Лекция 9

Интегрируемые возмущения минимальных моделей двумерной конформной теории поля

Здесь мы рассмотрим интегрируемые возмущения конформной теории поля на примере возмущений минимальных конформных моделей [7]. Пусть $\mathscr{S}_0$ — формальное действие минимальной конформной модели с центральным зарядом $c<1$. Сначала мы будем интересоваться моделями общего положения, а потом обсудим рациональные случаи. Рассмотрим возмущенную модель в эвклидовом пространстве с формальным действием

$$\mathscr{S}=\mathscr{S}_0+\lambda\int d^2x\,\Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{9.1}$$

где $\Phi_{\mathrm{p}}(x)$ — примарный оператор нулевого спина и размерности $\Delta_{\mathrm{p}}<1$. Пока никак более не будем ограничивать допустимые значения размерности возмущающего оператора.

В конформной теории поля имеется бесконечно много интегралов движения. Обозначим через $\mathscr{L}_n$, $\bar{\mathscr{L}}_n$ генераторы двух представлений алгебры Вирасоро, действующих на локальные операторы:

$$(\mathscr{L}_n\Phi)(x)=\oint\frac{dw}{2\pi i}(w-z)^{n+1}T(w)\Phi(x),\qquad(\bar{\mathscr{L}}_n\Phi)(x)=\oint\frac{d\bar w}{2\pi i}(\bar w-\bar z)^{n+1}\bar T(\bar w)\Phi(x),$$

где интегралы берутся по маленьким петлям, охватывающим точку x. Тогда для любого элемента Λ подалгебры универсальной обвертывающей алгебры $U(Vir)$ алгебры Вирасоро, порожденной элементами L_{-n} $(n>0)$, можно определить операторы

$$\Lambda(x)=(\Lambda 1)(x),\qquad\bar\Lambda(x)=(\bar\Lambda 1)(x)$$

в конформном семействе единичного оператора [1]. Например,

$$(\mathscr{L}_{-1}1)(x)=\partial 1=0,\qquad(\mathscr{L}_{-2}1)(x)=T(x),\qquad(\mathscr{L}_{-3}1)(x)=(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{-2}1)(x)=\partial T(x),$$
$$(\mathscr{L}_{-2}^2 1)(x)={}^\times_\times T^2(x)^\times_\times,\qquad(\mathscr{L}_{-4}1)(x)=\frac12(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{-3}1)(x)=\frac12\,\partial^2T(x)\quad\text{и т.д.}$$

Для этих операторов имеем

$$\bar\partial\Lambda(x)=0,\qquad\partial\bar\Lambda(x)=0. \tag{9.2}$$

Вообще говоря, соответствующие интегралы движения не коммутируют. Но среди них имеются серии коммутирующих интегралов движения, которые обеспечивают интегрируемость минимальных конформных моделей.

Изучим, как меняются тождества (9.2) под действием возмущения. Наша задача будет состоять в том, чтобы найти такие операторы $T_s(x)$ спина s среди киральных (правых или левых) потомков единичного оператора и такие операторы $\Theta_s(x)$ спина s, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned}\bar\partial T_{s+1}&=\partial\Theta_{s-1},&&\text{если } s>0;\\ \partial T_{s-1}&=\bar\partial\Theta_{s+1},&&\text{если } s<0.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Тогда мы сможем сказать, что система обладает интегралами движения

$$I_s=\begin{cases}\int dz\,T_{s+1}+\int d\bar z\,\Theta_{s-1}, & \text{если } s>0;\\ \int d\bar z\,T_{s-1}+\int dz\,\Theta_{s+1}, & \text{если } s<0;\end{cases} \tag{9.4}$$

Интегралы можно брать вдоль любых контуров (комплексно-сопряженных друг другу для z и $\bar z$ в эвклидовом пространстве), уходящих в обе стороны на пространственную бесконечность. Продолжение в пространство Минковского очевидно. Коммутативность этих интегралов движения, несомненно, должна проверяться отдельно.

В первом порядке по теории возмущений имеем

$$\bar\partial\Lambda(x)=-\lambda\int d^2y\,\Phi_{\mathrm{p}}(y)\,\bar\partial\Lambda(x)\Big|_{\mathrm{CFT}}. \tag{9.5}$$

В правой части предполагается, что вычисление выполняется в конформной теории поля. Конечно, это равенство имеет смысл в той мере, в которой интеграл локализуется в окрестности точки x. В дальнейшем я буду опускать это напоминание.

Если элемент Λ является элементом градуировки $(-s)$ в $U(Vir)$, операторное разложение для оператора $\Lambda(x)$ с примарным оператором $\Phi_\Delta(x)$ в конформной теории поля имеет вид

$$\Lambda(x')\Phi_\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(z'-z)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)(x). \tag{9.6}$$

Здесь $(\Lambda_{-k}\Phi_\Delta)$ — некоторый правый (киральный) потомок оператора Φ_Δ уровня k. Отсюда находим

$$\Phi_{\mathrm{p}}(y)\,\bar\partial\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\bar\partial_z(z-w)^{k-s}(\Lambda_{-k}\Phi_{\mathrm{p}})(y) = \pi\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,\partial_z^k\delta(y-x)(\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\mathrm{p}})(y).$$

Мы положили $x=(z,\bar z)$, $y=(w,\bar w)$ и использовали тождество $\bar\partial z^{-1} = \pi\delta(x)$. Из (9.5) находим

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k(\Lambda_{k-s+1}\Phi_{\mathrm{p}})(x).$$

Мы продолжили сумму до бесконечности, поскольку члены с $k\ge s$ равны нулю. Снова учитывая разложение (9.6), находим

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k\oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^k\Lambda(y)\Phi_{\mathrm{p}}(x)$$

Воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\,\partial^k\oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^kf(w,z) &= \oint\frac{du}{2\pi i}\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\,\partial_z^kf(z-u,z)\\ &= \oint\frac{du}{2\pi i}\,f(z,z+u) = \oint\frac{dw}{2\pi i}\,f(z,w).\end{aligned}$$

Интеграл по $u=z-w$ берется по маленькой окружности вокруг нуля. Окончательно находим

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda\oint\frac{dw}{2\pi i}\,\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z) \tag{9.7}$$

или

$$\bar\partial\Lambda(x) = \pi\lambda(\mathscr{D}_1\Lambda)(x), \qquad (\mathscr{D}_n\Lambda)(z,\bar z) = \oint\frac{dw}{2\pi i}\,(w-z)^{n-1}\Phi_{\mathrm{p}}(w,\bar z)\Lambda(z,\bar z). \tag{9.8}$$

Из стандартного соотношения конформной теории поля

$$[L_n,\Phi_\Delta(x)] = z^{n+1}\partial\Phi_\Delta(x) + (n+1)\Delta z^n\Phi_\Delta(x) \tag{9.9}$$

мы находим

$$[\mathscr{L}_m,\mathscr{D}_n] = -((1-\Delta_{\mathrm{p}})(m+1)+n-1)\mathscr{D}_{m+n}. \tag{9.10}$$

Кроме того, из определения имеем

$$(\mathscr{D}_{-n}1)(x) = \frac{1}{n!}(\mathscr{L}_{-1}^n\Phi_{\mathrm{p}})(x). \tag{9.11}$$

Применим теперь (9.10) и (9.11) к вычислению правых частей нескольких первых операторов Λ. Мы будем рассматривать только случаи четных значений s, поскольку для нечетных s операторы сводятся к производным от операторов с четными s. Для $T(x)$ имеем

$$\bar\partial T = \pi\lambda\mathscr{D}_1\mathscr{L}_{-2}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathscr{D}_{-1}1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\mathscr{L}_{-1}\Phi_{\mathrm{p}} = -\pi\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})\partial\Phi_{\mathrm{p}}. \tag{9.12}$$

Отсюда получаем

$$T_2 = \mathscr{L}_{-2}1, \qquad \Theta_0 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\rm p})\Phi_{\rm p}. \tag{9.13}$$

Аналогично, нетрудно получить

$$\bar\partial\mathscr{L}_{-2}^2 1 = \pi\lambda\mathscr{D}_1\mathscr{L}_{-2}^2 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\rm p})\left(2\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\rm p}}{6}\mathscr{L}_{-1}^3\right)\Phi_{\rm p}, \tag{9.14}$$

$$\bar\partial\mathscr{L}_{-2}^3 1 = -\pi\lambda(1-\Delta_{\rm p})\left(3\mathscr{L}_{-2}^2\mathscr{L}_{-1} - \frac{3-\Delta_{\rm p}}{2}\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-1}^3 + \frac{(3-\Delta_{\rm p})(5-\Delta_{\rm p})}{120}\mathscr{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\rm p}, \tag{9.15}$$

$$\bar\partial\mathscr{L}_{-3}^2 1 = -2\pi\lambda(1-\Delta_{\rm p})\left(\mathscr{L}_{-3}\mathscr{L}_{-1}^2 - \frac{5-2\Delta_{\rm p}}{120}\mathscr{L}_{-1}^5\right)\Phi_{\rm p}. \tag{9.16}$$

Вообще говоря, правые части этих уравнений нельзя представить в виде $\mathscr{L}_{-1}(\cdots)$, поэтому при произвольном возмущении интегралов движения спинов 3 и 5 нет.

Рассмотрим сначала правую часть (9.14). Выражение может быть представлено в виде $\mathscr{L}_{-1}(\cdots)$, только если имеется соотношение на третьем уровне, позволяющее выразить действие $\mathscr{L}_{-3}$ как комбинацию действий $\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{-2}$ и $\mathscr{L}_{-1}^3$. Вспомним, что такого рода соотношения возникают для вырожденных неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, старшие веса которых даются формулой Каца:

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{4}\left((\alpha_+ m + \alpha_- n)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2\right), \quad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2+1}, \quad c = 1 - 24\alpha_0^2. \tag{9.17}$$

Представление со старшим весом Δ_{mn} имеет соотношение на уровне mn. Таким образом, нужное соотношение имеет место, если $\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}$ или $\Delta_{\rm p} = \Delta_{31}$:

$$\left(\mathscr{L}_{-3} - \frac{2}{\Delta+2}\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{-2} + \frac{1}{(\Delta+1)(\Delta+2)}\mathscr{L}_{-1}^3\right)\Phi_\Delta(x) = 0, \qquad \Delta = \Delta_{13}, \Delta_{31}. \tag{9.18}$$

Поскольку $\Delta_{31} > 1$, только для $\Delta_{\rm p} = \Delta_{13}$ возмущение будет релевантным. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} &T_4 = \mathscr{L}_{-2}^2 1, \\ &\Theta_2 = -\pi\lambda\frac{1-\Delta_{13}}{2+\Delta_{13}}\left(2\Delta_{13}\mathscr{L}_{-2} + \frac{(1-\Delta_{13})(2-\Delta_{13})(3+\Delta_{13})}{6(1+\Delta_{13})}\mathscr{L}_{-1}^2\right)\Phi_{13}. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Теперь будем искать ток спина 6 в виде

$$T_6 = A\mathscr{L}_{-2}^3 1 + B\mathscr{L}_{-3}^2 1.$$

Выделим в $\bar\partial T_6$ слагаемые, не имеющие вида $\mathscr{L}_{-1}(\cdots)$:

$$\bar\partial T_6 \sim (A(3\mathscr{L}_{-2}^2\mathscr{L}_{-1}1 + \alpha\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-1}^3) + B\mathscr{L}_{-3}\mathscr{L}_{-1}^2 + \mathscr{L}_{-1}(\cdots))\Phi_{13}, \qquad \alpha = (3-\Delta_{13})/2.$$

Коммутируя генераторы алгебры Вирасоро, нетрудно привести выражение в скобках к виду

$$\Lambda = 6A\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-3} + \left(3A - \frac{A\alpha - B}{6}\right)\mathscr{L}_{-5} + \mathscr{L}_{-1}(\cdots).$$

Далее, из условия нулевого вектора получаем

$$\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-3} = \beta\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{-2} + \gamma\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-1}^3 = \beta\mathscr{L}_{-5} - \beta\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-3} - \frac{\gamma}{6}\mathscr{L}_{-5} + \mathscr{L}_{-1}(\cdots),$$

где $\beta = 2/(2+\Delta_{12})$, $\gamma = -1/(1+\Delta_{13})(2+\Delta_{13})$. Отсюда выражаем $\mathscr{L}_{-2}\mathscr{L}_{-3}$ через $\mathscr{L}_{-5}$. После этого, приравняв коэффициент при $\mathscr{L}_{-5}$ к нулю, можно получить, что ток

$$T_6 = \mathscr{L}_{-2}^3 1 + \frac{c+2}{2}\mathscr{L}_{-3}^2 1 \tag{9.20}$$

порождает сохраняющийся заряд. На шестом уровнем можно также доказать, что существует интеграл движения с током

$$T_6' = \mathscr{L}_{-2}^3 1 + \left(\frac{18}{2\Delta+1} + \Delta - 2\right)\mathscr{L}_{-3}^2 \quad \text{для } \Delta_{\rm p} = \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{9.21}$$

Таким образом при $c < 1$ интегрируемость можно ожидать для

$$\Delta_{\mathrm{p}} = \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{21}. \tag{9.22}$$

Однако с ростом спина вычисления становятся все сложнее и сложнее. Использовать явные формулы становится затруднительно. Чтобы продвинуться дальше, А. Замолодчиков предложил такой прием. Сначала найдем число потомков на каждом уровне, претендующих на то, чтобы давать ток. Пусть $\mathscr{H}_{mn}$ — неприводимое представление алгебры Вирасоро со старшим весом Δ_{mn}, а $(\mathscr{H}_{mn})_s$ — подпространство уровня s. Размерности этих подпространств даются характерами

$$\chi_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} q^s \dim(\mathscr{H}_{mn})_s, \tag{9.23}$$

вид которых известен из конформной теории поля. Тогда размерность таких пространств подходящих операторов, из которых мы можем построить T_{s+1} есть

$$k_s = \dim(\mathscr{H}_{11})_{s+1} - \dim(\mathscr{H}_{11})_s + \delta_{s0}. \tag{9.24}$$

Вычитание $\dim(\mathscr{H}_{11})_s$ нужно для того, чтобы исключить операторы вида $\mathscr{L}_{-1}(\cdots)$, а прибавление символа Кронекера — чтобы скомпенсировать тот факт, что производная от единичного оператора равна нулю. Для величин k_s имеем характер

$$\chi_0(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} k_s q^s = (q^{-1} - 1)(\chi_{11}(q) - 1). \tag{9.25}$$

Теперь найдем количество уравнений, которые накладываются на коэффициенты в операторе T_{s+1}:

$$l_s = \dim(\mathscr{H}_{\mathrm{p}})_s - \dim(\mathscr{H}_{\mathrm{p}})_{s-1}. \tag{9.26}$$

Здесь мы снова вычли из количества всех линейно-независимых операторов количество операторов вида $\mathscr{L}_{-1}(\cdots)$. Для соответствующего характера имеем

$$\chi_1(q) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} l_s q^s = (1 - q)\chi_{\mathrm{p}}(q). \tag{9.27}$$

Вычитая одно из другого, получаем нижнюю границу $\delta_s = k_s - l_s$ количества решений на каждом уровне. В частности, в точках общего положения по c имеем

$$\chi_{mn}(q) = (1 - q^{mn}) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \tag{9.28}$$

Для $\Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{13}$ получаем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^2 + q^3 - 2q^4 + q^5 - 3q^6 + q^7 - 4q^8 - 6q^{10} - 10q^{12} - 2q^{13} + O(q^{14}). \tag{9.29}$$

Мы видим, что $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_7 = 1$, а все остальные $\delta_s \leq 0$. Это значит, что, по крайней мере, на для спинов $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$ имеются решения. На более высоких уровнях на самом деле уравнения избыточны.

Для случаев $\Phi_{\mathrm{p}} = \Phi_{12}, \Phi_{21}$ имеем

$$\chi_0(q) - \chi_1(q) = -1 + q - q^4 + q^5 - 2q^6 + q^7 - 2q^8 - 3q^10 + q^{11} - 6q^{12} - 6q^{14} - 3q^{15} + O(q^{16}). \tag{9.30}$$

Мы получаем $\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_{11} = 1$, то есть, по крайней мере, имеется восемь интегралов движения. Такие рассуждения не решают полностью задачу подсчета интегралов движения, но все же расширяют наши возможности.

Опишем другой подход к задаче. Пусть T_s — сохраняющийся ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (9.3). Определим «невозмущенный» интеграл движения

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\, T_{s+1}. \tag{9.31}$$

Будем рассматривать систему не на плоскости, а на цилиндре окружности R: $x^1 \sim x^1 + R$ и брать интеграл в (9.31) по замкнутому контуру $C_\perp$ вокруг цилиндра. Интеграл по контуру $x^2 = \mathrm{const}$ от Φ_p дает гамильтониан возмущения

$$H_\mathrm{p} = \lambda \int_0^R dx^1\, \Phi_\mathrm{p}(x). \tag{9.32}$$

Однако нам сейчас понадобиться формальный гамильтониан в координатах светового конуса, где переменная $\bar z$ играет роль времени. В этом случае заменяем интегрирование по x^1 на интегрирование по z, а $\bar z$ фиксируем:

$$H_\mathrm{p}^+(\bar z_0) = \lambda \int_{C_\perp} dz\, \Phi_\mathrm{p}(z, \bar z_0). \tag{9.33}$$

Тогда условие, что $\mathscr{D}_1 T_{s+1} = \partial(\cdots)$ эквивалентна тому, что

$$[I_s^{(0)}, H_\mathrm{p}^+] = 0. \tag{9.34}$$

Важно, что это уравнение можно решать в рамках одной (правой) киральности в конформной теории поля. Давайте перепишем первые сохраняющиеся токи в этом виде. Для этого нужно ввести алгебру Вирасоро на цилиндре. Отобразим цилиндр на плоскость заменой переменных

$$\zeta = e^{-2\pi i \frac{z}{R}}, \qquad \bar\zeta = e^{2\pi i \frac{\bar z}{R}}. \tag{9.35}$$

Это отображение позволяет задать алгебру Вирасоро соотношением

$$\mathbb{L}_n = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \zeta^{n+1} \tilde T(\zeta) \tag{9.36}$$

и аналогично для левой киральности. Оператор $\tilde T(z)$ представляет собой компоненту тензора энергии-импульса в плоскости $(\zeta, \bar\zeta)$. Далее воспользуемся формулой для конформного преобразования тензора энергии-импульса:

$$T(z) \to (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z), z\}, \qquad \{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \tag{9.37}$$

Фигурными скобками обозначена так называемая производная Шварца. В нашем случае шварциан равен $\{\zeta, z\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi i}{R}\right)^2$. Отсюда находим, что

$$T(z) = \left(\frac{2\pi i}{R}\right)^2 \left(\zeta^2 \tilde T(\zeta) - \frac{c}{24}\right). \tag{9.38}$$

Подставляя это в (9.36), получаем

$$\mathbb{T}_n \equiv \int_{C_\perp} dz\, e^{-2\pi i n \frac{z}{R}} T(z) = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_n - \frac{c}{24}\delta_{n0}\right). \tag{9.39}$$

Кроме того, из преобразования (9.35) находим

$$[\mathbb{L}_n, \Phi_\Delta(x)] = \zeta^n \left(\frac{iR}{2\pi}\partial\Phi(x) + n\Delta\Phi_\Delta(x)\right). \tag{9.40}$$

Из (9.39) легко получить первый невозмущенный интеграл движения

$$I_1^{(0)} = \mathbb{T}_0 = -\frac{(2\pi)^2}{R}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right). \tag{9.41}$$

Применяя (9.40), получаем

$$[I_1^{(0)}, H_{\rm p}^+] = -\lambda\frac{(2\pi)^2}{R}\int_{C_\perp} dz\,[\mathbb{L}_0, \Phi_{\rm p}(z,\bar z_0)] = -2\pi i\lambda\int_{C_\perp} dz\,\partial\Phi_{\rm p}(z,\bar z_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{\rm p} = \Phi_{13}$ и запишем оператор $I_3^{(0)}$ через алгебру Вирасоро:

$$I_3^{(0)} = \mathscr{L}_{-2}^2 1 = \int_{C_\perp} dz\,\mathscr{L}_{-2}T(z) = \int_{C_\perp} dz\oint_{C_z}\frac{dw}{2\pi i}\,\frac{T(w)T(z)}{w-z} \tag{9.42}$$

Контур C_z обходит точку z против часовой стрелки. Далее надо записать выражение в периодическом по z и w виде и разложить его по степеням $e^{-2\pi i(w-z)/R}$. После утомительных вычислений (которые мы проделаем на семинаре), получим

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{1}{R}\left(\mathbb{T}_0^2 + 2\sum_{n=1}^\infty \mathbb{T}_{-n}\mathbb{T}_n\right) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{R^3}\left(\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^\infty \mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n - \frac{1}{6}\left(\mathbb{L}_0 - \frac{c}{24}\right) + \frac{c}{1440}\right). \end{aligned} \tag{9.43}$$

Существенно новый вклад здесь дает $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{L}_{-n}\mathbb{L}_n$, однако проверить, что этот член коммутирует с $H_{\rm p}^+$ не так просто. Зато совершенно очевидной оказывается коммутативность двух построенных «невозмущенных» интегралов: $[I_1^{(0)}, I_3^{(0)}] = 0$. Далее для нечетных значений $s > 0$ можно построить серию коммутирующих с I_1 и I_3 операторов вида

$$I_s^{(0)} = \int_{C_\perp} dz\,\left(\mathscr{L}_{-2}^{\frac{s+1}{2}} + \cdots\right)1 \sim \sum_{n_1+\cdots+n_s=0} {:}\mathbb{L}_{n_1}\cdots\mathbb{L}_{n_s}{:} + \sum_{k=1}^{s-1}\sum_{n_1+\cdots+n_k=0} A_{n_1\dots n_k}\,{:}\mathbb{L}_{n_1}\cdots\mathbb{L}_{n_k}{:}\,,$$

где знак $:\cdots:$ означает упорядочение индексов по возрастанию слева направо. Такие операторы строятся достаточно прямо с помощью коммутационных соотношений алгебры Вирасоро. В предположении, что оператор $I_3^{(0)}$ имеет невырожденный спектр на неприводимых представлениях алгебры Вирасоро, отсюда следует, что все операторы $I_s^{(0)}$ коммутируют с $H_{\rm p}^+$ и между собой. Поэтому величины I_s в полной теории являются пространственно-однородными интегралами движения, то есть коммутируют с гамильтонианом $H \sim I_1 + I_{-1}$ и импульсом $P \sim I_1 - I_{-1}$. Разумно предположить, что в точках общего положения в возмущенной теории спектр гамильтониана на цилиндре невырожден. В этом случае все операторы, коммутирующие с гамильтонианом, коммутируют между собой.

Заметим, что интегралы движения $I_s^{(0)}$ образуют набор интегралов движения, обеспечивающих интегрируемость конформной теории поля, и их совместный спектр невырожден в точках общего положения. В квазиклассическом пределе $c \to -\infty$ интеграл движения $I_3^{(0)}$ представляет собой гамильтониан уравнения Кортевега—де Фриза, а система $I_s^{(0)}$ — соответствующую иерархию, существование которой доказано методами обратной задачи рассеяния. Существование такого набора интегралов движения в точках общего положения в квантовом случае было доказано методами теории гомологий Б. Фейгиным и Э. Френкелем [14]. Альтернативный подход, обобщающий подход классической теории, развит в работах В. Бажанова, С. Лукьянова и А. Замолодчикова [15].

В общих точках минимальных конформных моделей с $c < 1$ имеется по одному интегралу движения для следующих спинов:

$$\begin{aligned} s &= 2n-1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\rm p} = \Phi_{13}; \\ s &= 6n\pm 1, \quad n\in\mathbb{Z} \quad \text{для } \Phi_{\rm p} = \Phi_{12}, \Phi_{21}. \end{aligned} \tag{9.44}$$

В частности, эти ответы верны для унитарных моделей с $c = 1 - 6/p(p+1)$ для $p \ge 3$ в случае возмущения Φ_{13} и для $p \ge 6$ в случае возмущений Φ_{12}, Φ_{21}. В случае Φ_{12} для моделей с $p = 3, 4, 5$ имеется особый набор интегралов движения:

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p} = \Phi_{12} \quad & p = 3: \quad s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \pmod{30}; \\ & p = 4: \quad s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17 \pmod{18}; \\ & p = 5: \quad s = 1, 4, 5, 7, 8, 11 \pmod{12}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

Кроме того, нам будут интересны интегралы движения для неминимальной серии $c = 1 - 6(p'-p)^2/pp'$ с $p = 2$, $p' = 2N + 1$. Для нее

$$c = 1 - \frac{3(2N-1)^2}{(2N+1)},\ \Phi_{\rm p} = \Phi_{13}: \quad s \in (2\mathbb{Z}+1) \setminus ((2N-1)\mathbb{Z}). \tag{9.46}$$

В случае $N = 2$ ($c = -22/5$), отвечающем модели Ли—Янга, $\Phi_{13} = \Phi_{12}$ и спектр спинов s является пересечением двух серий в (9.44).

Задачи

1. Выведите (9.10).

2. Получите (9.14)–(9.16).

3. Получите (9.40).

4. Покажите, что для свободного майорановского фермиона (отвечающего минимальной модели с $c = 1/2$) сохраняющиеся токи можно записать в виде

$$T_{2n} = i^{2n+1} {:}\partial^{n-1}\psi_+\partial^n\psi_+{:}\,, \qquad T_{-2n} = i^{2n-1} {:}\bar\partial^{n-1}\psi_-\bar\partial^n\psi_-{:} \qquad (n > 0).$$

Найдите соответствующие компоненты $\Theta_{\pm(2n-2)}$.

5*. Используя характеры (9.25), (9.27), найдите, интегралы движения каких спинов имеются в унитарных моделях с $p = 3, 4, 5$ и в неунитарных моделях с $N = 2, 3$ для $\Phi_{\rm p} = \Phi_{13}, \Phi_{12}, \Phi_{21}$.

Семинар 9

Подробный вывод выражения (9.43)

Мы начнем с выражения (9.42). Нам нужно сделать так, чтобы подынтегральное выражение было периодично по z и w с периодом R. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{z} = \frac{\pi}{iR}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}z + \frac{i\pi}{3R}z + \frac{i\pi^3}{45R^3}z^3\right) + O(z^5).$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_3^{(0)} &= \frac{\pi}{iR}\int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\, T(w)T(z)\left(\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{i\pi}{3R}(w-z) + \frac{i\pi^3}{45R^3}(w-z)^3\right) \\ &= \frac{\pi}{iR}\int_{C_\perp} dz\, \left(\oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\, T(w)T(z)\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2i\pi}{3R}T(z) + \frac{i\pi^3 c}{90R^3}\right) \\ &= \frac{\pi}{iR}\int_{C_\perp} dz \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\, T(w)T(z)\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) + \frac{2\pi}{3R^2}\mathbb{T}_0 + \frac{\pi^4 c}{90R^3}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали операторное разложение для тензора энергии-импульса. В первом слагаемом превратим интеграл по C_z в разность двух контуров $C_\perp$ смещенных так, чтобы проходить выше и ниже точки z. Это дает коммутатор

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, [T(w), T(z)]\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) \\ &= \frac{1}{2R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, \left(T(w)T(z)\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(w-z) + T(z)T(w)\operatorname{cth}\frac{\pi}{iR}(z-w)\right) \\ &= \frac{1}{R}\int_{C_\perp} dz \int_{C_\perp} dw\, T(w)T(z)\operatorname{cth}\frac{i\pi}{R}(z-w). \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением

$$\operatorname{cth} z = \frac{1+e^{-2z}}{1-e^{-2z}} = (1+e^{-2z})\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nz} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz}.$$

Отсюда получаем (9.43).