

Лекция 2. Бозонизация модели Тирринга

Михаил Лашкевич

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \right). \quad (1)$$

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — поле дираковского фермиона и его дираковское сопряжение. γ -Матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — поле дираковского фермиона и его дираковское сопряжение. γ -Матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Их можно выбрать в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — поле дираковского фермиона и его дираковское сопряжение. γ -Матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Их можно выбрать в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Модель содержит сохраняющиеся токи

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3)$$

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — поле дираковского фермиона и его дираковское сопряжение. γ -Матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Их можно выбрать в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Модель содержит сохраняющиеся токи

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3)$$

Если $m = 0$, имеется еще один сохраняющийся

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^\mu \psi = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu, \quad \epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = -1. \quad (4)$$

Массивная модель Тирринга в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{\pi g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — поле дираковского фермиона и его дираковское сопряжение. γ -Матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Их можно выбрать в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Модель содержит сохраняющиеся токи

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3)$$

Если $m = 0$, имеется еще один сохраняющийся

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^\mu \psi = -\epsilon^{\mu\nu} j_\nu, \quad \epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = -1. \quad (4)$$

Возбуждения: фермион, антифермион и при $g > 0$ нейтральные бозонные связанные состояния.

Модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

Модель синус-Гордона

Модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

В модели есть **топологическое число**

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)) \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Модель синус-Гордона

Модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

В модели есть **топологическое число**

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)) \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Оно сохраняется на решениях, и его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} df_\mu j_{\text{top}}^\mu, \quad (7)$$

где $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu$ — одномерный элемент поверхности,

Модель синус-Гордона

Модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

В модели есть **топологическое число**

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)) \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Оно сохраняется на решениях, и его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} df_\mu j_{\text{top}}^\mu, \quad (7)$$

где $df_\mu = \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu$ — одномерный элемент поверхности, а j_{top}^μ — **топологический ток**:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad \partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0. \quad (8)$$

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$.

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$. Можно сказать, что решение $\phi(x)$ с конечной энергией обладает **топологическим зарядом** q , если

- $\phi(x) \rightarrow \phi_i$ as $x^1 \rightarrow -\infty$,
- $\phi(x) \rightarrow \phi_{i+q}$ as $x^1 \rightarrow +\infty$.

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$. Можно сказать, что решение $\phi(x)$ с конечной энергией обладает **топологическим зарядом** q , если

- $\phi(x) \rightarrow \phi_i$ as $x^1 \rightarrow -\infty$,
- $\phi(x) \rightarrow \phi_{i+q}$ as $x^1 \rightarrow +\infty$.

Теорема

В этих условиях любое нетривиальное **стационарное** решение $\phi(x) = \varphi(x^1)$ обладает топологическим зарядом $q = \pm 1$.

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$. Можно сказать, что решение $\phi(x)$ с конечной энергией обладает **топологическим зарядом** q , если

- $\phi(x) \rightarrow \phi_i$ as $x^1 \rightarrow -\infty$,
- $\phi(x) \rightarrow \phi_{i+q}$ as $x^1 \rightarrow +\infty$.

Теорема

В этих условиях любое нетривиальное **стационарное** решение $\phi(x) = \varphi(x^1)$ обладает топологическим зарядом $q = \pm 1$.

Доказательство. Стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$\partial_1^2 \varphi = U'(\varphi).$$

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$. Можно сказать, что решение $\phi(x)$ с конечной энергией обладает **топологическим зарядом** q , если

- $\phi(x) \rightarrow \phi_i$ as $x^1 \rightarrow -\infty$,
- $\phi(x) \rightarrow \phi_{i+q}$ as $x^1 \rightarrow +\infty$.

Теорема

В этих условиях любое нетривиальное **стационарное** решение $\phi(x) = \varphi(x^1)$ обладает топологическим зарядом $q = \pm 1$.

Доказательство. Стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$\partial_1^2 \varphi = U'(\varphi).$$

Это уравнение Ньютона с потенциалом $-U(\varphi)$. Точки ϕ_i соответствуют **максимумам** этого потенциала. Поле φ , которое начинает свое «движение» в точке ϕ_i может закончить только в точках $\phi_{i\pm 1}$.

Отступление. Стационарные решения уравнений поля

Рассмотрим двумерную модель одного скалярного поля с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - U(\phi) \right).$$

Предположим, что потенциал $U(\phi)$ обладает набором абсолютных минимумов ϕ_i . Упорядочим минимумы так, чтобы $\phi_i < \phi_{i+1}$. Можно сказать, что решение $\phi(x)$ с конечной энергией обладает **топологическим зарядом** q , если

- $\phi(x) \rightarrow \phi_i$ as $x^1 \rightarrow -\infty$,
- $\phi(x) \rightarrow \phi_{i+q}$ as $x^1 \rightarrow +\infty$.

Теорема

В этих условиях любое нетривиальное **стационарное** решение $\phi(x) = \varphi(x^1)$ обладает топологическим зарядом $q = \pm 1$.

Доказательство. Стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$\partial_1^2 \varphi = U'(\varphi).$$

Это уравнение Ньютона с потенциалом $-U(\varphi)$. Точки ϕ_i соответствуют **максимумам** этого потенциала. Поле φ , которое начинает свое «движение» в точке ϕ_i может закончить только в точках $\phi_{i\pm 1}$.

Если имеется стационарное решение, можно определить семейство решений, движущихся с произвольной скоростью $-1 < v < 1$:

$$\phi(x) = \varphi \left(\frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}} \right).$$

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$).

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$). Это решение нестационарно, и его можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка.

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$). Это решение нестационарно, и его можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка.

Кинки, антикинки и бризеры представляют собой единственные **уединенные волны** уравнения синус-Гордона.

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$). Это решение нестационарно, и его можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка.

Кинки, антикинки и бризеры представляют собой единственные **уединенные волны** уравнения синус-Гордона. Можно убедиться, что любое решение распадается в систему уединенных волн с различными скоростями в пределе $x^0 \rightarrow \pm\infty$.

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$). Это решение нестационарно, и его можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка.

Кинки, антикинки и бризеры представляют собой единственные **уединенные волны** уравнения синус-Гордона. Можно убедиться, что любое решение распадается в систему уединенных волн с различными скоростями в пределе $x^0 \rightarrow \pm\infty$. Более того, наборы скоростей уединенных волн в далеком прошлом и далеком будущем совпадают, так что рассеяние уединенных волн сводится к сдвигам параметров x_0^0, x_0^1 как результату их взаимодействия.

Отступление. Классические решения модели синус-Гордона

Имеется **кинковое** ($q = 1$) и **антикинковое** ($q = -1$) решения:

$$\phi(x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x^1 - vx^0 - x_0^1)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Бризерное решение

$$\phi(x) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos \omega \tau}{\omega \cos \sqrt{1 - \omega^2} \xi}, \quad \tau = \frac{x^0 - vx^1 - x_0^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \xi = \frac{x^1 - vx^0 - x_0^1}{\sqrt{1 - v^2}},$$

зависит от параметра ω ($0 \leq \omega < 1$). Это решение нестационарно, и его можно рассматривать как связанное состояние кинка и антикинка.

Кинки, антикинки и бризеры представляют собой единственные **уединенные волны** уравнения синус-Гордона. Можно убедиться, что любое решение распадается в систему уединенных волн с различными скоростями в пределе $x^0 \rightarrow \pm\infty$. Более того, наборы скоростей уединенных волн в далеком прошлом и далеком будущем совпадают, так что рассеяние уединенных волн сводится к сдвигам параметров x_0^0, x_0^1 как результату их взаимодействия.

Можно ожидать, что квантовый спектр состоит из кинка ($q = 1$), антикинка ($q = -1$) и дискретной серии бризеров ($q = 0$). Плотность спектра масс бризеров уменьшается с ростом β .

Мы увидим, что эти две модели эквивалентны, если

$$g = \beta^{-2} - 1, \tag{9}$$

Мы увидим, что эти две модели эквивалентны, если

$$g = \beta^{-2} - 1, \quad (9)$$

Массовый член в модели Тирринга соответствует члену с косинусом в модели синус-Гордона, так что

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (10)$$

Мы увидим, что эти две модели эквивалентны, если

$$g = \beta^{-2} - 1, \quad (9)$$

Массовый член в модели Тирринга соответствует члену с косинусом в модели синус-Гордона, так что

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (10)$$

Сохраняющиеся токи тоже совпадают

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu, \quad (11)$$

так что фермионное число в модели Тирринга совпадает с топологическим числом в модели синус-Гордона.

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g \psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g \psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g \psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$ ток j_μ представляет собой градиент свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial_\mu \tilde{\phi} \quad . \quad (14)$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g \psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g \psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g \psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$ ток j_μ представляет собой градиент свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial_\mu \tilde{\phi} = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (14)$$

Мы будем считать поле $\tilde{\phi}$ дуальным к другому полю ϕ .

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$ ток j_μ представляет собой градиент свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial_\mu \tilde{\phi} = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (14)$$

Мы будем считать поле $\tilde{\phi}$ дуальным к другому полю ϕ . Оба поля удовлетворяют уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g\psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g\psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$ ток j_μ представляет собой градиент свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial_\mu \tilde{\phi} = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (14)$$

Мы будем считать поле $\tilde{\phi}$ дуальным к другому полю ϕ . Оба поля удовлетворяют уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\phi(x) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \tilde{\phi}(x) = \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad (15)$$

Перепишем действие в переменных светового конуса:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2\pi g \psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Компоненты токов имеют вид

$$j_z = -\psi_1^+ \psi_1, \quad j_{\bar{z}} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (12)$$

В случае $m = 0$ уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -i\pi g \psi_2^+ \psi_2 \psi_1 \equiv -i\pi g j_{\bar{z}} \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= i\pi g \psi_1^+ \psi_1 \psi_2 \equiv -i\pi g j_z \psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu j_\nu = \partial_\mu j_3^\mu = 0$ ток j_μ представляет собой градиент свободного поля:

$$j_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial_\mu \tilde{\phi} = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (14)$$

Мы будем считать поле $\tilde{\phi}$ дуальным к другому полю ϕ . Оба поля удовлетворяют уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\phi(x) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \tilde{\phi}(x) = \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad (15)$$

Поэтому имеем

$$j_z = -\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi, \quad j_{\bar{z}} = \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi}. \quad (16)$$

Безмассовая модель Тирринга: квантование

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z) e^{-i \frac{g\beta}{2} \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z}) e^{i \frac{g\beta}{2} \varphi(z)},$$

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Безмассовая модель Тирринга: квантование

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Безмассовая модель Тирринга: квантование

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае?

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае? Предположим, что поля ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае? Предположим, что поля ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

где N_i — константы,

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае? Предположим, что поля ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

где N_i — константы, а η_i — алгебраические элементы с соотношениями

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \quad (19)$$

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z)e^{-i\frac{g\beta}{2}\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z})e^{i\frac{g\beta}{2}\varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi = \psi_1^+\psi_1 = F_1(z)F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+\psi_2 = F_2(\bar{z})F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае? Предположим, что поля ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i\varphi(z) + i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i\varphi(z) - i\beta_i\bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

где N_i — константы, а η_i — алгебраические элементы с соотношениями

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1. \quad (19)$$

Как и в классическом случае, имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2}, \quad (20)$$

Уравнения движения (13) имеют решение

$$\psi_1(z, \bar{z}) = F_1(z) e^{-i \frac{g\beta}{2} \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_2(z, \bar{z}) = F_2(\bar{z}) e^{i \frac{g\beta}{2} \varphi(z)},$$

в то время как уравнение (12) дает

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi = \psi_1^+ \psi_1 = F_1(z) F_1^*(z), \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial} \bar{\varphi} = \psi_2^+ \psi_2 = F_2(\bar{z}) F_2^*(\bar{z}). \quad (17)$$

Это позволяет найти классическое решение через две аналитические функции $F_i(z)$.

Что можно сделать в квантовом случае? Предположим, что поля ψ_i можно представить в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i \varphi(z) + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i^{-1} \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i \varphi(z) - i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

где N_i — константы, а η_i — алгебраические элементы с соотношениями

$$\eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1. \quad (19)$$

Как и в классическом случае, имеем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2}, \quad (20)$$

Однако экспоненциальный вид функций F_i кажется странным. Чтобы понять его, рассмотрим операторные произведения операторов ψ_i .

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Имеем

$$\begin{aligned}\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \\ \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)\end{aligned}$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_i(x')\psi_j(x) &= \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \\ &\quad \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\begin{aligned} \psi_1^+(x')\psi_1(x) &= \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \\ &\quad \times e^{-i\alpha_1(\varphi(z') - \varphi(z)) - i\beta_1(\bar{\varphi}(\bar{z}') - \bar{\varphi}(\bar{z}))}. \end{aligned} \quad (23)$$

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(1 - i\alpha_1(z' - z) \partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z}) \bar{\partial}\phi(x) + \dots \right). \quad (23)$$

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(1 - i\alpha_1(z' - z) \partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z}) \bar{\partial}\phi(x) + \dots \right). \quad (23)$$

Определим ток j_z следующим образом:

$$j_z(z, \bar{z}) = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi_1^+(z + r_0 e^{i\theta}, \bar{z} + r_0 e^{-i\theta}) \psi_1(z, \bar{z})$$

для некоторого малого r_0 .

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(1 - i\alpha_1(z' - z) \partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z}) \bar{\partial}\phi(x) + \dots \right). \quad (23)$$

Определим ток j_z следующим образом:

$$j_z(z, \bar{z}) = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi_1^+(z + r_0 e^{i\theta}, \bar{z} + r_0 e^{-i\theta}) \psi_1(z, \bar{z})$$

для некоторого малого r_0 . Положим

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (24)$$

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(\cancel{1} - i\alpha_1(z' - z) \partial\phi(x) - \cancel{i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z}) \bar{\partial}\phi(x)} + \dots \right). \quad (23)$$

Определим ток j_z следующим образом:

$$j_z(z, \bar{z}) = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi_1^+(z + r_0 e^{i\theta}, \bar{z} + r_0 e^{-i\theta}) \psi_1(z, \bar{z})$$

для некоторого малого r_0 . Положим

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (24)$$

Тогда первый и третий член обратится в нуль в силу угловой зависимости,

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(\cancel{1} - i\alpha_1(z' - z) \partial\phi(x) - \cancel{i\beta_1(z' - \bar{z}) \bar{\partial}\phi(x)} + \cancel{\dots} \right). \quad (23)$$

Определим ток j_z следующим образом:

$$j_z(z, \bar{z}) = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi_1^+(z + r_0 e^{i\theta}, \bar{z} + r_0 e^{-i\theta}) \psi_1(z, \bar{z})$$

для некоторого малого r_0 . Положим

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (24)$$

Тогда первый и третий член обратится в нуль в силу угловой зависимости, а слагаемые, начиная с четвертого пренебрежимо малы.

Имеем

$$\psi_i(x')\psi_j(x) = \eta_i\eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} \times e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}. \quad (21)$$

Тогда $\psi_i(x')\psi_j(x) = -\psi_j(x)\psi_i(x')$, если

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (22)$$

Теперь разложим произведение $\psi_1^+(x')\psi_1(x)$ по степеням $x' - x$:

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = \frac{N_1}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1^2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2} \times \left(\cancel{1} - i\alpha_1(z' - z) \boxed{\partial\phi(x)} - \cancel{i\beta_1(z' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x)} + \cancel{\dots} \right). \quad (23)$$

Определим ток j_z следующим образом:

$$j_z(z, \bar{z}) = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi_1^+(z + r_0 e^{i\theta}, \bar{z} + r_0 e^{-i\theta}) \psi_1(z, \bar{z})$$

для некоторого малого r_0 . Положим

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (24)$$

Тогда первый и третий член обратится в нуль в силу угловой зависимости, а слагаемые, начиная с четвертого пренебрежимо малы. Только второй член дает вклад в ток.

Безмассовая модель Тирринга: условия на α_i, β_i, N_i

Получаем

$$j_z = -N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Получаем

$$j_z = -N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Сравнивая с $j_z = \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi$, находим

$$\beta = -i r_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (25)$$

Получаем

$$j_z = -N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Сравнивая с $j_z = \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi$, находим

$$\beta = -i r_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (25)$$

Повторив то же самое для $\psi_2^+ \psi_2$ и принимая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (26)$$

Получаем

$$j_z = -N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Сравнивая с $j_z = \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi$, находим

$$\beta = -i r_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (25)$$

Повторив то же самое для $\psi_2^+ \psi_2$ и принимая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (26)$$

получим

$$\beta = -i r_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (27)$$

Получаем

$$j_z = -N_1 r_0^{-2\beta_1^2} \left(\frac{-i\alpha_1 \partial \varphi}{2\pi} \right).$$

Сравнивая с $j_z = \frac{\beta}{2\pi} \partial \varphi$, находим

$$\beta = -i r_0^{-2\beta_1^2} N_1 \alpha_1. \quad (25)$$

Повторив то же самое для $\psi_2^+ \psi_2$ и принимая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (26)$$

получим

$$\beta = -i r_0^{-2\alpha_2^2} N_2 \beta_2. \quad (27)$$

Нам нужно еще два уравнения. Чтобы получить одно из них, проанализируем массовый член.

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**.

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \times \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right). \quad (28)$$

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \times \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right). \quad (28)$$

Первый член выживает при усреднении по углам j_z , если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\beta_2. \quad (29)$$

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \times \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right). \quad (28)$$

Первый член выживает при усреднении по углам j_z , если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\beta_2. \quad (29)$$

В этом предположении мы можем определить

$$\psi_2^+\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1\alpha_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})}.$$

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \times \left(e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right). \quad (28)$$

Первый член выживает при усреднении по углам j_z , если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\beta_2. \quad (29)$$

В этом предположении мы можем определить

$$\psi_2^+\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1\alpha_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(z) + i(\beta_1 - \beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})}.$$

Теперь проверим согласованность с фермионным зарядом Q .

Модель Тирринга: массовый член

Рассмотрим массовый член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$. Оба слагаемых должны быть **хорошо определены** и согласованы с **сохранением фермионного заряда**. Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} (z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2} (\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2} \times \left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots \right). \quad (28)$$

Первый член выживает при усреднении по углам j_z , если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\beta_2. \quad (29)$$

В этом предположении мы можем определить

$$\psi_2^+\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2^{-1} \frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi} r_0^{-2\alpha_1\alpha_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})}.$$

Теперь проверим согласованность с фермионным зарядом Q . Рассмотрим коммутатор

$$\begin{aligned} [O(0), Q] &= \oint df_\mu j^\mu(x) O(0) = \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} j^\mu(x) O(0) = -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \tilde{\phi}(x) O(0) \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\nu \epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\lambda} \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \oint dx^\lambda \partial_\lambda \phi(x) O(0) = \frac{\beta}{2\pi} \Delta \phi(x) O(0), \end{aligned}$$

где Δ обозначает приращение поля при обходе по замкнутому контуру.

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z)+\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z)+i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta\left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}}\right) e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z)+\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z)+i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор Q коммутирует с $\psi_2^+ \psi_1$, так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$.

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z) + \alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z) + i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор Q коммутирует с $\psi_2^+ \psi_1$, так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$. Теперь зафиксируем параметр β . Положим $O(x) = \psi_i(x)$. Так как оператор ψ_i имеет фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z)+\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z)+i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta \left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}} \right) e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор Q коммутирует с $\psi_2^+ \psi_1$, так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$. Теперь зафиксируем параметр β . Положим $O(x) = \psi_i(x)$. Так как оператор ψ_i имеет фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \beta.$$

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z)+\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z)+i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta\left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}}\right) e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0)+i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор Q коммутирует с $\psi_2^+ \psi_1$, так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$. Теперь зафиксируем параметр β . Положим $O(x) = \psi_i(x)$. Так как оператор ψ_i имеет фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \beta.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\beta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 &= -\beta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right).\end{aligned}\tag{30}$$

Модель Тирринга: массовый член

Пусть $O(x) = e^{\alpha\varphi(z) + \alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})}$. Тогда

$$\begin{aligned}[O(0), Q] &= \frac{\beta}{2\pi} \Delta(\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})) e^{i\alpha\varphi(z) + i\alpha'\bar{\varphi}(\bar{z})} \\ &= \frac{i\beta}{2\pi} \Delta\left(\alpha \log \frac{1}{z} + \alpha' \log \frac{1}{\bar{z}}\right) e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)} = \beta(\alpha - \alpha') e^{i\alpha\varphi(0) + i\alpha'\bar{\varphi}(0)}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор Q коммутирует с $\psi_2^+ \psi_1$, так как $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$. Теперь зафиксируем параметр β . Положим $O(x) = \psi_i(x)$. Так как оператор ψ_i имеет фермионный заряд -1 , имеем

$$\psi_i(0) = [\psi_i(0), Q] = \beta(\alpha_i - \beta_i) \psi_i(0) = \beta(\alpha_1 + \alpha_2) \psi_i(0)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \beta.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right).\end{aligned}\tag{30}$$

Используя $\alpha_2 = g\beta/2$, получаем соотношение между константами связи

$$g = \beta^{-2} - 1.\tag{9}$$

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = ir_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = ir_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right)^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right)^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим массовый вклад

$$im(\psi_2^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_2) \sim \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right) e^{i\beta\phi} + \left(i\eta_1 \eta_2^{-1} \right)^{-1} e^{-i\beta\phi}$$

как возмущение.

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = ir_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим массовый вклад

$$im(\psi_2^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_2) \sim (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi} + (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}$$

как возмущение. В силу «нейтральности» на бесконечной плоскости разность $\#(e^{i\beta\phi}) - \#(e^{-i\beta\phi})$ одинакова в каждом члене теории возмущений.

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим массовый вклад

$$im(\psi_2^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_2) \sim (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi} + (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}$$

как возмущение. В силу «нейтральности» на бесконечной плоскости разность $\#(e^{i\beta\phi}) - \#(e^{-i\beta\phi})$ одинакова в каждом члене теории возмущений. Тогда замена

$$(i\eta_1 \eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}$$

позволяет избавиться от алгебраических элементов η_i .

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим массовый вклад

$$im(\psi_2^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_2) \sim (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi} + (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}$$

как возмущение. В силу «нейтральности» на бесконечной плоскости разность $\#(e^{i\beta\phi}) - \#(e^{-i\beta\phi})$ одинакова в каждом члене теории возмущений. Тогда замена

$$(i\eta_1 \eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}$$

позволяет избавиться от алгебраических элементов η_i . Итак, имеем

$$i(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (32)$$

Подставляя это, получаем

$$N_1 = -N_2 = i r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -i\psi_2^+ \psi_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi}, \\ i\psi_1^+ \psi_2 &= \frac{1}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим массовый вклад

$$im(\psi_2^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_2) \sim (i\eta_1 \eta_2^{-1}) e^{i\beta\phi} + (i\eta_1 \eta_2^{-1})^{-1} e^{-i\beta\phi}$$

как возмущение. В силу «нейтральности» на бесконечной плоскости разность $\#(e^{i\beta\phi}) - \#(e^{-i\beta\phi})$ одинакова в каждом члене теории возмущений. Тогда замена

$$(i\eta_1 \eta_2^{-1})^{\alpha/\beta} e^{i\alpha\phi} \rightarrow e^{i\alpha\phi}$$

позволяет избавиться от алгебраических элементов η_i . Итак, имеем

$$i(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta\phi, \quad (32)$$

откуда находим

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (10)$$

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру m . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру t . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Параметр μ модели синус-Гордона конечна и измерима. Она связана с физической массой m_{phys} частицы:

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}.$$

Коэффициент точно известен, но его вычисление выходит за рамки этих лекций.

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру m . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Параметр μ модели синус-Гордона конечна и измерима. Она связана с физической массой m_{phys} частицы:

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}.$$

Коэффициент точно известен, но его вычисление выходит за рамки этих лекций.

Таким образом, параметр m расходится:

$$m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (33)$$

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру m . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Параметр μ модели синус-Гордона конечна и измерима. Она связана с физической массой m_{phys} частицы:

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}.$$

Коэффициент точно известен, но его вычисление выходит за рамки этих лекций.

Таким образом, параметр m расходится:

$$m \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (33)$$

Рассмотрим операторы из лекции 1:

$$e^{iJ\varphi} = e^{\frac{iJ}{2\beta}\tilde{\phi}}, \quad J \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру t . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Параметр μ модели синус-Гордона конечна и измерима. Она связана с физической массой m_{phys} частицы:

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}.$$

Коэффициент точно известен, но его вычисление выходит за рамки этих лекций.

Таким образом, параметр t расходится:

$$t \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}}r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (33)$$

Рассмотрим операторы из лекции 1:

$$e^{iJ\varphi} = e^{\frac{iJ}{2\beta}\tilde{\phi}}, \quad J \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Эти операторы изменяют топологический заряд состояния на J : $q \rightarrow q + J$.

Модель Тирринга и модель синус-Гордона

Корреляционные функции моделей Тирринга и синус-Гордона совпадают в каждом порядке по теории возмущений по параметру t . Это сильный аргумент в пользу совпадения моделей.

Параметр μ модели синус-Гордона конечна и измерима. Она связана с физической массой m_{phys} частицы:

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}.$$

Коэффициент точно известен, но его вычисление выходит за рамки этих лекций.

Таким образом, параметр t расходится:

$$t \sim m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}} r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}}(m_{\text{phys}} r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (33)$$

Рассмотрим операторы из лекции 1:

$$e^{iJ\varphi} = e^{\frac{iJ}{2\beta}\tilde{\phi}}, \quad J \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Эти операторы изменяют топологический заряд состояния на J : $q \rightarrow q + J$.

Для $J = \pm 1$ они представляют собой **бозонные** операторы рождения-уничтожения кинков.

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T^\mu_\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Разложим корреляторы по теории возмущений:

$$\langle X \rangle = \frac{\langle X e^{-S_1} \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} = \langle X \rangle_0 - \langle X S_1 \rangle_0 + \langle X \rangle_0 \langle S_1 \rangle_0 + \dots$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Разложим корреляторы по теории возмущений:

$$\langle X \rangle = \frac{\langle X e^{-S_1} \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} = \langle X \rangle_0 - \langle X S_1 \rangle_0 + \langle X \rangle_0 \langle S_1 \rangle_0 + \dots$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Разложим корреляторы по теории возмущений:

$$\langle X \rangle = \frac{\langle X e^{-S_1} \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} = \langle X \rangle_0 - \langle X S_1 \rangle_0 + \langle X \rangle_0 \langle S_1 \rangle_0 + \dots$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Значит

$$\langle \bar{\partial}T(x) \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N) \rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \dots, x_N.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим конформную теорию поля в эвклидовом пространстве с формальным действием S_0 и тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ ($T_\mu^\mu = 0$). Пусть $\Phi_\Delta(x)$ — примарный (первичный) оператор конформной размерности Δ . Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Разложим корреляторы по теории возмущений:

$$\langle X \rangle = \frac{\langle X e^{-S_1} \rangle_0}{\langle e^{-S_1} \rangle_0} = \langle X \rangle_0 - \langle X S_1 \rangle_0 + \langle X \rangle_0 \langle S_1 \rangle_0 + \dots$$

Рассмотрим компоненту $T = -2\pi T_{zz}$ тензора энергии-импульса. В конформной теории поля она удовлетворяет соотношению

$$\bar{\partial}T(x) = 0$$

Значит

$$\langle \bar{\partial}T(x) \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N) \rangle_0 = 0, \quad \text{если } x \neq x_1, \dots, x_N.$$

Вопрос: Значит ли это, что это равенство сохраняется в возмущенной теории?

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Задача: найти интеграл $\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x)$. Использовать тождество $\bar{\partial}(z^{-1}) = \pi\delta(x)$.

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Задача: найти интеграл $\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x)$. Использовать тождество $\bar{\partial}(z^{-1}) = \pi\delta(x)$.

Ответ:

$$\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x) = \pi(1-\Delta)\partial\Phi_{\Delta}(x).$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Задача: найти интеграл $\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x)$. Использовать тождество $\bar{\partial}(z^{-1}) = \pi\delta(x)$.

Ответ:

$$\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x) = \pi(1-\Delta)\partial\Phi_{\Delta}(x).$$

Отсюда получаем в первом порядке по теории возмущений

$$\bar{\partial}T(x) = \partial\Theta(x), \quad \Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1-\Delta)\lambda\Phi(x) + O(\lambda^2).$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Задача: найти интеграл $\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x)$. Использовать тождество $\bar{\partial}(z^{-1}) = \pi\delta(x)$.

Ответ:

$$\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x) = \pi(1-\Delta)\partial\Phi_{\Delta}(x).$$

Отсюда получаем в первом порядке по теории возмущений

$$\bar{\partial}T(x) = \partial\Theta(x), \quad \Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1-\Delta)\lambda\Phi(x) + O(\lambda^2).$$

Точен ли этот результат, не нарушается ли он в высших порядках?

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Рассмотрим операторное разложение

$$\begin{aligned} T(x)\Phi_{\Delta}(x') &= \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(x')}{(z-z')^2} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z-z'} + O(1) \\ &= \Delta\Phi_{\Delta}(x')\partial\frac{1}{z-z'} + \frac{\partial'\Phi_{\Delta}(x')}{z'-z} + O(1). \end{aligned}$$

Задача: найти интеграл $\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x)$. Использовать тождество $\bar{\partial}(z^{-1}) = \pi\delta(x)$.

Ответ:

$$\int d^2x' \Phi_{\Delta}(x')\bar{\partial}T(x) = \pi(1-\Delta)\partial\Phi_{\Delta}(x).$$

Отсюда получаем в первом порядке по теории возмущений

$$\bar{\partial}T(x) = \partial\Theta(x), \quad \Theta(x) = 2\pi T_{z\bar{z}}(x) = -\pi(1-\Delta)\lambda\Phi(x) + O(\lambda^2).$$

Точен ли этот результат, не нарушается ли он в высших порядках? Точен, если

$$(z'-z)\Phi(x')\left(\int d^2y \Phi(y)\right)^k T(x) = o(1).$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos \beta \phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos \beta\phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad \bar{T}(x) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2, \quad \Theta(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu \cos \beta\phi + O(\mu^2). \quad (35)$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в возмущенных конформных моделях

Для модели синус-Гордона мы можем принять

$$S_0 = \int d^2x \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi}, \quad \Phi_\Delta = -\cos \beta\phi, \quad \lambda = \mu, \quad \Delta = \frac{\beta^2}{2}.$$

Тогда

$$T(x) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \quad \bar{T}(x) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2, \quad \Theta(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu \cos \beta\phi + O(\mu^2). \quad (35)$$

Буквально так этот результат не точен. Но можно модифицировать тензор энергии-импульса так, чтобы получить точный ответ в первом порядке.