

Лекция 9.
Интегрируемые возмущения минимальных моделей
двумерной конформной теории поля

Михаил Лашкевич

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0.

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n+1} T(w) \Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint_{\bar{z}} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w}-\bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(x),$$

где контуры обходят точку x .

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n+1} T(w) \Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint_{\bar{C}_{\bar{z}}} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w}-\bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(x),$$

где контуры обходят точку x .

Пусть $\Lambda \in U(\text{Vir})$. Мы можем определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar{\Lambda}(x) = (\bar{\Lambda} 1)(x)$$

как действие этих элементов на единичный оператор.

Конформная теория поля содержит бесконечную алгебру симметрий — две копии алгебры Вирасоро:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Алгебра Вирасоро порождается токами $T(x) = -2\pi T_{zz}$ и $\bar{T}(x) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$:

$$L_n = \oint_{C_0} \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} T(w), \quad \bar{L}_n = \oint_{C_0} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} \bar{w}^{n+1} \bar{T}(\bar{w}),$$

где контуры обходят точку 0. Нас будет интересовать действие алгебры Вирасоро на операторы:

$$(\mathcal{L}_n \Phi)(x) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n+1} T(w) \Phi(x), \quad (\bar{\mathcal{L}}_n \Phi)(x) = \oint_{\bar{C}_{\bar{z}}} \frac{d\bar{w}}{2\pi i} (\bar{w}-\bar{z})^{n+1} \bar{T}(\bar{w}) \Phi(x),$$

где контуры обходят точку x .

Пусть $\Lambda \in U(Vir)$. Мы можем определить операторы

$$\Lambda(x) = (\Lambda 1)(x), \quad \bar{\Lambda}(x) = (\bar{\Lambda} 1)(x)$$

как действие этих элементов на единичный оператор. Например,

$$(\mathcal{L}_{-1} 1)(x) = \partial 1 = 0, \quad (\mathcal{L}_{-2} 1)(x) = T(x), \quad (\mathcal{L}_{-3} 1)(x) = (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-2} 1)(x) = \partial T(x),$$

$$(\mathcal{L}_{-2}^2 1)(x) = \times_x T^2(x) \times_x, \quad (\mathcal{L}_{-4} 1)(x) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-3} 1)(x) = \frac{1}{2} \partial^2 T(x) \quad \text{и т.д.}$$

Операторы Λ , $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (2)$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории.

Операторы Λ , $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (2)$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории. Пусть \mathcal{S}_0 — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (3)$$

где $\Phi_p(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_p < 1$.

Операторы Λ , $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (2)$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории. Пусть \mathcal{S}_0 — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (3)$$

где $\Phi_p(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_p < 1$.
Интегрируемость $\stackrel{?}{=}$ интегралы движения.

Операторы Λ , $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (2)$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории. Пусть \mathcal{S}_0 — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (3)$$

где $\Phi_p(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_p < 1$.

Интегрируемость $\stackrel{?}{\equiv}$ интегралы движения. Мы будем искать **локальные** интегралы движения, то есть интегралы движения вида

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s+1} + \int d\bar{z} \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar{z} T_{s-1} + \int dz \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (4)$$

Операторы Λ , $\bar{\Lambda}$ удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = 0, \quad \partial\bar{\Lambda}(x) = 0. \quad (2)$$

Среди этих операторов есть несколько семейств коммутативных интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость минимальных моделей конформной теории поля. Теперь перейдем к возмущенной теории. Пусть \mathcal{S}_0 — формальное (эвклидово) действие некоторой конформной теории поля. Рассмотрим теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \Phi_p(x), \quad (3)$$

где $\Phi_p(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_p < 1$.

Интегрируемость $\stackrel{?}{\equiv}$ интегралы движения. Мы будем искать **локальные** интегралы движения, то есть интегралы движения вида

$$I_s = \begin{cases} \int dz T_{s+1} + \int d\bar{z} \Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \int d\bar{z} T_{s-1} + \int dz \Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где токи $T_{s\pm 1} \in [1]$, $\Theta_{s\mp 1} \in [\Phi_p]$ удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}T_{s+1} &= \partial\Theta_{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ \partial T_{s-1} &= \bar{\partial}\Theta_{s+1}, & \text{если } s < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нам будет удобно рассматривать операторы в эвклидовом пространстве, но результаты легко переносятся в пространство Минковского.

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar{\partial}\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_p(y) \bar{\partial}\Lambda(x) \Big|_{\text{CFT}}. \quad (6)$$

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar{\partial}\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_p(y) \bar{\partial}\Lambda(x) \Big|_{\text{CFT}}. \quad (6)$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s . Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (z' - z)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \quad (7)$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k .

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar{\partial}\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_P(y) \bar{\partial}\Lambda(x) \Big|_{\text{CFT}}. \quad (6)$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s . Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (z' - z)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \quad (7)$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k . Используя $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(x)$, находим $(x = (z, \bar{z}), y = (w, \bar{w}))$

$$\Phi_P(y) \bar{\partial}\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\partial}_z (z-w)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_P)(y) = \pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_z^k \delta(y-x) (\Lambda_{k-s+1}\Phi_P)(y).$$

В конформной теории поля любой оператор $\Lambda(x)$ является сохраняющимся током: $\bar{\partial}\Lambda(x) = 0$. В возмущенной теории в первом порядке имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = -\lambda \int d^2y \Phi_P(y) \bar{\partial}\Lambda(x) \Big|_{\text{CFT}}. \quad (6)$$

Будем вычислять правую часть. Пусть $\Lambda(x)$ — оператор размерности s . Тогда имеет место разложение

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (z' - z)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \quad (7)$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k . Используя $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta(x)$, находим $(x = (z, \bar{z}), y = (w, \bar{w}))$

$$\Phi_P(y) \bar{\partial}\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\partial}_z (z-w)^{k-s} (\Lambda_{-k}\Phi_P)(y) = \pi \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{k!} \partial_z^k \delta(y-x) (\Lambda_{k-s+1}\Phi_P)(y).$$

Берем интеграл по d^2y :

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k (\Lambda_{k-s+1}\Phi_P)(x).$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку слагаемые с $k \geq s$ равны нулю.

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(y) \Phi_p(x).$$

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(y) \Phi_P(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w \rightarrow z - u$. Имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \partial_z^k (\Lambda(z-u) \Phi_P(z, \bar{z})).$$

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(y) \Phi_P(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w \rightarrow z - u$. Имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \partial_z^k (\Lambda(z-u) \Phi_P(z, \bar{z})).$$

Суммирование ряда дает в голоморфном секторе замену $z \rightarrow z + u$:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \Lambda(z) \Phi_P(z+u, \bar{z}).$$

Воспользуемся разложением (7) в обратную сторону:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \partial^k \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^k \Lambda(y) \Phi_P(x).$$

Теперь сделаем замену переменных $w \rightarrow z - u$. Имеем

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \partial_z^k (\Lambda(z-u) \Phi_P(z, \bar{z})).$$

Суммирование ряда дает в голоморфном секторе замену $z \rightarrow z + u$:

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint_{C_0} \frac{du}{2\pi i} \Lambda(z) \Phi_P(z+u, \bar{z}).$$

После этого, заменяя $u \rightarrow w - z$, получаем окончательно

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda \oint \frac{dw}{2\pi i} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (8)$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w - z)^{n-1} \Phi_p(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Операторы \mathcal{D}_n просто коммутируют с \mathcal{L}_m . Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (10)$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Операторы \mathcal{D}_n просто коммутируют с \mathcal{L}_m . Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (10)$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_P)(m+1) + n-1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (11)$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Операторы \mathcal{D}_n просто коммутируют с \mathcal{L}_m . Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (10)$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_P)(m+1) + n - 1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (11)$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!} (\mathcal{L}_{-1}^n \Phi_P)(x), \quad n \geq 0. \quad (12)$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar{\partial}\Lambda$ для любых конечных Λ .

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Операторы \mathcal{D}_n просто коммутируют с \mathcal{L}_m . Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (10)$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_P)(m+1) + n - 1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (11)$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!} (\mathcal{L}_{-1}^n \Phi_P)(x), \quad n \geq 0. \quad (12)$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar{\partial}\Lambda$ для любых конечных Λ .

Простой пример:

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda \mathcal{D}_1 \mathcal{L}_{-2} 1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_P) \mathcal{D}_{-1} 1 = -\pi\lambda (1 - \Delta_P) \mathcal{L}_{-1} \Phi_P = -\pi\lambda (1 - \Delta_P) \partial \Phi_P. \quad (13)$$

Этот ответ удобно записать в виде

$$\bar{\partial}\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathcal{D}_1\Lambda)(x), \quad (\mathcal{D}_n\Lambda)(z, \bar{z}) = \oint \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n-1} \Phi_P(w, \bar{z}) \Lambda(z, \bar{z}). \quad (9)$$

Операторы \mathcal{D}_n просто коммутируют с \mathcal{L}_m . Из стандартного соотношения

$$[L_n, \Phi_\Delta(x)] = z^{n+1} \partial \Phi_\Delta(x) + (n+1) \Delta z^n \Phi_\Delta(x) \quad (10)$$

находим

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{D}_n] = -((1 - \Delta_P)(m+1) + n - 1) \mathcal{D}_{m+n}. \quad (11)$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathcal{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!} (\mathcal{L}_{-1}^n \Phi_P)(x), \quad n \geq 0. \quad (12)$$

Из этих двух соотношений мы можем получать $\bar{\partial}\Lambda$ для любых конечных Λ .

Простой пример:

$$\bar{\partial}T = \pi\lambda \mathcal{D}_1 \mathcal{L}_{-2}1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_P) \mathcal{D}_{-1}1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_P) \mathcal{L}_{-1} \Phi_P = -\pi\lambda(1 - \Delta_P) \partial \Phi_P. \quad (13)$$

Отсюда получаем стандартное выражение

$$T_2 = \mathcal{L}_{-2}1, \quad \Theta_0 = -\pi\lambda(1 - \Delta_P) \Phi_P. \quad (14)$$

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полному производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_P) \left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_P}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_P, \quad (15)$$

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_p, \quad (15)$$

И на уровне 6:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3 - \Delta_p)(5 - \Delta_p)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p, \quad (16)$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5 - 2\Delta_p}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p. \quad (17)$$

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_p, \quad (15)$$

И на уровне 6:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3 - \Delta_p)(5 - \Delta_p)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p, \quad (16)$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5 - 2\Delta_p}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p. \quad (17)$$

Вообще говоря, правые части этих выражений, не сводятся к выражениям вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots) = \partial(\dots)$. Они могут принимать такой вид, если в модуле $[\Phi_p]$ имеются нуль-векторы уровня 2 или 3. Рассмотрим сначала случай уровня 3.

Мы не будем рассматривать $\Lambda(x)$ нечетных уровней, потому что они сводятся к полным производным: $\Lambda(x) = \mathcal{L}_{-1}\Lambda_1(x) = \partial\Lambda_1(x)$.

Нетрудно получить на уровне 4:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathcal{D}_1\mathcal{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(2\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{6}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_p, \quad (15)$$

И на уровне 6:

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(3\mathcal{L}_{-2}^2\mathcal{L}_{-1} - \frac{3 - \Delta_p}{2}\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}^3 + \frac{(3 - \Delta_p)(5 - \Delta_p)}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p, \quad (16)$$

$$\bar{\partial}\mathcal{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1 - \Delta_p) \left(\mathcal{L}_{-3}\mathcal{L}_{-1}^2 - \frac{5 - 2\Delta_p}{120}\mathcal{L}_{-1}^5 \right) \Phi_p. \quad (17)$$

Вообще говоря, правые части этих выражений, не сводятся к выражениям вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots) = \partial(\dots)$. Они могут принимать такой вид, если в модуле $[\Phi_p]$ имеются нуль-векторы уровня 2 или 3. Рассмотрим сначала случай уровня 3. Если $\Delta = \Delta_{31}, \Delta_{13}$, в неприводимом представлении имеется соотношение:

$$\left(\mathcal{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta + 2}\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta + 1)(\Delta + 2)}\mathcal{L}_{-1}^3 \right) \Phi_\Delta(x) = 0, \quad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}. \quad (18)$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_p = \Delta_{13}$, $\Phi_p = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и \mathcal{L}_{-1}^3 , так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (19)$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_p = \Delta_{13}$, $\Phi_p = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и \mathcal{L}_{-1}^3 , так что имеем

$$T_4 = \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 = -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \quad (19)$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию \mathcal{L}_{-2}^3 и \mathcal{L}_{-3}^2 . Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c+2}{2} \mathcal{L}_{-3}^2 1. \quad (20)$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_p = \Delta_{13}$, $\Phi_p = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и \mathcal{L}_{-1}^3 , так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (19)$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию \mathcal{L}_{-2}^3 и \mathcal{L}_{-3}^2 . Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c+2}{2} \mathcal{L}_{-3}^2 1. \quad (20)$$

В случае $\Delta_p = \Delta_{21}, \Delta_{12}$ величина $\bar{\partial}(\mathcal{L}_{-2}^2 1)$ не является полной производной по z . Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \left(\frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2 \right) \mathcal{L}_{-3}^2, \quad \text{для } \Delta_p = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (21)$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_p = \Delta_{13}$, $\Phi_p = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и \mathcal{L}_{-1}^3 , так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (19)$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию \mathcal{L}_{-2}^3 и \mathcal{L}_{-3}^2 . Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c+2}{2} \mathcal{L}_{-3}^2 1. \quad (20)$$

В случае $\Delta_p = \Delta_{21}$, Δ_{12} величина $\bar{\partial}(\mathcal{L}_{-2}^2 1)$ не является полной производной по z . Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \left(\frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2 \right) \mathcal{L}_{-3}^2, \quad \text{для } \Delta_p = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (21)$$

Таким образом, высшие интегралы движения имеются в случаях

$$\Delta_p = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (22)$$

Но $\Delta_{31} > 1$ при $c < 1$, так что остается случай $\Delta_p = \Delta_{13}$, $\Phi_p = \Phi_{13}$. В этом случае $\mathcal{L}_{-2}\mathcal{L}_{-1}$ выражается через $\mathcal{L}_{-1}\mathcal{L}_{-2}$ и \mathcal{L}_{-1}^3 , так что имеем

$$\begin{aligned} T_4 &= \mathcal{L}_{-2}^2 1, \\ \Theta_2 &= -\pi\lambda \frac{1 - \Delta_{13}}{2 + \Delta_{13}} \left(2\Delta_{13}\mathcal{L}_{-2} + \frac{(1 - \Delta_{13})(2 - \Delta_{13})(3 + \Delta_{13})}{6(1 + \Delta_{13})} \right) \Phi_{13}. \end{aligned} \quad (19)$$

На уровне 6 нужно найти комбинацию \mathcal{L}_{-2}^3 и \mathcal{L}_{-3}^2 . Оказывается, она равна

$$T_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \frac{c+2}{2} \mathcal{L}_{-3}^2 1. \quad (20)$$

В случае $\Delta_p = \Delta_{21}$, Δ_{12} величина $\bar{\partial}(\mathcal{L}_{-2}^2 1)$ не является полной производной по z . Но можно найти ток на уровне 6:

$$T'_6 = \mathcal{L}_{-2}^3 1 + \left(\frac{18}{2\Delta + 1} + \Delta - 2 \right) \mathcal{L}_{-3}^2, \quad \text{для } \Delta_p = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (21)$$

Таким образом, высшие интегралы движения имеются в случаях

$$\Delta_p = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \quad (22)$$

Можно ли доказать существование интегралов движения на более высоких уровнях? Можно, но трудно. Я здесь приведу технический прием (А. Замолодчиков, 1989), позволяющий показать это для нескольких нижних уровней.

Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Из размерности даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (23)$$

вид которых известен из конформной теории поля.

Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Из размерности даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (23)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (24)$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$.

Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Из размерности даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (23)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (24)$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \quad (25)$$

Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Из размерности даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (23)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (24)$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \quad (25)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_s :

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_p)_s - \dim(\mathcal{H}_p)_{s-1}. \quad (26)$$

Здесь мы снова количество операторов вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Эти величины заведомо завышены, потому что уравнения могут быть не независимы.

Пусть \mathcal{H}_{mn} — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn} , а $(\mathcal{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s . Из размерности даются характеристиками

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathcal{H}_{mn})_s, \quad (23)$$

вид которых известен из конформной теории поля. Размерность пространств операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathcal{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathcal{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \quad (24)$$

Вычитание $\dim(\mathcal{H}_{11})_s$ исключает операторы вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} k_s q^s = q^{-1}((1-q)\chi_{11}(q) + q - 1). \quad (25)$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_s :

$$l_s = \dim(\mathcal{H}_p)_s - \dim(\mathcal{H}_p)_{s-1}. \quad (26)$$

Здесь мы снова количество операторов вида $\mathcal{L}_{-1}(\dots)$. Эти величины заведомо завышены, потому что уравнения могут быть не независимы. Соответствующий характер:

$$\chi_1(q) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} l_s q^s = (1-q)\chi_p(q). \quad (27)$$

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения [снизу](#).

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения **снизу**.

Для точек общего положения по s имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (28)$$

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения [снизу](#).

Для точек общего положения по s имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (28)$$

Тогда для $\Delta_p = \Delta_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \quad (29)$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Значит, в модели есть по крайней мере восемь интегралов движения спинов $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$.

Найдем величины $\delta_s = k_s - l_s$, которые ограничивают количество интегралов движения **снизу**.

Для точек общего положения по s имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (28)$$

Тогда для $\Delta_p = \Delta_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \quad (29)$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Значит, в модели есть по крайней мере восемь интегралов движения спинов $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$.

Для $\Delta_p = \Delta_{12}, \Delta_{21}$ имеем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^{10} + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + O(q^{16}). \quad (30)$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$, то есть опять имеется по крайней мере восемь интегралов движения.

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R : $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть C_\perp — замкнутый контур вдоль оси x^1 . Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz T_{s+1}. \quad (31)$$

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R : $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть C_\perp — замкнутый контур вдоль оси x^1 . Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz T_{s+1}. \quad (31)$$

Гамильтониан возмущения

$$H_p = \lambda \int_0^R dx^1 \Phi_p(x). \quad (32)$$

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R : $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть C_\perp — замкнутый контур вдоль оси x^1 . Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz T_{s+1}. \quad (31)$$

Гамильтониан возмущения

$$H_p = \lambda \int_0^R dx^1 \Phi_p(x). \quad (32)$$

Теперь перейдем к квантованию в координатах светового конуса: \bar{z} будем рассматривать как время и зафиксируем: $\bar{z} = \bar{z}_0$. Тогда полный гамильтониан системы имеет вид

$$H_p^+(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz \Phi_p(z, \bar{z}_0). \quad (33)$$

Обсудим другой подход. Пусть система живет на цилиндре окружности R : $x^1 \sim x^1 + R$. Пусть C_\perp — замкнутый контур вдоль оси x^1 . Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz T_{s+1}. \quad (31)$$

Гамильтониан возмущения

$$H_p = \lambda \int_0^R dx^1 \Phi_p(x). \quad (32)$$

Теперь перейдем к квантованию в координатах светового конуса: \bar{z} будем рассматривать как время и зафиксируем: $\bar{z} = \bar{z}_0$. Тогда полный гамильтониан системы имеет вид

$$H_p^+(\bar{z}_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz \Phi_p(z, \bar{z}_0). \quad (33)$$

Условие $\mathcal{D}_1 T_s = \partial(\dots)$ эквивалентно коммутативности невозмущенного интеграла движения с гамильтонианом

$$[I_s^{(0)}, H_p^+] = 0. \quad (34)$$

Это уравнение можно решать в **правом (голоморфном) секторе**.

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \quad (35)$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \quad (35)$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \quad (36)$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{z}{R}}. \quad (35)$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \quad (36)$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad (37)$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{z}{R}}. \quad (35)$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \quad (36)$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad (37)$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R} \right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24} \right). \quad (38)$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{z}{R}}. \quad (35)$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \quad (36)$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad (37)$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R} \right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24} \right). \quad (38)$$

Следовательно,

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_{\perp}} dz e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24} \delta_{n0} \right). \quad (39)$$

Чтобы определить действие генераторов алгебры Вирасоро на цилиндре, перейдем от цилиндра к плоскости:

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \quad \bar{\zeta} = e^{2\pi i \frac{\bar{z}}{R}}. \quad (35)$$

Тогда

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{n+1} \tilde{T}(\zeta). \quad (36)$$

В силу закона преобразования

$$T(z) \rightarrow (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} \{f(z), z\}, \quad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad (37)$$

имеем

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R} \right)^2 \left(\zeta^2 \tilde{T}(\zeta) - \frac{c}{24} \right). \quad (38)$$

Следовательно,

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_{\perp}} dz e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24} \delta_{n0} \right). \quad (39)$$

Преобразуя коммутационное соотношение для $[L_n, \Phi_{\Delta}]$, находим

$$[\mathbb{L}_n, \Phi_{\Delta}(x)] = \zeta^n \left(\frac{iR}{2\pi} \partial \Phi(x) + n \Delta \Phi_{\Delta}(x) \right). \quad (40)$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = T_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (41)$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (41)$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_p^+] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_p(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (41)$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_p^+] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_p(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z} \quad (42)$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (41)$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_p^+] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_p(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z} \quad (42)$$

Довольно громоздким вычислением можно получить

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R} \left(\mathbb{T}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n} \mathbb{T}_n \right) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3} \left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n - \frac{1}{6} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right) + \frac{c}{1440} \right). \quad (43) \end{aligned}$$

Простейший интеграл движения легко найти:

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right). \quad (41)$$

Действительно,

$$[\mathbb{T}_0, H_p^+] = -2\pi i \lambda \int_{C_\perp} dz \partial \Phi_p(z, \bar{z}_0) = 0.$$

Рассмотрим следующий интеграл движения

$$I_3^{(0)} = \mathcal{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz \mathcal{L}_{-2} T(z) = \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z} \quad (42)$$

Довольно громоздким вычислением можно получить

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R} \left(\mathbb{T}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n} \mathbb{T}_n \right) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3} \left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n - \frac{1}{6} \left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24} \right) + \frac{c}{1440} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

В этом подходе не совсем просто вывести, что $[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{L}_{-n} \mathbb{L}_n, H_p^+] = 0$, зато $[I_3^{(0)}, I_1^{(0)}] = 0$ получается мгновенно.

Далее можно строить серию коммутирующих между собой интегралов движения вида

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz \left(\mathcal{L}_{-\frac{s+1}{2}}^{\frac{s+1}{2}} + \dots \right) 1$$

$$\sim \sum_{n_1 + \dots + n_s = 0} : \mathbb{L}_{n_1} \cdots \mathbb{L}_{n_s} : + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{n_1 + \dots + n_k = 0} A_{n_1 \dots n_k} : \mathbb{L}_{n_1} \cdots \mathbb{L}_{n_k} :,$$

Существование такой серии доказано разными способами Фейгиным и Френкелем (1993) и Бажановым, Лукьяновым и А. Замолотчиковым (1996). Коммутация их с $H_{\mathbb{P}}^+$ следует из невырожденности спектра этого оператора и $I_s^{(0)}$ с $s > 3$. Из этой коммутации уже следует существование I_s .

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} s = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z} & \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{13}; \\ s = 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} & \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \tag{44}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21} .

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} s = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{Z} & \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{13}; \\ s = 6n \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z} & \quad \text{для } \Phi_p = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \quad (44)$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21} . В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_p = \Phi_{12} \quad p = 3: \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \quad (45)$$

В точках общего положения имеются по одному интегралу I_s со спинами

$$\begin{aligned} s &= 2n - 1, & n \in \mathbb{Z} & \text{ для } \Phi_p = \Phi_{13}; \\ s &= 6n \pm 1, & n \in \mathbb{Z} & \text{ для } \Phi_p = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \quad (44)$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \geq 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \geq 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21} . В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_p = \Phi_{12} \quad p = 3: & \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ p = 4: & \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ p = 5: & \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \quad (45)$$

Нас будут также интересовать неунитарные модели $c = 1 - 6(p' - p)^2/pp'$ с $p = 2, p' = 2N + 1$. Для них

$$c = 1 - \frac{3(2N - 1)^2}{(2N + 1)}, \quad \Phi_p = \Phi_{13}: \quad s \in (2\mathbb{Z} + 1) \setminus ((2N - 1)\mathbb{Z}). \quad (46)$$

Задача 1. Используя разложение

$$\frac{1}{z} - \operatorname{cth} z = \frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + O(z^5),$$

запишите

$$I_3^{(0)} = \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z}$$

на цилиндре в виде, уважающем периодичность с периодом R .

Задача 1. Используя разложение

$$\frac{1}{z} - \operatorname{cth} z = \frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} + O(z^5),$$

запишите

$$I_3^{(0)} = \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} \frac{T(w)T(z)}{w-z}$$

на цилиндре в виде, уважающем периодичность с периодом R .

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \left(\operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{i\pi}{3R}(w-z) + \frac{i\pi^3}{45R^3}(w-z)^3 \right) \\ &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \left(\oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2i\pi}{3R}T(z) + \frac{i\pi^3 c}{90R^3} \right) \\ &= \frac{\pi}{iR} \int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i} T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}. \end{aligned}$$

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по C_{\perp} .

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по C_\perp .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) \\ &= \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw \left(T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (z - w) \right) \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R} (z - w). \end{aligned}$$

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по C_\perp .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) \\ &= \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw \left(T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (z - w) \right) \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R} (z - w). \end{aligned}$$

Задача 3. Разложите получившееся подынтегральное выражение по степеням $e^{\pm \frac{2\pi i}{R}(z-w)}$ и выразите ответ через операторы \mathbb{T}_n .

Задача 2. Выразите интеграл по C_z через интегралы по C_\perp .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw [T(w), T(z)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) \\ &= \frac{1}{2R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw \left(T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (w - z) + T(z)T(w) \operatorname{cth} \frac{\pi}{iR} (z - w) \right) \\ &= \frac{1}{R} \int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw T(w)T(z) \operatorname{cth} \frac{i\pi}{R} (z - w). \end{aligned}$$

Задача 3. Разложите получившееся подынтегральное выражение по степеням $e^{\pm \frac{2\pi i}{R}(z-w)}$ и выразите ответ через операторы \mathbb{T}_n .

Из

$$\operatorname{cth} z = \frac{1 + e^{-2z}}{1 - e^{-2z}} = (1 + e^{-2z}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz}.$$

получаем

$$I_3^{(0)} = \frac{1}{R} \left(\mathbb{T}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{-n} \mathbb{T}_n \right) + \frac{2\pi}{3R^2} \mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}$$