

Лекция 4. $O(N)$ -модель: $1/N$ -разложение

Михаил Лашкевич

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Вместо ограничения $\mathbf{n}^2 = 1$, введем вспомогательное поле ω :

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)). \quad (2)$$

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Вместо ограничения $\mathbf{n}^2 = 1$, введем вспомогательное поле ω :

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)). \quad (2)$$

Порождающий функционал для корреляционных функций:

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J} \mathbf{n}}. \quad (3)$$

Функциональный интеграл

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Вместо ограничения $\mathbf{n}^2 = 1$, введем вспомогательное поле ω :

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)). \quad (2)$$

Порождающий функционал для корреляционных функций:

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Интеграл по $\mathbf{n}$ гауссов. Действительно, показатель имеет вид

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Рассмотрим общую $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Вместо ограничения $\mathbf{n}^2 = 1$, введем вспомогательное поле ω :

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)). \quad (2)$$

Порождающий функционал для корреляционных функций:

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Интеграл по $\mathbf{n}$ гауссов. Действительно, показатель имеет вид

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Таким образом, получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left(i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right),$$

где $G(x, x' | \omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x' | \omega) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(i S_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(i S_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) = V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(i S_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) = V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(i S_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Перепишем функционал $Z[J]$ в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x' | \omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем седловую точку при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что она соответствует

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) = iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ &= \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left((\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left(\omega_0 \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\omega_0 + \Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания.

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Уравнение стационарной точки имеет вид

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right),$$

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Уравнение стационарной точки имеет вид

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right),$$

что приводит к

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Метод перевала при $N \rightarrow \infty$

Уравнение стационарной точки имеет вид

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right),$$

что приводит к

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Параметр $\omega_0 = m^2$ **размерный** и **конечный**. Мы увидим, что он дает массу частицы.

Уравнение стационарной точки имеет вид

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right),$$

что приводит к

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Параметр $\omega_0 = m^2$ **размерный** и **конечный**. Мы увидим, что он дает массу частицы. Напротив, параметр g зависит от ультрафиолетового обрезания Λ и нефизичен. Его зависимость от обрезания можно описать уравнением ренормгруппы:

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (9)$$

Уравнение стационарной точки имеет вид

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left(-\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right),$$

что приводит к

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Параметр $\omega_0 = m^2$ **размерный** и **конечный**. Мы увидим, что он дает массу частицы. Напротив, параметр g зависит от ультрафиолетового обрезания Λ и нефизичен. Его зависимость от обрезания можно описать уравнением ренормгруппы:

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (9)$$

Это явление называется **динамической генерацией массы** или **размерной трансмутацией**.

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x'|m^2)$, имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x'|m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log (1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x'|m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль.

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\text{tr} \rho = \int d^2 x \rho(x),$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\text{tr} \rho = \int d^2 x \rho(x),$$

$$\text{tr} \rho G = \int d^2 x \rho(x) G(x, x)$$

Разложение по $1/N$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\text{tr} \rho = \int d^2 x \rho(x),$$

$$\text{tr} \rho G = \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x)$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\text{tr} \rho = \int d^2 x \rho(x),$$

$$\text{tr} \rho G = \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x'|m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \quad (10)$$

Полагая $G(x, x') = G(x, x' | m^2)$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left(1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Первая скобка обращается в нуль. В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho &= \int d^2 x \rho(x), \\ \text{tr} \rho G &= \int d^2 x \rho(x) G(x, x) = G(0, 0) \int d^2 x \rho(x) = G(0, 0) \text{tr} \rho \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \text{tr} \rho = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \text{tr} \rho = (gN)^{-1} \text{tr} \rho. \end{aligned}$$

Окончательно, получаем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \left(\frac{2}{N} \right)^{n/2} \int d^{2n} x \rho(x_1) G(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G(x_n, x_1). \quad (11)$$

Разложение по $1/N$: пропагатор D

Член с $n = 2$ является квадратичной формой по ρ :

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Разложение по $1/N$: пропагатор D

Член с $n = 2$ является квадратичной формой по ρ :

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому мы будем рассматривать ядро $D(x_1, x_2)$, обратное к ядру этого оператора,

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) G(x_2, x_1)$$

ка пропагатор поля $\rho(x)$.

Разложение по $1/N$: пропагатор D

Член с $n = 2$ является квадратичной формой по ρ :

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому мы будем рассматривать ядро $D(x_1, x_2)$, обратное к ядру этого оператора,

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) G(x_2, x_1)$$

ка пропагатор поля $\rho(x)$. В импульсном пространстве

$$D(k) = \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} = - \left(\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Разложение по $1/N$: пропагатор D

Член с $n = 2$ является квадратичной формой по ρ :

$$\frac{i}{2} \int d^2x_1 d^2x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому мы будем рассматривать ядро $D(x_1, x_2)$, обратное к ядру этого оператора,

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2)G(x_2, x_1)$$

ка пропагатор поля $\rho(x)$. В импульсном пространстве

$$D(k) = \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = - \left(\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (12)$$

В явном виде имеем

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} - 1}. \quad (13)$$

Разложение по $1/N$: пропагатор D

Член с $n = 2$ является квадратичной формой по ρ :

$$\frac{i}{2} \int d^2x_1 d^2x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому мы будем рассматривать ядро $D(x_1, x_2)$, обратное к ядру этого оператора,

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2)G(x_2, x_1)$$

ка пропагатор поля $\rho(x)$. В импульсном пространстве

$$D(k) = \text{---}\text{---}\text{---}\text{---} = - \left(\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (12)$$

В явном виде имеем

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} - 1}. \quad (13)$$

Эта громоздкая формула становится очень простой в подходящей параметризации:

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\text{sh} \theta}{\theta}, \quad k^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (14)$$

Разложение по $1/N$: пропагатор G и вершина

Теперь разложим функцию $G(x, x'|\omega)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n,$$

Разложение по $1/N$: пропагатор G и вершина

Теперь разложим функцию $G(x, x'|\omega)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n,$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G(x_1, y_1) \rho(y_1) G(y_1, y_2) \dots \rho(y_n) G(y_n, x_2).$$

Разложение по $1/N$: пропагатор G и вершина

Теперь разложим функцию $G(x, x'|\omega)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n,$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G(x_1, y_1) \rho(y_1) G(y_1, y_2) \dots \rho(y_n) G(y_n, x_2).$$

Таким образом, выражение для S_{eff} и для $G[\omega]$ можно записать через пропагатор

$$G_{ij}(p) = i \text{ --- } \overset{p}{\text{---}} \text{ --- } j = G(p) \delta_{ij} = \frac{i \delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0} \quad (15)$$

Разложение по $1/N$: пропагатор G и вершина

Теперь разложим функцию $G(x, x'|\omega)$:

$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1} + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n,$$

$$G(x_1, x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G(x_1, y_1) \rho(y_1) G(y_1, y_2) \dots \rho(y_n) G(y_n, x_2).$$

Таким образом, выражение для S_{eff} и для $G[\omega]$ можно записать через пропагатор

$$G_{ij}(p) = \quad i \quad \xrightarrow{\quad p \quad} \quad j \quad = G(p) \delta_{ij} = \frac{i \delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0} \quad (15)$$

и вершину

$$\begin{array}{c} | \\ i \text{ --- } | \text{ --- } j \\ | \end{array} = -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}. \quad (16)$$

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- 1 Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- 1 Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).
- 2 Внешние линии диаграммы всегда сплошные и соответствуют массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- 1 Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).
- 2 Внешние линии диаграммы всегда сплошные и соответствуют массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
- 3 Замкнутые петли из сплошных линий должны содержать не меньше трех вершин.

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- ❶ Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).
- ❷ Внешние линии диаграммы всегда сплошные и соответствуют массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
- ❸ Замкнутые петли из сплошных линий должны содержать не меньше трех вершин.

Связь между g , m и Λ дается условием

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- ❶ Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).
- ❷ Внешние линии диаграммы всегда сплошные и соответствуют массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
- ❸ Замкнутые петли из сплошных линий должны содержать не меньше трех вершин.

Связь между g , m и Λ дается условием

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например, в первом порядке по $1/N$ можно получить

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \quad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2 \log(\Lambda^2/m^2)}. \quad (17)$$

Разложение по $1/N$: фейнмановские правила

Можно сформулировать фейнмановские правила:

- 1 Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (15) и вершин (16).
- 2 Внешние линии диаграммы всегда сплошные и соответствуют массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2} n_i$.
- 3 Замкнутые петли из сплошных линий должны содержать не меньше трех вершин.

Связь между g , m и Λ дается условием

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например, в первом порядке по $1/N$ можно получить

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \quad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2 \log(\Lambda^2/m^2)}. \quad (17)$$

Квадратичная расходимость происходит из жесткого условия $\mathbf{n}^2 = 1$. Добавление в действие члена $\alpha \int d^2x \omega^2$ смягчает расходимость до логарифмической.

Напомним формулу

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{\mathcal{M}_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Рассеяние двух частиц

Напомним формулу

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{\mathcal{M}_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Согласованность с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'} \delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i} \delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i} \delta_{i'j} S_3(\theta). \quad (18)$$

Вычислим S -матрицу в порядке $1/N$. Используем формулу

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\vartheta}, \quad k^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (14)$$

Рассеяние двух частиц

Напомним формулу

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{\mathcal{M}_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Согласованность с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'} \delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i} \delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i} \delta_{i'j} S_3(\theta). \quad (18)$$

Вычислим S -матрицу в порядке $1/N$. Используем формулу

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\vartheta}, \quad k^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (14)$$

Имеем

$$4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) = \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \vartheta = i\pi - \theta \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array} \quad , \quad S_1(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)},$$

Рассеяние двух частиц

Напомним формулу

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{\mathcal{M}_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \text{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Согласованность с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \quad (18)$$

Вычислим S -матрицу в порядке $1/N$. Используем формулу

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\text{sh } \vartheta}{\vartheta}, \quad k^2 = -4m^2 \text{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (14)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \quad \backslash \quad / \\ \quad \vartheta = i\pi - \theta \\ \quad / \quad \backslash \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array} \quad , \quad S_1(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\
4m^2 \operatorname{sh} \theta (S_2(\theta) - 1) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \text{-----} \\ | \\ \vartheta = 0 \\ | \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array} \quad , \quad S_2(\theta) = 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta},
\end{aligned}$$

Рассеяние двух частиц

Напомним формулу

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} + \frac{\mathcal{M}_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2)}{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Согласованность с $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'} \delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i} \delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i} \delta_{i'j} S_3(\theta). \quad (18)$$

Вычислим S -матрицу в порядке $1/N$. Используем формулу

$$D(k) = 4\pi i m^2 \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\vartheta}, \quad k^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} 4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ \quad \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array}, \quad S_1(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ 4m^2 \operatorname{sh} \theta (S_2(\theta) - 1) &= \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_1 \\ \quad \quad \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ p_2 \text{---} p_2 \end{array}, \quad S_2(\theta) = 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \\ 4m^2 \operatorname{sh} \theta S_3(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_2 \\ \quad \quad \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ \quad \quad \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ p_2 \text{---} p_1 \end{array}, \quad S_3(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned}$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

В конформной теории поля рассмотрим разложения

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + {}^\times T^2(z)^\times + O(z' - z),$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + \cdots.$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

В конформной теории поля рассмотрим разложения

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + {}^\times T^2(z) {}^\times + O(z' - z),$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + \cdots.$$

Здесь

$$\mathcal{L}_k\mathcal{O}(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w)\mathcal{O}(z, \bar{z}).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

В конформной теории поля рассмотрим разложения

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + \underset{\times}{T}^2(z)_{\times} + O(z' - z),$$

$$T(z')\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_{\Delta}(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) + \dots$$

Здесь

$$\mathcal{L}_k\mathcal{O}(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w)\mathcal{O}(z, \bar{z}).$$

Рассмотрим возмущенную конформную модель.

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_{\Delta}(x).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

В конформной теории поля рассмотрим разложения

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + {}^\times T^2(z)^\times + O(z' - z),$$

$$T(z')\Phi_\Delta(z, \bar{z}) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(z, \bar{z})}{(z' - z)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(z)}{z' - z} + \mathcal{L}_{-2}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + (z' - z)\mathcal{L}_{-3}\Phi_\Delta(z, \bar{z}) + \dots$$

Здесь

$$\mathcal{L}_k \mathcal{O}(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n+1} T(w) \mathcal{O}(z, \bar{z}).$$

Рассмотрим возмущенную конформную модель.

$$S = S_0 + S_1 = S_0 + \lambda \int d^2x \Phi_\Delta(x).$$

Найдем, в каких случаях оператор $T_4 = {}^\times T^2(z)^\times$ является компонентой сохраняющегося тока, то есть существует оператор $\Theta_2(x)$, такой что

$$\bar{\partial} T_4(x) = \partial \Theta_2(x),$$

и имеется сохраняющийся ток

$$I_3 = \int dz T_4(x) + \int d\bar{z} \Theta_2(x).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$${}_{\times}T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$${}_{\times}T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\int d^2x' \bar{\partial} {}_{\times}T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}')$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$${}_{\times}T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} {}_{\times}T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \end{aligned}$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$${}_{\times}T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} {}_{\times}T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) \partial T(z) - \partial T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$$\times T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} \times T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})) \right. \\ & \quad \left. - \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) \partial T(z) - \partial T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Задача. Возьмите в этом выражении предел.

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$${}_{\times}T^2(z){}_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} {}_{\times}T^2(z){}_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) \partial T(z) - \partial T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Задача. Возьмите в этом выражении предел.

Ответ:

$$\int d^2x' \bar{\partial} {}_{\times}T^2(z){}_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') = \pi(1-\Delta) \left(-2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta-3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi(z, \bar{z}).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Из разложения для $T(z')T(z)$ имеем

$$\times T^2(z)_{\times} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(T(z + \delta)T(z) - \frac{c/2}{\delta^4} - \frac{2T(z)}{\delta^2} - \frac{\partial T(z)}{\delta} \right).$$

Задача. Найдите в виде предела $\lim_{\delta \rightarrow 0}(\dots)$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int d^2x' \bar{\partial} \times T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) T(z) + T(z + \delta) \partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right) \\ &= \pi(1-\Delta) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\partial(\Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z})T(z)) + \partial(T(z + \delta)\Phi_{\Delta}(z, \bar{z})) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\Delta}(z + \delta, \bar{z}) \partial T(z) - \partial T(z + \delta) \Phi_{\Delta}(z, \bar{z}) - \frac{2\partial \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{\Delta}(z, \bar{z})}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Задача. Возьмите в этом выражении предел.

Ответ:

$$\int d^2x' \bar{\partial} \times T^2(z)_{\times} \Phi_{\Delta}(z', \bar{z}') = \pi(1-\Delta) \left(-2\mathcal{L}_{-3} + 2\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{\Delta-3}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi(z, \bar{z}).$$

Второе и третье слагаемые имеют вид $\mathcal{L}_{-1}(\dots) = \partial(\dots)$, но первое не имеет такого вида.

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вопрос. При каком условии первое слагаемое можно выразить в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$?

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вопрос. При каком условии первое слагаемое можно выразить в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$?

Ответ: Если имеется нуль-вектор на третьем уровне. В минимальных конформных моделях, если $\Delta = \Delta_{13}$ или $\Delta = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta} = 0.$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вопрос. При каком условии первое слагаемое можно выразить в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$?

Ответ: Если имеется нуль-вектор на третьем уровне. В минимальных конформных моделях, если $\Delta = \Delta_{13}$ или $\Delta = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta} = 0.$$

Тогда

$$\Theta_2(z) = -\pi(1 - \Delta)\lambda \left(2 \frac{\Delta + 4}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-2} + \frac{(\Delta - 1)(\Delta - 2)(\Delta - 3)}{6(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^2 \right).$$

Семинар. Пример высшего интеграла движения в возмущенной конформной теории поля

Вопрос. При каком условии первое слагаемое можно выразить в виде $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$?

Ответ: Если имеется нуль-вектор на третьем уровне. В минимальных конформных моделях, если $\Delta = \Delta_{13}$ или $\Delta = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} + \frac{2}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_{\Delta} = 0.$$

Тогда

$$\Theta_2(z) = -\pi(1 - \Delta)\lambda \left(2 \frac{\Delta + 4}{\Delta + 2} \mathcal{L}_{-2} + \frac{(\Delta - 1)(\Delta - 2)(\Delta - 3)}{6(\Delta + 1)(\Delta + 2)} \mathcal{L}_{-1}^2 \right).$$

Так как $\Delta_{31} > 1$, так что единственным **релевантным** возмущением, допускающим дополнительный интеграл движения I_3 является возмущение с $\Delta = \Delta_{13}$.