

Лекция 3. Двухчастичные S -матрицы. Теория возмущений

Михаил Лашкевич

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

- ④ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

- ④ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

- ❶ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;
- ❷ $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Оператор $S(\theta)$ действует на внутренние состояния частиц.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Оператор $S(\theta)$ действует на внутренние состояния частиц.

Важно. Все частицы одинаковой массы мы будем считать разными внутренними состояниями одной частицы. Таким образом, если $m_1 = m_2$, матрица рассеяния является матрицей рассеяния тождественных частиц. Все формулы остаются теми же самыми. Возникает только требование (анти)симметрии волновых функций.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1 + p'_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1 + p'_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

В случае $n = n' = 2$ сделаем замену переменных

$(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \rightarrow (P^0, P^1, P'^0, P'^1)$:

$$\begin{aligned} \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) &= \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) \\ &= \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P). \end{aligned}$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1 + p'_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

В случае $n = n' = 2$ сделаем замену переменных

$(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \rightarrow (P^0, P^1, P'^0, P'^1)$:

$$\begin{aligned} \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) &= \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) \\ &= \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P). \end{aligned}$$

Получаем

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Здесь 1 — единичный оператор на $V_1 \otimes V_2$.

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Кроме того, каждая фермионная петля дает множитель (-1) , каждая пара внешних антифермионных линий дает (-1) , и каждая перестановка двух букв u от стандартного порядка (справа налево для входящих частиц и слева направо — для выходящих) дает (-1) . Эти знаки мы будем ставить явно перед диаграммами.

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Решение:

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ ie^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} ie^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

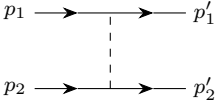
Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Решение:

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ ie^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} ie^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Нам понадобятся произведения, отвечающие четырехфермионному взаимодействию:


$$= -i\pi g(\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1})(\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}.$$

Модель Тирринга. Общий вид S -матрицы фермионов

Фермион и антифермион будем рассматривать как одну частицу массы m с пространством внутренних состояний

$$V = \mathbb{C}^2 = \text{span}(e_+, e_-)$$

(e_+ — фермион, e_- — антифермион).

Модель Тирринга. Общий вид S -матрицы фермионов

Фермион и антифермион будем рассматривать как одну частицу массы m с пространством внутренних состояний

$$V = \mathbb{C}^2 = \text{span}(e_+, e_-)$$

(e_+ — фермион, e_- — антифермион).

Запишем матрицу рассеяния двух частиц в две в базисе

$e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$:

$$S(\theta) = \begin{matrix} & \begin{matrix} ++ & +- & -+ & -- \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix} & \begin{matrix} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{matrix} \end{matrix}$$

или

$$S(\theta)_{++}^{++} = S(\theta)_{--}^{--} = a(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{+-} = S(\theta)_{-+}^{-+} = b(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{-+} = S(\theta)_{-+}^{+-} = c(\theta).$$

Модель Тирринга. Общий вид S -матрицы фермионов

Фермион и антифермион будем рассматривать как одну частицу массы m с пространством внутренних состояний

$$V = \mathbb{C}^2 = \text{span}(e_+, e_-)$$

(e_+ — фермион, e_- — антифермион).

Запишем матрицу рассеяния двух частиц в две в базисе

$e_+ \otimes e_+, e_+ \otimes e_-, e_- \otimes e_+, e_- \otimes e_-$:

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} ++ & +- & -+ & -- \\ a(\theta) & & & \\ & b(\theta) & c(\theta) & \\ & c(\theta) & b(\theta) & \\ & & & a(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{matrix}$$

или

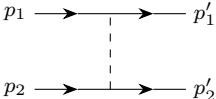
$$S(\theta)_{++}^{++} = S(\theta)_{--}^{--} = a(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{+-} = S(\theta)_{-+}^{-+} = b(\theta), \quad S(\theta)_{+-}^{-+} = S(\theta)_{-+}^{+-} = c(\theta).$$

Амплитуды рассеяния должны удовлетворять условию перекрестной симметрии:

$$a(\theta) = b(i\pi - \theta), \quad c(\theta) = c(i\pi - \theta).$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Повторим формулу для диаграммы


$$= -i\pi g(\bar{u}_{p'_1}\gamma^\mu u_{p_1})(\bar{u}_{p'_2}\gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}.$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Повторим формулу для диаграммы

$$\begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \\ p_2 \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \text{---} \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} p'_1 \\ p'_2 \end{array} = -i\pi g(\bar{u}_{p'_1}\gamma^\mu u_{p_1})(\bar{u}_{p'_2}\gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}.$$

Вычислим амплитуду

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++}^{(1)++} = & \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \end{array} \\ & = -4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) - 1) = -8\pi i g m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Повторим формулу для диаграммы

$$\begin{array}{c}
p_1 \longrightarrow \longrightarrow p'_1 \\
 \\
 \\
p_2 \longrightarrow \longrightarrow p'_2
\end{array}
= -i\pi g(\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1})(\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}.$$

Вычислим амплитуду

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++}^{(1)++} = & \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \end{array} - \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_2 \\ | \\ p_2 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \end{array} \\ & = -4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) - 1) = -8\pi i g m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)},$$

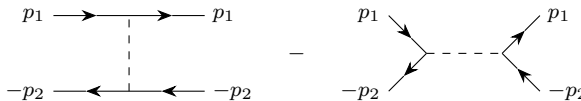
получаем

$$a(\theta) = 1 - i\pi g \operatorname{th} \frac{\theta}{2} + O(g^2).$$

Единичный оператор здесь равен единице.

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Теперь вычислим амплитуду

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)+-} =$$

$$= 4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8\pi i g m^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Теперь вычислим амплитуду

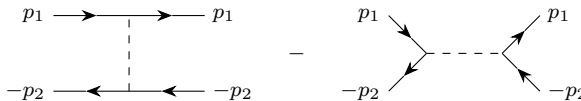
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{+-}^{(1) +-} = & \quad \begin{array}{c} p_1 \longrightarrow \longrightarrow p_1 \\ | \\ -p_2 \longleftarrow \longleftarrow -p_2 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} p_1 \searrow \swarrow \\ | \\ -p_2 \swarrow \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} p_1 \\ \swarrow \searrow \\ -p_2 \end{array} \\ & = 4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8\pi i g m^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Единичный оператор здесь тоже равен единице, и мы получаем

$$b(\theta) = 1 + i\pi g \text{cth} \frac{\theta}{2} + O(g^2) = a(i\pi - \theta).$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Теперь вычислим амплитуду

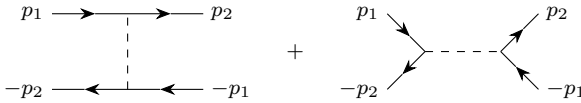
$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)+-} =$$


$$= 4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8\pi i g m^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Единичный оператор здесь тоже равен единице, и мы получаем

$$b(\theta) = 1 + i\pi g \text{cth} \frac{\theta}{2} + O(g^2) = a(i\pi - \theta).$$

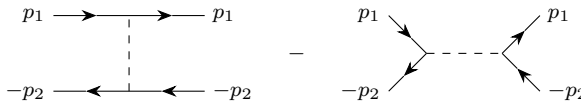
Наконец,

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)-+} = -$$


$$= -4\pi i g m^2 (1 + 1) = -8\pi i g m^2.$$

Модель Тирринга. Вычисление S -матрицы фермионов

Теперь вычислим амплитуду

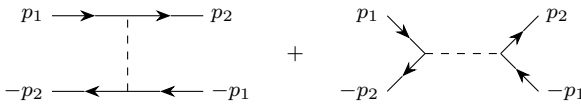
$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)+-} =$$


$$= 4\pi i g m^2 (\text{ch}(\theta_1 - \theta_2) + 1) = 8\pi i g m^2 \text{ch}^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Единичный оператор здесь тоже равен единице, и мы получаем

$$b(\theta) = 1 + i\pi g \text{cth} \frac{\theta}{2} + O(g^2) = a(i\pi - \theta).$$

Наконец,

$$\mathcal{M}_{+-}^{(1)-+} = -$$


$$= -4\pi i g m^2 (1 + 1) = -8\pi i g m^2.$$

Единичный оператор тут дает ноль, и мы получаем

$$c(\theta) = -\frac{2\pi i g}{\text{sh} \theta} + O(g^2) = c(i\pi - \theta).$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

В квазиклассическом приближении с полем ϕ связана частица массы

$$m = \beta \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

В квазиклассическом приближении с полем ϕ связана частица массы

$$m = \beta \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}.$$

Действительно, при малых β мы можем разложить действие по степеням ϕ^2 :

$$S^{\text{SG}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{m^2 \beta^2 \phi^4}{4!} - \frac{m^2 \beta^4 \phi^6}{6!} + \dots \right).$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

В квазиклассическом приближении с полем ϕ связана частица массы

$$m = \beta \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}.$$

Действительно, при малых β мы можем разложить действие по степеням ϕ^2 :

$$S^{\text{SG}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{m^2 \beta^2 \phi^4}{4!} - \frac{m^2 \beta^4 \phi^6}{6!} + \dots \right).$$

Мы будем понимать степени как нормально упорядоченные, чтобы исключить диаграммы вида .

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

В квазиклассическом приближении с полем ϕ связана частица массы

$$m = \beta \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}.$$

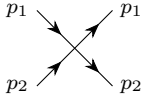
Действительно, при малых β мы можем разложить действие по степеням ϕ^2 :

$$S^{\text{SG}}[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{m^2 \beta^2 \phi^4}{4!} - \frac{m^2 \beta^4 \phi^6}{6!} + \dots \right).$$

Мы будем понимать степени как нормально упорядоченные, чтобы исключить

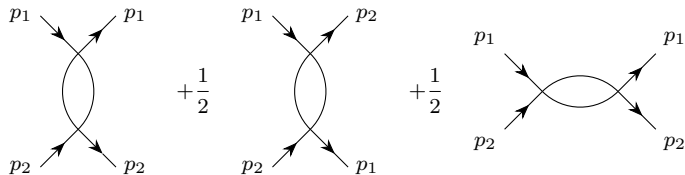
диаграммы вида .

В первом порядке по β^2 имеем

$$\mathcal{M}^{(1)\phi\phi}_{\phi\phi} =  = 4\pi i m^2 \beta^2.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Во втором порядке получаем три диаграммы:

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \right)$$


Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Во втором порядке получаем три диаграммы:

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} p_1 \searrow \quad \nearrow p_1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \\ p_2 \nearrow \quad \searrow p_2 \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} p_1 \searrow \quad \nearrow p_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \\ p_2 \nearrow \quad \searrow p_1 \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} p_1 \searrow \quad \nearrow p_1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \\ p_2 \nearrow \quad \searrow p_2 \end{array} \right)$$

Все эти диаграммы содержат петлю вида

$$L(p^2) = \begin{array}{c} \text{loop diagram} \end{array} = - \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((p - q)^2 - m^2 + i0)}.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Во втором порядке получаем три диаграммы:

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{1}{2} \left[\text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} \right]$$

Все эти диаграммы содержат петлю вида

$$L(p^2) = \begin{array}{c} \text{---} q \text{---} \\ \text{---} p - q \text{---} \end{array} = - \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((p - q)^2 - m^2 + i0)}.$$

Прямое вычисление дает

$$L(p^2) = \frac{i}{2\pi p^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} - 1}.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме:
 $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме:
 $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

В первой диаграмме $\vartheta = 0$, а в третьей $\vartheta = i\pi - \theta$.

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме:
 $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

В первой диаграмме $\vartheta = 0$, а в третьей $\vartheta = i\pi - \theta$.

Для амплитуды находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\text{sh } \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме: $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

В первой диаграмме $\vartheta = 0$, а в третьей $\vartheta = i\pi - \theta$.

Для амплитуды находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left(1 + \frac{\theta}{\text{sh } \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\text{sh } \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\text{sh } \theta} \right).$$

Окончательно получаем

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\text{sh } \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\text{sh } \theta} \left(1 + \frac{i\pi}{\text{sh } \theta} \right) + O(\beta^6).$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме: $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

В первой диаграмме $\vartheta = 0$, а в третьей $\vartheta = i\pi - \theta$.

Для амплитуды находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Окончательно получаем

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\operatorname{sh} \theta} \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right) + O(\beta^6).$$

Матрица рассеяния удовлетворяет условиям перекрестной симметрии и унитарности:

$$S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta), \quad S_{11}(\theta) S_{11}(-\theta) = 1.$$

Модель синус-Гордона. Вычисление S -матрицы частицы ϕ

Выражение кажется сложным, но его можно записать в простом параметрическом виде:

$$L(p^2) = \frac{1}{4\pi i m^2} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}, \quad p^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Параметр ϑ представляет собой разность быстрот во второй диаграмме: $p = p_1 - p_2$, $\vartheta = \theta$.

В первой диаграмме $\vartheta = 0$, а в третьей $\vartheta = i\pi - \theta$.

Для амплитуды находим

$$\mathcal{M}_{\phi\phi}^{(2)\phi\phi} = \frac{(4\pi i m^2 \beta^2)^2}{8\pi i m^2} \left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi - \theta}{\operatorname{sh} \theta} \right) = 2\pi i m^2 \beta^4 \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right).$$

Окончательно получаем

$$S_{11}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\phi}^{\phi\phi} = 1 + \frac{i\pi\beta^2}{\operatorname{sh} \theta} + \frac{i\pi\beta^4}{2\operatorname{sh} \theta} \left(1 + \frac{i\pi}{\operatorname{sh} \theta} \right) + O(\beta^6).$$

Матрица рассеяния удовлетворяет условиям перекрестной симметрии и унитарности:

$$S_{11}(\theta) = S_{11}(i\pi - \theta), \quad S_{11}(\theta) S_{11}(-\theta) = 1.$$

Унитарность означает, что в данном порядке по теории возмущений при рассеянии двух частиц ϕ никаких других каналов, кроме упругого рассеяния, нет.

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Рассмотрим классическое солитонное решение

$$\phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Рассмотрим классическое солитонное решение

$$\phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Рассмотрим поле ϕ вблизи от солитонного решения:

$\phi(t,x) = \phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) + \chi(t,x)$. Найдём действие в квадратичном приближении по χ :

$$\delta S[\chi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm} + \chi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} - \frac{m^2\chi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^{\pm} \right).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Рассмотрим классическое солитонное решение

$$\phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Рассмотрим поле ϕ вблизи от солитонного решения:

$\phi(t,x) = \phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) + \chi(t,x)$. Найдём действие в квадратичном приближении по χ :

$$\delta S[\chi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm} + \chi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} - \frac{m^2\chi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^{\pm} \right).$$

Без ограничения общности положим $x_0 = 0$, $v = 0$. Получаем

$$\delta S[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} - \frac{m^2\chi^2}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 mx^1} \right) \right).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Рассмотрим классическое солитонное решение

$$\phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Рассмотрим поле ϕ вблизи от солитонного решения:

$\phi(t,x) = \phi_{x_0,v}^{\pm}(t,x) + \chi(t,x)$. Найдём действие в квадратичном приближении по χ :

$$\delta S[\chi] \equiv S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm} + \chi] - S^{\text{SG}}[\phi_{x_0,v}^{\pm}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} - \frac{m^2\chi^2}{2} \cos \beta \phi_{x_0,v}^{\pm} \right).$$

Без ограничения общности положим $x_0 = 0$, $v = 0$. Получаем

$$\delta S[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{(\partial_{\mu}\chi)^2}{2} - \frac{m^2\chi^2}{2} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 mx^1} \right) \right).$$

Классическое уравнение движения

$$\left(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2 \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 mx^1} \right) \right) \chi(x) = 0$$

линейно и может рассматриваться как квантовое уравнение на оператор $\chi(x)$.

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Здесь $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\text{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Здесь $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Легко найти нулевую моду:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Здесь $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Легко найти нулевую моду:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Она связана со сдвигом солитона вдоль координатной оси:

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Здесь $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Легко найти нулевую моду:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Она связана со сдвигом солитона вдоль координатной оси:

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

Больше связанных состояний нет, то есть $\varepsilon_n \geq m$ при $n \neq 0$.

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Разложим оператор $\chi(t, x)$ по модам:

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n}} \left(e^{-i\varepsilon_n t} f_n(x) a_n + e^{i\varepsilon_n t} f_n^*(x) a_n^+ \right).$$

Здесь $\varepsilon_n = \sqrt{p_n^2 + m^2}$, а $f_n(x)$ — решения уравнения

$$\left(\partial_x^2 + p_n^2 + \frac{2m^2}{\operatorname{ch}^2 mx} \right) f_n(x) = 0$$

при условии

$$\int dx f_{n'}^*(x) f_n(x) = \delta_{n'n}.$$

Легко найти нулевую моду:

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} mx}, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Она связана со сдвигом солитона вдоль координатной оси:

$$\phi_{0,0}^+(x) + \epsilon f_0(x) = \phi_{-\beta\epsilon/2m,0}^+(x).$$

Больше связанных состояний нет, то есть $\varepsilon_n \geq m$ при $n \neq 0$. Имеем

$$f_p(x) = N_p e^{ipx} \left(1 + \frac{im}{p} \operatorname{th} mx \right).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Чтобы найти плотность состояний, поместим систему в «ящик» длины L с циклическим граничным условием для χ :

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \operatorname{th} \frac{mL}{2}}{p - im \operatorname{th} \frac{mL}{2}} = 1.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Чтобы найти плотность состояний, поместим систему в «ящик» длины L с циклическим граничным условием для χ :

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \operatorname{th} \frac{mL}{2}}{p - im \operatorname{th} \frac{mL}{2}} = 1.$$

Нас интересует предел $L \rightarrow \infty$. Получаем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Чтобы найти плотность состояний, поместим систему в «ящик» длины L с циклическим граничным условием для χ :

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \operatorname{th} \frac{mL}{2}}{p - im \operatorname{th} \frac{mL}{2}} = 1.$$

Нас интересует предел $L \rightarrow \infty$. Получаем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1.$$

Прологарифмируем это уравнение:

$$pL = 2\pi n + 2 \operatorname{arctg} \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Чтобы найти плотность состояний, поместим систему в «ящик» длины L с циклическим граничным условием для χ :

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \operatorname{th} \frac{mL}{2}}{p - im \operatorname{th} \frac{mL}{2}} = 1.$$

Нас интересует предел $L \rightarrow \infty$. Получаем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1.$$

Прологарифмируем это уравнение:

$$pL = 2\pi n + 2 \operatorname{arctg} \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Найдем плотность состояний:

$$\rho(p) = \frac{2\pi}{L} \frac{dn}{dp} = 1 - \frac{2m}{L(m^2 + p^2)}.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Чтобы найти плотность состояний, поместим систему в «ящик» длины L с циклическим граничным условием для χ :

$$f_p(-L/2) = f_p(L/2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{ipL} \frac{p + im \operatorname{th} \frac{mL}{2}}{p - im \operatorname{th} \frac{mL}{2}} = 1.$$

Нас интересует предел $L \rightarrow \infty$. Получаем

$$e^{ipL} \frac{p + im}{p - im} = 1.$$

Прологарифмируем это уравнение:

$$pL = 2\pi n + 2 \operatorname{arctg} \frac{p}{m}, \quad n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

Найдем плотность состояний:

$$\rho(p) = \frac{2\pi}{L} \frac{dn}{dp} = 1 - \frac{2m}{L(m^2 + p^2)}.$$

В пределе $L \rightarrow \infty$ имеем $\rho(p) \rightarrow 1$. Следовательно, мы можем заменить суммирование на интегрирование по правилу

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{dp}{2\pi}, \quad \delta_{n'n} \rightarrow 2\pi \delta(p' - p), \quad N_p = \frac{p}{\varepsilon_p}.$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Окончательно получаем

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+).$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Окончательно получаем

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+).$$

На больших расстояниях от солитона имеем

$$f_p(x) = e^{ipx} \times \begin{cases} 1 + im/p, & x \rightarrow +\infty; \\ 1 - im/p, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Модель синус-Гордона. Рассеяние частицы ϕ на солитоне

Окончательно получаем

$$\chi(t, x) = \sqrt{4\pi}(a_0 + a_0^+)f_0(x) + \sqrt{4\pi} \int \frac{dp}{2\pi\sqrt{2\varepsilon_p}} (e^{-i\varepsilon_p t} f_p(x)a_p + e^{i\varepsilon_p t} f_p^*(x)a_p^+).$$

На больших расстояниях от солитона имеем

$$f_p(x) = e^{ipx} \times \begin{cases} 1 + im/p, & x \rightarrow +\infty; \\ 1 - im/p, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Частица ϕ проходит через солитон без отражения, и амплитуда прохождения равна

$$S_{1\pm}(\theta) \equiv S(\theta)_{\phi\pm}^{\phi\pm} = \frac{p + im}{p - im} = \frac{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{4}\right)}{\text{th}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{4}\right)}.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Тензор энергии-импульса можно определить как

$$T'^\mu_\nu = L\delta^\mu_\nu - \phi_{,\nu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu_\nu{}^\lambda = T^\mu_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu_\nu{}^\lambda, \quad f^\mu_\nu{}^\lambda = -f^\lambda_\nu{}^\mu.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Тензор энергии-импульса можно определить как

$$T'^\mu_\nu = L \delta^\mu_\nu - \phi_{,\nu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu_{\nu\lambda} = T^\mu_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu_{\nu\lambda}, \quad f^\mu_{\nu\lambda} = -f^\lambda_{\nu\mu}.$$

Задача. Покажите, что можно подобрать такой тензор $f^\mu_{\nu\lambda}$, что $T'^\mu_\mu = 0$.

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Тензор энергии-импульса можно определить как

$$T'^\mu_\nu = L\delta^\mu_\nu - \phi_{,\nu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu_\nu{}^\lambda = T^\mu_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu_\nu{}^\lambda, \quad f^\mu_\nu{}^\lambda = -f^\lambda_\nu{}^\mu.$$

Задача. Покажите, что можно подобрать такой тензор $f^\mu_\nu{}^\lambda$, что $T'^\mu_\mu = 0$.

Ответ:

$$f^\mu_\nu{}^\lambda = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta^\mu_\nu \partial^\lambda \phi - \delta^\lambda_\nu \partial^\mu \phi), \quad \alpha_0 = \beta^{-1}$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Тензор энергии-импульса можно определить как

$$T'^\mu_\nu = L\delta^\mu_\nu - \phi_{,\nu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu_{\nu}{}^\lambda = T^\mu_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu_{\nu}{}^\lambda, \quad f^\mu_{\nu}{}^\lambda = -f^\lambda_{\nu}{}^\mu.$$

Задача. Покажите, что можно подобрать такой тензор $f^\mu_{\nu}{}^\lambda$, что $T'^\mu_\mu = 0$.

Ответ:

$$f^\mu_{\nu}{}^\lambda = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta^\mu_\nu \partial^\lambda \phi - \delta^\lambda_\nu \partial^\mu \phi), \quad \alpha_0 = \beta^{-1}$$

Задача. Найдите компоненты $T' = \pi T'^{\bar{z}}_{\bar{z}}$ и $\bar{T}' = \pi T'^z_z$.

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

Давайте разобьем (эвклидово) действие модели синус-Гордона следующим образом:

$$S'_0 = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \right), \quad S'_1 = -\frac{\mu}{2} \int d^2x e^{i\beta\phi}.$$

Функционал действия S'_0 не является вещественным, но формально он определяет теорию поля с уравнением движения

$$\nabla^2 \phi = 2\pi i \mu \beta e^{-i\beta\phi}.$$

Тензор энергии-импульса можно определить как

$$T'^\mu{}_\nu = L \delta^\mu_\nu - \phi_{,\nu} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda = T^\mu_\nu - \frac{\mu}{2} e^{-i\beta\phi} \delta^\mu_\nu + \partial_\lambda f^\mu{}_\nu{}^\lambda, \quad f^\mu{}_\nu{}^\lambda = -f^\lambda{}_\nu{}^\mu.$$

Задача. Покажите, что можно подобрать такой тензор $f^\mu{}_\nu{}^\lambda$, что $T'^\mu{}_\mu = 0$.

Ответ:

$$f^\mu{}_\nu{}^\lambda = -\frac{i\alpha_0}{2\pi} (\delta^\mu_\nu \partial^\lambda \phi - \delta^\lambda_\nu \partial^\mu \phi), \quad \alpha_0 = \beta^{-1}$$

Задача. Найдите компоненты $T' = \pi T'^{\bar{z}}{}_z$ и $\bar{T}' = \pi T'^z{}_{\bar{z}}$.

Ответ:

$$T'(x) = -\frac{1}{2} \partial \phi^2 + i\alpha_0 \partial^2 \phi, \quad \bar{T}'(x) = -\frac{1}{2} \bar{\partial} \phi^2 + i\alpha_0 \bar{\partial}^2 \phi.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

В квантовом случае α_0 получает поправку. Действительно, конформная размерность оператора $e^{i\alpha\phi}$ равна

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0).$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

В квантовом случае α_0 получает поправку. Действительно, конформная размерность оператора $e^{i\alpha\phi}$ равна

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0).$$

Потребуем, чтобы алгебра Вирасоро коммутировала с оператором потенциальной энергии:

$$\left[L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[\bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

В квантовом случае α_0 получает поправку. Действительно, конформная размерность оператора $e^{i\alpha\phi}$ равна

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0).$$

Потребуем, чтобы алгебра Вирасоро коммутировала с оператором потенциальной энергии:

$$\left[L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[\bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

Это значит что $\Delta_{-\beta} = 1$. Следовательно,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}.$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)

В квантовом случае α_0 получает поправку. Действительно, конформная размерность оператора $e^{i\alpha\phi}$ равна

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0).$$

Потребуем, чтобы алгебра Вирасоро коммутировала с оператором потенциальной энергии:

$$\left[L'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = \left[\bar{L}'_n, \int d^2x e^{-i\beta\phi} \right] = 0,$$

Это значит что $\Delta_{-\beta} = 1$. Следовательно,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}.$$

Поскольку $\Delta_\beta = \beta^2 - 1$ в возмущенном случае мы имеем

$$\Theta'(x) = \pi(1 - \beta^2/2)\mu e^{i\beta\phi}.$$

Это выражение **точно**. Операторное разложение $e^{i\beta\phi(x')} e^{i\beta\phi(x)} = |x' - x|^{2\beta^2} e^{i\beta(\phi(x') + \phi(x))}$ приводит к тому, что высшие поправки равны нулю.