Лекция 2
Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:[1]

$$S^{MT}[\psi,\bar\psi]=\int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial-m)\psi-\frac{\pi g}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^2\right). \tag{2.1}$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar\psi(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat\partial=\gamma^\mu\partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\qquad \gamma^{\mu+}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^1=\begin{pmatrix} & i\\ i & \end{pmatrix},\qquad \gamma^3=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu=\bar\psi\gamma^\mu\psi. \tag{2.3}$$

В случае $m=0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu=\bar\psi\gamma^3\gamma^\mu\psi=\epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \tag{2.4}$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi]=\int d^2x\,\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi}+\mu\cos\beta\phi\right). \tag{2.5}$$

В этой модели имеется топологическое число

$$q=\frac{\beta}{2\pi}(\phi(t,+\infty)-\phi(t,-\infty)), \tag{2.6}$$

принимающее целые значения. Его можно записать в виде

$$q=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\partial_1\phi(t,x). \tag{2.7}$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j^\mu_{\rm top}=-\frac{\beta}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi. \tag{2.8}$$

Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu j^\mu_{\rm top}=0$ в силу антисимметрии символа $\epsilon^{\mu\nu}$ и коммутативности производных.

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [4, 5], причем параметры двух моделей связаны соотношениями

$$g=\beta^{-2}-1, \tag{2.9}$$
$$\mu\sim mr_0^{\beta^2-1}, \tag{2.10}$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu=j^\mu_{\rm top}. \tag{2.11}$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (2.11) играет ключевую роль в бозонизации.

[1] Множитель π перед константой g добавлен, чтобы упростить вид точных ответов.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi,\bar{\psi}] = \int d^2x(i\psi_1^+(\partial_0+\partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+(\partial_0-\partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 - x^0$, $\bar{z} = x^1 + x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi,\bar{\psi}] = \int d^2x(2i\psi_1^+\bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+\partial\psi_2 + im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) - 2\pi g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = -2\psi_2^+\psi_2, \qquad j^{\bar{z}} = 2\psi_1^+\psi_1.$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение[3]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+\psi_2\psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+\psi_1\psi_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из сохранения тока $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu$ следует, что ток j^μ можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi}\,\partial^\mu\tilde{\phi}. \tag{2.13}$$

Здесь $\tilde{\phi}$ и ϕ связаны между собой соотношением дуальности (1.20), описанным в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu\partial^\mu\tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только z и $\bar{z}$ соответственно. Коэффициент в (2.13) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (2.11).

Мы видим, что безмассовая модель Тирринга эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из соотношения (2.13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi}\,\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1, \qquad \frac{\beta}{2\pi}\,\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2. \tag{2.15}$$

Если продолжать искать классическое решение, следует подставить эти функции в уравнения (2.12). Решая последние, находим

$$\psi_1(z,\bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \qquad \psi_2(z,\bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)} \tag{2.16}$$

с произвольными функциями F_i. Подставляя обратно в (2.15), получаем

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi(z) = F_1(z)F_1^*(z), \qquad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z}) = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}), \tag{2.17}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение функции в предположении вещественности аргумента. Остается проинтегрировать эти уравнения и подставить результат в (2.16). В результате поля ψ_i выражаются через две функции F_i и две константы интегрирования.

Перейдем к квантовому случаю. Давайте искать решение уравнений (2.15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{i\alpha_i\varphi(z)+i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \qquad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1}\sqrt{\frac{N_i}{2\pi}}e^{-i\alpha_i\varphi(z)-i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \tag{2.18}$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i. Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \tag{2.19}$$

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Рассмотрим произведение

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j\frac{\sqrt{N_iN_j}}{2\pi}(z'-z)^{\alpha_i\alpha_j}(\bar z'-\bar z)^{\beta_i\beta_j}e^{i\alpha_i\varphi(z')+i\beta_i\bar\varphi(\bar z')+i\alpha_j\varphi(z)+i\beta_j\bar\varphi(\bar z)}. \tag{2.20}$$

Это выражение хорошо продолжается в эвклидову область. Из требования антикоммутативности легко получить, что

$$\alpha_i^2-\beta_i^2\in 2\mathbb{Z}+1, \qquad \alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\in 2\mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Из (2.20) видно, что произведения вроде $\psi_1^+\psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим другое произведение:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi}(z'-z)^{-\alpha_1^2}\left(\bar z'-\bar z\right)^{-\beta_1^2}\left(1-i\alpha_1(z'-z)\partial\phi(x)-i\beta_1(\bar z'-\bar z)\bar\partial\phi(x)+\ldots\right). \tag{2.22}$$

Усредним это произведение по окружности $|z'-z|^2=r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2-\beta_1^2=1. \tag{2.23}$$

Тогда первый и третий члены в разложении (2.22) при усреднении обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$N_1r_0^{-2\beta_1^2}\left(\frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi}\right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+\psi_1$. Мы видим, что если бы мы потребовали буквальной эрмитовой сопряженности ψ и ψ^+, множитель i в $-i\alpha_1\varphi(z)$ испортил бы нам эрмитовость оператора $\psi_1^+\psi_1$.

Сравнивая с (2.15), получаем

$$\beta = -ir_0^{-2\beta_1^2}N_1\alpha_1. \tag{2.24}$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2-\beta_2^2=-1, \tag{2.25}$$

получим

$$\beta = -ir_0^{-2\alpha_2^2}N_2\beta_2. \tag{2.26}$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (2.12). Подставляя (2.15) и (2.18) , получим

$$\begin{aligned} i\beta_1\bar\partial\bar\varphi e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar\varphi} &= -i\frac{g\beta}{2}\bar\partial\bar\varphi e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar\varphi}, \\ i\alpha_2\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar\varphi} &= i\frac{g\beta}{2}\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_2=-\beta_1=\frac{g\beta}{2}, \tag{2.27}$$

что, конечно же, согласуется с классическим решением.

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i, β_i, нужно узнать еще нормировочные множители N_i. Вместо того, чтобы аккуратно извлекать сингулярные члены в антикоммутаторах, давайте просто зафиксируем их так, чтобы член $-m\bar\psi\psi = im(\psi_1^+\psi_2-\psi_2^+\psi_1)$ был бы пропорционален $\cos\beta\phi$.

Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1}\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi}(z'-z)^{-\alpha_1\alpha_2}(\bar z'-\bar z)^{-\beta_1\beta_2}\left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar\varphi(\bar z)}+\ldots\right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \tag{2.28}$$

что согласуется с (2.23–2.27) и дает, кроме того,

$$\alpha_1 = -\beta_2 \tag{2.29}$$

Если отождествить $\psi_2^+\psi_1 \sim e^{i\beta\phi}$, мы получим

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta, \tag{2.30}$$
$$\beta_1 - \beta_2 = \beta. \tag{2.31}$$

Из (2.23), (2.27), (2.29), (2.30) легко получить

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\beta\right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Подставляя ответ в (2.27), получаем (2.9).

Из (2.24), (2.26) находим

$$N_1 = -N_2 = ir_0^{\frac{\beta^2}{2}+\frac{1}{2\beta^2}-1}\frac{2\beta^2}{\beta^2+1}, \tag{2.33}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+\psi_1 = \frac{1}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}r_0^{\beta^2-1}\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+\psi_2 = \frac{1}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}r_0^{\beta^2-1}\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{-1}e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Так как на бесконечной плоскости суммарный «заряд» должен быть равен нулю, операторы $e^{i\beta\phi}$ и $e^{-i\beta\phi}$ должны встречаться в равных количествах для корреляционных функций, полиномиальных по φ, $\bar{\varphi}$. Поэтому множители $\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{\pm 1}$ тоже сократятся. В более общем случае их можно опустить, переопределив операторы:

$$\left(i\eta_1\eta_2^{-1}\right)^{\alpha/\beta}e^{i\alpha\phi} \to e^{i\alpha\phi}.$$

Тогда имеем

$$i(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1) = \frac{2}{\pi}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}r_0^{\beta^2-1}\cos\beta\phi, \tag{2.34}$$

откуда находим (2.10).

Строго говоря, пока мы нашли точное решение только для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теория возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos\beta\phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий[4, 5]. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордона, причем

$$\mu \sim m_{\mathrm{phys}}^{2-\beta^2}, \qquad m \sim m_{\mathrm{phys}}(m_{\mathrm{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\mathrm{phys}}(m_{\mathrm{phys}}r_0)^{\frac{g}{1+g}}, \tag{2.35}$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\mathrm{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [6].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$.

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (2.4) сохраняется. Найдите дивергенцию этого тока при ненулевой массе.

2. В модели свободных безмассовых дираковских фермионов ($m = 0$, $g = 0$) найдите парные корреляционные функции фермионных полей $\langle \psi_i^+(x')\psi_j(x)\rangle$.

3. Получите все классические решения уравнения синус-Гордона $\phi(t,x)$ с конечной энергией, зависящие только от $x - vt$ с некоторой константой v, $|v| < 1$. Найдите топологические заряды этих решений.

4. Повторите рассуждения лекции в специальном случае свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$.

5*. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (2.35), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m\left(1 + g\log\frac{\Lambda}{m}\right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.
При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi,\bar\psi,A^\mu] = \int d^2x\,\left(\bar\psi(i\hat\partial - \hat A - m)\psi + \frac{1}{2\pi g}A^\mu A_\mu\right).$$

Семинар 2

Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T^\mu_\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda\int d^2x\,\Phi_\Delta(x). \tag{2.36}$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar\partial T(x) = 0$$

Это значит, что для любых локальных операторов $\Phi_1,\dots,\Phi_N$ имеет место тождество

$$\langle\bar\partial T(x)\Phi_1(x_1)\cdots\Phi_N(x_N)\rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1,\dots,x_N.$$

Когда $x = x_i$ это уравнение может нарушаться. Рассмотрим, например, операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_\Delta(x') &= \frac{\Delta\Phi_\Delta(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_\Delta(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_\Delta(x')\,\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_\Delta(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Дифференцируя по $\bar z$, получаем

$$\Phi_\Delta(x')\,\bar\partial T(x) = \Delta\Phi_\Delta(x')\,\bar\partial\partial'(z-z')^{-1} + \partial'\Phi_\Delta(x')\,\bar\partial(z-z')^{-1} + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\bar\partial\frac{1}{z} = \pi\delta(x). \tag{2.37}$$

Отсюда находим

$$\Phi_\Delta(x')\bar\partial T(x) = \pi\Delta\Phi_\Delta(x')\,\partial'\delta(x-x') + \partial'\Phi_\Delta(x')\,\delta(x-x') + O(1).$$

и

$$\int d^2x'\,\Phi_\Delta(x')\bar\partial T(x)=\pi(1-\Delta)\partial\Phi_\Delta(x). \tag{2.38}$$

Теперь рассмотрим среднее от $\bar\partial T(x)X$ с любым X в виде произведения от локальных операторов в первом порядке теории возмущений:

$$\langle\bar\partial T(x)X\rangle=\frac{\langle e^{-S_1}\bar\partial T(x)X\rangle_0}{\langle e^{-S_1}\rangle_0}\simeq-\lambda\int d^2y\,\langle\Phi_\Delta(y)\bar\partial T(x)X\rangle_0\simeq-\pi(1-\Delta)\lambda\langle\partial\Phi(x)X\rangle.$$

Получаем

$$\bar\partial T(x)=\partial\Theta(x), \tag{2.39}$$

где[2]

$$\Theta(x)=2\pi T_{z\bar z}(x)=-\pi(1-\Delta)\lambda\Phi(x)+O(\lambda^2). \tag{2.40}$$

Аналогично

$$\partial\bar T(x)=\bar\partial\Theta(x). \tag{2.41}$$

Выражение (2.40) может оказаться точным, если

$$(z'-z)\Phi(x')\left(\int d^2y\,\Phi(y)\right)^k T(x)=o(1),\quad \text{если } k>0. \tag{2.42}$$

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0=\int d^2x\,\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi},\qquad \Phi_\Delta=-\cos\beta\phi,\qquad \lambda=\mu,\qquad \Delta=\frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x)=-\frac12(\partial\phi)^2,\qquad \bar T(x)=-\frac12(\bar\partial\phi)^2,\qquad \Theta(x)=\pi(1-\beta^2/2)\mu\cos\beta\phi+O(\mu^2). \tag{2.43}$$

Однако условие (2.42) обращения в нуль высших поправок для $\Theta(x)$ не выполняется. Действительно, нетрудно проверить, что левая часть имеет порядок $(z'-z)^{-1}|z'-z|^{2k-k(k+1)\beta^2}$, и при любом значении β условие (2.42) нарушается при достаточно больших k.

Решить эту проблему можно двумя способами. Первый состоит в том, чтобы предположить, что поправки аналитичны по β^2 и если n-тый член теории возмущений обращается в нуль при достаточно малых β^2, то он обращается в нуль тождественно. Тем не менее, предположение об аналитичности требует некоторого обоснования.

[2] Заметим, что мы опускаем и поднимаем индексы с помощью метрики пространства Минковского $g_{z\bar z}=-1/2$, $g_{zz}=g_{\bar z\bar z}=0$.