  $\Phi_p = \Phi_{13}, \Phi_{12}, \Phi_{21}$ .

### Семинар 9

#### Подробный вывод выражения (9.43)

Мы начнем с выражения (9.42). Нам нужно сделать так, чтобы подынтегральное выражение было периодически по  $z$  и  $w$  с периодом  $R$ . Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{z} = \frac{\pi}{iR} \left( \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} z + \frac{i\pi}{3R} z + \frac{i\pi^3}{45R^3} z^3 \right) + O(z^5).$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \left( \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + \frac{i\pi}{3R} (w - z) + \frac{i\pi^3}{45R^3} (w - z)^3 \right) \\ &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \left( \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + \frac{2i\pi}{3R} T(z) + \frac{i\pi^3 c}{90R^3} \right) \\ &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали операторное разложение для тензора энергии-импульса. В первом слагаемом превратим интеграл по  $C_z$  в разность двух контуров  $C_\perp$  смещенных так, чтобы проходить выше и ниже точки  $z$ . Это дает коммутатор

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) \\ &= \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw \left( T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (z - w) \right) \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R} (z - w). \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением

$$\operatorname{cth} z = \frac{1 + e^{-2z}}{1 - e^{-2z}} = (1 + e^{-2z}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz}.$$

Отсюда получаем (9.43).

## Лекция 10

### Интегралы движения и матрицы рассеяния

Вернемся к формулам из лекции 5 для асимптотической волновой функции  $n$  частиц

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}} \quad \text{при } x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (10.1)$$

Мы говорили, что внешние значки  $\beta_i$  можно определить условием

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}. \quad (10.2)$$

Эти условия выбраны так, чтобы значки  $\beta_i$  совпадали со значками внутренних состояний  $\alpha_i$  частиц во входящем канале при условии  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ . В остальных случаях матричные элементы по этим векторам будут аналитическими продолжениями «правильных» матричных элементов. Эта аналитичность нам сегодня пригодится.

Эти формулы верны не только для  $O(N)$ -модели, но для любой системы бозонных частиц. Обратим внимание на то, как меняются волновые функции при перестановке индексов  $\beta_i p_i \leftrightarrow \beta_j p_j$ :

$$\psi_{\dots, \beta_i p_i, \beta_{i+1} p_{i+1}, \dots}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\beta'_i \beta'_{i+1}} S(p_i, p_{i+1})_{\beta_i \beta_{i+1}}^{\beta'_i \beta'_{i+1}} \psi_{\dots, \beta'_i p_i, \beta'_{i+1} p_{i+1}, \dots}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n). \quad (10.3)$$

Поскольку вывод этой формулы составляет задачу 5 лекции 5, я не привожу здесь вывод полностью. Для ясности приведу вывод для волновой функции двух частиц. Если  $x_1 < x_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\beta_1 p_1, \beta_2 p_2}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) &= \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_2 \alpha_1} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \left( \delta_{\beta'_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta'_1}^{\alpha_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S^{-1}(p_1, p_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\alpha_1 \alpha_2} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right) \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \left( \delta_{\beta'_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta'_1}^{\alpha_2} e^{ip_2 x_1 + ip_1 x_2} + S(p_2, p_1)_{\beta'_2 \beta'_1}^{\alpha_2 \alpha_1} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \right) \\ &= \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(p_1, p_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} \psi_{\beta'_2 p_2, \beta'_1 p_1}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2). \end{aligned}$$

Будем считать, что волновая функция  $\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}$  задает состояние  $|p_1, \dots, p_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n}$  с точностью до вещественного симметричного по импульсам нормировочного множителя. Поскольку нас интересуют релятивистские теории, перейдем от импульсов к быстрой скорости:  $p_i = m_i \text{ch } \theta_i$ . Тогда

$$|\dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots\rangle_{\dots \beta_i \beta_{i+1} \dots} = \sum_{\beta'_i \beta'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})_{\beta_i \beta_{i+1}}^{\beta'_i \beta'_{i+1}} |\dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots\rangle_{\dots \beta'_{i+1} \beta'_i \dots}. \quad (10.4)$$

Это равенство можно записать короче. Напомню, что мы считаем все частицы одной массы одной частицей. Пусть  $V^{(\nu)}$  — пространство состояний частицы сорта  $\nu$ , а векторы  $e_{(\nu)}^{\beta}$  являются проекциями состояний  $\beta$  на пространство  $V_{\nu}$ . Используя обозначение

$$|\nu_1 \theta_1, \dots, \nu_N \theta_N\rangle = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_N} |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle_{\beta_1 \dots \beta_N} e_{(\nu_1)}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e_{(\nu_N)}^{\beta_N}, \quad (10.5)$$

получаем

$$|\dots, \nu_i \theta_i, \nu_{i+1} \theta_{i+1}, \dots\rangle = S_{i, i+1}^{(\nu_i, \nu_{i+1})}(\theta_i - \theta_{i+1}) |\dots, \nu_{i+1} \theta_{i+1}, \nu_i \theta_i, \dots\rangle. \quad (10.6)$$

Введем «операторы рождения»  $V_{\beta}^{+}(\theta)$  и «уничтожения»  $V^{\beta}(\theta)$ :<sup>1</sup>

$$V_{\beta}^{+}(\theta)|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} = |\theta, \theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta \beta_1 \dots \beta_n},$$

$$V^{\beta}(\theta)|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} = \sum_{k=1}^n 2\pi\delta(\theta - \theta_k) \times \sum_{\substack{\beta'_1, \dots, \beta'_{k-1} \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k}} \delta_{\alpha_1}^{\beta} \delta_{\beta_k}^{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_i - \theta_k)_{\beta_i \alpha_{i+1}}^{\beta'_i \alpha_i} |\theta_1, \dots, \hat{\theta}_k, \dots, \theta_n\rangle_{\beta'_1 \dots \beta'_{k-1} \hat{\beta}_k \beta_{k+1} \dots \beta_n}. \quad (10.7)$$

Отсюда находим квадратичные соотношения

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\beta_1 \beta_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 0, \quad (10.8a)$$

$$V_{\beta_1}^{+}(\theta_1)V_{\beta_2}^{+}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta_1 \beta_2}^{\beta'_1 \beta'_2} V_{\beta'_2}^{+}(\theta_2)V_{\beta'_1}^{+}(\theta_1) = 0, \quad (10.8b)$$

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V_{\beta_2}^{+}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_2 - \theta_1)_{\beta_2 \beta_1}^{\beta'_2 \beta'_1} V_{\beta'_2}^{+}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 2\pi\delta_{\beta_2}^{\beta_1} \delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (10.8c)$$

Алгебра с такими соотношениями называется *алгеброй Фаддеева—Замолотчикова*. Обратим внимание, что, с учетом условия кроссинг-симметрии (5.29), эти уравнения могут быть записаны в одну строчку

$$V^{\beta_1}(\theta_1)V^{\beta_2}(\theta_2) - \sum_{\beta'_1 \beta'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\beta_1 \beta_2} V^{\beta'_2}(\theta_2)V^{\beta'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\beta_1 \beta_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) - 2\pi \sum_{\beta'_1 \beta'_2} C^{\beta'_1 \beta'_2} S(-i\pi)_{\beta'_1 \beta'_2}^{\beta_1 \beta_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi), \quad (10.9)$$

если положить

$$V_{\alpha}^{+}(\theta) = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} V^{\beta}(\theta - i\pi). \quad (10.10)$$

Здесь  $C_{\alpha\beta}$  — матрица *CPT*-преобразования, представляющая собой симметричную матрицу, для которой существует унитарная матрица  $U$ , такая что  $UCU^t = 1$ . В уравнении (10.9) мы считаем, что переменные  $\theta_i$  могут пробегать значения на двух (направленных, по соглашению, слева направо) прямых:

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightarrow} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi). \quad (10.11)$$

Обратим внимание еще на один важный момент. Вообще говоря, матрица  $S(i\pi)$  не обязана быть обратимой, так что матрица  $S(-i\pi)$  может не существовать. Это случается, например, когда  $S(0) = \pm P$  при размерности пространства внутренних состояний больше 1. Но произведение  $S_{12}(-i\pi + \varepsilon)C_{12}$  имеет конечный предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Например, для модели синус-Гордона и  $O(N)$ -моделей этот предел равен  $-C_{12}$ .

Пусть теперь  $\hat{I}_s$  — локальный интеграл движения спина  $s$ , причем в выбранном базисе действие интегралов движения диагоналізуется:

$$\hat{I}_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n} = I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta_1 \dots \beta_n} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle_{\beta_1 \dots \beta_n}, \quad I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta_1 \dots \beta_n} = \sum_{i=1}^n I_{s, \beta_i} e^{s\theta_i}. \quad (10.12)$$

Отсюда очевидно следуют коммутационные соотношения

$$[\hat{I}_s, V_{\beta}^{+}(\theta)] = I_{s, \beta} e^{s\theta} V_{\beta}^{+}(\theta), \quad [\hat{I}_s, V^{\beta}(\theta)] = -I_{s, \beta} e^{s\theta} V^{\beta}(\theta). \quad (10.13)$$

<sup>1</sup>Здесь написаны формулы только для различных значений  $\theta_i$ . Для совпадающих значений в случае «бозонной» статистики нужно добавить обычные множители (корни из чисел заполнения).

Согласие с условием кроссинг-симметрии в виде (10.10) накладывает на собственные значения ограничение

$$I_{s,\alpha}\delta_{\alpha'}^{\alpha} = (-1)^{s-1} \sum_{\beta} C^{\alpha\beta} I_{s,\beta} C_{\beta\alpha'}. \quad (10.14)$$

Отсюда немедленно следует

**Теорема 10.1** *Если в лоренц-инвариантной модели имеется нейтральная частица или пара частица–античастица с недиагональной матрицей рассеяния, на которых интегралы движения диагонализуются, интегралы движения четных спинов имеют нулевые собственные значения на этих частицах. Как следствие, если в модели есть только частицы этих двух сортов, она не имеет интегралов движения четных спинов.*

Действительно, наличие нейтральной частицы 1 означает, что в подходящем базисе имеется блок  $1 \times 1$  с матрицей  $C = 1$  на нем. Следовательно,  $I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$ . Следовательно,  $I_{2n,1} = 0$ .

Пусть теперь в системе имеется частица 1 и античастица  $\bar{1}$  с  $C = \sigma^1$  (в этом блоке), такие что матричный элемент  $1 + \bar{1} \rightarrow \bar{1} + 1$  не равен нулю. Тогда  $I_{s,1} = (-1)^{s-1} I_{s,\bar{1}}$ . Рассмотрим процесс рассеяния частицы с быстротой  $\theta_1$  и античастицы с быстротой  $\theta_2$ . Тогда до и после рассеяния собственные значения интегралов движения должны быть одинаковы:

$$I_{s,1}e^{s\theta_1} + I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_2} = I_{s,\bar{1}}e^{s\theta_1} + I_{s,1}e^{s\theta_2}.$$

Это значит, что  $I_{s,1} = I_{s,\bar{1}} = (-1)^{s-1} I_{s,1}$ . Отсюда заключаем, что  $I_{2n,1} = 0$ .

Теперь мы видим причину, почему модель синус-Гордона имеет только интегралы движения нечетных спинов. Однако ограничения на спины интегралов движения могут иметь и другой характер: они могут быть связаны со связанными состояниями.

Посмотрим, как ведут себя интегралы движения на связанных состояниях. Вспомним формулу (8.45) и картинку к ней (8.44). Слиянию двух линий на картинке следует сопоставить слияние операторов  $V$ :

$$V^c(\theta) = \sum_{a,b} \Gamma_{ab}^c V^b(\theta - i\bar{u}_{bc}^{\bar{a}}) V^a(\theta + i\bar{u}_{ca}^{\bar{b}}). \quad (10.15)$$

Суммирование по  $a$  и  $b$  ведется только по внутренним состояниям частиц  $a$  и  $b$  соответственно. Из коммутационных соотношений (10.13) получаем

$$I_{s,c} = I_{s,a} e^{is\bar{u}_{ca}^{\bar{b}}} + I_{s,b} e^{-is\bar{u}_{bc}^{\bar{a}}}. \quad (10.16)$$

Дополнительные ограничения возникают, когда при последовательном построении связанных состояний какое-то связанное состояние совпадает с одной из «элементарных» частиц, из которых оно построено.

Приведем пример. Рассмотрим матрицу рассеяния первого бризера в модели синус-Гордона в специальной точке  $\beta^2 = 4/5$ :

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi i}{3})}{\text{th} \frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi i}{3})}. \quad (10.17)$$

Мы хотим построить на основе этой  $S$ -матрицы модель, которая содержала бы эту частицу как элементарную. Разумеется, такая модель (если она возможна) будет редукцией модели синус-Гордона, так как ее пространство состояний будет меньше пространства состояний модели синус-Гордона.  $S$ -матрица (10.17) имеет полюс на физическом листе:  $\theta = 2\pi i/3$ , однако знак вычета этого полюса по переменной  $u = -i\theta$  отрицательный. В модели синус-Гордона это значило, что этот полюс не отвечает связанному состоянию. Но модель синус-Гордона — унитарная в том смысле, что все ее состояния имеют положительную норму, а редуцированная модель не обязана быть унитарной. Поэтому предположим, что этому полюсу отвечает частица. Назовем ее 2. Нетрудно проверить, что масса частицы 2 равна массе  $M_1$  первого бризера:

$$M_2 = 2M_1 \cos \frac{\pi}{3} = M_1,$$

а ее матрицы рассеяния с первым бризером и с собой совпадают с  $S_{11}(\theta)$ :

$$S_{21}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta).$$

Вообще говоря, это не значит, что она совпадает с первым бризером, но если это не так, возникает следующее состояние, которое имеет ту же массу и матрицу рассеяния и т.д. Давайте замкнем спектр частиц на одной частице и *постулируем*, что в нашей теории связанное состояние двух частиц 1 является частицей 1:  $2 = 1$ . Уравнение (10.16) в этом случае имеет вид:

$$I_{s,1} = 2I_{s,1} \cos \frac{\pi s}{3}.$$

Отсюда заключаем, что интегралы движения отвечают только таким спином, что  $\cos \frac{\pi s}{3} = \frac{1}{2}$ , то есть  $s = \pm 1 \pmod{6}$ . Все эти спины нечетные, так что больше никаких ограничений мы не видим. Спектр спинов интегралов движения отвечает  $\Phi_{12}$ -возмущениям минимальных конформных моделей. Возмущению какой именно модели отвечает эта теория рассеяния? Как правильно отвечать на этот вопрос, мы разберем в следующей лекции, а сейчас ограничимся эвристическим рассуждением.

Рассмотрим модель синус-Гордона. Как мы уже это делали на семинаре к лекции 2, разобьем действие следующим образом:

$$\mathcal{S}_0 = \int d^2x \left( \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad \mathcal{S}_1 = \frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}. \quad (10.18)$$

и будем изучать теорию возмущений по  $\mathcal{S}_1$ . На семинаре мы уже убедились, что первый член описывает некоторую (вообще говоря, неунитарную) конформную теорию с центральным зарядом

$$c = 1 - 6 \left( \frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Эта теория наверняка шире, чем минимальная конформная теория поля и каким-то образом содержит ее.<sup>2</sup> Сравнивая с (9.17), легко заключить, что  $\alpha_+ = \beta/\sqrt{2}$ ,  $\alpha_- = -\sqrt{2}/\beta$ . Конформная размерность оператора возмущения  $e^{i\beta\phi}$  в этой конформной теории поля равна

$$\Delta_p = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left( \frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \left( 3\frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right)^2 = \Delta_{13}. \quad (10.19)$$

Гипотеза состоит в том, что некоторые редукции модели синус-Гордона описывают  $\Phi_{13}$ -возмущения конформных моделей. Поэтому  $S$ -матрицы возмущенных минимальных моделей можно получить из  $S$ -матриц модели синус-Гордона в подходящем базисе.

Вернемся к модели с матрицей рассеяния (10.17). Эта модель представляет собой редукцию модели синус-Гордона с  $\beta^2 = 4/5$ , то есть, как мы ожидаем,  $\Phi_{13}$ -возмущения минимальной конформной модели с центральным зарядом  $c = 1 - 6(\sqrt{5/2} - \sqrt{2/5})^2 = -22/5$ . Это — минимальная модель  $M(2, 5)$ , иначе именуемая моделью Ли—Янга. Эта модель содержит всего два примарных поля с размерностями

$$\Delta_{11} = \Delta_{14} = 0, \quad \Delta_{12} = \Delta_{13} = -1/5.$$

Таким образом, в этой модели  $\Phi_{13}$ -возмущение совпадает с  $\Phi_{12}$ -возмущением, что объясняет спектр спинов интегралов движения.

Попробуем продолжить серию моделей с частицами, которые даются бризерным сектором модели синус-Гордона. Массы бризеров, как мы помним, даются формулой

$$M_n = 2M_{\text{kink}} \sin \frac{\pi p n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, < 1/p, \quad \beta^2 = 2 \frac{p}{p+1}.$$

<sup>2</sup>Минимальные конформные теории поля получаются из них так называемой фельдеровской редукцией. Пространства состояний минимальных моделей находятся как когомологии некоторого сложно устроенного нильпотентного оператора.

Давайте продолжим спектр бризеров за предел  $1/p$  и потребуем, чтобы спектр частиц после этого допускал замыкание на «правильные» бризеры. Это так, если  $2/p$  — целое число. Тогда  $M_n = M_{2/p-n}$ . Тут возможны два случая. Если  $2/p$  четно, это формально соответствует минимальной модели  $M(1, 1/p)$ , обладающей сложными свойствами. Ее таблица Каца пуста, но в ней есть так называемые логарифмические операторы. В модели синус-Гордона такие модели отвечают безотражательным точкам, когда амплитуда отражения антисолитона на солитоне  $c(\theta) = 0$ . Мы не будем рассматривать этот случай.

Изучим второй случай, отвечающий

$$\frac{2}{p} = 2N - 1, \quad N = 2, 3, \dots; \quad M_n = M_{2N-1-n} = M_1 \frac{\sin \frac{\pi n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi}{2N-1}} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N - 2). \quad (10.20)$$

Этот случай отвечает, как мы ожидаем,  $\Phi_{13}$ -возмущению «ленточных» минимальных моделей  $M(2, 2N + 1)$ , примарные операторы  $\Phi_{1n} = \Phi_{1,2N+1-n}$  которых имеют размерности

$$\Delta_{1n} = -\frac{(n-1)(2N-n)}{2(2N+1)} \quad (n = 1, 2, \dots, 2N). \quad (10.21)$$

Нетрудно показать, что

$$S_{n,2N-1-n'}(\theta) = S_{nn'}(\theta), \quad (10.22)$$

что согласуется с отождествлением частиц  $n = (2N - 1 - n)$ . Посмотрим, как это отождествление ограничивает набор интегралов движения. Как видно из спектра масс,  $n$ -тая частица представляет собой связанное состояние частиц  $(n - 1)$  и 1 с параметрами

$$\bar{u}_{n,n-1}^1 = \frac{\pi}{2N-1}, \quad \bar{u}_{1n}^{n-1} = \frac{\pi(n-1)}{2N-1}. \quad (10.23)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} I_{s,n} &= I_{s,n-1} e^{i\pi s/(2N-1)} + I_{s,1} e^{-i\pi s(n-1)/(2N-1)} = I_{s,1} \sum_{k=1}^n e^{i\pi s(n+1-2k)/(2N-1)} \\ &= I_{s,1} \times \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi s n}{2N-1}}{\sin \frac{\pi s}{2N-1}}, & s \neq 0 \pmod{2N-1}; \\ n(-1)^{s(n+1)/(2N-1)}, & s = 0 \pmod{2N-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Потребовав  $I_{s,2N-2} = I_{s,1}$ , получаем, что  $s \neq 0 \pmod{2N-1}$  и  $(-1)^{s-1} = 1$ , то есть спины нечетны и не кратны  $2N - 1$ . Это соответствует спектру  $\Phi_{13}$ -возмущений «ленточных» моделей, описанному в прошлой лекции.

Хотя мы рассматривали очень частные модели, наши рассуждения вполне достаточны для доказательства следующей теоремы:

**Теорема 10.2** *Если теория содержит нейтральную частицу обладающую  $\Phi^n$ -свойством, то есть, если имеется цепочка последовательных  $n - 2$  слияний:*

$$1 + 1 \rightarrow 2, \quad 1 + 2 \rightarrow 3, \quad \dots, \quad (n - 2) + 1 \rightarrow 1,$$

*причем каждая следующая частица 1 в цепочке отстоит от предыдущей на один и тот же угол  $u_{11}^2$  в одном и том же направлении,<sup>3</sup> собственные значения интегралов движения спинов кратных  $n$  равны нулю на этой частице.*

Центральные заряды и конформные размерности в моделях, о которых мы до сих пор говорили, отрицательны, так что модели неунитарны. Попробуем изучить какую-нибудь унитарную модель. Рассмотрим конформную модель  $M(3, 4)$  ( $c = 1/2$ ), отвечающую скейлинговому пределу модели Изинга. В этой модели в симметричном секторе имеется три примарных оператора:

$$\Phi_{11} = \Phi_{23} = 1 : \Delta_{11} = 0; \quad \Phi_{21} = \Phi_{13} = \varepsilon : \Delta_{13} = \frac{1}{2}; \quad \Phi_{12} = \Phi_{22} = \sigma : \Delta_{12} = \frac{1}{16}. \quad (10.24)$$

<sup>3</sup>Это значит, что все слияния связаны с одним и тем же полюсом в матрице  $S_{11}(\theta)$ , входящей в каждую матрицу  $S_{k1}(\theta)$  с наименьшей мнимой частью.

Оператор  $\varepsilon$  принято называть энергетическим оператором, хотя, строго говоря, он отвечает плотности энтропии магнетика. В представлении свободными фермионами это оператор  $\bar{\psi}\psi$ , а коэффициент при нем есть масса фермиона, которая, как известно, пропорциональна  $T - T_c$ . Оператор  $\sigma$  пропорционален намагниченности и коэффициент при нем пропорционален внешнему магнитному полю. То есть, общее возмущение теории имеет (в евклидовом пространстве) вид:<sup>4</sup>

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{M(3,4)} + \tau \int d^2x \varepsilon(x) - h \int d^2x \sigma(x), \quad \tau \sim \frac{T - T_c}{T_c}, \quad h \sim H_{\text{ext}}.$$

Такая общая теория не является интегрируемой, поскольку не имеет высших интегралов движения. В то же время по-отдельности теории с  $h = 0$  (температурное возмущение) и  $\tau = 0$  (возмущение внешним магнитным полем) интегрируемы.

С другой стороны мы знаем, что модель Изинга соответствует классической теории Ландау со свободной энергией

$$F[\sigma] = \int d^2x \left( \frac{g}{2} (\nabla\sigma)^2 - h\sigma + \frac{a\tau\sigma^2}{2} + \frac{b\sigma^4}{4!} + \dots \right). \quad (10.25)$$

Теория Ландау является теорией среднего поля и теряет применимость в достаточно малой окрестности критической точки (флуктуационной области). Но свободную энергию (10.25) можно использовать в качестве «затравочного действия» для флуктуационной теории.

Рассмотрим сначала температурное возмущение. Теория Ландау здесь не очень полезна. Зато имеется точное и явное решение, сводящее теорию к свободному майорановским фермиону с евклидовым действием  $S[\psi] = \frac{1}{2} \int d^2x \bar{\psi}(i\hat{\partial} + m)\psi$ . Соответственно, если описывать частицы бозонным полем  $\sigma$ , матрица рассеяния будет равна  $S(\theta) = -1$ . Интегралы движения выражаются явно через фермионное поле (см. задачу к предыдущей лекции).

Теперь рассмотрим возмущение магнитным полем [16]. Размерность константы связи  $h$  равна  $2 - 1/8 = 15/8$ . Так как в теории больше нет размерных постоянных, массы частиц пропорциональны  $h^{8/15}$ . Пусть  $m_1$  — масса самой легкой частицы 1. Предположим, что это — нейтральная частица, связанная с флуктуациями параметра порядка. Вспомним, что спины интегралов движения модели равны

$$s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}. \quad (10.26)$$

Обратим внимание, что в этом спектре отсутствуют спины кратные 3. Это может говорить о том, что частица обладает  $\Phi^3$ -свойством в согласии с теорией Ландау. Действительно, при  $\tau = 0$  параметр порядка  $\sigma$  в свободной энергии Ландау имеет минимум в точке  $\sigma = \sigma_0 = (6h/b)^{1/3}$ . Вблизи минимума свободную энергию можно разложить по  $\varphi = \sigma - \sigma_0$ :

$$F[\sigma_0 + \varphi] = \text{const} + \int d^2x \left( \frac{g}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{b^{1/3}(6h)^{2/3}\varphi^2}{4} + h\varphi^3 + \frac{b\varphi^4}{4!} + \dots \right).$$

Заметим, что критические индексы при  $T = T_c$  в теории Ландау не слишком сильно отличаются от точных критических индексов (что не так при  $T \neq T_c$ ).

Кроме того, в спектре отсутствуют спины кратные 5. Для того, чтобы выполнялось  $\Phi^5$ -свойство необходимо, чтобы была еще одна частица 2, которая была бы связанным состоянием 1 + 1, и при этом частица 1 была бы связанным состоянием 2 + 2. Из (10.16) находим уравнения

$$I_{s,2} = 2I_{s,1} \cos s\bar{u}_{21}^1, \quad I_{s,1} = 2I_{s,2} \cos s\bar{u}_{12}^2$$

для всех  $s$  из (10.26). Отсюда

$$4 \cos s\bar{u}_{21}^1 \cos s\bar{u}_{12}^2 = 1.$$

При условии  $2 \cos \bar{u}_{21}^1 = m_2/m_1 > 1$  эта система уравнений имеет решение

$$\bar{u}_{21}^1 = \frac{\pi}{5}, \quad \bar{u}_{12}^2 = \frac{2\pi}{5}. \quad (10.27)$$

<sup>4</sup>В пространстве Минковского только меняются знаки перед  $\tau$  и  $h$ .

Отсюда находим

$$\frac{m_2}{m_1} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \simeq 1.618. \quad (10.28)$$

Теперь нам нужно найти  $S$ -матрицу  $S_{11}(\theta)$ , удовлетворяющую обычным условиям  $S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta) = S_{11}^{-1}(-\theta)$  и условию

$$S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{3}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}(\theta), \quad (10.29)$$

как и для модели Ли—Янга, но при этом также имеющую полюс при  $-i\theta = \frac{2\pi}{5}$  с положительным вычетом. Из (10.29) немедленно следует, что  $S$ -матрица имеет полюсы при  $-i\theta = \frac{\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$  от первого сомножителя, причем второй (возникающий в силу кроссинг-симметрии) полюс должен иметь отрицательный вычет, чтобы не было частиц меньшей массы. Возможные полюсы  $-i\theta = \frac{11\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$  от второго сомножителя сокращаются нулями от первого сомножителя:

$$S_{11}\left(\frac{11\pi i}{15} + \frac{i\pi}{3}\right) = S_{11}\left(i\pi + \frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}\left(-\frac{i\pi}{15}\right) = S_{11}^{-1}\left(\frac{i\pi}{15}\right) = 0.$$

Нетрудно подобрать  $S_{11}$  в виде

$$S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th} \frac{\theta+2\pi i/3}{2} \operatorname{th} \frac{\theta+2\pi i/5}{2} \operatorname{th} \frac{\theta+\pi i/15}{2}}{\operatorname{th} \frac{\theta-2\pi i/3}{2} \operatorname{th} \frac{\theta-2\pi i/5}{2} \operatorname{th} \frac{\theta-\pi i/15}{2}}. \quad (10.30)$$

Полюс в точке  $-i\theta = \frac{\pi}{15}$  имеет положительный вычет, и, таким образом, в системе имеется еще одна частица 3:

$$\bar{u}_{31}^1 = \frac{\pi}{30}, \quad \frac{m_3}{m_1} = 2 \cos \frac{\pi}{30} \simeq 1.989. \quad (10.31)$$

Далее, амплитуда рассеяния

$$S_{12}(\theta) = S_{11}\left(\theta + \frac{i\pi}{5}\right) S_{11}\left(\theta - \frac{i\pi}{5}\right) \quad (10.32)$$

имеет полюсы в точках  $-i\theta = \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}$ . Первые три легко отождествляются с  $u_{12}^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Последний соответствует новой частице 4 массы

$$\frac{m_4}{m_1} = 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \simeq 2.405. \quad (10.33)$$

Продолжая процедуру дальше, можно найти еще четыре частицы с массами

$$\begin{aligned} \frac{m_5}{m_1} &= 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \simeq 2.956, & \frac{m_6}{m_1} &= 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{30} \simeq 3.218, \\ \frac{m_7}{m_1} &= 8 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} \simeq 3.891, & \frac{m_8}{m_1} &= 8 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} \simeq 4.783. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Частицы 5 и 6 появляются как связанные состояния  $2 + 2$ , частица 7 появляется в канале  $3 + 3$ , а частица 8 — в канале  $4 + 4$ .

### Задачи

1. Проверьте, что соотношения (10.8) могут быть записаны в виде (10.9).
2. Покажите, что определение (10.15) согласуется с уравнением (8.45) для матрицы рассеяния связанных состояний.
3. Рассмотрите модель синус-Гордона в безотражательных точках  $p = 1/N$ . Покажите, что спектр разрешенных спинов интегралов движения состоит из всех нечетных значений  $s$  и значений  $s = N \pmod{2N}$ :  $s \in (2\mathbb{Z} + 1) \cup N(2\mathbb{Z} + 1)$ .

4. Рассмотрите теорию с парой частица—античастица  $(1, \bar{1})$  массы  $m$  с матрицей рассеяния

$$S_{11} = \frac{\text{sh}(\theta/2 - i\pi g)}{\text{sh}(\theta/2 + i\pi g)}, \quad S_{1\bar{1}}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta). \quad (10.35)$$

Найдите спектр интегралов движения этой теории. Найдите отношения  $I_{s,\bar{1}}/I_{s,1}$  для этих интегралов движения. Покажите, что матрица рассеяния (10.35) в первом порядке по теории возмущений совпадает с матрицей рассеяния теории с действием (в пространстве Минковского) *комплексной модели синус-Гордона*:

$$\mathcal{S}[\chi, \bar{\chi}] = \int \frac{d^2x}{4\pi} \left( \frac{\partial_\mu \chi \partial^\mu \bar{\chi}}{1 + g\bar{\chi}\chi} - m^2 \bar{\chi}\chi \right). \quad (10.36)$$

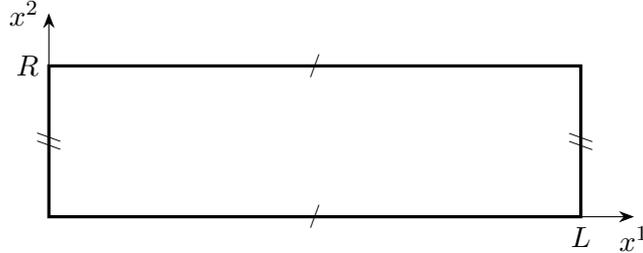
(На самом деле, после подходящей перенормировки массы и константы связи, выражение (10.35) дает точную  $S$ -матрицу этой теории.)

**5\***. Снова рассмотрим  $S$ -матрицу (10.35), но при значениях константы связи  $-1 < g < 0$ . В этом случае  $S$ -матрица имеет полюс при  $-i\theta = \pi|g|$  с положительным вычетов. Найдите спектр связанных состояний, порожденных из частиц  $1$  и  $\bar{1}$ . При целых значениях величины  $-g^{-1} = N \geq 2$  спектр частиц содержит пары частиц одинаковой массы и равного по модулю  $N$  заряда. Покажите, что при отождествлении частиц в этих парах теория рассеяния самосогласованна ( $\mathbb{Z}_N$ -*симметричная модель Изинга*). Найдите спектр спинов интегралов движения в этой теории.

## Лекция 11

### Термодинамический анзац Бете: основы метода

На прошлой лекции мы пытались найти связь между точными  $S$ -матрицами и возмущениями конформных теорий, исходя из интегралов движения, а также эвристических соображений. Сегодня мы обсудим метод, позволяющий точно и явно связать данные о рассеянии с параметрами конформной модели — *термодинамический анзац Бете (ТБА)*.<sup>1</sup> Рассмотрим релятивистскую систему в прямоугольной области эвклидова пространства размером  $L \times R$ , замкнутой в тор  $T_{L,R}$  (отождествляемые линии помечены одинаковыми засечками):



Мы можем рассматривать систему двумя способами. Если мы будем считать  $x^1$  пространственной координатой, а  $x^2$  — мнимым временем, величина  $R^{-1}$  будет температурой системы, живущей в ящике длины  $L$  (« $L$ -картина»). Если мы поменяем местами смысл координат, величина  $L^{-1}$  будет температурой, а  $R$  — размером ящика (« $R$ -картина»).

Пусть  $\xi$  — корреляционная длина системы. Если мы выберем

$$R \ll \xi \ll L, \quad (11.1)$$

то в  $L$ -картине мы будем иметь большую систему при высокой температуре. Пусть  $N$  — общее число частиц. Если теперь

$$L \gg \xi N, \quad (11.2)$$

систему можно рассматривать как разреженную и изучать термодинамику частиц исходя из матрицы рассеяния. В  $R$ -картине, наоборот, температура стремится к нулю, но зато размеры системы настолько малы, что мы можем пользоваться конформной теорией поля (и первыми поправками к ней) для ее исследования. Сравнивая выражения для статистической суммы, вычисленные обоими способами,

$$Z(L, R) = \text{tr}_{\mathcal{H}_L} e^{-RH_L} = \text{tr}_{\mathcal{H}_R} e^{-LH_R}, \quad (11.3)$$

мы можем связать ультрафиолетовое поведение системы с инфракрасным.

Начнем с  $R$ -картины. Поскольку  $L$  очень велико, наибольший вклад в статсумму в этой картине дает основное состояние, поэтому

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (11.4)$$

где  $\mathcal{E}_0(R)$  — энергия основного состояния гамильтониана  $H_R$ .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_1^1(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}} + 2T_{\bar{3}\bar{3}}),$$

если мы примем  $\bar{z} = x^2 + ix^1$ . Для эвклидова<sup>2</sup> тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}.$$

<sup>1</sup> Не следует путать метод термодинамического анзаца Бете с анзацем Бете при конечных температурах. Хотя первый и использует методы последнего, он к нему не сводится.

<sup>2</sup> В эвклидовом пространстве и в пространстве Минковского совпадают компоненты  $T_\nu^\mu$ , а компоненты  $T_{\mu\nu}$  могут отличаться. В частности, в координатах  $z, \bar{z}$  эти компоненты отличаются знаком.

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^p = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left( \mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_p) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_p(x). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Полагая  $\lambda = 0$  получаем

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R}, \quad c_{\text{eff}} = c - 12(\Delta_{\text{min}} + \bar{\Delta}_{\text{min}}). \quad (11.6)$$

Размерности  $\Delta_{\text{min}}, \bar{\Delta}_{\text{min}}$  являются конформными размерностями в двух киральностях примарного оператора  $\Phi_{\text{min}}$  с наименьшей масштабной размерностью ( $d = \Delta + \bar{\Delta}$ ), согласующегося с условием периодичности по  $R$ . В теориях с невырожденным вакуумом инвариантных относительно пространственной инверсии эти размерности совпадают:  $\Delta_{\text{min}} = \bar{\Delta}_{\text{min}}$ . В унитарных теориях с тривиальными условиями периодичности они равны нулю и  $c_{\text{eff}} = c$ . Величину  $c_{\text{eff}}$  называют *эффективным центральным зарядом*. Именно эффективный центральный заряд мы будем находить в  $L$ -картине. Вычислению термодинамических средних в  $L$ -картине соответствуют мацубаровские граничные условия по  $x^2$  (периодические для бозонных полей и антипериодические для фермионных полей). С такими условиями заведомо согласован единичный оператор, так что имеем

$$\Delta_{\text{min}} + \bar{\Delta}_{\text{min}} \leq 0, \quad c_{\text{eff}} \geq c.$$

Теперь разберемся, как записывается энергия основного состояния в возмущенной теории. Имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_p} \rangle_0}{\langle e^{-S_p} \rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \quad S_p = \lambda \int d^2x \Phi_p$$

Слагаемое, содержащее  $\varepsilon_\infty = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$ , связано с тем, что в теории поля при вычислении среднего от гамильтониана мы вычитаем вакуумную энергию на бесконечной прямой так, чтобы  $\mathcal{E}_0(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .<sup>3</sup> По теории возмущений величину  $\varepsilon_\infty$  вычислить нельзя, но мы увидим, как она извлекается из  $L$ -картины. Среднее с индексом 0 понимается как среднее по состоянию с наименьшей конформной размерностью в конформной теории поля:

$$\langle X \rangle_0 = \langle \Phi_{\text{min}} | X | \Phi_{\text{min}} \rangle. \quad (11.7)$$

Для вычисления  $\mathcal{E}_0(R)$  в возмущенной теории удобнее начать прямо с (11.4):

$$\mathcal{E}_0(R) = -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \left\langle e^{-L \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - S_p} \right\rangle_0 - \varepsilon_\infty R = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_p^n \rangle_0.$$

Вычисление логарифма эквивалентно замене средних  $\langle S_p^n \rangle_0$  на соответствующие связные части  $\langle S_p^n \rangle_{0,c}$  и выпадению первого слагаемого ( $\langle 1 \rangle_{0,c} = 0$ ). Деление на  $L$  сокращает интеграл по  $x^1$  в одном из множителей. Отсюда получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R + \lambda R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \langle \Phi_p(x) S_p^{n-1} \rangle_{0,c}.$$

Средние в правой части не зависят от точки  $x$  в силу трансляционной инвариантности. Перемасштабируем, заменив  $x \rightarrow Rx, x_i \rightarrow Rx_i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(R) &= -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} R^{2n(1-\Delta_p)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \\ \mathbb{M}_n(l) &= \int_{T_{l,1}} d^2x_1 \cdots d^2x_{n-1} \langle \Phi_p(x) \Phi_p(x_1) \cdots \Phi_p(x_{n-1}) \rangle_{0,c} \end{aligned} \quad (11.8)$$

<sup>3</sup>Если связать теорию с гравитацией, величина  $8\pi G \varepsilon_\infty$  будет иметь смысл космологической постоянной.

Интегралы  $\mathbb{M}_n$  приведены к безразмерному виду масштабированием с  $T_{L,R}$  на  $T_{L/R,1}$ . В пределе  $l = L/R \rightarrow \infty$  интегралы превращаются в интегралы по цилиндру. Конформным преобразованием их можно привести к интегралам по плоскости:

$$\mathbb{M}_n(\infty) = (2\pi)^{2-2n(1-\Delta_p)} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x_1 \cdots d^2x_{n-1} \langle \Phi_p(1,1) \Phi_p(x_1) \cdots \Phi_p(x_{n-1}) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^{n-1} |z_i|^{2\Delta_p-2} \quad (11.9)$$

Если  $\Delta_{\min}$  или  $\bar{\Delta}_{\min}$  равно нулю (в частности, это всегда так, когда теория унитарна), имеем  $\langle \Phi_p \rangle_{0,c} = 0$ . Это значит, что  $\mathbb{M}_0 = 0$  и разложение начинается с  $n = 2$ . В противном случае разложение начинается с  $n = 1$ . Отсюда заключаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + O(R^\alpha), \quad \alpha = \begin{cases} 1 - 2\Delta_p, & \text{если } \Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0; \\ 3 - 4\Delta_p, & \text{если } \Delta_{\min} = 0 \text{ или } \bar{\Delta}_{\min} = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

Теперь обратимся к  $L$ -картине. Чтобы понять основной принцип, разберем сначала случай одной нейтральной частицы массы  $m$  с матрицей рассеяния  $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$ ,  $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$ . Как мы уже говорили, будем предполагать, что термодинамика частиц при достаточно больших значениях  $L$  полностью определяется асимптотической волновой функцией. Напишем уравнения Бете, которые следуют из периодичности этой волновой функции:

$$e^{imL \text{sh } \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N S(\theta_i - \theta_j) = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.11)$$

Где  $F = 0$  в случае бозонов и  $F = 1$  в случае фермионов. Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \text{sh } \theta_i + \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (11.12)$$

причем  $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+F}{2}$  в случае  $S(0) = -1$  и  $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{F}{2}$  в случае  $S(0) = 1$ . Для каждого решения уравнений Бете  $\{\theta_i\}$  зададим функцию  $\theta(n)$  уравнением

$$mL \text{sh } \theta(n) + \sum_{j=1}^N \phi(\theta(n) - \theta_j) = 2\pi n. \quad (11.13)$$

Очевидно  $\theta(n_i) = \theta_i$ , а при всех значениях  $n \notin \{n_i\}$  значения  $\theta(n)$  будут интерпретироваться как «незаполненные состояния». По умолчанию мы будем предполагать, что значения  $n_i$  расположены по возрастанию:  $n_{i+1} \geq n_i$ , причем равные значения отвечают кратным корням уравнений Бете, если таковые имеются. Мы будем также предполагать, что решения уравнений Бете удовлетворяют условию  $\theta_{i+1} \geq \theta_i$  ( $\forall i$ ) и, более того,  $\theta(n+1) \geq \theta(n)$  ( $\forall n$ ). Это верно в случае растущей функции  $\phi(\theta)$ , но и в случае убывающей функции может быть верно при разумных условиях.

При больших  $L$  разности  $\theta(n+1) - \theta(n)$  малы, и можно ввести спектральную плотность состояний  $\rho(\theta)$  и спектральную плотность частиц  $\rho^\bullet(\theta)$ :

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi k}{L(\theta_{i+k} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}, \quad (11.14)$$

где  $k$  не меньше кратности вырождения корня  $\theta_i$ . Очевидно, интеграл от  $\rho^\bullet$  равен плотности частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (11.15)$$

а интеграл с весом  $m \text{ch } \theta$  дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \text{ch } \theta. \quad (11.16)$$

Все интегралы по  $\theta$  мы будем понимать по всей прямой  $\mathbb{R}$ , если не оговорено иное.

Возьмем разность двух уравнений (11.13) при двух последовательных значениях  $n$  и поделим на  $L(\theta(n+1) - \theta(n))$ . Заменяв сумму на интеграл, получим

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta'). \quad (11.17)$$

Это уравнение позволяет для каждой заданной функции  $\rho^\bullet(\theta)$  найти соответствующую плотность состояний  $\rho(\theta)$ . Но при конечных температурах необходимо просуммировать все возможные наборы  $\{n_i\}$  с гиббсовскими весами. Трудность состоит в нетривиальной мере функционального интегрирования по  $\rho^\bullet$  в непрерывном пределе. Поэтому вместо прямого суммирования будем искать минимум свободной энергии. Положим

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet], \quad (11.18)$$

Чтобы найти энтропию, воспользуемся обычным трюком из теории растворов. У нас есть две ситуации:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с  $S(0) = 1$  или бозонами с  $S(0) = -1$ , каждое значение  $n_i$  может быть заполнено только один раз.
- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с  $S(0) = 1$  или фермионами с  $S(0) = -1$ , каждое значение  $n_i$  может заполняться неограниченным числом частиц.

Разобьем вещественную прямую на небольшие интервалы  $\Delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$ . Полную энтропию  $S$  будем понимать как сумму вкладов  $\Delta S_k$  от значений  $\theta \in \Delta_k$ . Энтропия  $\Delta S_k$  понимается как число «микроскопических» состояний, которыми реализуется «макроскопическое» состояние, которое задается числом частиц  $N_k^\bullet$  на числе состояний  $N_k$  в этом интервале.

В «фермионном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из  $N_k$  по  $N_k^\bullet$  (раскладываем  $N_k^\bullet$  частиц по  $N_k$  ящикам, куда помещается одна частица), так что

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

В «бозонном» случае количество таких состояний есть число сочетаний из  $N_k + N_k^\bullet - 1$  по  $N_k^\bullet$ . Действительно, возьмем  $N_k + N_k^\bullet - 1$  ящиков, расставленных в ряд, и положим в них  $N_k^\bullet$  частиц по одной в ящик. Останется  $N_k - 1$  пустых мест. Возьмем  $i$ -тое слева пустое место. Сосчитаем число  $l_i$  частиц лежащих слева от него в ряд до следующего пустого места. Будем считать это числом заполнения  $i$ -го состояния. Числом заполнения  $N_k$ -го состояния будем считать количество частиц, лежащих между самым правым пустым местом и правым краем. Это дает взаимно-однозначное соответствие между микроскопическими конфигурациями и раскладкой частиц по ящикам. Итак, имеем

$$\Delta S_k = \log \frac{(N_k + N_k^\bullet - 1)!}{N_k^\bullet!(N_k - 1)!} \simeq (N_k + N_k^\bullet) \log(N_k + N_k^\bullet) - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - N_k \log N_k.$$

Устремляя размеры интервалов к нулю и заменяя  $N_k$  на  $L\rho(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$  и  $N_k^\bullet$  на  $L\rho^\bullet(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$ , получаем

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (11.19)$$

в «фермионном» случае и

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (11.20)$$

Давайте введем знаковый множитель

$$\sigma = (-1)^F S(0) = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \quad (11.21)$$

Тогда энтропию можно записать в виде

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\sigma\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma\rho^\bullet) - \sigma\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet). \quad (11.22)$$

Теперь нужно найти минимум функционала  $F[\rho, \rho^\bullet]$  с учетом условия (11.17):

$$0 = \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma\rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}.$$

Мы учли, что

$$\frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta).$$

Давайте для последнего логарифма в условии минимума введем специальное обозначение:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma\rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \quad (11.23)$$

По-другому это можно записать так

$$\frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \quad (11.24)$$

В левой части стоит функция заполнения, и она выражается через  $\epsilon(\theta)$  так же, как в случае свободных частиц она выражается через  $\beta E(\theta)$ . Величину  $\epsilon(\theta)$  называют *псевдоэнергией*. В терминах псевдоэнергии полученные уравнения записываются в виде нелинейного интегрального уравнения, называемого уравнением *уравнения Янга–Янга* [17]:

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')} \right) = mR \operatorname{ch} \theta. \quad (11.25)$$

Покажем, что все остальные величины можно выразить через решение  $\epsilon(\theta, mR)$  этого уравнения.

Прежде всего, с помощью (11.25) и (11.17) можно исключить  $\rho$  и  $\rho^\bullet$  в выражении для свободной энергии, которая, как мы знаем из (11.4), пропорциональна энергии основного состояния в  $R$ -картине  $\mathcal{E}_0(R)$ :

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (11.26)$$

Удобно ввести скейлинговую функцию  $f(r)$  соотношением

$$f(mR) = R\mathcal{E}_0(R) = \sigma mR \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (11.27)$$

Эта функция не зависит от размерных параметров. В силу (11.6) через нее легко выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (11.28)$$

Дифференцируя уравнение (11.25) по  $R$  и сравнивая результат с (11.17), получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, mR)}{\partial R}. \quad (11.29)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left( 1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)} \right). \quad (11.30)$$

Итак, у нас есть система нелинейных уравнений. В следующий раз мы изучим, как решать эти уравнения.

Довольно несложно обобщить результат на случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Пусть имеется набор частиц  $a = 1, \dots, r$  с массами  $m_a$  и матрицами рассеяния  $S_{ab}(\theta) =$

$Z_a^{\delta_{ab}} e^{i\phi_{ab}(\theta)}$ ,  $Z_a = \pm 1$ ,  $\phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(-\theta)$ . Мы будем принимать  $\sigma_a = (-1)^{F_a} Z_a$ , то есть  $\sigma_a = 1$  для «бозонных» частиц и  $\sigma_a = -1$  для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{j=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (11.31)$$

Совершенно аналогично вводим плотности состояний  $\rho_a(\theta)$  и частиц  $\rho_a^\bullet(\theta)$ , причем

$$N_a = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho_a^\bullet(\theta), \quad E[\rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{a=1}^r \rho_a^\bullet(\theta) m_a \operatorname{ch} \theta. \quad (11.32)$$

В термодинамическом пределе имеем

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (11.33)$$

В остальном выводе достаточно просто заменить

$$\rho \rightarrow \rho_a, \quad \rho^\bullet \rightarrow \rho_a^\bullet, \quad \epsilon \rightarrow \epsilon_a, \quad \sigma \rightarrow \sigma_a, \quad \phi(\theta - \theta') \rightarrow \phi_{ab}(\theta - \theta'), \quad \int \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \sum_a \int \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Здесь есть одна тонкость. Предположим, что среди частиц есть пары частица—античастица  $(a, \bar{a})$ . Тогда имеются сохраняющиеся заряды  $Q_a$ , собственные значения которых равны  $N_a - N_{\bar{a}}$ , и мы должны искать минимум с учетом сохранения этих зарядов. Чтобы учесть это, легче использовать большой канонический ансамбль и приписать каждому сорту частиц химический потенциал  $\mu_a$ . Надо искать минимум большого термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.34)$$

При этом надо полагать  $\mu_a = 0$  для нейтральных частиц и  $\mu_{\bar{a}} = -\mu_a$  для пар частица—античастица. Уравнение Янга—Янга принимает вид

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')}) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (11.35)$$

Далее, большой потенциал имеет тот же вид, что и свободная энергия в случае с нулевыми химпотенциалами:

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)}). \quad (11.36)$$

Из-за присутствия в правой части (11.35) химических потенциалов плотность состояний вычисляется по несколько другой формуле:

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)}). \quad (11.37)$$

где  $m$  — общий множитель всех масс. Это значит, что мы записываем массы в виде  $m_a = \kappa_a m$ , где  $\kappa_a$  — безразмерные константы. Энергия  $\mathcal{E}_0(R)$  выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \quad F = \Omega + \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (11.38)$$

В симметричном случае  $N_a = N_{\bar{a}}$  ( $\forall a$ ) все химические потенциалы равны нулю,  $\mu_a = 0$ , и ответы не отличаются от случая нейтральных частиц. Однако в некоторых задачах интересен и несимметричный случай.

## Задачи

1. Покажите, что в модели свободного безмассового майорановского фермиона с граничными условиями Неве–Шварца ( $\psi(x^1, x^2 + R) = -\psi(x^1, x^2)$ ) эффективный центральный заряд равен  $c_{\text{eff}}^{NS} = \frac{1}{2}$ , а в модели с граничными условиями Рамона ( $\psi(x^1, x^2 + R) = \psi(x^1, x^2)$ ) он равен  $c_{\text{eff}}^R = -1$ .
2. Аналогично найдите эффективный заряд для свободного безмассового нейтрального бозона с периодическими и антипериодическими граничными условиями.
3. Выведите (11.26), (11.29) и (11.30).
4. Найдите свободную энергию и число частиц в системе из одной частицы в пределе низких температур  $mR \gg 1$  до членов порядка  $e^{-2mR}$ . Получите явные формулы в элементарных функциях в порядке  $e^{-mR}$ .
- 5\*. Безмассовые теории можно описать как системы частиц со спектром  $p^0 = p^1 = \frac{m}{2}e^\theta$  (правые частицы) или  $p^0 = -p^1 = \frac{m}{2}e^{-\theta}$  (левые частицы). Рассмотрим теорию, которая содержит одну правую частицу  $r$  и одну левую частицу  $l$  с одинаковым параметром  $m$ , причем между ними имеется три скалярные матрицы рассеяния  $S_{rr}(\theta)$ ,  $S_{ll}(\theta)$  и  $S_{rl}(\theta)$ . Какие условия накладывают на эти матрицы условия унитарности и кроссинг-симметрии? При каких условиях такая теория масштабно-инвариантна, а при каких — нет? Напишите уравнения термодинамического анзаца Бете и формулы для свободной энергии и чисел частиц в этой теории.

## Семинар 11

### Уравнение Янга—Янга для модели Либа—Линихера

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

Мы покажем, что уравнение Янга—Янга имеет вид

$$\epsilon(p) + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \log(1 + e^{-\epsilon(p')}) = R \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right).$$

При этом большой термодинамический потенциал равен

$$\Omega = -\frac{L}{R} \int \frac{dp}{2\pi} \log(1 + e^{-\epsilon(p)}).$$

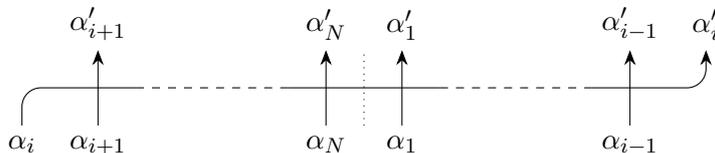
### Дополнение к лекции 11

#### Иерархический анзац Бете

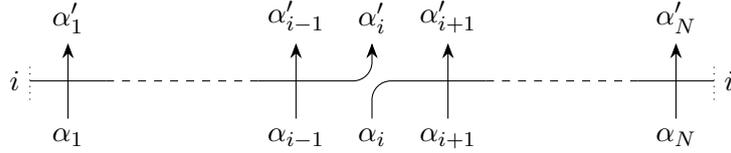
Вопрос такой: а что делать, если матрица рассеяния частиц недиагональна? Рассмотрим модель с  $S$ -матрицей  $S(\theta)_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha'_1 \alpha'_2}$ . Для простоты будем считать, что имеется одна частица с несколькими внутренними состояниями, например солитон модели синус-Гордона. Условие периодичности для волновой функции имеет вид

$$e^{imL \text{sh} \theta_i} S_{i,i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) \cdots S_{i1}(\theta_i - \theta_1) S_{i,N}(\theta_i - \theta_N) \cdots S_{i,i+1}(\theta_i - \theta_{i+1}) |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle = |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle.$$

Графически произведение  $S$ -матриц в этом выражении можно изобразить так:



Переставляя часть справа от пунктирной линии влево, получим



Теперь вспомним, что в большом количестве задач матрица рассеяния в нуле сводится к матрице перестановки:  $S(0) = \pm P$ . Тогда средний узел можно заменить (с точностью до знака) на матрицу рассеяния:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \alpha'_1 \\ \uparrow \\ 0 \text{---} \theta_i \text{---} \\ \downarrow \\ \alpha_1 \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \alpha'_{i-1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_i \\ \uparrow \\ \alpha_i \end{array} \begin{array}{c} \alpha'_{i+1} \\ \uparrow \\ \alpha_{i+1} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \alpha'_N \\ \uparrow \\ \alpha_N \\ \text{---} 0 \end{array} = \\
 & = \text{tr}_{V_0} S_{0N}(\theta_i - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta_i - \theta_2) S_{01}(\theta_i - \theta_1) = T(\theta_i).
 \end{aligned}$$

Мы видим, что произведение матриц рассеяния вкладывается в семейство коммутирующих трансфер-матриц

$$T(\theta) = \text{tr}_{V_0} L_{1\dots N}(\theta), \quad L_{1\dots N}(\theta) = S_{0N}(\theta - \theta_N) \cdots S_{02}(\theta - \theta_2) S_{01}(\theta - \theta_1), \quad (11.39)$$

где  $V_0$  играет роль вспомогательного пространства,  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$  — квантового пространства. Нам нужно найти такие векторы

$$|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \sum_{\{\beta_i\}} A_I^{\beta_1 \dots \beta_N} |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle_{\beta_1 \dots \beta_N}, \quad I = 1, \dots, (\dim V)^N, \quad (11.40)$$

которые бы диагонализировывали трансфер-матрицы  $T(\theta)$ :

$$T(\theta)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \Lambda_I(\theta; \theta_1, \dots, \theta_N)|I; \theta_1, \dots, \theta_N\rangle, \quad (11.41)$$

а затем решить уравнения

$$e^{imL \text{sh } \theta_i} \Lambda_I(\theta_i; \theta_1, \dots, \theta_N) = \pm 1. \quad (11.42)$$

Эта система уравнений представляет собой *первичную* систему уравнений Бете.

Диагонализация трансфер-матриц выполняется методом алгебраического анзаца Бете. Рассмотрим самый простой пример — модель синус-Гордона. В этом случае для системы солитонов имеем  $S(0) = -P$  (в случае фермионов  $S(0) = P$ , но мы можем получить ту же  $-1$  накладывая на фермионы граничное условие Невё—Шварца).

Оператор  $L(\theta)$  представляет собой матрицу  $2 \times 2$  во вспомогательном пространстве:

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \quad T(\theta) = A(\theta) + D(\theta). \quad (11.43)$$

Оператор  $C(\theta)$  увеличивает топологическое число состояния на единицу, а  $B(\theta)$  — уменьшает. Введем реперное состояние  $|\Omega; \vec{\theta}\rangle$ , состоящее только из солитонов с топологическим числом  $+1$ :

$$C(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = 0. \quad (11.44)$$

Операторы  $A, D$  действуют на этом состоянии просто

$$A(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle, \quad D(\theta)|\Omega; \vec{\theta}\rangle = \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)|\Omega; \vec{\theta}\rangle.$$

Заметим, что правая часть второго тождества обращается в нуль при  $\theta = \theta_i$ . Поэтому собственное значение

$$\Lambda_\Omega(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i)$$

имеет в важных для нас точках вид произведения

$$\Lambda_{\Omega}(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j). \quad (11.45)$$

Теперь построим состояния Бете

$$|\lambda_1, \dots, \lambda_n; \vec{\theta}\rangle = B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_1) \cdots B(\frac{i\pi}{2} + \lambda_n) |\Omega; \vec{\theta}\rangle \quad (11.46)$$

с топологическим числом  $N - 2n$ . Слагаемые  $\frac{i\pi}{2}$  добавлены, чтобы собственные значения оператора «импульса» в спиновом пространстве  $p(\lambda)$ ,

$$e^{ip(\lambda)} = \frac{b(\frac{i\pi}{2} + \lambda)}{a(\frac{i\pi}{2} + \lambda)} = -e^{i\Phi_{1/2}(\lambda)}, \quad \Phi_x(\lambda) = -i \log \frac{\text{sh} \frac{\lambda + i\pi x}{p}}{\text{sh} \frac{\lambda - i\pi x}{p}},$$

были вещественны при вещественных  $\lambda_i$ . Состояния (11.46) являются собственными при выполнении *вторичной* системы уравнений Бете. Пусть  $u_k = \frac{i\pi}{2} + \lambda_k$ . Тогда

$$\prod_{i=1}^N \frac{b(u_k - \theta_i)}{a(u_k - \theta_i)} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{a(u_l - u_k) b(u_k - u_l)}{b(u_l - u_k) a(u_k - u_l)} \quad (11.47)$$

или

$$\prod_{i=1}^N \frac{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda_k - \theta_i}{p}}{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} - \lambda_k + \theta_i}{p}} = \prod_{l=1}^n \frac{\text{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l + i\pi}{p}}{\text{sh} \frac{\lambda_k - \lambda_l - i\pi}{p}}. \quad (11.48)$$

При этом собственные значения

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N a(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(u_k - \theta)}{b(u_k - \theta)} + \prod_{i=1}^N b(\theta - \theta_i) \prod_{k=1}^n \frac{a(\theta - u_k)}{b(\theta) - u_k} \quad (11.49)$$

в интересующих нас точках тоже сводятся к первому слагаемому:

$$\Lambda_{\vec{\lambda}}(\theta_i; \vec{\theta}) = \prod_{j=1}^N a(\theta_i - \theta_j) \prod_{k=1}^n \frac{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} - \lambda_k + \theta_i}{p}}{\text{sh} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda_k - \theta_i}{p}}. \quad (11.50)$$

Факторизованный вид собственных значений позволяет логарифмировать первичные уравнения Бете и получить систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} mL \text{sh} \theta_i - \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) - \sum_{k=1}^n \Phi_{1/2}(\theta_i - \lambda_k) &= 2\pi n_i, & i = 1, \dots, N, \\ \sum_{i=1}^N \Phi_{1/2}(\lambda_k - \theta_i) - \sum_{l=1}^n \Phi_1(\lambda_k - \lambda_l) &= 2\pi \nu_k, & k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Здесь  $\phi(\theta) = -i \log a(\theta)$ , а числа  $n_i, \nu_k$  являются целыми или полужелыми в зависимости от четности чисел  $N$  и  $n$ . Система, конечно, сложная, но допускает столь же подробное исследование в термодинамическом пределе, как и обычная система уравнений Бете.

## Лекция 12

### Термодинамический анзац Бете: результаты

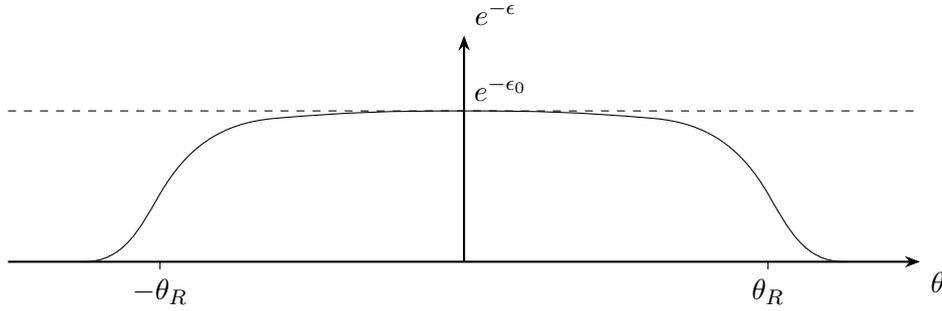
Вернемся к случаю одной частицы и рассмотрим предел высоких температур. Легко заметить, что уравнение (11.25) имеет постоянное решение  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$  при  $R = 0$ :

$$\frac{\epsilon_0}{\log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0})} = \sigma \nu, \quad \nu = \int \frac{d\theta}{2\pi} \phi'(\theta) = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2\pi}. \quad (12.1)$$

Рассмотрим теперь малые, но конечные значения  $R$ . В этом случае имеется значение  $\theta_R \gg 1$  при котором правая часть (11.25) равна единице:

$$\theta_R \simeq \log \frac{2}{mR}. \quad (12.2)$$

Если  $e^{|\theta|} \ll e^{\theta_R}$ , правой частью можно пренебречь и  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$ . Если же, наоборот,  $e^{|\theta|} \gg e^{\theta_R}$ , правая часть велика, так что  $\epsilon(\theta) \simeq mR \operatorname{ch} \theta$  и  $e^{-\epsilon(\theta)} \rightarrow 0$ . Нетривиальным оно становится вблизи двух точек  $\theta_R$  и  $-\theta_R$ , где имеет форму «кинка» для  $e^{-\epsilon}$ :



Но при больших  $\theta_R$  решения вблизи этих двух точек не зависят друг от друга и от  $R$ . Так как  $\epsilon(-\theta) = \epsilon(\theta)$ , рассмотрим решение вблизи  $\theta_R$ . Полагая  $\tilde{\epsilon}(\theta) = \epsilon(\theta_R + \theta)$ , мы получаем для  $\tilde{\epsilon}(\theta)$  приближенное уравнение

$$\tilde{\epsilon}(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}) = e^\theta. \quad (12.3)$$

В формуле (11.27) для скейлинговой функции  $f(r)$  ( $r = mR$ ) в силу четности функции  $\epsilon(\theta)$  можно  $\operatorname{ch} \theta$  заменить на  $e^\theta$ . Тогда вклад левого кинка будет подавлен, и в пределе  $r \rightarrow 0$  скейлинговая функция выражается через правое кинковое решение:

$$f(r) = \sigma r \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}) = \sigma r e^{\theta_R} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}) = 2\sigma \int \frac{d\theta}{2\pi} e^\theta \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}). \quad (12.4)$$

В приближении (12.3) ответ не зависит от  $r$ , поэтому формула (12.4) даст  $f(0)$ . Вычислим эту величину.

Продифференцируем уравнение (12.3) по  $\theta$ :

$$e^\theta = \tilde{\epsilon}'(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta')}).$$

Подставляя это в правую часть (12.4), мы получаем два слагаемых

$$f_1(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{\epsilon}'(\theta) \tilde{l}(\theta) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}), \quad \text{где } \tilde{l}(\theta) = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta)}),$$

и

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi''(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta) \tilde{l}(\theta').$$

Слагаемое  $f_1(0)$  не зависит от вида функции  $\tilde{\epsilon}(\theta)$  и сводится к интегралу от элементарных функций. Слагаемое  $f_2(0)$  в силу нечетности и быстрого убывания  $\phi''(\theta)$  обратилось бы в нуль, если бы интегралы коммутировали. Но эти интегралы не коммутируют, потому что  $\tilde{l}(\theta)$  стремится к конечному значению

$$l_0 = -\sigma \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) = -\nu^{-1} \epsilon_0$$

при  $\theta \rightarrow -\infty$ . Сначала перепишем интеграл в виде

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \tilde{l}(\theta')$$

Интеграл по  $\theta'$  можно взять по частям, поскольку  $\phi'(\theta)$  быстро убывает при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ . Получаем

$$f_2(0) = -2 \int \frac{d\theta}{2\pi} \tilde{l}(\theta) \frac{d}{d\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu) \tilde{l}'(\theta')$$

Постоянное слагаемое  $\pi\nu$  (пропадающее при дифференцировании по  $\theta$ ) добавлено к  $\phi$  для того, чтобы интеграл стремился к нулю при  $\theta \rightarrow -\infty$ . При этом интеграл по  $\theta'$  сходится, поскольку  $\tilde{l}'(\theta)$  стремится к нулю достаточно быстро при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ . После этого можно взять по частям интеграл по  $\theta$ :

$$f_2(0) = \pi\nu \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \tilde{l}'(\theta') + \int \frac{d\theta d\theta'}{2\pi^2} \tilde{l}'(\theta) \phi(\theta - \theta') \tilde{l}'(\theta').$$

В каждом из этих слагаемых интегралы коммутируют в силу быстрого убывания  $\tilde{l}'(\theta)$ . Второе слагаемое равно нулю в силу нечетности функции  $\phi$ , а интеграл в первом слагаемом элементарно берется:

$$f_2(0) = \frac{\nu \tilde{l}_0^2}{2\pi} = -\frac{\epsilon_0 \tilde{l}_0}{2\pi}.$$

Окончательно получаем

$$f(0) = \frac{\sigma}{\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon_0}) + \int_{\epsilon_0}^{\infty} d\epsilon \log(1 - \sigma e^{-\epsilon}) \right). \quad (12.5)$$

Эту функцию принято записывать через так называемый *дилогарифм Роджерса*:

$$\begin{aligned} L(z) &= -\frac{1}{2} \int_0^z du \left( \frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log u}{1-u} \right) = \frac{\log z \log(1-z)}{2} - \int_0^z \frac{du}{u} \log(1-u) \quad (0 \leq z \leq 1), \\ L(-z) &= -L\left(\frac{z}{z+1}\right), \quad L(1/z) = 2L(1) - L(z). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Дилогарифм Роджерса не является продолжением комплексно-аналитической функции на вещественную ось, но является монотонной непрерывной функцией, вещественно-аналитической всюду, кроме точек 0 и 1.

Имеем

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6\sigma}{\pi^2} L(\sigma e^{-\epsilon_0}). \quad (12.7)$$

Надо сказать, что дилогарифм Роджерса встречается во множестве задач, связанных с термодинамическим анзацем Бете, и потому хорошо изучен. Найдено множество его специальных значений. Нам будут важны следующие равенства:

$$L(0) = 0, \quad L(1) = \frac{\pi^2}{6} = L(z) + L(1-z), \quad L\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{15}. \quad (12.8)$$

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с тривиальных. Для свободной частицы  $S(\theta) = 1$ ,  $\nu = 0$  и  $\epsilon_0 = 0$ . Поэтому имеем

$$c^{FB} = c_{\text{eff}}^{FB} = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1$$

в бозонном случае и

$$c^{FF} = c_{\text{eff}}^{FF} = -\frac{6}{\pi^2} L(-1) = \frac{6}{\pi^2} L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

в фермионном случае (модель Изинга в нулевом магнитном поле).

Теперь перейдем к нетривиальным случаям. Рассмотрим матрицу рассеяния бризера в модели синус-Гордона:

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{th} \frac{1}{2}(\theta + i\pi p)}{\text{th} \frac{1}{2}(\theta - i\pi p)}. \quad (12.9)$$

Начнем со случая  $-1 < p < 0$ , который соответствует модели sh-Гордона. Это «фермионная»  $S$ -матрица для бозонов:  $S(0) = -1$ . В этой модели имеется всего одна частица, так что можно прямо применять полученные формулы. В этом случае  $\nu = 1$  и уравнение (12.1) не имеет решения. С помощью предельного перехода

$$\epsilon_0 + \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \equiv \log(e^{\epsilon_0} + 1) = \delta \rightarrow +0$$

мы находим  $e^{\epsilon_0} = +0$ . Отсюда имеем

$$c_{\text{eff}}^{ShG} = -\frac{6}{\pi^2} L(-\infty) = \frac{6}{\pi^2} L(1) = 1.$$

Итак, модель sh-Гордона на малых масштабах ведет себя как модель свободного безмассового бозона.

Теперь рассмотрим матрицу (12.9) при  $0 < p < 1$ . В отличие от предыдущего случая, здесь  $\nu = -1$  и уравнение (12.1) имеет решение

$$e^{-\epsilon_0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Отсюда получаем эффективный центральный заряд

$$c_{\text{eff}}^{LY} = \frac{2}{5}. \quad (12.10)$$

Очевидно, эта величина имеет смысл только тогда, когда спектр состоит из одной этой частицы. Спектр модели синус-Гордона содержит также солитоны и высшие бризеры (на последнее указывает полюс в  $S_{11}(\theta)$ ). Если учесть все эти частицы, окажется, что эффективный центральный заряд модели синус-Гордона равен единице. То есть, опять же, модель синус-Гордона на малых масштабах ведет себя как свободный безмассовый бозон. Ответ (12.10) верен для случая  $p = 2/3$ , когда мы отождествляем связанное состояние с самой частицей 1. Этот ответ согласуется с гипотезой о том, что такая теория является возмущением теории Ли–Янга с центральным зарядом  $c = -22/5$  и  $\Delta_{\min} = -1/5$ .

Оценим число  $N$  частиц в системе. Согласно формуле (11.30), имеем

$$\frac{N}{L} \simeq -2 \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{2}{mR} \log(1 + e^{-\epsilon_0}) \sim R^{-1}.$$

Таким образом, среднее расстояние между частицами по порядку величины равно  $R \ll \xi$  и предположение (11.2) термодинамического анзаца Бете не выполнено. Возникает вопрос: почему все же термодинамический анзац Бете работает? Ответ на этот вопрос дан в работе Классена и Мельцера[18]. Они обратили внимание на то, что, как показали Дашен, Ма и Бернштейн в 1969 году [19], вириальные коэффициенты газа полностью определяются  $S$ -матрицей составляющих его частиц. Точные  $S$ -матрицы дают точные вириальные коэффициенты и, коль скоро газ не испытывает фазового перехода при повышении температуры, его статистическая сумма является аналитическим продолжением статистической суммы из области  $R \gg \xi$ . Это значит, что условием применимости термодинамического анзаца Бете является отсутствие фазового перехода для системы частиц, и это условие выполняется в одном пространственном измерении.

Рассмотрим теперь случай нескольких частиц с диагональной матрицей рассеяния. Уравнение (11.25) в пределе  $R \rightarrow 0$  имеет вид

$$\epsilon_{0a} = \sum_b \nu_{(ab)} \sigma_b \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_{0b}}), \quad \nu_{(ab)} = \frac{1}{2}(\nu_{ab} + \nu_{ba}), \quad \nu_{ab} = \frac{\phi_{ab}(+\infty)}{\pi}. \quad (12.11)$$

Сумма берется по всем частицам в спектре. Формула для значения в нуле скейлинговой функции  $f(m_{\min} R) = R \mathcal{E}_0(R)$  и, следовательно, эффективного центрального заряда имеет почти тот же вид:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0) = \frac{6}{\pi^2} \sum_a \sigma_a L(\sigma_a e^{-\epsilon_{0a}}). \quad (12.12)$$

Рассмотрим теорию рассеяния бризеров в модели синус-Гордона. Как мы помним, эта теория становится замкнутой в точках  $p = 2/(2N - 1)$  после отождествления  $n$ -го и  $(2N - 1 - n)$ -го бризеров. Система имеет фермионный характер ( $\sigma_n = -1$ ), а константы  $\nu_{nn'}$  даются формулами

$$\nu_{nn'} = \delta_{nn'} - 2 \min(n, n'). \quad (12.13)$$

Систему уравнений (12.11) удобно записать в переменных  $y_n = e^{-\epsilon_0 n}$ :

$$y_n(1 + y_n)^{2n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (1 + y_m)^{2m} \prod_{m=n+1}^{N-1} (1 + y_m)^{2n} = 1, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (12.14)$$

От произведений по  $m$  можно избавиться, переписав эту систему в виде

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq N-1), \quad y_0^{-1} = 0, \quad y_N = y_{N-1}. \quad (12.15)$$

Полученная  $Y$ -система не эквивалентна системе (12.14), но, во-первых, любое решение системы (12.14) удовлетворяет системе (12.15), а во-вторых, единственное положительное ( $\forall n : y_n > 0$ ) решение  $Y$ -системы совпадает с единственным положительным решением системы (12.14).

Для дилогарифма Роджерса есть много теорем о его значениях на решениях  $Y$ -систем.<sup>1</sup> В частности, система

$$y_n^{-2} = (1 + y_{n-1}^{-1})(1 + y_{n+1}^{-1}) \quad (1 \leq n \leq l-1), \quad y_0^{-1} = y_l^{-1} = 0, \quad (12.16)$$

имеет единственное положительное решение, и на нем

$$-\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{l-1} L(-y_n) = 2 - \frac{6}{l+2} \quad (12.17)$$

Если мы заметим, что при  $l = 2N - 1$  решение системы (12.16) является симметричным ( $y_{l-n} = y_n$ ), то для  $0 \leq n \leq N$  оно решает систему (12.15), а величина

$$c_{\text{eff}}^N = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N-1} L(-y_n) = 1 - \frac{3}{2N+1} \quad (12.18)$$

совпадает с эффективным центральным зарядом «ленточных» моделей  $M(2, 2N+1)$ .

Возьмемся к задаче об одной частице и изучим следующие члены в разложении  $f(r)$ . В первом приближении надо учесть влияние второй экспоненты на кинк  $\tilde{\epsilon}(\theta)$ . Добавим вклад второй экспоненты в правую часть (12.3):

$$\tilde{\epsilon}(\theta) + \delta\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log(1 - \sigma e^{-\tilde{\epsilon}(\theta') - \delta\epsilon(\theta')}) = e^\theta + \left(\frac{mR}{2}\right)^2 e^{-\theta}.$$

В силу малости  $(mR)^2$  мы можем считать этот вклад малым при  $e^\theta \gg e^{-\theta R}$ . Раскладывая по  $\delta\epsilon$ , получаем

$$\delta\epsilon(\theta) = \left(\frac{mR}{2}\right)^2 \psi_-(\theta), \quad (12.19)$$

где  $\psi_-(\theta)$  является решением линейной задачи. Нам понадобится еще одна функция  $\psi_+(\theta)$ , поэтому определим эти функции вместе:

$$\psi_\pm(\theta) - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \frac{\psi_\pm(\theta')}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma} = e^{\pm\theta} \quad (12.20)$$

Заметим, что уравнение для  $\psi_+$  получается дифференцированием уравнения (12.3) по  $\theta$ , поэтому

$$\psi_+(\theta) = \tilde{\epsilon}'(\theta). \quad (12.21)$$

<sup>1</sup>Обзор этих теорем можно найти в работе [20].

Уравнение для  $\psi_-$  не удается решить аналитически. Но нужную поправку для  $f(r)$  оказывается возможным выразить через  $\psi_+$ . Подставим решение  $\tilde{\epsilon} + \delta\epsilon$  вместо  $\tilde{\epsilon}$  в правую часть (12.4) и получим<sup>2</sup>

$$f(r) = f(0) + \frac{r^2}{2} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^\theta \psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma}.$$

Теперь в правой части выразим  $e^\theta$  через  $\psi_+$ :

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\psi_+(\theta)\psi_-(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} - \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{\phi'(\theta - \theta')\psi_+(\theta)\psi_-(\theta')}{(e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma)(e^{\tilde{\epsilon}(\theta')} - \sigma)}.$$

Интегралы во втором слагаемом коммутируют. Переобозначив в нем  $\theta \leftrightarrow \theta'$ , мы видим, что множители, содержащие  $\psi_-$  собираются в  $e^{-\theta}$ . Используя затем (12.21), получим

$$f''(0) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{-\theta}\psi_+(\theta)}{e^{\tilde{\epsilon}(\theta)} - \sigma} = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta}\tilde{l}'(\theta). \quad (12.22)$$

Мы видим, что интеграл определяется формой кинка на его левом крае, где  $e^{-\theta}$  больше. Его нетрудно вычислить, если фаза  $S$ -матрицы спадает как

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) = \pi\nu + Ae^{-\theta} + o(e^{-\theta}), \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (12.23)$$

В этом случае при  $\theta \rightarrow -\infty$  имеем

$$e^{-\theta} \int \frac{d\theta'}{2\pi} (\phi(\theta - \theta') + \pi\nu)\tilde{l}'(\theta') = -A \int \frac{d\theta'}{2\pi} e^{-\theta'}\tilde{l}'(\theta') = Af''(0).$$

С другой стороны разность  $\tilde{\epsilon}(\theta) - \epsilon_0 = o(e^\theta)$  при  $\theta \rightarrow -\infty$ . Это немедленно следует из требования сходимости интеграла в левой части уравнения (12.3). Поэтому, взяв интеграл в левой части по частям, получим для нее

$$e^{-\theta} \left( \epsilon_0 + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta')\tilde{l}'(\theta') \right) \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = e^{-\theta} \left( \tilde{\epsilon}(\theta) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta')\tilde{l}'(\theta') \right) \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = 1.$$

Следовательно,

$$f''(0) = A^{-1} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left( (\phi(\theta) - \pi\nu)e^\theta \right)^{-1}. \quad (12.24)$$

Отсюда мы можем получить плотность энергии в бесконечном объеме:

$$\varepsilon_\infty = -\frac{f''(0)m^2}{2}. \quad (12.25)$$

Для  $S$ -матрицы (12.9) имеем  $A = 4 \sin \pi p$ . Следовательно, для модели sh-Гордона ( $-1 < p < 0$ )

$$\varepsilon_\infty = \frac{m^2}{8 \sin \pi(-p)}, \quad (12.26)$$

а для модели Ли—Янга

$$\varepsilon_\infty = -\frac{m^2}{4\sqrt{3}}. \quad (12.27)$$

Более тщательный анализ показывает, что выражение  $f(r) - f(0) - \frac{1}{2}f''(0)r^2$  действительно раскладывается по целым степеням  $r^\alpha$  с некоторым показателем  $\alpha > 0$ , что позволяет найти конформную размерность возмущающего оператора  $\Delta_p = 1 - \alpha/4$  для унитарной модели или  $1 - \alpha/2$  для неунитарной. Вычисление коэффициента при первой поправке позволяет связать константу связи  $\lambda$  с массой частицы  $m$ .

<sup>2</sup>Если мы посмотрим на формулу (11.8), мы увидим, что поправки, связанные с возмущением, могут быть больше  $r^2$  при малых  $r$ , если  $1 - \Delta_p$  достаточно мало. Однако они (кроме очень специальных случаев) имеют другую аналитическую зависимость от  $R$ , поэтому здесь мы будем эти поправки игнорировать.

## Задачи

1. Выведите (12.11) и (12.12).
2. Покажите, что для  $S$ -матриц бризеров в модели синус-Гордона при  $0 < p < 1$  набег фазы дается формулой (12.13). Выведите (12.14), (12.15).
3. Покажите, что для моделей, описываемых бризерным сектором модели синус-Гордона в точках  $p = 2/(2N - 1)$  с отождествлением частиц  $n \sim 2N - 1 - n$  величина  $\epsilon_\infty$  дается формулой (12.26) с параметром  $m = m_1$ .
4. Покажите, что при больших значениях  $\theta$  функция  $\epsilon(\theta)$  имеет асимптотику вида

$$\epsilon(\theta) = \frac{mR}{2} e^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(mR) (mR e^\theta)^{-n},$$

где функции  $s_n(r)$  конечны при  $r \rightarrow 0$ . Выразите  $s_1(r)$  через  $f(r)$ . Покажите, что остальные коэффициенты  $s_n(r)$  можно представить в виде

$$s_n(mR) = -n A_n \sigma(mR)^n \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{n\theta} \log(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)}), \quad \phi(\theta) = \pi\nu + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\theta},$$

причем  $s_n(0) \neq 0$ , если  $A_n \neq 0$ . Оцените значения  $s_n(0)$  при больших  $n$ . Найдите значения  $n$ , при которых  $A_n \neq 0$ , для модели sh-Гордона и модели Ли–Янга.

**5\***. Рассмотрите модель с матрицей рассеяния фундаментальной частицы

$$S_{11}(\theta) = S_{1\bar{1}}(i\pi - \theta) = \frac{\text{sh} \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{2\pi i}{N} \right)}{\text{sh} \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{2\pi i}{N} \right)}, \quad (12.28)$$

где  $N \geq 2$  — целое число. Эта  $S$ -матрица имеет полюс, порождающий серию связанных состояний  $n = 2, 3, \dots, N$  (см. задачу 10.5). При отождествлении  $\bar{n} = N - n$ , спектр замыкается ( $\mathbb{Z}_N$ -симметричная модель Изинга). Найдите параметры  $\nu_{nn'}$  для этой теории и покажите, что эффективный центральный заряд совпадает с центральным зарядом теории  $\mathbb{Z}_N$ -парафермионов:

$$c = 2 - \frac{6}{N + 2}. \quad (12.29)$$

Найдите также значения  $\epsilon_\infty$ .

## Семинар 12

### Вычисление вакуумной плотности энергии $\epsilon_\infty$ в системе из нескольких частиц

Рассмотрим модель с двумя частицами с массами  $m_1$  и  $m_2 = \kappa m_1 > m_1$ . Вторая частица является связанным состоянием двух первых в полюсе  $S$ -матрицы  $\theta = iu$ , так что  $\kappa = 2 \cos \frac{\pi u}{2}$ . Матрицы рассеяния диагональны. Задача состоит в том, чтобы выразить  $\epsilon_\infty$  через асимптотики фаз  $\phi_{ab}(\theta)$  и массы  $m_a$ . Получим общее выражение для  $f''(0)$  через  $\tilde{\epsilon}_a(\theta)$ :

$$f''(0) = \sum_a \kappa_a I_a, \quad \text{где } I_a = - \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{-\theta} \tilde{l}'_a(\theta).$$

Здесь предполагается  $\kappa_1 = 1$ .

Положим

$$\phi_{ab}(\theta) = \pi\nu_{ab} + A_{ab} e^{-\theta} + o(e^{-\theta}) \text{ при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Тогда величины  $I_a$  являются решениями уравнения

$$\sum_b A_{ba} I_b = \kappa_a.$$

Теперь нужно проанализировать вид асимптотик  $S_{ab}(\theta)$ , исходя из условий задачи, и найти  $f''(0)$ . Получим

$$A = A_{11} \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2 \end{pmatrix} \text{ или } A_{ab} = A_{11} \kappa_a \kappa_b \Rightarrow f''(0) = A_{11}^{-1}, \quad \epsilon_\infty = -\frac{m_1^2}{2A_{11}}.$$

## Лекция 13

### Конформная теория возмущений

Снова рассмотрим возмущенную конформную теорию поля с эвклидовым действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (13.1)$$

на плоскости. Это действие означает, что корреляционные функции определяются равенством

$$\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) \rangle = \frac{\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_p} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_p} \rangle_0}. \quad (13.2)$$

Далее, согласно общим правилам теории возмущений следует разложить экспоненту в ряд и вычислять корреляционные функции порядок за порядком. Давайте рассмотрим этот процесс более подробно.

Начнем с конформной теории поля. Пусть  $\mathcal{O}_I(x)$  — некоторый базис набора взаимно-локальных операторов в конформной теории поля, обладающий следующими свойствами. Каждый оператор  $\mathcal{O}_I(x)$  имеет определенную конформную размерность  $(\Delta_I, \bar{\Delta}_I)$ . Имеется единственный единичный оператор  $\mathcal{O}_0(x) = 1$  конформной размерности  $(0, 0)$  и со средним  $\langle 1 \rangle_0 = 1$ .<sup>1</sup> Средние значения остальных операторов равны нулю:  $\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = 0$ ,  $I \neq 0$ . Базис замкнут относительно операторных разложений:

$$\mathcal{O}_I(x) \mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}_{IJ}^K(x) \mathcal{O}_K(0), \quad \mathcal{C}_{IJ}^K(x) = \mathcal{C}_{IJ}^K z^{\Delta_K - \Delta_I - \Delta_J} \bar{z}^{\bar{\Delta}_K - \bar{\Delta}_I - \bar{\Delta}_J}. \quad (13.3)$$

Функции  $\mathcal{C}_{IJ}^K(x)$  называются *структурными функциями* операторной алгебры. В конформной теории структурные функции зависят от координат степенным образом, и существенными параметрами являются *структурные константы*  $\mathcal{C}_{IJ}^K$ . Последовательно применяя операторные разложения, можно свести корреляционные функции к одночастичным, то есть к вакуумным средним. Поскольку только у единичного оператора вакуумное среднее отлично от нуля, имеем

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle_0 = \sum_{J_1, \dots, J_{N-2}} \mathcal{C}_{I_N J_{N-2}}^0(x_N - x_1) \cdots \mathcal{C}_{I_3 J_1}^{J_2}(x_3 - x_1) \mathcal{C}_{I_2 I_1}^{J_1}(x_2 - x_1) \quad (13.4)$$

при условии

$$|x_N - x_1| > \cdots > |x_3 - x_1| > |x_2 - x_1|. \quad (13.5)$$

Давайте ограничимся *квазипримарными* операторами, то есть операторами, удовлетворяющими условию

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{O}_I)(x) = (\bar{\mathcal{L}}_1 \mathcal{O}_I)(x) = 0. \quad (13.6)$$

Эти операторы являются векторами старших весов представлений малой конформной алгебры  $sl(2)$ , порожденной операторами  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{-1}$ . Иными словами, эти операторы не получаются действием операторов  $\mathcal{L}_{-1} = \partial$ ,  $\bar{\mathcal{L}}_{-1} = \bar{\partial}$  из других операторов. Зная структурные константы квазипримарных операторов, можно уже найти структурные константы для всех операторов.<sup>2</sup> Для квазипримарных операторов структурные константы  $G_{IJ} = \mathcal{C}_{IJ}^0$  равны нулю, если  $\Delta_I \neq \Delta_J$  или  $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$ , так что матрица  $G_{IJ}$  на квазипримарных операторах имеет блочно-диагональную структуру. Нам понадобится матрица  $(G^{-1})^t$ , матричные элементы которой мы будем обозначать  $G^{IJ}$ . Введем операторы

$$\mathcal{O}^I(x) = \sum_J' G^{IJ} \mathcal{O}_J(x), \quad (13.7)$$

где сумма со штрихом обозначает суммирование только по квазипримарным операторам. В силу блочной диагональности матрицы  $G$  конформная размерность оператора  $\mathcal{O}^I$  совпадает с  $\Delta_I$ . Для парной корреляционной функции имеем

$$\langle \mathcal{O}^I(x) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta_J^I z^{-2\Delta_I} \bar{z}^{-2\bar{\Delta}_I}. \quad (13.8)$$

<sup>1</sup>Тем самым мы исключаем из рассмотрения так называемые логарифмические конформные теории поля.

<sup>2</sup>Строго говоря, ниже мы рассматриваем факторпространство пространства локальных операторов по действию оператора  $\mathcal{L}_{-1}$ . Поэтому операторные равенства, которые мы будем писать, верны с точностью до добавления пространственно-временных производных в правых частях операторных разложений. Ввиду трансляционной инвариантности эти производные дают нулевой вклад в корреляционные функции.

Теперь определим оператор в бесконечно удаленной точке:

$$\mathcal{O}^I(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} z^{2\Delta_I} \bar{z}^{2\bar{\Delta}_I} \mathcal{O}^I(x). \quad (13.9)$$

Тогда, очевидно,

$$\langle \mathcal{O}^I(\infty) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta_J^I. \quad (13.10)$$

Казалось бы, в возмущенном случае можно было бы подставить разложение (13.3) в (13.2) и свети корреляционную функцию к одночастичным средним  $\langle \mathcal{O}_K \rangle$ . Однако это *не так*. Дело в том, что в среднем (13.2) содержатся интегралы от операторов  $\Phi_p$ , и эти операторы тоже надо включать в упорядочение (13.5) и, соответственно, в разложение (13.4).

Проблема теории возмущений состоит в том, что буквальное применение формулы (13.2) неизбежно приводит к инфракрасным расходимостям. Расходимости возникают из-за того, что конформная теория поля перестает работать на больших (порядка корреляционной длины) масштабах, а интегралы вида  $\int d^2x \Phi_p$  следует брать по всему пространству. Следуя работе Ал. Замолотчикова [21], мы научимся вычислять по теории возмущений коэффициенты операторных разложений, то есть структурные функции. Мы увидим, что в структурных функциях инфракрасные расходимости сокращаются. И уже с данными структурными функциями можно получить корреляционные функции на масштабах много меньше корреляционной длины в конечном виде:

$$\langle O_{I_N}(x_N) \cdots O_{I_1}(x_1) \rangle = \sum_{J_1, \dots, J_{N-1}} C_{I_N J_{N-2}}^{J_{N-1}}(x_N - x_1) \cdots C_{I_3 J_1}^{J_2}(x_3 - x_1) C_{I_2 I_1}^{J_1}(x_2 - x_1) \langle O_{J_{N-1}} \rangle. \quad (13.11)$$

О разнице между операторами  $O_I(x)$  возмущенной теории и операторами  $\mathcal{O}_I(x)$  конформной теории будет сказано ниже.

Если выделить из структурной функции множитель, который зависит от координат так же как в конформной теории поля, оставшийся безразмерный множитель должен зависеть от константы связи и расстояния через безразмерный параметр:

$$C_{IJ}^K(x) = z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \tilde{C}_{IJ}^K(t), \quad t = \lambda |x|^{2-2\Delta_p}, \quad d_{K,IJ} = \Delta_K - \Delta_I - \Delta_J. \quad (13.12)$$

Так как теория возмущений представляет собой разложение по целым степеням  $\lambda$ , функции  $\tilde{C}_{IJ}^K(t)$  являются целыми функциями переменной  $t$ , причем  $\tilde{C}_{IJ}^K(0) = \mathcal{C}_{IJ}^K$ . Вакуумные средние, также входящие в формулу (13.11), ведут себя иначе. Очевидно, что вакуумные средние не равны нулю только для бесспиновых операторов, не являющихся пространственными производными других локальных операторов, то есть квазипримарных бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle O_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_p}}, \quad \text{если } \bar{\Delta}_I = \Delta_I, \quad (13.13)$$

где  $G_I$  — безразмерная константа. Вакуумные средние не являются целыми функциями параметра  $\lambda$ , и это свидетельствует о том, что их нельзя получить по теории возмущений. Мы обсудим два примера точных вакуумных средних, где эти средние можно получить известными нам методами. В общем случае вакуумные средние получают на основе эвристических соображений [22, 23].

Итак, корреляционная функция даже на малых масштабах содержит в себе как пертурбативные, так и непертурбативные данные. Но этим сложности не ограничиваются. Дело в том, что теория возмущений для структурных функций может содержать *ультрафиолетовые* расходимости. Эти расходимости связаны с тем, что операторные разложения данного оператора с оператором  $\Phi_p$  могут содержать члены со степенями  $|z|$  меньше  $-2$ . Надо учитывать, что в отличие от конформной теории операторы в возмущенной теории определены неоднозначно. Действительно, добавление к оператору  $\mathcal{O}_I$  операторов меньшей конформной размерности не меняет его поведения в конформной точке. Оказывается, добавление подходящих операторов низших размерностей (с бесконечными коэффициентами) сокращает ультрафиолетовые расходимости. Перенормированные таким образом операторы мы и будем обозначать  $O_I$ .

Наша первая задача будет состоять в том, чтобы вычислить матрицу

$$\mathcal{D}_I^J = \langle \mathcal{O}^J(\infty) \mathcal{O}_I(0) \rangle \quad (13.14)$$

по теории возмущений при ненулевых значениях константы связи  $\lambda$ . Интегралы теории возмущений могут расходиться на больших и малых масштабах, поэтому будем изучать функцию

$$\mathcal{D}_I^J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{r_0 \leq |y_i| \leq R} d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \langle \mathcal{O}^J(\infty) \Phi_p(y_n) \cdots \Phi_p(y_1) \mathcal{O}_I(0) \rangle_0. \quad (13.15)$$

Чтобы интеграл мог быть ненулевым, спины операторов  $\mathcal{O}^J$  и  $\mathcal{O}_I$  должны совпадать:<sup>3</sup>

$$\Delta_J - \bar{\Delta}_J = \Delta_I - \bar{\Delta}_I. \quad (13.16)$$

Давайте рассмотрим слагаемое с  $n = 1$ , то есть первый порядок теории возмущений. Под интегралом мы имеем произведение

$$\Phi_p(y_1) \mathcal{O}_I(0) = \mathcal{C}_{pI}^J \mathcal{O}_J(0) |w_1|^{2\Delta_J - 2\Delta_p - 2\Delta_I} + \dots, \quad (13.17)$$

где точки обозначают члены, не дающие вклада в интеграл. То есть

$$\mathcal{D}_I^{(1)J} = -\lambda \mathcal{C}_{pI}^J \int d^2 y_1 |y_1|^{2(\Delta_J - \Delta_p - \Delta_I)} = -\pi \lambda \mathcal{C}_{pI}^J \times \begin{cases} (R^{2d_{JI}} - r_0^{2d_{JI}})/d_{JI}, & \text{если } d_{JI} \neq 0, \\ \log(R^2/r_0^2), & \text{если } d_{JI} = 0, \end{cases}$$

где

$$d_{JI} = d_{JI}^{(1)}, \quad d_{JI}^{(n)} = \Delta_J - \Delta_I + n(1 - \Delta_p). \quad (13.18)$$

Интеграл ультрафиолетово расходится, если  $d_{JI} \leq 0$ , то есть

$$\Delta_J \leq \Delta_I - (1 - \Delta_p). \quad (13.19)$$

Чтобы получить конечное выражение, надо вычесть из оператора  $\mathcal{O}_I$  оператор  $\mathcal{O}_J$  с подходящим бесконечным коэффициентом:

$$O_I(x) = \mathcal{O}_I(x) - \sum_{J, d_{JI} < 0} \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{pI}^J}{d_{JI}} \mathcal{O}_J(x) r_0^{2d_{JI}} - \sum_{J, d_{JI} = 0} \pi \lambda \mathcal{C}_{pI}^J \mathcal{O}_J(x) \log r_0^2 + O(\lambda^2). \quad (13.20)$$

Тогда вклад нулевого порядка по теории возмущений сократит ультрафиолетовую расходимость в первом порядке и при условии (13.19) матрица

$$D_I^J(R) = \langle \mathcal{O}^J(\infty) O_I(0) \rangle = \mathcal{D}_I^J - \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{pI}^J}{d_{JI}} r_0^{2d_{JI}} + O(\lambda^2) = \delta_I^J - \frac{\pi \lambda \mathcal{C}_{pI}^J}{d_{JI}} R^{2d_{JI}} + O(\lambda^2) \quad (13.21)$$

не будет зависеть от  $r_0$ . Эта формула написана для случая  $d_{JI} \neq 0$ . Для  $d_{JI} = 0$  степенные функции, деленные на  $d_{JI}$ , заменяются логарифмами.

В общем случае порядка  $n$  теории возмущений условие ультрафиолетовой расходимости имеет вид

$$\Delta_J \leq \Delta_I - n(1 - \Delta_p). \quad (13.22)$$

Поэтому ультрафиолетовая перенормировка оператора  $\mathcal{O}_I$  имеет вид

$$O_I(x) = \sum_J U_I^J(r_0) \mathcal{O}_J(x), \quad U_I^J(r_0) = \delta_I^J + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \times \begin{cases} 0, & d_{JI}^{(n)} > 0, \\ U_I^{(n)J} r_0^{2d_{JI}^{(n)}}, & d_{JI}^{(n)} < 0, \\ U_I^{(n)J} \log r_0, & d_{JI}^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (13.23)$$

с подходящими коэффициентами  $U_I^{(n)J}$ . Соответственно, матрица

$$D_I^J(R) = \langle \mathcal{O}^J(x) O_I(0) \rangle = \sum_K U_I^K(r_0) \mathcal{D}_K^J(R, r_0) \quad (13.24)$$

<sup>3</sup>Здесь существенно, что операторы находятся на бесконечном расстоянии друг от друга. В возмущенной теории корреляционные функции операторов с разными спинами могут быть не равны нулю. Однако в пределе (13.9) все члены разложения (13.15) для таких операторов обратятся в нуль.

не зависит от  $r_0$ , но в общем случае содержит инфракрасную расходимость, то есть не имеет конечного предела при  $R \rightarrow \infty$ .

Тонкий момент возникает, если имеется оператор  $\mathcal{O}_J$ , удовлетворяющий *условию резонанса*

$$\Delta_J = \Delta_I - n(1 - \Delta_p). \quad (13.25)$$

В этом случае, как мы видели, ультрафиолетово-расходящаяся часть пропорциональна  $\log r_0$ . Но это значит, что перенормировка неоднозначна: она зависит от единиц измерения длины. Иными словами мы можем обезразмерить выражение под логарифмом произвольной константой  $\mu$  размерности массы:

$$O_I = \mathcal{O}_I + 2C\mathcal{O}_J \log \mu r_0 + (\text{другие контрчлены}), \quad (13.26)$$

где  $C$  — некоторая константа. Перенормировка зависит от параметра  $\mu$ .

Если в теории есть непрерывный параметр, от которого зависят размерности, резонанс может приводить к еще одному эффекту. В точке резонанса оператора  $O_I$  с оператором  $\mathcal{O}_J$ , корреляционные функции оператора  $O_I$  имеют полюс. Выберем параметр так, чтобы в окрестности резонансной точки он совпадал с  $d_{JI}^{(n)}$ . Тогда для любой корреляционной функции оператора  $O_I$  в малой окрестности точки  $d_{JI}^{(n)} = 0$  имеем

$$\langle \mathcal{O}_I(x)X \rangle = -\frac{C(r_0^{2d_{JI}^{(n)}} - r_1^{2d_{JI}^{(n)}})}{2d_{JI}^{(n)}} \langle \mathcal{O}_J(x)X \rangle, \quad (13.27)$$

где  $X$  — произведение каких-то операторов, а  $r_1$  — величина порядка расстояния до ближайшего оператора, входящего в это произведение. Вне точки  $d_{JI}^{(n)} = 0$  перенормированный оператор имеет вид  $O_I = \mathcal{O}_I + Cr_0^{2d_{JI}^{(n)}} \mathcal{O}_J / 2d_{JI}^{(n)}$ . Следовательно,

$$\text{Res}_{d_{JI}^{(n)}=0} \langle O_I(x)X \rangle = C \langle O_J(x)X \rangle. \quad (13.28)$$

Перенормированный оператор  $O_I$  непосредственно в точке  $d_{JI}^{(n)} = 0$  можно определить вычитанием этого полюсного члена:

$$\langle O_I(x)X \rangle_{d_{JI}^{(n)}=0} = \lim_{d_{JI}^{(n)} \rightarrow 0} \left( \langle O_I(x)X \rangle - \frac{C\mu^{-2d_{JI}^{(n)}}}{2d_{JI}^{(n)}} \langle O_J(x)X \rangle \right). \quad (13.29)$$

Множитель, содержащий константу  $\mu$  размерности массы нужен, что согласовать размерности двух слагаемых. Замена  $\mu \rightarrow \mu' = \mu e^\alpha$  переопределяет перенормированный оператор:  $O'_I = O_I + 2\alpha C O_J$ . Ясно, что новый оператор ничем не хуже старого в качестве перенормированной версии оператора  $\mathcal{O}_I$ . Эта неоднозначность в точности соответствует неоднозначности параметра  $\mu$  в конструкции (13.26). Конструкция (13.29) полностью эквивалентна конструкции (13.26) при условии, что имеется подходящий непрерывный параметр. Важная роль резонансов состоит в том, что они являются точным пертурбативным эффектом, и резонансные полюсы могут быть использованы в качестве условий бутстрапа при поиске решений эвристическими методами.

Теперь рассмотрим трехточечную функцию

$$\begin{aligned} G_{JI}^K(x, R) &= \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_J(x) O_I(0) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{|y_i| \leq R} d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \langle \mathcal{O}^K(\infty) \Phi_p(y_n) \cdots \Phi_p(y_1) O_J(x) O_I(0) \rangle_0. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Она выражается через структурную константу и двухточечную функцию:

$$G_{JI}^K(x, R) = \sum_L C_{JI}^L(x) \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_L(0) \rangle = \sum_L' C_{JI}^L(x) D_L^K(R). \quad (13.31)$$

Во втором равенстве суммирование по всем операторам заменено на суммирование по квазипримарным оператором, потому что второй множитель под знаком суммы равен нулю, если  $O_L$  представляет

собой пространственно-временную производную. Таким образом, структурные функции для квазипримарных операторов находятся как

$$C_{JI}^K(x) = \sum'_L (D^{-1})_L^K(R) G_{JI}^L(x, R). \quad (13.32)$$

Важный факт состоит в том, что структурные функции уже не содержат инфракрасных расходимостей. Проверим это в первом порядке по теории возмущений. Имеем

$$G_{JI}^K(x, R) = \mathcal{C}_{JI}^K(x) - \lambda \int_{|x| < |y_1| < R} d^2 y_1 \sum'_L \mathcal{C}_{pL}^K \mathcal{C}_{JI}^L(x) |y_1|^{2d_{KL}-2} - \lambda \int_{|y_1| < |x|} d^2 y_1 \sum'_L \mathcal{C}_{JL}^K(x) \mathcal{C}_{pI}^L |y_1|^{2d_{LI}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2). \quad (13.33)$$

Контрчлены сократят ультрафиолетовую расходимость во втором и третьем слагаемом, а инфракрасно-расходящиеся вклады могут быть только в втором слагаемом:

$$G_{JI}^K(x, R) = \mathcal{C}_{JI}^K(x) - \pi \lambda \sum'_L \left( \frac{\mathcal{C}_{pL}^K \mathcal{C}_{JI}^L(x)}{d_{KL}} (R^{2d_{KL}} - |x|^{2d_{KL}}) + \frac{\mathcal{C}_{JL}^K(x) \mathcal{C}_{pI}^L}{d_{LI}} |x|^{2d_{LI}} \right) + O(\lambda^2).$$

Подставляя это и (13.21) в (13.32), видим, что слагаемое первого порядка в  $D^{-1}$  в точности сокращает слагаемое с  $R$  в  $G$ . Получаем

$$C_{JI}^K(x) = \mathcal{C}_{JI}^K(x) + \pi \lambda \sum'_L \left( \frac{\mathcal{C}_{pL}^K \mathcal{C}_{JI}^L(x)}{d_{KL}} |x|^{2d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{JL}^K(x) \mathcal{C}_{pI}^L}{d_{LI}} |x|^{2d_{LI}} \right) + O(\lambda^2) \\ = z^{d_{K,JI}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,JI}} \left( \mathcal{C}_{JI}^K + \pi t \sum'_L \left( \frac{\mathcal{C}_{pL}^K \mathcal{C}_{JI}^L}{d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{JL}^K \mathcal{C}_{pI}^L}{d_{LI}} \right) + O(t^2) \right), \quad t = \lambda |x|^{2-2\Delta_p}. \quad (13.34)$$

Здесь мы неявно предполагали, что оператор  $\mathcal{O}_J$  не требует ультрафиолетовой перенормировки ( $\mathcal{O}_J = O_J$ ). В случае, если он требует перенормировки, суммы по  $L$  расходятся, за исключением как раз слагаемых, содержащих  $R^{2d_{KL}}$ , поскольку они экспоненциально убывают с ростом  $\Delta_L$ . Можно показать, что расходимость сокращается перенормировкой оператора  $\mathcal{O}_J$  (см. задачу 1).

Итак, мы видим, что структурные функции допускают сходящееся разложение по теории возмущений для перенормированных операторов. Перейдем ко второй составляющей формулы (13.11) — вакуумным средним. Прежде всего, нужно определить эту величину. Пусть  $\mathcal{O}_I(x)$  — квазипримарный оператор нулевого спина. Рассмотрим корреляционную функцию  $\langle O^I(x) O_I(0) \rangle$ . На малых масштабах мы можем выделить конформный вклад:

$$\langle O^I(x) O_I(0) \rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \dots, \quad |x| \rightarrow 0. \quad (13.35)$$

То, что мы обозначили точками есть вклад возмущения. Он мал при  $|x| \rightarrow 0$  в унитарной теории, но в неунитарной (как мы убедимся ниже) он может быть не мал. Тем не менее, даже в неунитарном случае вклад  $|x|^{-4\Delta_I}$  можно выделить по характерной особенности. Рассмотрим теперь большие расстояния. В теории, содержащей характерный масштаб, корреляционные функции на больших расстояниях факторизуются:

$$\langle O^I(x) O_I(0) \rangle \rightarrow \langle O^I(x) \rangle \langle O_I(0) \rangle = \langle O_I(0) \rangle \sum'_J G^{IJ} \langle O_J(0) \rangle, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (13.36)$$

Это имеет место не только в массивной теории, где приведенные корреляционные функции на больших масштабах спадают экспоненциально, но даже в безмассовой теории, где они спадают степенным образом. Уравнение (13.36) можно решить и найти (с точностью до знака) средние значения  $\langle O_I \rangle$  в виде (13.13).

Одно вакуумное среднее немедленно получается из термодинамического анзаца Бете. Вспомним, что в энергии системы на конечной окружности есть вклад  $-\varepsilon_\infty R$  пропорциональный длине системы  $R$ .

Этот вклад, как мы говорили, связан с вычитанием из полной энергии системы энергии нулевых колебаний при  $R = \infty$ . Таким образом, мы можем интерпретировать  $\varepsilon_\infty$  как перенормированную плотность энергии системы. В евклидовых компонентах тензора энергии-импульса

$$\varepsilon_\infty = \langle T_{22} \rangle = \langle 2T_{z\bar{z}} - T_{zz} - T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = 2\langle T_{z\bar{z}} \rangle = -\frac{1}{\pi} \langle \Theta \rangle.$$

То есть,

$$\langle \Theta \rangle = -\pi\varepsilon_\infty, \quad \langle \Phi_p \rangle = \frac{\varepsilon_\infty}{\lambda(1 - \Delta_p)}. \quad (13.37)$$

Последнее равенство верно, когда  $\Theta$  не содержит вкладов высших порядков теории возмущений.

Другой интересный и важный пример — это оператор  $T\bar{T}$ . В конформной теории поля это произведение хорошо определено, но в возмущенной теории оно перенормируется добавлением оператора  $\Theta$ . Также оно находится в резонансе с оператором  $\partial\bar{\partial}\Theta$ , но этот оператор не является квазипримарным и не дает вклада в вакуумное среднее. Вместо того, чтобы аккуратно учитывать перенормировки, рассмотрим комбинацию [24]

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}T(x + \varepsilon)\bar{T}(x) + \frac{1}{2}\bar{T}(x + \varepsilon)T(x) - \Theta(x + \varepsilon)\Theta(x) = -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x + \varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \quad (13.38)$$

Каждое из трех произведений  $T\bar{T}$ ,  $\bar{T}T$ ,  $\Theta\Theta$  расходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , но расходящаяся часть имеет вид пространственно-временной производной. В самом деле, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J_\mu^\nu(x, \varepsilon), \quad J_\mu^\nu(x, \varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x + \varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \quad (13.39)$$

Кроме того, в силу равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса имеем  $\epsilon^{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\lambda}J_\mu^\nu(x, \varepsilon) = 0$ . Следовательно интеграл

$$J^\mu(x, \varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu J_\nu^\mu(x, \xi)$$

не зависит от траектории интегрирования. Отсюда немедленно следует, что  $(T\bar{T})_\varepsilon$  есть некоторый постоянный (то есть, не зависящий от  $\varepsilon$ ) оператор плюс полная дивергенция:

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J^\mu(x, \varepsilon). \quad (13.40)$$

Это определяет конечный оператор  $T\bar{T}$  с точностью до пространственно-временных производных. В тоже время из (13.39) немедленно следует, что вакуумное среднее  $\langle (T\bar{T})_\varepsilon \rangle$  не зависит от  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu} \langle (T\bar{T})_\varepsilon(x) \rangle = 0. \quad (13.41)$$

Отсюда получаем

$$\langle T\bar{T} \rangle = \langle (T\bar{T})_\varepsilon(x) \rangle_{\varepsilon \rightarrow \infty} = -\langle \Theta \rangle^2. \quad (13.42)$$

Мы учли, что  $\langle T \rangle = \langle \bar{T} \rangle = 0$ , поскольку это операторы ненулевого спина.

Все остальные известные вакуумные средние найдены эвристическими методами. Несмотря на это они хорошо проверены и считаются точными. Приведем один пример. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеется формула [22]:

$$\langle e^{i\alpha\phi} \rangle = M^{\alpha^2} \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left( \frac{\text{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2 \text{sh } t \text{ sh } pt \text{ sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t} \right). \quad (13.43)$$

Эта интегральная формула верна и для модели sh-Гордона, хотя функция и не продолжается в область  $\beta^2 < 0$  аналитически. Параметр  $M$  связан с массой  $m_{\text{kink}}$  солитона или с параметром взаимодействия  $\mu$  формулой

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} m_{\text{kink}} = \left( \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)} \mu \right)^{\frac{p+1}{2}}. \quad (13.44)$$

Связь между  $m$  и  $\mu$  была найдена в [6] методом термодинамического анзаца Бете. Для примарных операторов минимальных конформных моделей формулы тоже известны [23]. В  $\Phi_{13}$ -возмущенной модели  $M(P, P')$  есть  $P - 1$  вакуумных состояний, и вакуумное среднее зависит от вакуума  $s$  согласно

$$\langle \Phi_{mn} \rangle_s = M^{2\Delta_{mn}} \frac{\sin \frac{\pi s}{P} |P'm - Pn|}{\sin \frac{\pi s}{P} (P' - P)} Q \left( \frac{P'm - Pn}{P' - P} \right), \quad s = 1, \dots, P - 1, \quad (13.45)$$

где

$$Q(\eta) = \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left( \frac{\text{ch } 2t \text{ sh } t(\eta - 1) \text{ sh } t(\eta + 1)}{\text{ch } t \text{ sh } tp \text{ sh } t(p + 1)} - \frac{\eta^2 - 1}{2p(p + 1)} e^{-4t} \right), \quad p = \frac{P}{P' - P}. \quad (13.46)$$

При этом  $M$  связано с массой кинков формулой (13.44), а с константой связи  $\lambda$  формулой

$$M = \left( \frac{\pi \lambda (1 - p)(2p - 1)}{(p + 1)^2} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right) \Gamma\left(\frac{1-2p}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right) \Gamma\left(\frac{3p}{p+1}\right)}} \right)^{\frac{p+1}{4}}. \quad (13.47)$$

В качестве простого примера вычисления корреляционной функции методом конформной теории возмущений рассмотрим модель Ли–Янга. В ней имеется всего два примарных оператора  $\Phi_{11} = 1$  и  $\Phi_{12} = \Phi_p = \varphi$  размерности  $-\frac{1}{5}$ . Для модели Ли–Янга известно, что массивной теории отвечает мнимая константа связи  $\lambda = ih$ , причем она связана с массой соотношением [21, 6]

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970 \dots \quad (13.48)$$

Нас будет интересовать парная корреляционная функция  $G(x) = \langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle$ . В конформной теории поля для оператора  $\varphi(x)$  имеется разложение

$$\varphi(x) \varphi(0) = |x|^{4/5} \left( 1 + \frac{|x|^4}{121} T\bar{T}(0) + O(|x|^{12}) \right) + |x|^{2/5} \mathcal{C}_{\varphi\varphi}^\varphi (\varphi(0) + O(|x|^8)). \quad (13.49)$$

Структурная константа  $\mathcal{C}_{\varphi\varphi}^\varphi$  равна

$$\mathcal{C}_{\varphi\varphi}^\varphi = i\kappa = \frac{i}{2} \gamma^{3/2} \left( \frac{1}{5} \right) \gamma^{1/2} \left( \frac{2}{5} \right), \quad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \quad (13.50)$$

Интересующие нас вакуумные средние равны

$$\langle \varphi \rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h}, \quad \langle T\bar{T} \rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \quad (13.51)$$

Соответственно,

$$G(x) = C_{\varphi\varphi}^1(x) + \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h} C_{\varphi\varphi}^\varphi(x) - \frac{\pi^2 m^4}{48} C_{\varphi\varphi}^{T\bar{T}}(x) + \dots \quad (13.52)$$

Обратим внимание, что при малых значениях  $|x|$  второй член пропорционален  $|x|^{2/5}$ , в то время как первый —  $|x|^{4/5}$ . Это значит, что при любых ненулевых значениях константы связи  $h$  ультрафиолетовое поведение корреляционных функций определяется возмущением, а не конформной теорией поля. Это явление — следствие отрицательной размерности поля  $\varphi(x)$ .

Структурные функции выражаются в виде (13.34), но проще прямо вычислить интеграл и вычистить из него инфракрасно расходящуюся часть. В случае  $C_{\varphi\varphi}^1(x)$  это можно сделать аналитически и получить

$$C_{\varphi\varphi}^1(x) = |x|^{4/5} + \kappa h \frac{\pi \gamma^2(1/5)}{14^2 \gamma(2/5)} |x|^{16/5} + O(|x|^{28/5}) = |x|^{4/5} \left( 1 + 0.0310 \dots \times (m|x|)^{12/5} + O(|x|^{24/5}) \right). \quad (13.53)$$

В случае  $C_{\varphi\varphi}^\varphi$  интеграл приходится брать численно и численно же исключать инфракрасную расходимость. Ответ имеет вид

$$C_{\varphi\varphi}^\varphi(r) = i\kappa |x|^{2/5} \left( 1 + 0.0212 \dots \times (mr)^{12/5} + O(|x|^{24/5}) \right). \quad (13.54)$$

## Задачи

1. Покажите, что в (13.33) контрчлены из (13.20) действительно сокращают ультрафиолетовые расходимости. (Не забудьте, что ультрафиолетовые расходимости могут быть и вблизи точки  $y_1 = x$ , но они «спрятаны» в суммирование по  $L$ .)

2. Оцените ультрафиолетовые расходимости в  $n$ том порядке теории возмущений и покажите, что неравенство (13.22) является условием наличия ультрафиолетовой расходимости.

3. Выведите (13.39).

4. Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Покажите, в какой области значений  $\alpha$  экспоненциальные операторы  $e^{i\alpha\varphi}$  не требуют перенормировки в конформной теории возмущений.

5\*. Используя технику, известную вам из конформной теории поля, вычислите интеграл

$$I(a, b; x) = \int d^2y |y|^{2a} |y - x|^{2b}$$

в области его сходимости. Аналитическим продолжением найдите член первого порядка в структурной функции  $C_{\varphi\varphi}^1(x)$  теории Ли—Янга.

## Лекция 14

### Точные формфакторы квазилокальных операторов

Вернемся к алгебре Фаддеева—Замолодчикова. Напомним, что операторы  $V_\alpha(\theta)$  определены на двух прямых

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightarrow} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi) \quad (14.1)$$

и удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2) - \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\alpha'_1\alpha'_2}^{\alpha_1\alpha_2} V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) &= 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) \\ &- 2\pi \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2} S(-i\pi)_{\alpha'_1\alpha'_2}^{\alpha_1\alpha_2} \delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi), \end{aligned} \quad (14.2)$$

При этом операторы на верхней прямой можно интерпретировать как операторы уничтожения, а операторы на нижней прямой — как операторы рождения:

$$V_\alpha^+(\theta) = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi). \quad (14.3)$$

Можно естественным способом определить нормальное упорядочение:

$$\begin{aligned} :X: &= X, \text{ если } X = V_{\beta_1}^+(\vartheta_1) \cdots V_{\beta_L}^+(\vartheta_L) V^{\alpha_K}(\theta_K) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1), \quad \theta_i, \vartheta_j \in \mathbb{R}; \\ :XV^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)Y: &= \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1 - \theta_2)_{\alpha'_1\alpha'_2}^{\alpha_1\alpha_2} :XV^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1)Y:. \end{aligned} \quad (14.4)$$

В случаях, когда  $S(\theta) = \pm 1$ , алгебра Фаддеева—Замолодчикова сводится к алгебре бозонных или фермионных операторов, описывающих систему свободных бозонов или фермионов соответственно.

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_{\rightarrow}} \frac{d\theta_i}{2\pi} e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} :V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \quad (14.5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций  $F_O(\theta_1, \dots, \theta_N)$  комплексных переменных  $\theta_i$ , называемых *формфакторами* оператора  $O$ . Здесь

$$P_\alpha^0(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch} \theta, \quad P_\alpha^1(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем  $e^{\tau e^\theta}$  с любым положительным  $\tau$ .

Очевидно, эти операторы являются трансляционно-инвариантными в следующем смысле

$$i\partial_\mu O(x) = [O(x), P_\mu], \quad (14.6)$$

где  $P_\mu$  — оператор импульса, определенный как

$$P_\mu = \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi} P_{\alpha\mu}(\theta) V_\alpha^+(\theta) V^\alpha(\theta) \quad \Rightarrow \quad [P_\mu, V^\alpha(\theta)] = -P_{\alpha\mu}(\theta) V^\alpha(\theta). \quad (14.7)$$

Так как  $P_0 = H$  является гамильтонианом, оператор  $O(x)$  является решением уравнения Гайзенберга. Кроме трансляционной инвариантности мы будем требовать лоренц-инвариантности. Определим *лоренцев спин*  $s_O$  оператора  $O(x)$  следующим свойством:

$$F_O(\theta_1 + \lambda, \dots, \theta_n + \lambda)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e^{s_O \lambda} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (14.8)$$

Тогда

$$i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) O(x) = \epsilon^{\mu\nu} (i s_O O(x) + [O(x), L]), \quad (14.9)$$

где антисимметричный тензор нормирован условием  $\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = 1$ , а оператор момента  $L$  определяется как

$$L = i \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi} V_{\alpha}^{+}(\theta) \frac{d}{d\theta} V^{\alpha}(\theta) \Rightarrow [L, V^{\alpha}(\theta)] = -i \frac{d}{d\theta} V^{\alpha}(\theta). \quad (14.10)$$

В результате при преобразовании Лоренца, характеризуемом быстротой  $\lambda$ , корреляционные функции вида  $\langle \prod O_i(x_i) \rangle$  будут умножаться на  $e^{\lambda \sum s_{O_i}}$ .

Легко видеть, что на вещественной оси функции  $F_O$  являются матричными элементами вида

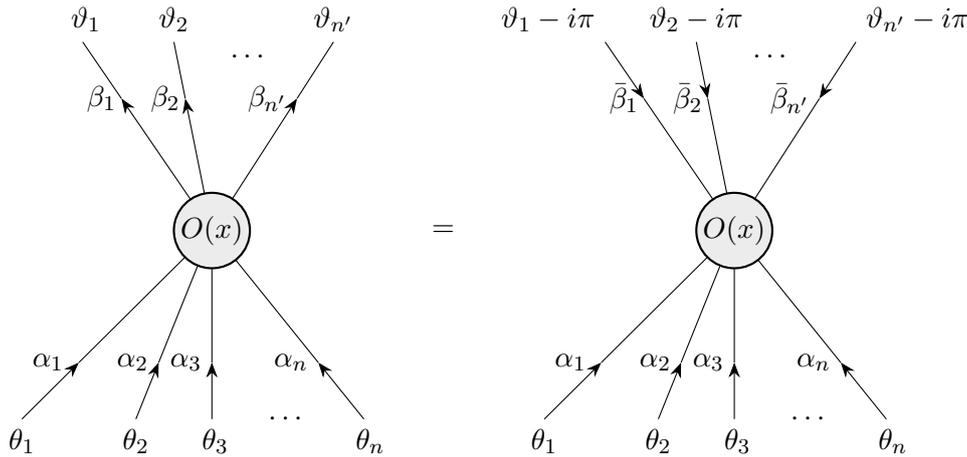
$$\langle \text{vac} | O(x) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad \theta_1 > \dots > \theta_n. \quad (14.11)$$

Более общо,

$$\begin{aligned} \beta_1 \dots \beta_{n'} \langle \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n'} | O(x) | \theta_1, \dots, \theta_n \rangle_{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i) + ix \sum_{i=1}^{n'} P_{\beta_i}(\vartheta_i)} \\ &\times \sum_{\{\beta'_i\}} \prod_{i=1}^{n'} C_{\beta_i \beta'_i} \cdot F_O(\theta_1^-, \dots, \theta_n^-, \vartheta_{n'}^+ - i\pi, \dots, \vartheta_1^+ - i\pi)_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta'_{n'} \dots \beta'_1}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

где мы обозначили  $\theta_i^{\pm} = \theta_i \pm i0$ , если  $\theta_1 > \dots > \theta_n$ ,  $\vartheta_1 > \dots > \vartheta_{n'}$ . Обратим внимание, что функции  $F_O$  совпадают с матричными элементами только в точках, где все  $\theta_i \neq \vartheta_j$ . Там, где какие-нибудь  $\theta_i$  и  $\vartheta_j$  совпадают, в матричных элементах возникают контактные члены, которые легко извлекаются из определения (14.5). Бесконечно малые добавки будут пояснены позже.

Графически это равенство можно изобразить так:



Представление оператора в виде разложения по произведениям  $V^{\alpha}(\theta)$  позволяет найти выражения для корреляционных функций в виде *спектральных разложений*. Для двухточечной корреляционной функции, например, имеем

$$\begin{aligned} \langle O_1(x) O_2(0) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}, \{\alpha'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n \theta}{(2\pi)^n} e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} \prod_{i=1}^n C^{\alpha_i \alpha'_i} \\ &\times F_{O_1}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} F_{O_2}(\theta_n - i\pi, \dots, \theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n \dots \alpha'_1}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Эта формула получается либо коммутацией операторов  $V_{\alpha}(\theta)$ , либо вставкой разложения единицы по собственным векторам. В последнем случае экспоненциальный множитель от суммы импульсов имеет смысл собственного значения композиции оператора эволюции и оператора пространственного сдвига. Ясно, что эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции только тогда, когда ряд убывает. Это верно в случае больших расстояний между операторами. Действительно, рассмотрим операторы, разделенные мнимым временем  $-i\tau$ . Тогда множитель

$$\left| e^{-ix \sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} \right| = e^{-\tau \sum_i m_{\alpha_i} \text{ch } \theta_i} \leq e^{-\tau \sum_i m_{\alpha_i}}$$

экспоненциально быстро убывает с числом частиц, причем тем быстрее, чем больше  $\tau$ .

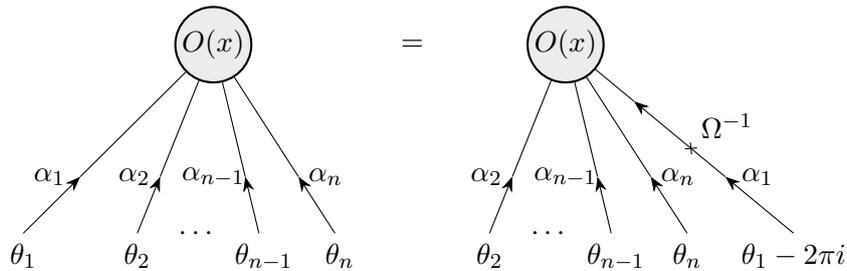
Из равенства (14.12) немедленно следует условие эрмитовости оператора, определенного разложением (14.5):

$$O^+(x) = O(x) \Leftrightarrow (F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n})^* = \sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^n C_{\alpha_i \alpha'_i} \cdot F_O(\theta_n - i\pi, \dots, \theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n \dots \alpha'_1} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \theta_i \in \mathbb{R}). \quad (14.14)$$

Оператор  $O(x)$ , определенный в (14.5), является трансляционно-инвариантным, но для функций  $F_O$  общего вида он не является локальным. Давайте попробуем наложить условия, которые обеспечили бы в каком-то смысле его локальность. Прежде всего, заметим, что мы можем понимать формулу (14.12) как результат применения кроссинг-симметрии к формуле (14.11). Давайте потребуем, чтобы двукратное применение кроссинг-симметрии переводило бы формфактор в себя. Постулируем *циклическое свойство*:

$$F_O(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \sum_{\alpha'_1} (\Omega^{-1}(O))_{\alpha_1 \alpha'_1} F_O(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1 - 2\pi i)_{\alpha_2 \dots \alpha_n \alpha'_1}. \quad (14.15)$$

Здесь  $\Omega(O)$  — некоторая постоянная матрица, смысл которой мы проясним позднее. По кинематическим соображениям мы потребуем, чтобы матрица имела ненулевые матричные элементы только для частиц одинаковой массы. Важно, что при двукратном применении кроссинг-симметрии мы переместили быструю  $\theta_1$  из первой позиции в последнюю:



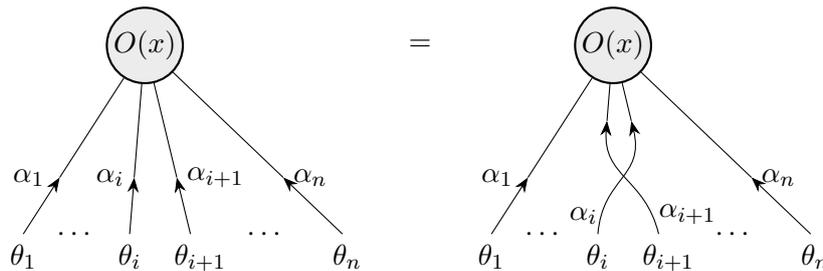
Нетрудно проверить, что

$$S_{12}(\theta) \Omega_1(O) \Omega_2(O) = \Omega_1(O) \Omega_2(O) S_{12}(\theta). \quad (14.16)$$

Давайте теперь зафиксируем аналитические свойства формфакторов, согласовав их с аналитическими свойствами волновой функции, заданными в лекции 10, то есть потребовав, чтобы за пределами домена, определенного в (14.11), сама формула оставалась верной. Именно, потребуем выполнения *перестановочного свойства*:

$$F_O(\dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots)_{\dots \alpha_i \alpha_{i+1} \dots} = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S(\theta_i - \theta_{i+1})_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} F_O(\dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots)_{\dots \alpha'_{i+1} \alpha'_i \dots} \quad (14.17)$$

Это требование эквивалентно требованию, чтобы подынтегральное выражение в (14.5) было симметрично по отношению к перестановкам  $(\theta_i, \alpha_i) \leftrightarrow (\theta_j, \alpha_j)$ . Графически уравнение (14.17) представляется так (суммирование по индексам на внутренних линиях здесь и ниже подразумевается):

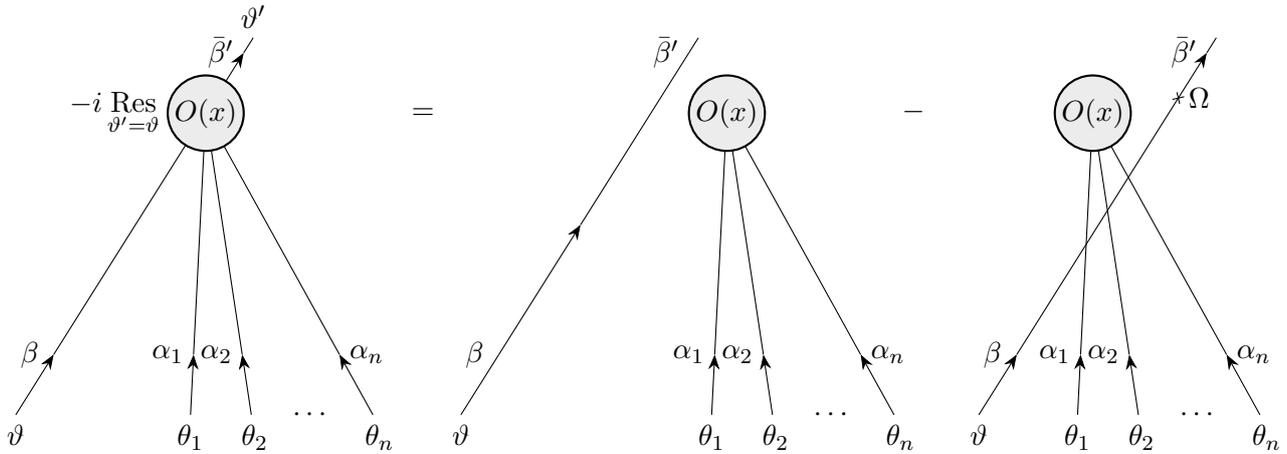


Требования (14.15)–(14.17) описывают свойства функций  $F_O$  при фиксированном числе частиц каждого сорта (каждого значения массы). Ясно, что проверка взаимной локальности двух операторов требует коммутации каждой пары компонент в разложениях (14.5). В то же время было бы странно, если бы коммутативности можно было достичь почленно.

Постулируем два свойства, связывающие формфакторы с различными числами частиц. Положим, что на физическом листе  $0 \leq \text{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \leq \pi$  из особенностей имеются только простые полюсы двух типов. Первый тип полюсов, *кинематические полюсы*, расположены в точках  $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$  и имеют вычеты, определяемые уравнением

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\pi, \vartheta, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta' \beta \alpha_1 \dots \alpha_n} = \\ = i \sum_{\beta'', \{\alpha'_i\}} C_{\beta' \beta''} \left( \delta_{\beta}^{\beta''} \delta_{\alpha}^{\alpha'} - \sum_{\{\gamma_i\}} \Omega_{\gamma_n}^{\beta''}(O) \delta_{\beta}^{\gamma_0} \prod_{i=1}^n S(\vartheta - \theta_i)_{\gamma_{i-1} \alpha_i}^{\alpha'_i} \right) F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Графически это уравнение записывается так:



Вместе с уравнением (14.17) это уравнение задает все кинематические полюсы.

В левой части мы можем перенести частицу с быстротой  $\vartheta' + i\pi$  из первой позиции в последнюю, используя циклическое свойство (при этом ее быстрота станет равной  $\vartheta' - i\pi$ ), а затем, используя перестановочное свойство протолкнуть ее на вторую позицию. Тогда первое и второе слагаемое в правой части поменяются местами. Для самосогласованности следует потребовать, чтобы

$$\sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha \beta} \Omega_{\alpha'}^{\alpha}(O) \Omega_{\beta'}^{\beta}(O) = C_{\alpha' \beta'}. \quad (14.19)$$

Всегда можно выбрать базис из нескольких нейтральных и нескольких заряженных частиц. В нем матрица  $C$  будет иметь блочно-диагональный вид с блоками  $1 \times 1$  вида 1 (нейтральные частицы) и  $2 \times 2$  вида  $\sigma^1$  (заряженные частицы). Дополнительной заменой базиса матрицу  $\Omega$  можно диагонализировать,  $\Omega = \text{diag}(\Omega_{\alpha})$ , так что

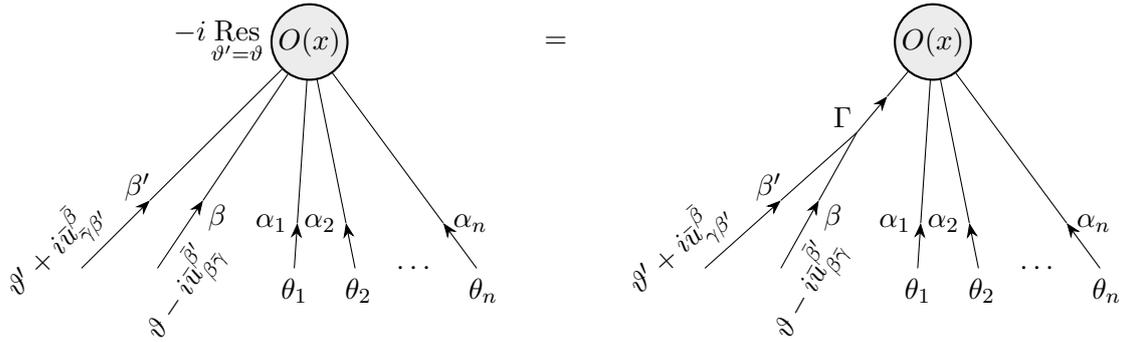
$$\Omega_{\alpha} \Omega_{\bar{\alpha}} = 1.$$

В частности, для нейтральных частиц  $\Omega_{\alpha} = \pm 1$ . Кроме того, в  $C$ -симметричной модели  $\Omega_{\bar{\alpha}} = \Omega_{\alpha}^*$ , так что  $|\Omega_{\alpha}| = 1$ .

Второй тип полюсов, *динамические полюсы*, связан с полюсами  $S$ -матрицы, отвечающими связанным состояниям:  $\theta_i - \theta_j = iu_{\alpha\beta}^{\gamma}$  ( $i < j$ ). Вычеты в этих полюсах определяются уравнением

$$\text{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\bar{u}_{\bar{\gamma}\beta'}^{\bar{\beta}}, \vartheta - i\bar{u}_{\beta\bar{\gamma}}^{\beta'}, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\beta' \beta \alpha_1 \dots \alpha_n} = i \sum_{\gamma} \Gamma_{\beta' \beta}^{\gamma} F_O(\vartheta, \theta_1, \dots, \theta_n)_{\gamma \alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (14.20)$$

Графически это уравнение имеет вид:



Обратим внимание на то, что кинематический полюс может быть представлен как динамический полюс, в котором частица и античастица связываются в фиктивную частицу нулевой массы, не участвующую в разложении для оператора. Наличие в вычете кинематического полюса двух вкладов связано с циклическим свойством (14.15) и положением полюса на краю физического листа.

Рассмотрим одновременное произведение двух операторов  $O_1(x)O_2(y)$ . Для определенности положим, что оператор  $O_1$  находится правее  $O_2$ :

$$x^0 = y^0 - i0, \quad x^1 > y^1. \quad (14.21)$$

Сдвигка  $-i0$  отвечает хронологическому упорядочению в мнимом времени. Чтобы формулы выглядели короче, введем такие обозначения. Для любого набора переменных  $\{\xi_i\}_{i=1}^k$  будем обозначать  $\vec{\xi}$  последовательность  $\xi_1, \dots, \xi_k$ , а  $\overleftarrow{\xi}$  последовательность  $\xi_k, \dots, \xi_1$ . Там, где порядок будет неважен, будем просто писать  $\xi$ . Через  $(\vec{\xi})_i$ ,  $(\overleftarrow{\xi})_i$ ,  $(\xi)_i$  будем обозначать соответствующую последовательность без  $i$ го элемента. Кроме того, выражения типа  $C^{\alpha\beta}$  будут обозначать  $\prod_i C^{\alpha_i\beta_i}$ . Итак,

$$O_1(x)O_2(y) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\}, \dots, \{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k \xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{E}_{\rightarrow}} \frac{d^m \theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{E}_{\rightarrow}} \frac{d^n \vartheta}{(2\pi)^n} e^{-iP_{\gamma}(\xi)(x-y) - iP_{\alpha}(\theta)x - iP_{\beta}(\vartheta)y} \\ \times C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\vec{\xi}^{\rightarrow}, \vec{\theta})_{\vec{\gamma}\overleftarrow{\alpha}} F_{O_2}(\vec{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_{\vec{\beta}\overleftarrow{\gamma}} :V^{\alpha_m}(\theta_m) \dots V^{\alpha_1}(\theta_1) V^{\beta_n}(\vartheta_n) \dots V^{\beta_1}(\vartheta_1):. \quad (14.22)$$

Здесь мы снова положили  $\xi_i^{\pm} = \xi_i \pm i0$ . Бесконечно-малые слагаемые к  $\xi_i$  и  $\xi_i - i\pi$  добавлены таким образом, чтобы контуры интегрирования при перемножении матричных элементов правильно обходили кинематические полюсы: для частицы с быстротой  $\xi_i$  контур должен проходить под всеми кинематическими полюсами оператора  $O_1$ , по отношению к которому она входящая, и над всеми кинематическими полюсами оператора  $O_2$ , по отношению к которому она выходящая.

Теперь сдвинем контур интегрирования по  $\xi_k$  вверх на  $i\pi$ . Множитель  $e^{-iP_{\gamma}(\xi)(x-y)}$  для  $0 < \text{Im } \xi_k < \pi$  стремится к нулю при  $\xi_k \rightarrow \pm\infty$  в силу (14.21), так что он не будет нарушать сходимости интегралов. Но интегралы будут зацепляться за кинематические и динамические полюсы. При этом контур мы проведем так, чтобы после сдвига  $\xi_k^-$  в первом формфакторе перешли  $\xi_k^+ + i\pi$ , непременно зацепившись за все кинематические полюсы, а во втором формфакторе  $\xi_k^+ - i\pi$  перешло в  $\xi_k^-$ , не зацепившись ни за один кинематический полюс.

Давайте найдем разность  $(\int_{\mathbb{R}-i0} - \int_{\mathbb{R}+i\pi+i0}) \frac{d\xi_k}{2\pi}$  от всего подынтегрального выражения. Это будет сумма вычетов, умноженная на  $i$ . Рассмотрим вычет в полюсе, отвечающем кинематическому полюсу, связанному с  $\theta_1$ :

$$e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y) - iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x - i(P_{\beta}(\vartheta) + P_{\alpha_1}(\theta_1))y} \\ \times \sum_{\{\alpha\}, \dots, \{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1}((\vec{\xi}^{\rightarrow})_k, (\vec{\theta})_1)_{(\vec{\gamma}'_1)_k(\overleftarrow{\alpha})_1} F_{O_2}(\vec{\vartheta}, \theta_1, (\overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_k)_{\vec{\beta}, \alpha'_1, (\overleftarrow{\gamma})_1} \\ \times \left( -\delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\gamma}^{\gamma''} + \delta_{\alpha_1}^{\delta_1} \delta_{\delta_k}^{\alpha'_1} \Omega_{\delta_m}^{\delta'_1}(O_1) \prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)_{\delta'_i}^{\delta'_{i+1} \gamma''_i} \prod_{i=2}^m S(\theta_1 - \theta_i)_{\delta_{i-1}}^{\delta_i \alpha'_i} \right) : \overleftarrow{V^{\alpha}(\theta)} \overleftarrow{V^{\beta}(\vartheta)} :.$$

Буква  $\theta_1$  перекочевала из первого формфактора во второй, превращая его в  $\vartheta_{n+1}$ . Мы видим, что этот вклад соответствует значениям  $k' = k - 1$ ,  $m' = m - 1$ ,  $n' = n + 1$ . При этом первое слагаемое в скобках сокращает соответствующий член в разложении, «заменяя» его на второй член в скобках. При этом произведение матриц  $S(\theta_1 - \theta_i)$  во втором слагаемом «подтаскивает»  $V(\theta_1)$  к  $V(\vartheta_n)$ . Произведение же матриц  $S(\theta_1 - \xi_i + 2\pi i)$  протаскивает  $\theta_1$  в формфакторе  $F_{O_2}$  до конца направо. В результате такой процедуры эффективно каждое слагаемое суммы умножается на  $\Omega_{\alpha_1}^{\alpha_1'}(O_1)$ , а  $\vartheta_n$  в  $F_{O_2}$  протаскивается до конца направо через буквы  $\xi_i$ . Возможность выбрать разные  $\xi_i$  и  $\theta_j$  в этой процедуре в качестве «начальных» просто исправляет комбинаторные множители.

Продолжая процедуру, мы домножаем  $F_{O_2}$  последовательно на все  $\Omega_{\beta_i}^{\beta_i'}(O_1)$ , меняем местами  $\overleftarrow{V^{\alpha}(\theta)}$  и  $\overleftarrow{V^{\beta}(\vartheta)}$  в нормально-упорядоченном произведении и перемещаем  $\xi - i\pi$  справа налево в  $F_{O_2}$ . После этого остается перенести все  $\xi_i$  в  $F_{O_1}$  по циклическому свойству, что домножит  $F_{O_1}$  на множители  $\Omega_{\gamma_i}^{\gamma_i'}(O_1)$ .

Теперь нужно разобраться с динамическими полюсами. Нетрудно понять, что динамические полюсы сокращают друг друга. Действительно,  $\xi_k$  «зацепляется» за два полюса:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\xi_k^{(1)} &= \theta_1 + iu_{\gamma_k \alpha_1}^{\delta}, \\ \xi_k^{(2)} &= \vartheta_n + i\pi - iu_{\beta_n \gamma_k'}^{\delta'} = \vartheta_n + i\bar{u}_{\beta_n \gamma_k'}^{\delta'}.\end{aligned}$$

Легко проверить, что в формфакторе  $F_{O_1}$  результат слияния  $\xi_k^{(1)}$  и  $\theta_1$  даст быстроту

$$\theta_1' = \theta_1 + i\bar{u}_{\alpha_1 \delta}^{\bar{\gamma}_k},$$

а в формфакторе  $F_{O_2}$  это даст

$$\vartheta_{n+1} = \xi_k^{(1)} - i\pi = \theta_1 - i(\pi - u_{\gamma_k \alpha_1}^{\delta}) = \theta_1 - i\bar{u}_{\gamma_k \alpha_1}^{\delta}.$$

Аналогично, результат слияния  $\vartheta_n$  с  $\xi_k^{(2)} - i\pi$  даст в первом формфакторе

$$\theta_0 = \xi_i^{(2)} = \vartheta_n + i\bar{u}_{\beta_n \gamma_k'}^{\delta'}$$

и во втором формфакторе

$$\vartheta_k' = \xi_i^{(2)} - i\pi + iu_{\gamma_k \delta'}^{\bar{\beta}_n} = \vartheta_n - i\bar{u}_{\delta' \beta_n}^{\bar{\gamma}_k'}.$$

Теперь выберем такую пару слагаемых, для которых

$$\begin{aligned}m \equiv m^{(1)} = m^{(2)} + 1, \quad n \equiv n^{(2)} = n^{(1)} + 1, \quad k \equiv k^{(1)} = k^{(2)}, \\ \vartheta_n^{(2)} = \theta_1^{(1)}, \quad \beta_n^{(2)} = \alpha_1^{(1)}, \quad \gamma_k'^{(2)} = \bar{\delta}^{(1)}, \quad \delta'^{(2)} = \bar{\gamma}_k^{(1)}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\theta_0^{(2)} = \theta_1^{(1)}, \quad \vartheta_k'^{(2)} = \vartheta_{k+1}^{(1)}.$$

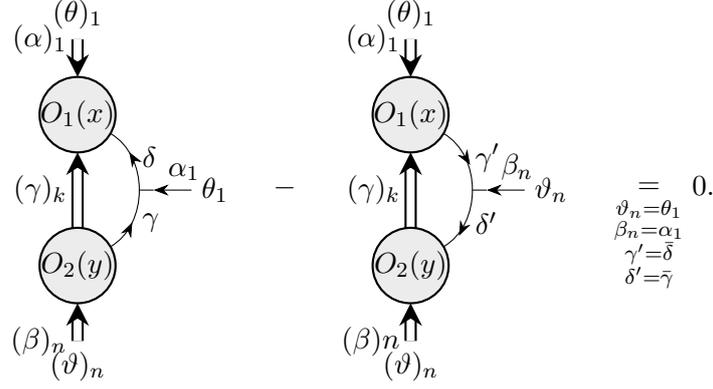
С учетом равенства

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \sum_{\beta', \gamma'} \Gamma_{\alpha\gamma'}^{\beta'} C_{\beta\beta'} C^{\gamma\gamma'}, \quad (14.23)$$

которое следует из кроссинг-симметрии, эти два слагаемых совпадают с точностью до знака. Поскольку они содержат множители  $(\xi_k - \theta_1)^{-1}$  и  $(\vartheta_n - \xi_k + i\pi)^{-1}$  соответственно, знаки будут разными, и слагаемые сократят друг друга.

<sup>1</sup>На самом деле я упрощаю. Речь идет, конечно, о наборах полюсов.

Графически это выглядит так:



Итак, вклады динамических полюсов сокращают друг друга, а вклады кинематических, суммированные вместе дают:

$$\begin{aligned}
 O_1(x)O_2(y) &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\}, \dots, \{\gamma_i''\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k \xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{E} \Rightarrow} \frac{d^m \theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{E} \Rightarrow} \frac{d^n \vartheta}{(2\pi)^n} e^{-iP_\gamma(\xi)(y-x) - iP_\alpha(\theta)x - iP_\beta(\vartheta)y} \\
 &\times C^{\gamma\gamma'} \Omega_{\gamma'}^{\gamma''}(O_1) \Omega_{\beta}^{\beta''}(O_1) F_{O_2}(\vec{\xi}^-, \vec{\vartheta})_{\vec{\gamma}^{\prime\prime} \vec{\beta}^{\prime\prime}} F_{O_1}(\vec{\theta}, \vec{\xi}^+ - i\pi)_{\vec{\alpha}^+ \vec{\gamma}} \\
 &\times :V^{\beta_n}(\vartheta_n) \dots V^{\beta_1}(\vartheta_1) V^{\alpha_m}(\theta_m) \dots V^{\alpha_1}(\theta_1):. \quad (14.24)
 \end{aligned}$$

То, что мы получили, это почти произведение  $O_2(y)O_1(x)$ . Чтобы действительно получить это произведение, наложим условие. Будем говорить, что операторы  $O_1$  и  $O_2$  взаимно-квазилокальны, если для всех  $n$  выполняются равенства

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^n \Omega_{\alpha'_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (I, J) = (1, 2), (2, 1). \quad (14.25)$$

Здесь  $C(O_I, O_J)$  — числа. В блочно-диагональном базисе частиц легко видеть, что это не такое уж ограничительное условие. Оно просто говорит о том, что для любых  $n$  и наборов  $\{\alpha_i\}$ , для которых имеются ненулевые формфакторы  $F_{O_J}$  произведение  $\prod_{i=1}^n \Omega_{\alpha_i}(O_I)$  не зависит от  $n$  и  $\{\alpha_i\}$  и равно  $C(O_I, O_J)$ . Тогда одновременные коммутаторы операторов  $O_1$  и  $O_2$  выглядят так:

$$O_1(x)O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0, x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0, x^1 < y^1. \end{cases} \quad (14.26)$$

Это есть основная теорема, доказанная Федором Смирновым. Подробное доказательство и разбор следствий этой теоремы можно найти в книге [25]. Условие сходимости интегралов, лоренц-инвариантность в форме (14.8), условие цикличности (14.15), перестановочное условие (14.17) и условия кинематического (14.18) и динамического (14.20) полюсов называются *формфакторными аксиомами* или *аксиомами Каровского–Вайша–Смирнова*. Кроме теоремы Смирнова о взаимной квазилокальности есть еще *гипотеза Смирнова*, согласно которой *все* квазилокальные операторы в теории поля могут быть найдены как решения формфакторных аксиом.

Величину  $\omega(O_1, O_2)$ , определяемую по модулю единицы формулой

$$e^{2\pi i \omega(O_1, O_2)} = \Omega(O_1, O_2) = C(O_1, O_2)C(O_2, O_1) \quad (14.27)$$

называют *показателем взаимной локальности* операторов  $O_1$  и  $O_2$ . Величину  $\Omega(O_1, O_2)$  обычно называют *индексом взаимной локальности*. Если показатель взаимной локальности равен нулю, операторы  $O_1$  и  $O_2$  называют *взаимно-локальными*. Нетрудно проверить, что если оператор  $O(x)$  самолокален (взаимно-локален с собой) и имеет целый или полуцелый спин, то

$$C(O, O) = (-1)^{2s_O}, \quad (14.28)$$

то есть коммутирует с собой, если его спин целый, и антикоммутирует, если его спин полуцелый.

Теперь нетрудно понять смысл матрицы  $\Omega_\beta^\alpha(O)$ . Давайте рассмотрим оператор

$$A^\alpha(x) = \int_{\mathcal{C} \Rightarrow} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP_\alpha(\theta)x} V^\alpha(\theta) + \dots,$$

где точки обозначают вклады высших формфакторов. Этот оператор представляет собой бозонный (нулевого спина) оператор, уничтожающий бозон в данной точке. Хотя этот оператор определен неоднозначно, его коммутатор с любым другим оператором  $O$ , с которым он взаимно-квазилокален, хорошо определен. Поскольку  $F_{A^\alpha}(\theta)_\beta = \delta_\beta^\alpha$ , оператор  $A^\alpha$  может быть взаимно-квазилокален только с оператором, для которого матрица  $\Omega_\beta^\alpha(O)$  в выбранном базисе диагональна. Тогда числа

$$\Omega_\alpha(O) = C(O, A^\alpha) = \Omega(O, A^\alpha) \quad (14.29)$$

имеют простой смысл индексов взаимной локальности оператора  $O$  с бозонным оператором, уничтожающим элементарное возбуждение  $\alpha$ .

Теперь рассмотрим простой пример — скейлинговую модель Изинга при нулевом магнитном поле, то есть  $\Phi_{13}$ -возмущение минимальной конформной модели  $M(3, 4)$  ( $c = 1/2$ ) [11, 26]. В этой модели, как мы помним, имеется один свободный массивный фермион или, на бозонном языке, один бозон с матрицей рассеяния  $S(\theta) = -1$ . Это значит, что алгебра Фаддеева—Замолотчикова для этой модели имеет вид фермионной алгебры:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Поле свободного фермиона  $\psi_\pm(x)$  имеет вид

$$\psi_\pm(x) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathcal{C} \Rightarrow} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})} V(\theta), \quad s_{\psi_\pm} = \pm \frac{1}{2}, \quad \Omega_1(\psi_\pm) = -1. \quad (14.30)$$

Единственный ненулевой формфактор этого оператора — одночастичный:  $F_{\psi_\pm}(\theta) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} e^{\pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})}$ . Очевидно, такой набор формфакторов удовлетворяют формфакторным аксиомам. Пользуясь (14.14), нетрудно проверить эрмитовость операторов  $\psi_\pm(x)$ .

Отсюда легко найти компоненты тензора энергии-импульса. В пространстве Минковского имеем

$$T_{zz} = -\frac{i}{2} : \psi_+ \partial \psi_+ :, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{i}{2} : \psi_- \bar{\partial} \psi_- :, \quad T_{z\bar{z}} = \frac{im}{4} : \psi_+ \psi_- :, \quad (14.31)$$

причем нормальное упорядочение совпадает с нормальным упорядочением (14.4). Учитывая, что

$$P_z(\theta) = -\frac{m}{2} e^\theta, \quad P_{\bar{z}}(\theta) = \frac{m}{2} e^{-\theta}, \quad (14.32)$$

получаем, что единственные ненулевые формфакторы компонент тензора энергии-импульса равны

$$\begin{aligned} F_{T_{zz}}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{im^2}{4} e^{\theta_1 + \theta_2} \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{zz}} &= 2, & \Omega_1(T_{zz}) &= 1, \\ F_{T_{\bar{z}\bar{z}}}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{im^2}{4} e^{-\theta_1 - \theta_2} \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{\bar{z}\bar{z}}} &= -2, & \Omega_1(T_{\bar{z}\bar{z}}) &= 1, \\ F_{T_{z\bar{z}}}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{im^2}{4} \operatorname{sh} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, & s_{T_{z\bar{z}}} &= 0, & \Omega_1(T_{z\bar{z}}) &= 1. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Эти ответы хорошо нам известны из теории свободного майорановского фермиона. Найдем теперь нетривиальные формфакторы. Поскольку связанных состояний в этой задаче нет, а кинематический полюс связывает формфакторы только для чисел частиц, отличающихся на два, мы можем разбить все операторы на четные, для которых все формфакторы с нечетным числом частиц равны нулю, и нечетные, для которых все формфакторы с четным числом частиц равны нулю. Простейшие такие операторы мы обозначим  $\sigma(x)$  и  $\mu(x)$ . Их формфакторы равны

$$F_\sigma(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8} \prod_{i < j}^{2n} \operatorname{th} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\sigma = 0, \quad \Omega_1(\sigma) = -1, \quad (14.34)$$

$$F_\mu(\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i < j}^{2n+1} \text{th} \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0, \quad \Omega_1(\mu) = 1, \quad (14.35)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Постоянные  $G_\sigma$  и  $G_\mu$  являются безразмерными нормировочными множителями для этих операторов. Их нельзя извлечь непосредственно из формфакторных аксиом. Размерные константы  $m^{1/8}$  выбраны из отождествления этих операторов с оператором параметра порядка и параметром беспорядка в модели Изинга чуть ниже точки перехода.

Теперь изучим вопрос о взаимной локальности этих операторов. Очевидно, операторы  $\psi_\pm$  — фермионные, а все остальные перечисленные операторы — бозонные, причем все операторы самолокальны. Заметим, что для нечетных операторов  $C(O, O) = \Omega_1(O)$ , а для четных операторов всегда  $C(O, O) = 1$ . Сопоставляя это с (14.28), приходим к выводу, что не может быть бозонных нечетных операторов с  $\Omega_1(O) = -1$ , фермионных нечетных операторов с  $\Omega_1(O) = 1$ , а также фермионных четных операторов. Поэтому остаются следующие классы:

$\{\varepsilon\}$ : Бозонные четные операторы с  $\Omega_1(O) = 1$ . Это семейство включает в себя, например, 1 и  $T_{\mu\nu}$ .

$\{\mu\}$ : Бозонные нечетные операторы с  $\Omega_1(O) = 1$ . Семейство включает  $\mu$ .

$\{\sigma\}$ : Бозонные четные операторы с  $\Omega_1(O) = -1$ . Семейство включает  $\sigma$ .

$\{\psi\}$ : Фермионные нечетные операторы с  $\Omega_1(O) = -1$ . Семейство включает  $\psi_\pm$ .

Для представителей этих классов имеем ( $x^0 = y^0$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon(x)\varepsilon(y) &= \varepsilon(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\mu(y) &= \mu(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\sigma(y) &= \sigma(y)\varepsilon(x), & \varepsilon(x)\psi(y) &= \psi(y)\varepsilon(x), \\ \mu(x)\mu(y) &= \mu(y)\mu(x), & \mu(x)\sigma(y) &= \text{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), & \mu(x)\psi(y) &= \text{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\ \sigma(x)\sigma(y) &= \sigma(y)\sigma(x), & \sigma(x)\psi(y) &= -\text{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\ \psi(x)\psi(y) &= -\psi(y)\psi(x). \end{aligned} \quad (14.36)$$

Эти коммутационные соотношения позволяют разбить все квазилокальные операторы модели Изинга на три сектора взаимно-локальных операторов:

«бозонный» сектор  $\{\varepsilon, \mu\}$ ;

«фермионный» сектор  $\{\varepsilon, \psi\}$ ;

«двойственный бозонный» сектор  $\{\varepsilon, \sigma\}$ .

В «бозонном» секторе оператором, рождающим частицу, является бозонный оператор  $\mu(x)$ , в «фермионном» — фермионные операторы  $\psi_\pm(x)$ , а в «двойственном бозонном» секторе вообще таких операторов нет. Условно можно сказать, что «бозонный» сектор описывает систему ниже точки перехода, «двойственный бозонный» сектор — выше точки перехода, а «фермионный» сектор описывает вспомогательный майорановский фермион, с помощью которого осуществляется решение модели Изинга. На самом деле, конечно, все эти объекты и представления равноправны. Более того, описанная только что классификация операторов верна для *любой* модели с одной нейтральной частицей без внутренних состояний и без связанных состояний, например, для модели sh-Гордона. В модели, в которой имеются связанные состояния, каких-то секторов может не быть. В модели Ли—Янга, например, со связанным состоянием  $1 + 1 \rightarrow 1$ , во-первых, операторы нельзя разделить на четные и нечетные, а во-вторых, непременно  $\Omega_1(O) = 1$ . Поэтому в этой модели имеется только один, «бозонный» сектор.

Итак, решение уравнений на формфакторы, в принципе, позволяет получить любой квазилокальный оператор в теории, однако отождествление таких решений с операторами, определенными в лагранжевом подходе или в рамках конформной теории возмущений, представляет отдельную сложную проблему, которая в общем виде не решена ни для одной теории со взаимодействием.

В качестве примера формфакторов для несвободной теории приведу формфакторы экспоненциальных операторов модели sh-Гордона. Во-первых, определим так называемый минимальный двухчастичный формфактор, то есть функцию  $R(\theta)$ , удовлетворяющую условиям

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S_{11}(\theta)R(-\theta), \quad (14.37)$$

и не имеющую особенностей на полосе  $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi$ . Действительно, функция  $F(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_1 - \theta_2)$  удовлетворяет формфакторным аксиомам для операторов с  $\Omega_1(O) = 1$ . Функция  $R(\theta)$  легко строится по правилу:

$$S_{11}(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t \quad \Rightarrow \quad R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \text{sh } \pi t}, \quad (14.38)$$

где  $R_0$  — произвольная константа. В случае модели sh-Гордона  $f(t) = O(t^2)$  и константу  $R_0$  удобно выбрать так, чтобы она сокращала  $-1$  в скобках:

$$R(\theta) = \exp \left( 4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\text{sh } \frac{\pi t}{2} \text{sh } \frac{\pi p t}{2} \text{sh } \frac{\pi(p+1)t}{2}}{\text{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi)t \right). \quad (14.39)$$

(Напомним:  $-1 < p < 0$ .) В этом случае произведение

$$R(\theta)R(\theta + i\pi) = \frac{\text{sh } \theta}{\text{sh } \theta - i \sin \pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \quad f(z) = 1 + \frac{2i \sin \pi p}{z - z^{-1}}. \quad (14.40)$$

Заметим, что

$$\frac{f(e^\theta)}{f(e^{-\theta})} = S_{11}(\theta). \quad (14.41)$$

Введем также константы

$$\rho = (-R(i\pi) \sin \pi p)^{-1/2}. \quad (14.42)$$

Теперь формфакторы из «бозонного» сектора можно записать в виде

$$F_O(\theta_1, \dots, \theta_n) = \rho^n \prod_{i < j}^n R(\theta_i - \theta_j) \cdot J_O(e^{\theta_1}, \dots, e^{\theta_n}), \quad (14.43)$$

где  $J_O(x_1, \dots, x_n)$  — рациональные симметричные функции с полюсами в точка  $x_i = -x_j$ :

$$\text{Res}_{z'=-z} J_O(z', z, x_1, \dots, x_n) = -iz \sin \pi p \cdot \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right) \right) J_O(x_1, \dots, x_n). \quad (14.44)$$

Множители  $f(z/x_i) = f(e^{\vartheta - \theta_i})$  в первом слагаемом сокращают вклады от произведений  $R(\vartheta - \theta_i)R(\vartheta - \theta_i + i\pi)$  а функции  $f(x_i/z)$  во втором слагаемом поделенные на  $f(z/x_i)$  дают произведение  $S$ -матриц из (14.18). Рассмотрим решение вида

$$J_a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I_n = I_- \sqcup I_+} e^{i\pi a(\#I_- - \#I_+)} \prod_{\substack{i \in I_- \\ j \in I_+}} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right), \quad (14.45)$$

где  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , а сумма берется по всем разбиениям этого множества на два непересекающиеся подмножества. Оказывается, если положить

$$a = \frac{1}{2} - \alpha \sqrt{\frac{(-p)(1+p)}{2}},$$

то функции  $J_a$  определяют по формуле (14.43) формфакторы оператора  $e^{\alpha\varphi} / \langle e^{\alpha\varphi} \rangle$ .

## Задачи

**1.** Покажите, что если набор функций  $\{F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$  удовлетворяет формфакторным аксиомам, то и набор функций  $\{F_O(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} I_s(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$ , где  $I_s$  — собственные значения локального интеграла движения  $\hat{I}_s$  спина  $s \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяет формфакторным аксиомам и отвечает оператору  $O'(x) = [O(x), \hat{I}_s]$ .

**2.** Покажите, что выражения (14.33), (14.34), (14.35) удовлетворяют формфакторным аксиомам.

3. Рассмотрим свободный бозон  $S(\theta) = 1$ . Введем операторы

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d\theta}{2\pi} V(\theta) e^{-iP(\theta)x},$$

$$\sigma(x) = :e^{\rho(x)}:,$$

$$\psi_{\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})} :V(\theta)e^{\rho(x)}:, \quad \rho(x) = - \int_{\mathcal{C}_{\Rightarrow}} \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \frac{e^{-iP(\theta_1, \theta_2)x}}{\text{ch} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} V(\theta_1)V(\theta_2).$$

Покажите, что все эти операторы квазилокальны, причем оператор  $\varphi(x)$  принадлежит классу  $\{\mu\}$ , оператор  $\sigma(x)$  принадлежит классу  $\{\sigma\}$ , а операторы  $\psi_{\pm}(x)$  — классу  $\{\psi\}$ .

4. Выведите условие (14.44) из условия кинематического полюса (14.18). Покажите, что выражение (14.45) удовлетворяет этому условию и не имеет других полюсов.

5\*. Покажите, что функции (14.45) удовлетворяют рекурсионному соотношению

$$J_a(z, x_1, \dots, x_n) = 2 \cos \pi a \cdot J_a(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i R_a(x_i; x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)}{z + x_i}, \quad (14.46)$$

где

$$R_a(z; x_1, \dots, x_n) = -i \sin \pi p \cdot \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i}{z}\right) \right) J_a(x_1, \dots, x_n), \quad (14.47)$$

с начальным условием

$$J_a(\emptyset) = 1. \quad (14.48)$$

Покажите отсюда, что выполняется *отражательное соотношение*

$$J_a(x_1, \dots, x_n) = J_{-a}(x_1, \dots, x_n),$$

а формфакторы единичного оператора, кроме нуль-частичного, обращаются в нуль:

$$J_{1/2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

## Литература

- [1] J. M. Kosterlitz, The critical properties of the two-dimensional xy model, *J. Phys.* C7 (1974) 1046
- [2] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, G. Grinstein, Renormalization group analysis of the phase transition in the 2D Coulomb gas, Sine-Gordon theory and XY-model, *J. Phys.* A13 (1980) 585
- [3] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91
- [4] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088
- [5] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026
- [6] Al. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125
- [7] A. B. Zamolodchikov, *Adv. Stud. Pure Math.* **19** (1989) 641
- [8] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- [9] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
- [10] А. М. Цвельик, Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния.
- [11] М. Сато, М. Дзимбо, Т. Мива, Голономные квантовые поля, М., «Мир», 1983.
- [12] М. Годен, Волновая функция Бете, М., «Мир», 1987
- [13] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи, М., «Наука», 1992
- [14] B. Feigin, E. Frenkel, Integrals of motion and quantum groups, *Lect. Notes Math.* **16** (1993) 139 [arXiv:hep-th/9301039]
- [15] V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.* **177** (1996) 381 [arXiv:hep-th/9412229]; *Commun. Math. Phys.* **190** (1997) 247 [arXiv:hep-th/9604044]; *Commun. Math. Phys.* **200** (1999) 297 [arXiv:hep-th/9805008]
- [16] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 1025
- [17] C. N. Yang and C. P. Yang, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1115
- [18] T. Klassen and E. Melzer, *Nucl. Phys.* **B350** (1990) 635
- [19] R. Dashen, S.-K. Ma, H. J. Bernstein, *Phys. Rev.* **187** (1969) 345
- [20] T. Nakanishi, Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case, arXiv:0909.5480
- [21] Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B348** (1991) 619
- [22] S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B493** (1997) 571 [arXiv:hep-th/9611238]
- [23] V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 652 [arXiv:hep-th/9709034]
- [24] A. Zamolodchikov, arXiv:hep-th/0401146
- [25] F. A. Smirnov, Form factors in completely integrable models of quantum field theory, *Adv. Ser. Math. Phys.* **14** (1992) 1–208
- [26] V. P. Yurov, A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 3419