

Лекция 5.

$O(N)$ -модель: интегрируемость и точная S -матрица

Михаил Лашкевич

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

и

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

и

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Действие инвариантно относительно (псевдо)конформных преобразований

$$z \rightarrow f_1(z), \quad \bar{z} \rightarrow f_2(\bar{z}), \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{f'_1(z)f'_2(\bar{z})}. \quad (3)$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

и

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Действие инвариантно относительно (псевдо)конформных преобразований

$$z \rightarrow f_1(z), \quad \bar{z} \rightarrow f_2(\bar{z}), \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{f'_1(z)f'_2(\bar{z})}. \quad (3)$$

Эти преобразования включают, в частности, сдвиги

$$f_1(z) = z + c, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{c},$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

и

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Действие инвариантно относительно (псевдо)конформных преобразований

$$z \rightarrow f_1(z), \quad \bar{z} \rightarrow f_2(\bar{z}), \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{f_1'(z)f_2'(\bar{z})}. \quad (3)$$

Эти преобразования включают, в частности, сдвиги

$$f_1(z) = z + c, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{c},$$

масштабные преобразования и преобразования Лоренца, для которых

$$f_1(z) = \lambda z, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{\lambda} \bar{z},$$

Конформная инвариантность действия

Напомним действие $O(N)$ -модели

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{n} + \omega \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

В координатах светового конуса $z, \bar{z}$ имеем

$$S[\mathbf{n}, \omega] = -\frac{1}{g} \int dz d\bar{z} \left(\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n} + \frac{\omega}{4} (\mathbf{n}^2 - 1) \right), \quad (1)$$

и

$$4\partial \bar{\partial} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2)$$

Действие инвариантно относительно (псевдо)конформных преобразований

$$z \rightarrow f_1(z), \quad \bar{z} \rightarrow f_2(\bar{z}), \quad \omega \rightarrow \frac{\omega}{f'_1(z)f'_2(\bar{z})}. \quad (3)$$

Эти преобразования включают, в частности, сдвиги

$$f_1(z) = z + c, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{c},$$

масштабные преобразования и преобразования Лоренца, для которых

$$f_1(z) = \lambda z, \quad f_2(\bar{z}) = \bar{\lambda} \bar{z},$$

и преобразование инверсии

$$f_1(z) = 1/z, \quad f_2(\bar{z}) = 1/\bar{z}.$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность.

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

Классические законы сохранения

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов.

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов. В самом деле, легко проверить, что

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Классические законы сохранения

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов. В самом деле, легко проверить, что

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Выполним псевдоконформное преобразование

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

Классические законы сохранения

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов. В самом деле, легко проверить, что

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Выполним псевдоконформное преобразование

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

В новых координатах $(\partial \mathbf{n})^2 = 1$.

Классические законы сохранения

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов. В самом деле, легко проверить, что

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Выполним псевдоконформное преобразование

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

В новых координатах $(\partial \mathbf{n})^2 = 1$. Итак, получаем уравнение непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial \partial \mathbf{n})^2 = \partial(2\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n}).$$

Классические законы сохранения

Тензор энергии-импульса:

$$T_{zz} = \frac{1}{g}(\partial \mathbf{n})^2, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{g}(\bar{\partial} \mathbf{n})^2, \quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = -\frac{\omega}{4g}(\mathbf{n}^2 - 1).$$

На уравнения движения имеем $T_{\mu}^{\mu} = -4T_{z\bar{z}} = 0$, что выражает конформную инвариантность. Сохранение энергии и импульса:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = 0, \quad \partial(\bar{\partial} \mathbf{n})^2 = 0. \quad (4)$$

В $O(N)$ -модели имеются законы сохранения с токами более высоких спинов. В самом деле, легко проверить, что

$$4\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = \partial(\omega(\partial \mathbf{n})^2) - 3\partial\omega(\partial \mathbf{n})^2, \quad 4\partial(\bar{\partial}^2 \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2) - 3\bar{\partial}\omega(\bar{\partial} \mathbf{n})^2. \quad (5)$$

Выполним псевдоконформное преобразование

$$dz' = \left| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \right| dz,$$

В новых координатах $(\partial \mathbf{n})^2 = 1$. Итак, получаем уравнение непрерывности

$$\bar{\partial}(\partial \partial \mathbf{n})^2 = \partial(2\partial \mathbf{n} \bar{\partial} \mathbf{n}).$$

Аналогично,

$$\partial(\bar{\partial} \bar{\partial} \mathbf{n})^2 = \bar{\partial}(2\bar{\partial} \mathbf{n} \partial \mathbf{n}).$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. Из-за этого правая часть уравнения непрерывности становится отлична от нуля, но она должна быть ∂ -производной.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. Из-за этого правая часть уравнения непрерывности становится отлична от нуля, но она должна быть ∂ -производной. Поэтому единственное обобщение имеет вид

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega, \quad (6)$$

где β — постоянная.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. Из-за этого правая часть уравнения непрерывности становится отлична от нуля, но она должна быть ∂ -производной. Поэтому единственное обобщение имеет вид

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega, \quad (6)$$

где β — постоянная. На самом деле уже это нарушает масштабную инвариантность, так как теперь $T_\mu^\mu \neq 0$.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. Из-за этого правая часть уравнения непрерывности становится отлична от нуля, но она должна быть ∂ -производной. Поэтому единственное обобщение имеет вид

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega, \quad (6)$$

где β — постоянная. На самом деле уже это нарушает масштабную инвариантность, так как теперь $T_\mu^\mu \neq 0$.

Получаем интеграл движения

$$I_1 = \int dz \frac{1}{2} (\partial \mathbf{n})^2 + \int d\bar{z} (-\beta \omega) \sim P_z. \quad (7)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

На квантовом уровне появляются аномалии, которые формально сохраняют лоренцеву и масштабную инвариантность: $z \rightarrow \lambda z$, $\bar{z} \rightarrow \bar{\lambda} \bar{z}$. Из-за этого правая часть уравнения непрерывности становится отлична от нуля, но она должна быть ∂ -производной. Поэтому единственное обобщение имеет вид

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^2 = -\beta \partial \omega, \quad (6)$$

где β — постоянная. На самом деле уже это нарушает масштабную инвариантность, так как теперь $T_\mu^\mu \neq 0$.

Получаем интеграл движения

$$I_1 = \int dz \frac{1}{2} (\partial \mathbf{n})^2 + \int d\bar{z} (-\beta \omega) \sim P_z. \quad (7)$$

Аналогично, заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$ получаем интеграл движения

$$I_{-1} = \int d\bar{z} \frac{1}{2} (\bar{\partial} \mathbf{n})^2 + \int dz (-\beta \omega) \sim P_{\bar{z}}. \quad (8)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Аналогично, вместо (5) имеем

$$\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (10)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Аналогично, вместо (5) имеем

$$\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\bar{\partial} \left((\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (11)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Аналогично, вместо (5) имеем

$$\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\bar{\partial} \left((\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (11)$$

Получаем интеграл движения спина 3:

$$I_3 = \int dz \left(\frac{1}{2} (\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2(2\beta + \alpha')} (\partial \mathbf{n})^4 \right) + \int d\bar{z} (\dots). \quad (12)$$

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Аналогично, вместо (5) имеем

$$\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\bar{\partial} \left((\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (11)$$

Получаем интеграл движения спина 3:

$$I_3 = \int dz \left(\frac{1}{2} (\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2(2\beta + \alpha')} (\partial \mathbf{n})^4 \right) + \int d\bar{z} (\dots). \quad (12)$$

Аналогично, имеется оператор I_{-3} , получаемый заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$.

Квантовые законы сохранения: эвристический вывод

Рассмотрим $T_{zz}^2 \sim (\partial \mathbf{n})^4$. На классическом уровне $\bar{\partial} T_{zz} = 0$. На квантовом уровне опять возникает аномалия:

$$\bar{\partial}(\partial \mathbf{n})^4 = -(2\beta + \alpha')(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (9)$$

Аналогично, вместо (5) имеем

$$\bar{\partial}(\partial^2 \mathbf{n})^2 = -(3 + \alpha)(\partial \mathbf{n})^2 \partial \omega + \partial(\dots). \quad (10)$$

Следовательно,

$$\bar{\partial} \left((\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2\beta + \alpha'} (\partial \mathbf{n})^4 \right) = \partial(\dots). \quad (11)$$

Получаем интеграл движения спина 3:

$$I_3 = \int dz \left(\frac{1}{2} (\partial^2 \mathbf{n})^2 - \frac{3 + \alpha}{2(2\beta + \alpha')} (\partial \mathbf{n})^4 \right) + \int d\bar{z} (\dots). \quad (12)$$

Аналогично, имеется оператор I_{-3} , получаемый заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$.

Итак, имеем 4 интеграла движения:

$$\dot{I}_s = 0, \quad s = -3, -1, 1, 3.$$

Можно показать, что эти интегралы движения коммутируют друг с другом.

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстроатами θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$.

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстроатами θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстротами θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний.

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстройми θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быструтами θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстротами θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Зафиксируем быстроты $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. У нас есть **четыре уравнения** для **двух переменных** θ_1, θ_2 , которые зависят от **n параметров**.

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстрыми θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Зафиксируем быстрые $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. У нас есть **четыре уравнения** для **двух переменных** θ_1, θ_2 , которые зависят от **n параметров**. Если $n \geq 3$, эти уравнения имеют решения только при специальных значениях параметров θ'_i .

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстрыми θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Зафиксируем быстрые $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. У нас есть **четыре уравнения** для **двух переменных** θ_1, θ_2 , которые зависят от **n параметров**. Если $n \geq 3$, эти уравнения имеют решения только при специальных значениях параметров θ'_i . Но амплитуды должны быть аналитичны по θ'_i .

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстрыми θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Зафиксируем быстрые $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. У нас есть **четыре уравнения** для **двух переменных** θ_1, θ_2 , которые зависят от **n параметров**. Если $n \geq 3$, эти уравнения имеют решения только при специальных значениях параметров θ'_i . Но амплитуды должны быть аналитичны по θ'_i . $\Rightarrow$ Амплитуды этих процессов **тождественно равны нулю**.

Интегралы движения и упругость рассеяния

Пусть $|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle$ — общее собственное состояния интегралов движения, описывающее систему n частиц с быстрыми θ_i , то есть $p_{iz} = -\frac{m}{2}e^{\theta_i}$, $p_{i\bar{z}} = \frac{m}{2}e^{-\theta_i}$. Собственное значение оператора I_s должно быть лорановским полиномом от переменных e^{θ_i} степени s .

Локальность. Локальные интегралы движения являются интегралами по пространству. Поэтому, если частицы находятся далеко друг от друга, собственное значение должно быть суммой собственных значений одночастичных состояний. Следовательно

$$I_s|\theta_1, \dots, \theta_n\rangle = \text{const} \sum_{i=1}^n e^{s\theta_i} |\theta_1, \dots, \theta_n\rangle.$$

Рассмотрим рассеяние $2 \rightarrow n$. В силу законов сохранения имеем

$$e^{s\theta_1} + e^{s\theta_2} = \sum_{i=1}^n e^{s\theta'_i} \quad (s = -3, -1, 1, 3).$$

Зафиксируем быстрые $\theta'_1, \dots, \theta'_n$. У нас есть **четыре уравнения** для **двух переменных** θ_1, θ_2 , которые зависят от **n параметров**. Если $n \geq 3$, эти уравнения имеют решения только при специальных значениях параметров θ'_i . Но амплитуды должны быть аналитичны по θ'_i . $\Rightarrow$ Амплитуды этих процессов **тождественно равны нулю**. $\Rightarrow$ Разрешены только процессы с $n = 2$ и **$\theta'_i = \theta_i$** (с точностью до несущественной перестановки).

На самом деле в модели имеются интегралы движения для всех $s \in 2\mathbb{Z} + 1$.

Факторизованное рассеяние

На самом деле в модели имеются интегралы движения для всех $s \in 2\mathbb{Z} + 1$. Поэтому разрешены только процессы $n \rightarrow n$ с $\theta'_i = \theta_i$. Такое **идеально упругое рассеяние** характерно для **интегрируемых моделей**.

Факторизованное рассеяние

На самом деле в модели имеются интегралы движения для всех $s \in 2\mathbb{Z} + 1$. Поэтому разрешены только процессы $n \rightarrow n$ с $\theta'_i = \theta_i$. Такое **идеально упругое рассеяние** характерно для **интегрируемых моделей**.

Для интегрируемых моделей имеется

Гипотеза факторизованного рассеяния

Амплитуда рассеяния n частиц в n частиц распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом допустимом расположении частиц порядке с суммированием по всем внутренним состояниям промежуточных частиц.

Факторизованное рассеяние

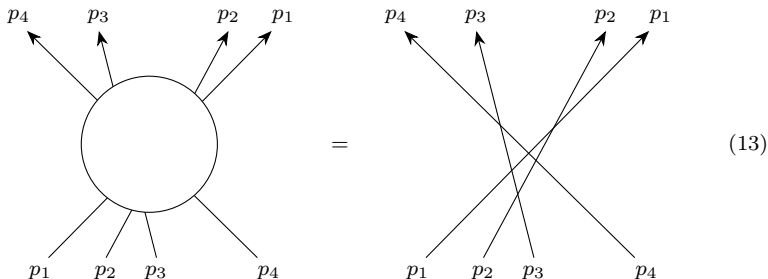
На самом деле в модели имеются интегралы движения для всех $s \in 2\mathbb{Z} + 1$. Поэтому разрешены только процессы $n \rightarrow n$ с $\theta'_i = \theta_i$. Такое **идеально упругое рассеяние** характерно для **интегрируемых моделей**.

Для интегрируемых моделей имеется

Гипотеза факторизованного рассеяния

Амплитуда рассеяния n частиц в n частиц распадается в произведение всех попарных амплитуд рассеяния в любом допустимом расположении частиц порядке с суммированием по всем внутренним состояниям промежуточных частиц.

Графически это можно изобразить так:



Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции.

Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции. В силу бесконечного количества интегралов движения все частицы имеют постоянный импульс p_i с точностью до перестановки, и волновая функция представляет собой комбинацию плоских волн для любого порядка x_i :

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$
$$\text{for } x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (14)$$

Здесь α_i — внутреннее состояния частицы в точке x_i .

Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции. В силу бесконечного количества интегралов движения все частицы имеют постоянный импульс p_i с точностью до перестановки, и волновая функция представляет собой комбинацию плоских волн для любого порядка x_i :

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

for $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (14)$

Здесь α_i — внутреннее состояния частицы в точке x_i . Функция симметрична по отношению к перестановкам $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$.

Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции. В силу бесконечного количества интегралов движения все частицы имеют постоянный импульс p_i с точностью до перестановки, и волновая функция представляет собой комбинацию плоских волн для любого порядка x_i :

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$

for $x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (14)$

Здесь α_i — внутреннее состояния частицы в точке x_i . Функция симметрична по отношению к перестановкам $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$.

Метки β_i можно определить, например, требованием

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}.$$

Тогда при $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ параметры β_i естественным образом описывают внутренние состояния **входящих** частиц.

Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции. В силу бесконечного количества интегралов движения все частицы имеют постоянный импульс p_i с точностью до перестановки, и волновая функция представляет собой комбинацию плоских волн для любого порядка x_i :

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$
$$\text{for } x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (14)$$

Здесь α_i — внутреннее состояния частицы в точке x_i . Функция симметрична по отношению к перестановкам $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$.

Метки β_i можно определить, например, требованием

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}.$$

Тогда при $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ параметры β_i естественным образом описывают внутренние состояния **входящих** частиц.

Перестановка двух соседних частиц означает их рассеяние:

$$A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_n}[\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}^{\alpha_i \alpha_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha'_i \alpha'_{i+1} \dots \alpha_n}[\tau]. \quad (15)$$

Здесь s^i — перестановка чисел i и $i+1$. Матрица $S(p_1, p_2)$ — это **двухчастичная S -матрица**.

Асимптотическая n -частичная волновая функция

Предположим, что есть какое-то характерное расстояние R , за пределами которого виртуальные частицы не рождаются. Тогда на больших расстояниях $|x_i - x_j| \gg R$ волновая функция не отличима от n -частичной волновой функции. В силу бесконечного количества интегралов движения все частицы имеют постоянный импульс p_i с точностью до перестановки, и волновая функция представляет собой комбинацию плоских волн для любого порядка x_i :

$$\psi_{\beta_1 p_1, \dots, \beta_n p_n}(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = \sum_{\tau \in S_n} A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_{\sigma_1} \dots \alpha_{\sigma_n}}[\tau] e^{i \sum_{i=1}^n p_{\tau_i} x_{\sigma_i}}$$
$$\text{for } x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_n}, \quad |x_i - x_j| \gg R. \quad (14)$$

Здесь α_i — внутреннее состояния частицы в точке x_i . Функция симметрична по отношению к перестановкам $\alpha_i x_i \leftrightarrow \alpha_j x_j$.

Метки β_i можно определить, например, требованием

$$A_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\text{id}] = \prod_{i=1}^n \delta_{\beta_i}^{\alpha_i}.$$

Тогда при $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ параметры β_i естественным образом описывают внутренние состояния **входящих** частиц.

Перестановка двух соседних частиц означает их рассеяние:

$$A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1} \alpha_i \dots \alpha_n}[\tau s^i] = \sum_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}} S_{\alpha'_i \alpha'_{i+1}}^{\alpha_i \alpha_{i+1}}(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i+1}}) A_{\beta_1 \dots \beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha'_i \alpha'_{i+1} \dots \alpha_n}[\tau]. \quad (15)$$

Здесь s^i — перестановка чисел i и $i+1$. Матрица $S(p_1, p_2)$ — это **двухчастичная S -матрица**. Это определяет коэффициенты A и доказывает (на «физическом уровне строгости») гипотезу факторизации.

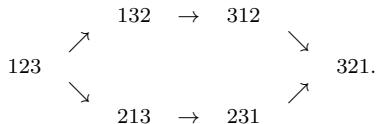
Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Из-за факторизации двухчастичная S -матрица удовлетворяет некоторой системе уравнений.

Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Из-за факторизации двухчастичная S -матрица удовлетворяет некоторой системе уравнений.

Давайте перевернем порядок трех соседних частиц, скажем 1, 2, 3. Мы можем сделать это двумя способами:



Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Первый способ $123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321$ ведет к соотношению

$$A^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] \\ = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left(\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3} (p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3} (p_2, p_3) \right) A^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots]$$

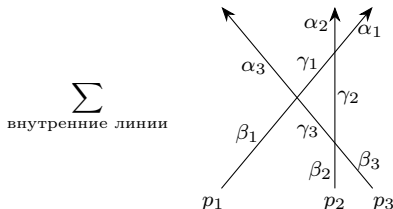
Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Первый способ $123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321$ ведет к соотношению

$$A_{\dots}^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\dots}[321\dots]$$

$$= \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left(\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1\gamma_2}^{\alpha_1\alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1\gamma_3}^{\gamma_1\alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2\beta_3}^{\gamma_2\gamma_3}(p_2, p_3) \right) A_{\dots}^{\beta_1\beta_2\beta_3\dots}[123\dots]$$

или графически

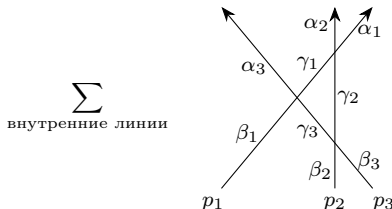


Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Первый способ $123 \rightarrow 132 \rightarrow 312 \rightarrow 321$ ведет к соотношению

$$A^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left(\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \right) A^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots]$$

или графически



Мы запишем это в виде

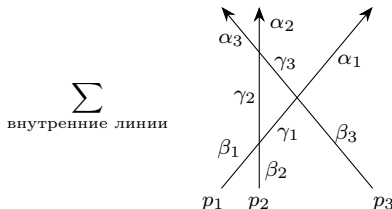
$$A_{321\dots} = S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) A_{123\dots}$$

Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Второй способ $123 \rightarrow 213 \rightarrow 231 \rightarrow 321$ ведет к соотношению

$$A^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \dots} [321 \dots] = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \left(\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2) \right) A^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots} [123 \dots],$$

или графически



Мы запишем это в виде

$$A_{321\dots} = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2) A_{123\dots},$$

Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Результат этих двух способов переставить три частицы должен быть одинаков. Поэтому имеем

Уравнение Янга—Бакстера (Yang–Baxter equation)

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \\ = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2), \quad (16)$$

Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Результат этих двух способов переставить три частицы должен быть одинаков. Поэтому имеем

Уравнение Янга—Бакстера (Yang–Baxter equation)

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \\ = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2), \quad (16)$$

или короче

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2), \quad (17)$$

Условия самосогласованности: перестановка трех частиц

Результат этих двух способов переставить три частицы должен быть одинаков. Поэтому имеем

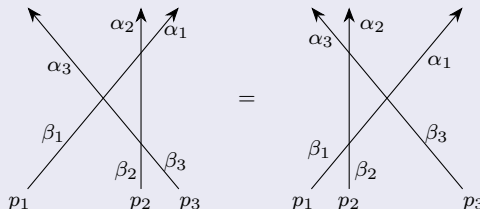
Уравнение Янга—Бакстера (Yang–Baxter equation)

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_1 \gamma_3}^{\gamma_1 \alpha_3}(p_1, p_3) S_{\beta_2 \beta_3}^{\gamma_2 \gamma_3}(p_2, p_3) \\ = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} S_{\gamma_2 \gamma_3}^{\alpha_2 \alpha_3}(p_2, p_3) S_{\gamma_1 \beta_3}^{\alpha_1 \gamma_3}(p_1, p_3) S_{\beta_1 \beta_2}^{\gamma_1 \gamma_2}(p_1, p_2), \quad (16)$$

или короче

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{13}(p_1, p_3) S_{23}(p_2, p_3) = S_{23}(p_2, p_3) S_{13}(p_1, p_3) S_{12}(p_1, p_2), \quad (17)$$

или графически


$$(18)$$

Условия самосогласованности: обратимость

Теперь потребуем, чтобы две последовательные перестановки двух частиц приводили бы к тождественному отображению: $12 \rightarrow 21 \rightarrow 12$. Это предполагает

Условие унитарности

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_2 \beta_1}^{\gamma_2 \gamma_1}(p_2, p_1) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (19)$$

Условия самосогласованности: обратимость

Теперь потребуем, чтобы две последовательные перестановки двух частиц приводили бы к тождественному отображению: $12 \rightarrow 21 \rightarrow 12$. Это предполагает

Условие унитарности

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_2 \beta_1}^{\gamma_2 \gamma_1}(p_2, p_1) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (19)$$

или

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{21}(p_2, p_1) = 1, \quad (20)$$

Условия самосогласованности: обратимость

Теперь потребуем, чтобы две последовательные перестановки двух частиц приводили бы к тождественному отображению: $12 \rightarrow 21 \rightarrow 12$. Это предполагает

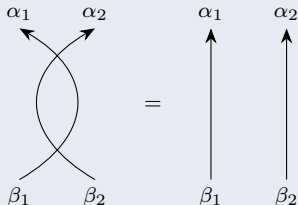
Условие унитарности

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2} S_{\gamma_1 \gamma_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2) S_{\beta_2 \beta_1}^{\gamma_2 \gamma_1}(p_2, p_1) = \delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2}, \quad (19)$$

или

$$S_{12}(p_1, p_2) S_{21}(p_2, p_1) = 1, \quad (20)$$

или



The diagram shows two configurations separated by an equals sign. On the left, two lines labeled β_1 and β_2 at the bottom cross each other and emerge at the top as α_1 and α_2 . On the right, two parallel lines labeled β_1 and β_2 at the bottom emerge at the top as α_1 and α_2 without crossing. This represents the identity $S_{12} S_{21} = 1$.

$$(21)$$

Релятивистское условие: кроссинг-симметрия (перекрестная симметрия)

Последнее условие связано верно для релятивистских теорий.

Кроссинг-симметрия

$$S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha'_1\beta'_1} C_{\beta_1\beta'_1} S_{\beta_2\alpha'_1}^{\alpha_2\beta'_1}(p_2, -p_1) C_{\alpha'_1\alpha_1}. \quad (22)$$

Импульсы p_1, p_2 тут понимаются как пространственно-временные (двумерные), а C — матрица зарядового (точнее, CPT) сопряжения.

Релятивистское условие: кроссинг-симметрия (перекрестная симметрия)

Последнее условие связано верно для релятивистских теорий.

Кроссинг-симметрия

$$S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha'_1\beta'_1} C_{\beta_1\beta'_1} S_{\beta_2\alpha'_1}^{\alpha_2\beta'_1}(p_2, -p_1) C_{\alpha'_1\alpha_1}. \quad (22)$$

Импульсы p_1, p_2 тут понимаются как пространственно-временные (двумерные), а C — матрица зарядового (точнее, CPT) сопряжения. Более кратко

$$S_{12}(p_1, p_2) = C_1 S_{2\bar{1}}(p_2, -p_1) C_1,$$

где $\bar{1}$ означает транспозицию по этому пространству.

Релятивистское условие: кроссинг-симметрия (перекрестная симметрия)

Последнее условие связано верно для релятивистских теорий.

Кроссинг-симметрия

$$S_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(p_1, p_2) = \sum_{\alpha'_1\beta'_1} C_{\beta_1\beta'_1} S_{\beta_2\alpha'_1}^{\alpha_2\beta'_1}(p_2, -p_1) C_{\alpha'_1\alpha_1}. \quad (22)$$

Импульсы p_1, p_2 тут понимаются как пространственно-временные (двумерные), а C — матрица зарядового (точнее, CPT) сопряжения. Более кратко

$$S_{12}(p_1, p_2) = C_1 S_{2\bar{1}}(p_2, -p_1) C_1,$$

где $\bar{1}$ означает транспозицию по этому пространству. Графически

The diagram illustrates crossing symmetry between two scattering processes. On the left, an s-channel process is shown with incoming lines labeled p_1 and p_2 at the bottom, and outgoing lines labeled α_2 and α_1 at the top. Internal lines are labeled β_1 and β_2 . On the right, a t-channel process is shown with incoming lines labeled p_2 and $-p_1$ at the top, and outgoing lines labeled β_2 and $\bar{\beta}_1$ at the bottom. Internal lines are labeled $\bar{\alpha}_1$ and $\bar{\beta}_1$. The two diagrams are separated by an equals sign, indicating they represent the same amplitude under crossing. The entire diagrammatic equation is labeled (23) on the right.

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

❶ *Уравнение Янга—Бакстера*

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

❶ Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

❷ Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

1 Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

2 Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

3 Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

❶ *Уравнение Янга—Бакстера*

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

❷ *Унитарность*

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

❸ *Кроссинг-симметрия*

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

① *Уравнение Янга—Бакстера*

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

② *Унитарность*

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

③ *Кроссинг-симметрия*

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Переменная Мандельстама:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta.$$

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

❶ *Уравнение Янга—Бакстера*

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

❷ *Унитарность*

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

❸ *Кроссинг-симметрия*

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Переменная Мандельстама:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta.$$

Прямая $\text{Im } \theta = 0$ соответствует разрезу $[(m_1 + m_2)^2, +\infty)$.

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

① *Уравнение Янга—Бакстера*

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

② *Унитарность*

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

③ *Кроссинг-симметрия*

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Переменная Мандельстама:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta.$$

Прямая $\text{Im } \theta = 0$ соответствует разрезу $[(m_1 + m_2)^2, +\infty)$.

Прямая $\text{Im } \theta = \pi$ соответствует разрезу $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$.

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

1 Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

2 Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

3 Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Переменная Мандельстама:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta.$$

Прямая $\text{Im } \theta = 0$ соответствует разрезу $[(m_1 + m_2)^2, +\infty)$.

Прямая $\text{Im } \theta = \pi$ соответствует разрезу $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$.

S -матрица вещественная на мнимой оси: $S(iu) \in \mathbb{R}$ for $u \in \mathbb{R}$. На физическом листе все полюсы лежат на мнимой оси.

Уравнения бутстрапа для S -матрицы

Итак, мы получили набор уравнений, называемых **уравнениями бутстрапа** для S -матриц. Запишем их, используя быстроты вместо импульсов:

Уравнения бутстрапа

1 Уравнение Янга—Бакстера

$$S_{12}(\theta_1 - \theta_2)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{23}(\theta_2 - \theta_3) = S_{23}(\theta_2 - \theta_3)S_{13}(\theta_1 - \theta_3)S_{12}(\theta_1 - \theta_2). \quad (24)$$

2 Унитарность

$$S_{12}(\theta)S_{21}(-\theta) = 1. \quad (25)$$

3 Кроссинг-симметрия

$$S_{12}(\theta) = C_1 S_{2\bar{1}}(i\pi - \theta) C_1. \quad (26)$$

Физический лист:

$$0 \leq \text{Im } \theta < \pi, \quad (27)$$

Переменная Мандельстама:

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \text{ch } \theta.$$

Прямая $\text{Im } \theta = 0$ соответствует разрезу $[(m_1 + m_2)^2, +\infty)$.

Прямая $\text{Im } \theta = \pi$ соответствует разрезу $(-\infty, (m_1 - m_2)^2]$.

S -матрица вещественная на мнимой оси: $S(iu) \in \mathbb{R}$ for $u \in \mathbb{R}$. На

физическом листе все полюсы лежат на мнимой оси.

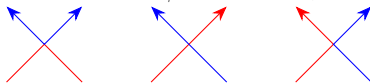
Полюс $iu_0 \in [0, i\pi]$ соответствует связанному состоянию, если

$\text{Res}_{u=u_0} S_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}(iu) > 0$ (для бозонов).

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{array}{c}
 + \\
 =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-right, and a blue line from bottom-left to top-right.} \\
 +
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 2: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-left, and a blue line from bottom-left to top-right.} \\
 =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 3: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-left, and a blue line from bottom-left to top-right.}
 \end{array}, \quad (29)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 4: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-right, and a blue line from bottom-left to top-right.} \\
 +
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 5: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-left, and a blue line from bottom-left to top-right.} \\
 =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram 6: A red line from bottom-left to top-left, a green line from bottom-left to top-left, and a blue line from bottom-left to top-right.}
 \end{array}, \quad (30)$$

$$(31)$$

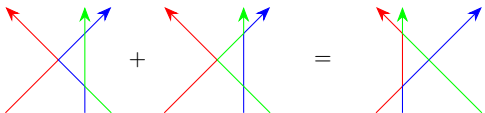
Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_3(\theta + \theta') S_3(\theta') + S_3(\theta) S_3(\theta + \theta') S_2(\theta') \\ = S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

 (30)

$$(31)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha}^{\alpha'} S_{\beta}^{\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'} \delta^{\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

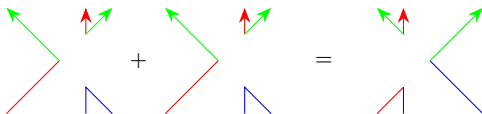
Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_3(\theta + \theta') S_3(\theta') + S_3(\theta) S_3(\theta + \theta') S_2(\theta') \\ = S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

+

=

$$(30)$$



$$(31)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

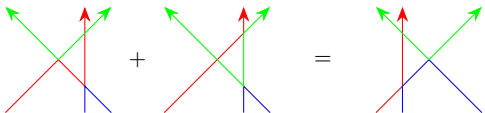
Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha}^{\alpha'} S_{\beta}^{\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha' \beta'} \delta_{\alpha \beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_3(\theta + \theta') S_3(\theta') + S_3(\theta) S_3(\theta + \theta') S_2(\theta') \\ = S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_1(\theta + \theta') S_1(\theta') + S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_1(\theta') \\ = S_3(\theta) S_1(\theta + \theta') S_2(\theta'), \end{aligned} \quad (30)$$


$$\quad (31)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') \\ = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'), \end{aligned} \quad (30)$$

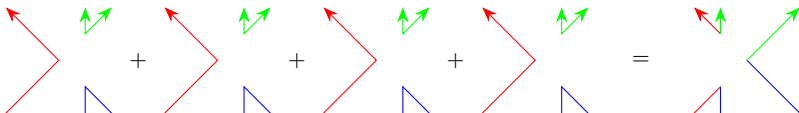
+

+

+

=

(31)



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

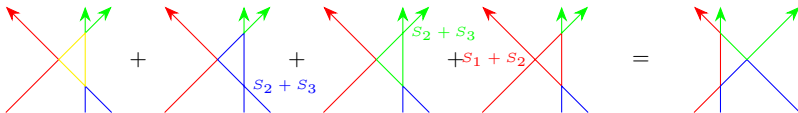
$$S_{\alpha}^{\alpha'} S_{\beta}^{\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha' \beta'} \delta_{\alpha \beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_3(\theta + \theta') S_3(\theta') + S_3(\theta) S_3(\theta + \theta') S_2(\theta') \\ = S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_2(\theta) S_1(\theta + \theta') S_1(\theta') + S_3(\theta) S_2(\theta + \theta') S_1(\theta') \\ = S_3(\theta) S_1(\theta + \theta') S_2(\theta'), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} N S_1(\theta) S_3(\theta + \theta') S_1(\theta') + S_1(\theta) S_3(\theta + \theta') (S_2(\theta') + S_3(\theta')) \\ + (S_2(\theta) + S_3(\theta)) S_3(\theta + \theta') S_1(\theta') \\ + S_1(\theta) (S_1(\theta + \theta') + S_2(\theta + \theta')) S_1(\theta') \\ = S_3(\theta) S_1(\theta + \theta') S_3(\theta'). \end{aligned} \quad (31)$$



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Напомним, что для $O(N)$ -модели ($N \geq 3$) S -матрица имеет вид

$$S_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}(\theta) = \delta^{\alpha'\beta'} \delta_{\alpha\beta} S_1(\theta) + \delta_{\alpha}^{\alpha'} \delta_{\beta}^{\beta'} S_2(\theta) + \delta_{\alpha}^{\beta'} \delta_{\beta}^{\alpha'} S_3(\theta). \quad (28)$$

Уравнение Янга—Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') \\ = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} NS_1(\theta)S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_1(\theta)S_3(\theta + \theta')(S_2(\theta') + S_3(\theta')) \\ + (S_2(\theta) + S_3(\theta))S_3(\theta + \theta')S_1(\theta') \\ + S_1(\theta)(S_1(\theta + \theta') + S_2(\theta + \theta'))S_1(\theta') \\ = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_3(\theta'). \end{aligned} \quad (31)$$

Давайте решим эти уравнения.

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Решим второе уравнение

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'). \quad (30)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Решим второе уравнение

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'). \quad (30)$$

Пусть $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Тогда

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Решим второе уравнение

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'). \quad (30)$$

Пусть $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Тогда

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Решим второе уравнение

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'). \quad (30)$$

Пусть $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Тогда

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя его в третье уравнение (31), получаем

$$\kappa = \frac{N-2}{2}\lambda.$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Решим первое уравнение

$$S_2(\theta)S_3(\theta + \theta')S_3(\theta') + S_3(\theta)S_3(\theta + \theta')S_2(\theta') = S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_3(\theta'). \quad (29)$$

Пусть $h(\theta) = S_2(\theta)/S_3(\theta)$. Тогда уравнение примет вид

$$h(\theta) + h(\theta') = h(\theta + \theta').$$

Следовательно, $h(\theta) \sim \theta$ и

$$S_3(\theta) = -i\frac{\lambda}{\theta}S_2(\theta). \quad (32)$$

Решим второе уравнение

$$S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_1(\theta') + S_3(\theta)S_2(\theta + \theta')S_1(\theta') = S_3(\theta)S_1(\theta + \theta')S_2(\theta'). \quad (30)$$

Пусть $g(\theta) = S_2(\theta)/S_1(\theta)$. Тогда

$$g(\theta + \theta') - g(\theta') = \frac{\theta}{i\lambda}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$g(\theta) = \frac{\theta - i\kappa}{i\lambda}.$$

Подставляя его в третье уравнение (31), получаем

$$\kappa = \frac{N-2}{2}\lambda.$$

Значит,

$$S_1(\theta) = -\frac{i\lambda}{i(N-2)\lambda/2 - \theta}S_2(\theta). \quad (33)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

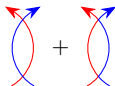
$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$(38)$$

$$(39)$$



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (38)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} = 0 \quad (39)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

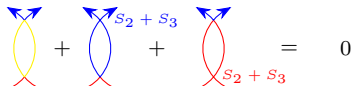
$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (38)$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)(S_2(-\theta) + S_3(-\theta)) + (S_2(\theta) + S_3(\theta))S_1(-\theta) = 0 \quad (39)$$



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (38)$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)(S_2(-\theta) + S_3(-\theta)) + (S_2(\theta) + S_3(\theta))S_1(-\theta) = 0 \quad (39)$$

Подставляя решение уравнения Янга—Бакстера в уравнения кроссинг-симметрии и унитарности, получаем

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (38)$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)(S_2(-\theta) + S_3(-\theta)) + (S_2(\theta) + S_3(\theta))S_1(-\theta) = 0 \quad (39)$$

Подставляя решение уравнения Янга—Бакстера в уравнения кроссинг-симметрии и унитарности, получаем

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Эти уравнения имеют бесконечно много решений ([неоднозначность Кастиллехо—Далица—Дайсона — CDD](#)). Если мы умножим любое решение на функцию

$$\frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha},$$

мы опять получим решение.

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Теперь подставим это в уравнение кроссинг-симметрии

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad (34)$$

$$S_1(\theta) = S_3(i\pi - \theta). \quad (35)$$

Получаем

$$\lambda = \frac{2\pi}{N-2}. \quad (36)$$

Наложим условие унитарности:

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1, \quad (37)$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0, \quad (38)$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)(S_2(-\theta) + S_3(-\theta)) + (S_2(\theta) + S_3(\theta))S_1(-\theta) = 0 \quad (39)$$

Подставляя решение уравнения Янга—Бакстера в уравнения кроссинг-симметрии и унитарности, получаем

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Эти уравнения имеют бесконечно много решений ([неоднозначность Кастиллехо—Далица—Дайсона — CDD](#)). Если мы умножим любое решение на функцию

$$\frac{\operatorname{sh} \theta + i \sin \alpha}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \alpha},$$

мы опять получим решение. Мы будем искать «минимальное» решение, которое имеет наименьшее количество нулей и полюсов на физическом листе.



Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$
унитарность $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = -i\pi$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ $\xRightarrow{\text{кроссинг}}$ Простой нуль $\theta = i\pi$
 $\xRightarrow{\text{унитарность}}$ Простой полюс $\theta = -i\pi$ $\xRightarrow{\text{кроссинг}}$ Простой полюс $\theta = 2i\pi$ $\xRightarrow{\text{унитарность}}$

...

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$
унитарность $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = -i\pi$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = 2i\pi$ унитарность $\Rightarrow$

...

Имеем серии нулей и полюсов:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$
унитарность $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = -i\pi$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = 2i\pi$ унитарность $\Rightarrow$

...

Имеем серии нулей и полюсов:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой полюс или при $\theta = -i\lambda$ (решение $S^{(+)}$) или при $\theta = i\lambda$ (решение $S^{(-)}$).

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$
унитарность $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = -i\pi$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = 2i\pi$ унитарность $\Rightarrow$

...

Имеем серии нулей и полюсов:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой полюс или при $\theta = -i\lambda$ (решение $S^{(+)}$) или при $\theta = i\lambda$ (решение $S^{(-)}$). Аналогично предыдущему получаем для $S^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = \mp i\lambda - i\pi - 2\pi in, \pm i\lambda + 2\pi i + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = \mp i\lambda - 2\pi in, \pm i\lambda + i\pi + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнения бутстрапа для S -матриц $O(N)$ -модели

Имеем систему разностных уравнений

$$S_2(\theta) = S_2(i\pi - \theta), \quad S_2(\theta)S_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2}. \quad (40)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = 0$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой нуль $\theta = i\pi$
унитарность $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = -i\pi$ кроссинг $\Rightarrow$ Простой полюс $\theta = 2i\pi$ унитарность $\Rightarrow$

...

Имеем серии нулей и полюсов:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = -2\pi in, i\pi + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = -i\pi - 2\pi in, 2\pi i + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Условие унитарности $\Rightarrow$ Простой полюс или при $\theta = -i\lambda$ (решение $S^{(+)}$) или при $\theta = i\lambda$ (решение $S^{(-)}$). Аналогично предыдущему получаем для $S^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \text{Нули:} \quad & \theta = \mp i\lambda - i\pi - 2\pi in, \pm i\lambda + 2\pi i + 2\pi in, \\ \text{Полюсы:} \quad & \theta = \mp i\lambda - 2\pi in, \pm i\lambda + i\pi + 2\pi in, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Строим функцию, которая имеет нули и полюсы в точках (41) и (42):

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(i\pi - \theta), \quad Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - i \frac{\theta}{2\pi}\right) \Gamma\left(-i \frac{\theta}{2\pi}\right)}. \quad (43)$$

S -матрица: предел $N \rightarrow \infty$ и окончательный выбор

Возьмем предел $N \rightarrow \infty$. Получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (44)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (45)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (46)$$

S -матрица: предел $N \rightarrow \infty$ и окончательный выбор

Возьмем предел $N \rightarrow \infty$. Получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (44)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (45)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (46)$$

Сравнивая с $1/N$ -разложением, заключаем, что решение $S^{(+)}(\theta)$ дает S -матрицу $O(N)$ -модели.

S -матрица: предел $N \rightarrow \infty$ и окончательный выбор

Возьмем предел $N \rightarrow \infty$. Получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (44)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (45)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (46)$$

Сравнивая с $1/N$ -разложением, заключаем, что решение $S^{(+)}(\theta)$ дает S -матрицу $O(N)$ -модели. Решение $S^{(-)}(\theta)$ дает S -матрицу N -компонентной фермионной модели Невё—Шварца (см. задачу к прошлой лекции).

S -матрица: предел $N \rightarrow \infty$ и окончательный выбор

Возьмем предел $N \rightarrow \infty$. Получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (44)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (45)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (46)$$

Сравнивая с $1/N$ -разложением, заключаем, что решение $S^{(+)}(\theta)$ дает S -матрицу $O(N)$ -модели. Решение $S^{(-)}(\theta)$ дает S -матрицу N -компонентной фермионной модели Невё—Шварца (см. задачу к прошлой лекции).

Заметим, что

$$S_{12}^{(\pm)}(0) = \mp P_{12}, \quad (47)$$

где $P_{12} : a \times b \mapsto b \times a$ — матрица перестановки пространств 1 и 2.

S -матрица: предел $N \rightarrow \infty$ и окончательный выбор

Возьмем предел $N \rightarrow \infty$. Получаем

$$S_1^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \quad (44)$$

$$S_2^{(\pm)}(\theta) = 1 \mp \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \quad (45)$$

$$S_3^{(\pm)}(\theta) = -\frac{2\pi i}{N\theta}. \quad (46)$$

Сравнивая с $1/N$ -разложением, заключаем, что решение $S^{(+)}(\theta)$ дает S -матрицу $O(N)$ -модели. Решение $S^{(-)}(\theta)$ дает S -матрицу N -компонентной фермионной модели Невё—Шварца (см. задачу к прошлой лекции).

Заметим, что

$$S_{12}^{(\pm)}(0) = \mp P_{12}, \quad (47)$$

где $P_{12} : a \times b \mapsto b \times a$ — матрица перестановки пространств 1 и 2. Это значит, что, хотя частицы в $O(N)$ -модели являются бозонам, для них действует сильный принцип Паули: две частицы не могут иметь одинаковый импульс.

Построение уравнения Янга—Бакстера для $O(N)$ -модели (в течение лекции).