Лекция 8

Решение модели Тирринга методом анзаца Бете: спектр частиц и матрица рассеяния

Рассмотрим теперь море фермионов с дырками. Для этого обобщим уравнение (7.30):

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi_k = -2\pi n_k + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi_k - \xi_l). \tag{8.1}$$

Далее, определим $\xi(n)$ уравнением

$$m_0 L \operatorname{sh} \xi(n) = -2\pi n + \sum_{l=1}^{N} \Phi(\xi(n) - \xi_l) \tag{8.2}$$

В термодинамическом пределе определим спектральную плотность состояний $\rho(\xi)$ и спектральную плотность частиц $\rho^\bullet(\xi)$ следующим образом:

$$\rho(\xi(n)) = \frac{2\pi}{L|\xi(n+1) - \xi(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dn}{d\xi(n)}\right|, \qquad \rho^\bullet(\xi) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\xi_{k+1} - \xi_k|}\right\rangle_{\xi_k \simeq \xi} = \left\langle \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dk}{d\xi_k}\right|\right\rangle_{\xi_k \simeq \xi}. \tag{8.3}$$

Вместо спектральной плотности частиц нам будет удобнее использовать спектральную плотность дырок $\rho^\circ(\xi) = \rho(\xi) - \rho^\bullet(\xi)$. В частности для одной дырки с параметром $\xi = \xi_0$ имеем $\rho^\circ(\xi) = 2\pi L^{-1}\delta(\xi - \xi_0)$. Совершенно аналогично выводу уравнения (6.26) получим интегральное уравнение

$$m_0 \operatorname{ch} \xi = \rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi}\, \Phi'(\xi - \xi')(\rho(\xi') - \rho^\circ(\xi')). \tag{8.4}$$

Обозначив через $\rho_0(\xi)$ вакуумную плотность, то есть решение уравнения (7.31), и вычтя это уравнение из (8.4), получим

$$\delta\rho(\xi) + \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi}\, \Phi'(\xi - \xi')\delta\rho(\xi') = \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi'}{2\pi}\, \Phi'(\xi - \xi')\rho^\circ(\xi'). \tag{8.5}$$

Здесь

$$\delta\rho(\xi) = \rho(\xi) - \rho_0(\xi).$$

В пределе $\Theta \to \infty$ это уравнение легко решить методом Фурье. Применяя преобразование Фурье (7.35), получаем алгебраическое уравнение

$$\delta\tilde\rho(\omega) + \tilde\Phi'(\omega)\delta\tilde\rho(\omega) = \tilde\Phi'(\omega)\tilde\rho^\circ(\omega).$$

Легко проверить, что

$$\delta\tilde\rho(\omega) = -\frac{\operatorname{sh} \pi g\omega}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi(1-g)\omega}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi(1+g)\omega}{2}}\tilde\rho^\circ(\omega). \tag{8.6}$$

Начнем исследование решения (8.6) с вычисления заряда возбуждения, отвечающего дырке. Казалось бы, заряд дырки должен быть равен $N - N_0 = -1$. Однако это не так из-за ультрафиолетового обрезания. Когда меняется плотность дырок, меняется и плотность состояний, так что число состояний под обрезкой, то есть, в интервале $-\Theta < \xi < \Theta$ тоже меняется. Нас будут интересовать две величины:

$$\begin{aligned} \Delta N &= -L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi}\, \rho^\circ(\xi) = -L\tilde\rho^\circ(0), \\ \Delta Q &= L \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{d\xi}{2\pi}\, (\delta\rho(\xi) - \rho^\circ(\xi)). \end{aligned} \tag{8.7}$$

В первой строчке мы предполагаем, что все дырки находятся под обрезкой, то есть $\rho^\circ(\xi) = 0$ при $|\xi| > \Theta$. Отношение

$$z^\circ = -\frac{\Delta Q}{\Delta N} \tag{8.8}$$

дает заряд дырки. Вычисляя

$$\Delta Q = -L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega\xi}\frac{\operatorname{sh}\pi\omega}{2\operatorname{sh}\frac{\pi(1-g)}{2}\omega\operatorname{ch}\frac{\pi(1+g)}{2}\omega}\tilde\rho^\circ(\omega)\simeq\frac{\Delta N}{1-g}, \tag{8.9}$$

находим

$$z^\circ = -\frac{1}{1-g}. \tag{8.10}$$

Мы видим, что заряд дырки не является целым числом в терминах псевдочастиц. Иными словами, заряд частиц перенормируется.

Эта перенормировка имеет существенное последствие. Чтобы понять его, вернемся к выводу гамильтониана (7.2). Мы формально выводили его по классическим правилам из классического действия. Квантовый эффект состоит в том, что одна физическая частица составляет $|z^\circ|$ псевдочастиц, определенных в (7.6):

$$Q = |z^\circ|\int dx\,\psi^+_{\rm phys}\psi_{\rm phys} + \mathrm{const}\,, \tag{8.11}$$

где $\psi_{\rm phys}$ — физические поля, то есть именно те поля, которые обсуждались в лекции 2. Это значит, что

$$\psi = |z^\circ|^{1/2}\psi_{\rm phys}. \tag{8.12}$$

Подставляя это в гамильтониан (7.2), мы видим, что физическая константа $g_{\rm phys}$ (которая была обозначена как g в лекции 2) связана с формальной константой g соотношением

$$g_{\rm phys} = g|z^\circ| = \frac{g}{1-g} \quad\Leftrightarrow\quad g^{-1}_{\rm phys} = g^{-1}-1. \tag{8.13}$$

Если формальная константа связи меняется в пределах $-1\le g<1$, то физическая меняется в пределах $-\frac12\le g_{\rm phys}<\infty$ в согласии с результатами бозонизации.

Теперь вычислим энергию и импульс возбуждений. Энергия $E[\rho^\circ]$ и импульс $P[\rho^\circ]$ системы являются функционалами плотности дырок ρ°, причем энергия, связанная с возбуждениями, определяется как разность $E[\rho^\circ]-E[0]$. Имеем

$$E[\rho^\circ]-E[0] = m_0L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,(\rho^\circ(\xi)-\delta\rho(\xi))\operatorname{ch}\xi,$$
$$P[\rho^\circ] = m_0L\int_{-\Theta}^{\Theta}\frac{d\xi}{2\pi}\,(\rho^\circ(\xi)-\delta\rho(\xi))\operatorname{sh}\xi.$$

Ситуация здесь различна при положительных и отрицательных g.

При $g<0$ интегралы в этих выражениях сходятся при $\Theta\to\infty$. Но если мы положим $\Theta=\infty$, мы получим, что $E[\rho^\circ]-E[0]=P[\rho^\circ]=0$, так как $\delta\tilde\rho(\pm i)=\tilde\rho^\circ(\pm i)$. Поэтому следует перенормировать затравочную массу m_0. Явное вычисление первой поправки, связанной с полюсами функции $\delta\tilde\rho(\omega)$ в точках $\omega=\pm i(1+g)^{-1}$ дает

$$E[\rho^\circ]-E[0] = L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{2\pi}\,\epsilon(\xi)\rho^\circ(\xi), \qquad P[\rho^\circ] = L\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{2\pi}\,p(\xi)\rho^\circ(\xi) \tag{8.14}$$

где

$$\epsilon(\lambda) = m\operatorname{ch}\frac{\lambda}{1+g}, \qquad p(\lambda) = m\operatorname{sh}\frac{\lambda}{1+g}, \qquad m = \frac{M}{\pi g}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1-g}{1+g}\right), \tag{8.15}$$

а константа M определяется равенством

$$m_0 = M\exp\left(-\frac{g}{1+g}\Theta\right)\sim M\left(\frac{m_0}{\Lambda}\right)^{g/(1+g)}. \tag{8.16}$$

Таким образом, частицы имеют релятивистский спектр с быстротой

$$\theta = \frac{\xi}{1+g}. \tag{8.17}$$

Вспоминая (2.39) и учитывая, что μ пропорционально m_0, получаем

$$m_0 \sim M^{2-\beta^2}, \tag{8.18}$$

где β — константа связи модели синус-Гордона. Сравнивая это с (8.16), получаем соотношение

$$g = 1 - \beta^2.$$

В терминах физической константы связи имеем

$$g_{\text{phys}} = \beta^{-2} - 1,$$

что согласуется с (2.9). Заметим, что в первом порядке по теории возмущений по константе g разница между формальной и физической константами связи отсутствует. Она появляется в высших порядках теории возмущений, и важна для правильной интерпретации точных результатов.

При $g > 0$ ситуация несколько иная. Полюсы функции $\delta\tilde{\rho}(\omega)$ при $\omega = \pm i(1+g)^{-1}$ становятся ближе к вещественной оси, чем точки $\pm i$. Это значит, что интегралы в формулах для импульса и энергии расходятся, что соответствует $m_0 \to 0$. Строго говоря, требуется явное вычисление $\delta\rho(\xi)$ и затем интегралов для энергии и импульса возбуждений. Однако вся эта процедура приводит к ответам, получающимся аналитическим продолжением из области $g < 0$. Поэтому формула для перенормировки массы (8.16) верна и в этом случае.

Из выражения (8.6) можно немедленно извлечь матрицу рассеяния дырок. Чтобы сделать это, сравним изменение плотности состояний в модели Тирринга под влиянием дырок с изменением плотности состояний под влиянием частиц во вспомогательной модели частиц с заданной матрицей рассеяния. Именно, рассмотрим систему «бесспиновых» фермионов массы m с матрицей рассеяния $a(\theta) = e^{i\Psi(\theta)}$, $\Psi(-\theta) = -\Psi(\theta)$. Предположим, что эти фермионы живут в пространстве длины L с циклическими граничными условиями. Совершенно аналогично (7.25) получаем

$$e^{imL\operatorname{sh}\theta_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N} a(\theta_k - \theta_l) = 1. \tag{8.19}$$

Прологарифмируем уравнения:

$$mL\operatorname{sh}\theta_k + \sum_{l=1}^{N} \Psi(\theta_k - \theta_l) = 2\pi n_k. \tag{8.20}$$

и сделаем термодинамический предел. Для этого определим $\theta(n)$ уравнением

$$mL\operatorname{sh}\theta(n) + \sum_{k=1}^{N} \Psi(\theta(n) - \theta_l) = 2\pi n. \tag{8.21}$$

Затем расположим n_k по возрастанию и положим

$$\rho_*(\theta(n)) = \frac{2\pi}{L|\theta(n+1)-\theta(n)|} \simeq \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dn}{d\theta(n)}\right|, \qquad \rho_*^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L|\theta_{k+1}-\theta_k|} \right\rangle_{\theta_k\simeq\theta} = \left\langle \frac{2\pi}{L}\left|\frac{dk}{d\theta_k}\right| \right\rangle_{\theta_k\simeq\theta}. \tag{8.22}$$

Величина $\rho_*(\theta)$ имеет смысл плотности состояний, а величина $\rho_*^\bullet(\theta)$ имеет смысл плотности частиц. Тогда уравнение для плотности состояний примет вид

$$m\operatorname{ch}\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi}\, \Psi'(\theta-\theta')\rho_*^\bullet(\theta') = \rho_*(\theta). \tag{8.23}$$

При нулевой плотности частиц $\rho_*^\bullet$ имеем $\rho_{*0}(\theta) = m\operatorname{ch}\theta$. Полагая $\delta\rho_* = \rho_* - \rho_{*0}$, имеем

$$\delta\rho_*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi}\, \Psi'(\theta-\theta')\rho_*^\bullet(\theta'). \tag{8.24}$$

Перейдем к фурье-образам
$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\int\frac{d\theta}{2\pi}\,\delta\rho_*(\theta)e^{i\theta\omega}\quad\text{и т.д.}$$
Уравнение (8.24) принимает вид
$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\tilde\Psi'(\omega)\rho^\bullet_*(\omega). \tag{8.25}$$

Теперь предположим, что вспомогательные фермионы и есть наши дырки. С учетом (8.17) отождествляем
$$\delta\rho_*(\theta)=\alpha\delta\rho(\alpha\theta),\qquad \rho^\bullet_*(\theta)=\alpha\rho^\circ(\alpha\theta),\qquad \alpha=1+g=2-\beta^2. \tag{8.26}$$
Имеем
$$\delta\tilde\rho_*(\omega)=\delta\tilde\rho(\alpha^{-1}\omega),\qquad \tilde\rho^\bullet_*(\omega)=\tilde\rho^\circ(\alpha^{-1}\omega). \tag{8.27}$$
В этом предположении, сравнивая (8.27) с (8.6), получаем
$$i\Psi(\theta)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\omega}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh}\pi\omega\operatorname{sh}\frac{\pi p\omega}{2}}e^{-i\theta\omega}=2i\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi\omega}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi(p-1)\omega}{2}}{\operatorname{sh}\pi\omega\operatorname{sh}\frac{\pi p\omega}{2}}\sin\theta\omega, \tag{8.28}$$
где параметр p определен соотношением
$$\beta^2=2\frac{p}{p+1}.$$

Таким образом, функция $a(\theta)=e^{i\Psi(\theta)}$ является на самом деле компонентой матрицы рассеяния для одного типа частиц — антифермионов в массивной модели Тирринга. Опишем полную S-матрицу модели Тирринга/синус-Гордона [8]. Фермионная S-матрица является матрицей 4×4 в базисе $(++,+-,-+,--)$ («+» отвечает фермионам, а «−» — антифермионам):
$$S_{\mathrm{MT}}(\theta)=\left(S_{\mathrm{MT}}(\theta)^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}\right)=\begin{pmatrix}a(\theta)&&&\\&b(\theta)&c(\theta)&\\&c(\theta)&b(\theta)&\\&&&a(\theta)\end{pmatrix}. \tag{8.29}$$
Солитонная (бозонная) S-матрица для модели синус-Гордона отличается от этой S-матрицы только знаком:
$$S_{\mathrm{SG}}(\theta)^{\alpha'_1\alpha'_2}_{\alpha_1\alpha_2}=-S_{\mathrm{MT}}(\theta)^{\alpha'_1\alpha'_2}_{\alpha_1\alpha_2},\qquad \alpha_i,\alpha'_i=\pm. \tag{8.30}$$
Именно эту матрицу мы будем ниже обозначать через $S(\theta)$. Функцию $a(\theta)$ можно записать в виде
$$a(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac1p\right)\Gamma\left(1+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac1p+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}\prod_{n=1}^\infty\frac{R_n(\theta)R_n(i\pi-\theta)}{R_n(0)R_n(i\pi)},\qquad R_n(\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{2n}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)\Gamma\left(1+\frac{2n-1}{p}+\frac{i\theta}{\pi p}\right)}. \tag{8.31}$$
Это нетрудно проверить с помощью формулы Бине́ для логарифма гамма-функции:
$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac12\right)\log z-z+\frac{\log 2\pi}{2}+\int_0^\infty\frac{dt}{t}\,e^{-tz}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac1t+\frac12\right).$$
Отношения коэффициентов $b(\theta)/a(\theta)$ и $c(\theta)/a(\theta)$ можно найти, решив уравнение Янга—Бакстера совместно с уравнением кроссинг-симметрии. Ответ имеет вид
$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{\theta}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}},\qquad \frac{c(\theta)}{a(\theta)}=\frac{\operatorname{sh}\frac{i\pi}{p}}{\operatorname{sh}\frac{i\pi-\theta}{p}}. \tag{8.32}$$
Соотношения (8.32) получаются решением уравнения Янга—Бакстера вместе с условием кроссинг-симметрии:
$$a(i\pi-\theta)=b(\theta),\qquad c(i\pi-\theta)=c(\theta). \tag{8.33}$$
Выражение (8.31) можно получить как «минимальное» решение уравнения кроссинг-симметрии вместе с условием унитарности
$$a(\theta)a(-\theta)=1,\qquad b(\theta)b(-\theta)+c(\theta)c(-\theta)=1,\qquad b(\theta)c(-\theta)+c(\theta)b(-\theta)=0, \tag{8.34}$$

которое сводится в данном случае к одному первому уравнению: $a(\theta)a(-\theta) = 1$.

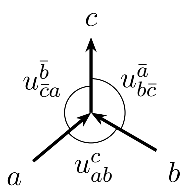
Формула (8.31) позволяет легко найти особенности функций $a(\theta)$, $b(\theta)$ и $c(\theta)$ на мнимой оси. Особенность в интервале $(0, i\pi)$ (т.е. на физическом листе) отвечает связанному состоянию, если знак вычета по переменной $u = -i\theta$ в бозонной S-матрице положителен. При $0 < p < 1$ $(0 < \beta^2 < 1)$ такие полюсы есть у $b(\theta)$ и $c(\theta)$:

$$u_n = -i\theta_n = \pi - \pi p n, \qquad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor. \tag{8.35}$$

Это отвечает нейтральным связанным состояниям (бризерам в модели синус-Гордона) с массами

$$M_n = 2m \sin \frac{\pi p n}{2} \tag{8.36}$$

Матрицы рассеяния связанных состояний можно вычислить по следующему правилу. Пусть частица массы m_c является связанным состоянием частиц масс m_a и m_b, то есть диагональный матричный элемент $S(iu)^{ab}_{ab}$ бозонной матрицы рассеяния имеет полюс при $u = u^c_{ab}$ с положительным вычетом. Графически изобразим это так:



$$u^c_{ab} + u^{\bar b}_{\bar c a} + u^{\bar a}_{b \bar c} = 2\pi, \qquad \bar u^c_{ab} = \pi - u^c_{ab},$$
$$0 < u^c_{ab}, u^{\bar b}_{\bar c a}, u^{\bar a}_{b \bar c} < \pi, \qquad \bar u^{\bar b}_{\bar c a} = \pi - u^{\bar b}_{\bar c a}, \tag{8.37}$$
$$\bar u^{\bar a}_{b \bar c} = \pi - u^{\bar a}_{b \bar c}.$$

Массы и угловые переменные связаны кинематическим соотношением

$$m_c = m_a e^{\pm i \bar u^{\bar b}_{\bar c a}} + m_b e^{\mp i \bar u^{\bar a}_{b \bar c}}. \tag{8.38}$$

Более явно

$$\cos u^c_{ab} = \frac{m_c^2 - m_a^2 - m_b^2}{2 m_a m_b}, \qquad \frac{\sin u^{\bar b}_{\bar c a}}{\sin u^{\bar a}_{b \bar c}} = \frac{m_b}{m_a}. \tag{8.39}$$

Очевидно, что при условиях (8.37) выполняется неравенство

$$|m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b. \tag{8.40}$$

Все уравнения обладают симметрией относительно перестановок a, b, c. В симметричном виде можно написать

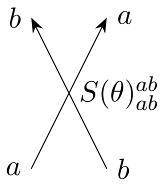
$$\sin u^c_{ab} = \frac{\sqrt{2 m_a^2 m_b^2 + 2 m_a^2 m_c^2 + 2 m_b^2 m_c^2 - m_a^4 - m_b^4 - m_c^4}}{2 m_a m_b}. \tag{8.41}$$

Имеем

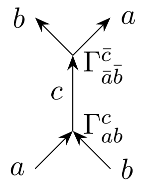
$$S(\theta)^{ab}_{ab} = \sum_c \frac{i \Gamma^c_{ab} \Gamma^{\bar c}_{\bar a \bar b}}{\theta - i u^c_{ab}} + O(1) \quad \text{при } \theta \to i u^c_{ab}. \tag{8.42}$$

Знак суммирования по c означает суммирование по различным внутренним состояниям частицы c. Графически изобразим это равенство так

$$-i \operatorname*{Res}_{\theta = i u^c_{ab}}$$

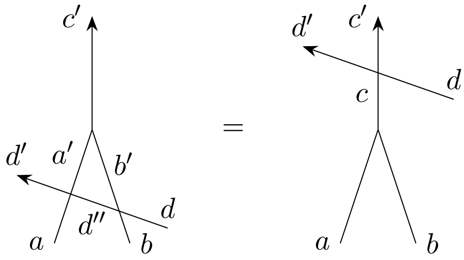


$$=$$



(8.43)

Здесь коэффициенты Γ^c_{ab} приписаны вершинам. Теперь возьмем нижнюю половину диаграммы в правой части и пересечем ее с линией некоторой четвертой частицы d. Поскольку, вообще говоря, нам понадобятся недиагональные элементы матриц рассеяния, будем штрихами ($a', \ldots$) другие состояния тех же частиц. Имеем



(8.44)

Явно имеем уравнение на S-матрицу рассеяния частиц c и d:

$$\sum_{a',b',d''} \Gamma^{c'}_{a'b'} S(\theta + i\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a})^{a'\,d'}_{a\,d''} S(\theta - i\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}})^{b'\,d''}_{b\,d} = \sum_c \Gamma^c_{ab} S(\theta)^{c'\,d'}_{c\,d}. \tag{8.45}$$

Очень часто можно подобрать базис так, чтобы уравнение имело только одно промежуточное состояние c в правой стороне. Тогда правая сумма исчезает, и уравнение превращается в явное выражение для S-матрицы. Иногда можно сделать так, чтобы в уравнение входили только диагональные матричные элементы. Тогда знаки суммы в обеих частях, а также коэффициенты Γ исчезают, и мы получаем простую формулу

$$S(\theta)^{cd}_{cd} = S(\theta + i\bar{u}^{\bar{b}}_{\bar{c}a})^{ad}_{ad} S(\theta - i\bar{u}^{\bar{a}}_{b\bar{c}})^{bd}_{bd}. \tag{8.46}$$

В рассматриваемой модели это так, поскольку связанные состояния нейтральны и пространства их внутренних состояний одномерны. Для рассеяния фермиона на связанном состоянии можно получить:

$$S_{\pm n}(\theta) \equiv S(\theta)^{\pm n}_{\pm n} = \prod_{k=1}^{n} S_{+1}\left(\theta + \tfrac{i\pi p(n+1-2k)}{2}\right), \qquad S_{+1}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi(1-p)}{4}\right)}. \tag{8.47}$$

При этом $S_{\pm n}(\theta) = S_{n\pm}(\theta)$. Рассеяние двух связанных состояний (бризеров) дается выражением:

$$S_{nn'}(\theta) \equiv S(\theta)^{nn'}_{nn'} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n'} S_{11}\left(\theta + \tfrac{i\pi p(n-n'-2k+2l)}{2}\right), \qquad S_{11}(\theta) = \frac{\operatorname{th}\frac{\theta + i\pi p}{2}}{\operatorname{th}\frac{\theta - i\pi p}{2}}. \tag{8.48}$$

Из этих формул нетрудно убедиться, что n-тый бризер является также связанным состоянием m-го и m'-го бризеров при $|m - m'| \le n \le m + m'$, $n - m - m' \in 2\mathbb{Z}$.

Задачи

1. Возьмите интеграл в (8.9) и получите (8.10).

2. Получите соотношения (8.14)–(8.15).

3. Найдите предел матрицы рассеяния (8.29)–(8.32) в пределе малых g и покажите, что он совпадает с (3.13).

4. Найдите квазиклассический в смысле модели синус-Гордона ($\beta^2 \to 0$) предел матриц рассеяния $S_{11}(\theta)$ и $S_{\pm 1}(\theta)$ и покажите, что он дается формулами (3.17), (3.34).

5*. Найдите спектр возбуждений, отвечающих решениям, у которых в дополнение к до конца заполненному морю Дирака имеются вещественные корни Бете. Найдите заряд этих возбуждений и их матрицу рассеяния. Отдельно рассмотрите случаи $-\frac{1}{3} < g < 0$ и $g > 0$.

Семинар 8

Решение уравнения Янга—Бакстера для модели Тирринга