Лекция 13
Конформная теория возмущений

Снова рассмотрим возмущенную конформную теорию поля с эвклидовым действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\rm p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_{\rm p}(x), \tag{13.1}$$

на плоскости. Это действие означает, что корреляционные функции определяются равенством

$$\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) \rangle = \frac{\langle \Phi_N(x_N) \cdots \Phi_1(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_{\rm p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_{\rm p}} \rangle_0}. \tag{13.2}$$

Далее, согласно общим правилам теории возмущений следует разложить экспоненту в ряд и вычислять корреляционные функции порядок за порядком. Давайте рассмотрим этот процесс более подробно.

Начнем с конформной теории поля. Пусть $\mathcal{O}_I(x)$ — некоторый базис набора взаимно-локальных операторов в конформной теории поля, обладающий следующими свойствами. Каждый оператор $\mathcal{O}_I(x)$ имеет определенную конформную размерность $(\Delta_I, \bar\Delta_I)$. Имеется единственный единичный оператор $\mathcal{O}_0(x) = 1$ конформной размерности $(0,0)$ и со средним $\langle 1 \rangle_0 = 1$.[1] Средние значения остальных операторов равны нулю: $\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = 0$, $I \neq 0$. Базис замкнут относительно операторных разложений:

$$\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}^K_{IJ}(x)\mathcal{O}_K(0), \qquad \mathcal{C}^K_{IJ}(x) = \mathcal{C}^K_{IJ} z^{\Delta_K - \Delta_I - \Delta_J} \bar z^{\bar\Delta_K - \bar\Delta_I - \bar\Delta_J}. \tag{13.3}$$

Функции $\mathcal{C}^K_{IJ}(x)$ называются *структурными функциями* операторной алгебры. В конформной теории структурные функции зависят от координат степенным образом, и существенными параметрами являются *структурные константы* $\mathcal{C}^K_{IJ}$. Последовательно применяя операторные разложения, можно свести корреляционные функции к одночастичным, то есть к вакуумным средним. Поскольку только вакуумное среднее единичного оператора не равно нулю, мы имеем

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle_0 = \sum_{J_1,\dots,J_{N-2}} \mathcal{C}^0_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1) \cdots \mathcal{C}^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) \mathcal{C}^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1) \tag{13.4}$$

при условии

$$|x_N - x_1| > \cdots > |x_3 - x_1| > |x_2 - x_1|. \tag{13.5}$$

Давайте ограничимся *квазипримарными* операторами, то есть операторами, удовлетворяющими условию

$$(\mathcal{L}_1 \mathcal{O}_I)(x) = (\bar{\mathcal{L}}_1 \mathcal{O}_I)(x) = 0. \tag{13.6}$$

Эти операторы являются старшими весами представлений малой конформной алгебры $sl(2)$, порожденной операторами $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_{-1}$. Иными словами, эти операторы не получаются действием операторов $\mathcal{L}_{-1} = \partial$, $\bar{\mathcal{L}}_{-1} = \bar\partial$ из других операторов. Зная структурные константы квазипримарных операторов, можно уже найти структурные константы для всех операторов.[2] Для квазипримарных операторов структурные константы $G_{IJ} = \mathcal{C}^0_{IJ}$ равны нулю, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar\Delta_I \neq \bar\Delta_J$, так что матрица G_{IJ} на квазипримарных операторов имеет блочно-диагональную структуру. Нам понадобится матрица $(G^{-1})^t$, матричные элементы которой мы будем обозначать G^{IJ}. Введем операторы

$$\mathcal{O}^I(x) = {\sum_J}' G^{IJ} \mathcal{O}_J(x), \tag{13.7}$$

где сумма со штрихом обозначает суммирование только по квазипримарным операторам. В силу блочной диагональности матрицы G конформная размерность оператора $\mathcal{O}^I$ совпадает с Δ_I. Для парной корреляционной функции имеем

$$\langle \mathcal{O}^I(x) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta^I_J z^{-2\Delta_I} \bar z^{-2\bar\Delta_I}. \tag{13.8}$$

[1] Тем самым мы исключаем из рассмотрения так называемые логарифмические конформные теории поля.

[2] Строго говоря, ниже мы рассматриваем факторпространство пространства локальных операторов по действию оператора $\mathcal{L}_{-1}$. Поэтому операторные равенства, которые мы будем писать, верны с точностью до добавления производных $\partial_\mu(\cdots)^\mu$.

Теперь определим оператор в бесконечно удаленной точке:

$$\mathcal{O}^I(\infty) = \lim_{x\to\infty} z^{2\Delta_I}\bar z^{2\bar\Delta_I}\mathcal{O}^I(x). \tag{13.9}$$

Тогда, очевидно,

$$\langle\mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = \delta^I_J. \tag{13.10}$$

Казалось бы, в возмущенном случае можно было бы подставить разложение (13.3) в (13.2) и свести корреляционную функцию к одночастичным средним $\langle\mathcal{O}_K\rangle$. Однако это *не так.* Дело в том, что в среднем (13.2) содержатся интегралы от операторов Φ_{p}, и эти операторы тоже надо включать в упорядочение (13.5) и, соответственно, в разложение (13.4).

Проблема теории возмущений состоит в том, что буквальное применение формулы (13.2) неизбежно приводит к инфракрасным расходимостям. Расходимости возникают из-за того, что конформная теория поля перестает работать на больших (порядка корреляционной длины) масштабах, а интегралы вида $\int d^2x\,\Phi_p$ следует брать по всему пространству. Следуя работе Ал. Замолодчикова [21], мы научимся вычислять по теории возмущений коэффициенты операторных разложений, то есть структурные функции. Мы увидим, что в структурных функциях инфракрасные расходимости сокращаются. И уже с данными структурными функциями можно получить корреляционные функции на масштабах много меньше корреляционной длины в конечном виде:

$$\langle\mathcal{O}_{I_N}(x_N)\cdots\mathcal{O}_{I_1}(x_1)\rangle = \sum_{J_1,\dots,J_{N-1}} C^{J_{N-1}}_{I_N J_{N-2}}(x_N-x_1)\cdots C^{J_2}_{I_3J_1}(x_3-x_1)C^{J_1}_{I_2I_1}(x_2-x_1)\langle\mathcal{O}_{J_{N-1}}\rangle. \tag{13.11}$$

Если выделить из структурной функции множитель, который зависит от координат так же как в конформной теории поля, оставшийся безразмерный множитель должен зависеть от константы связи и расстояния через безразмерный параметр:

$$C^K_{IJ}(x) = z^{d_{K,IJ}}\bar z^{\bar d_{K,IJ}}\tilde C^K_{IJ}(t), \qquad t = \lambda|x|^{2-2\Delta_{\mathrm{p}}}, \qquad d_{K,IJ} = \Delta_K - \Delta_I - \Delta_J. \tag{13.12}$$

Так как теория возмущений представляет собой разложение по целым степеням λ, функции $\tilde C^K_{IJ}(t)$ являются целыми функциями переменной t, причем $\tilde C^K_{IJ}(0) = \mathcal{C}^K_{IJ}$. Вакуумные средние, также входящие в формулу (13.11), ведут себя иначе. Очевидно, что вакуумные средние не равны нулю только для бесспиновых операторов, не являющихся пространственными производными других локальных операторов, то есть квазипримарных бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle\mathcal{O}_I(x)\rangle = G_I\lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_{\mathrm{p}}}},\ \text{если}\ \bar\Delta_I = \Delta_I, \tag{13.13}$$

где G_I — безразмерная константа. Вакуумные средние не являются целыми функциями параметра λ, и это свидетельствует о том, что их нельзя получить по теории возмущений. Мы обсудим два примера точных вакуумных средних, где эти средние можно получить известными нам методами. В общем случае вакуумные средние получают на основе эвристических соображений [22, 23].

Итак, корреляционная функция даже на малых масштабах содержит в себе как пертурбативные, так и непертурбативные данные. Но этим сложности не ограничиваются. Дело в том, что теория возмущений для структурных функций может содержать *ультрафиолетовые* расходимости. Эти расходимости связаны с тем, что операторные разложения данного оператора с оператором Φ_{p} могут содержать члены со степенями $|z|$ меньше -2. Надо учитывать, что в отличие от конформной теории операторы в возмущенной теории определены неоднозначно. Действительно, добавление к оператору $\mathcal{O}_I$ операторов меньшей конформной размерности не меняет его поведения в конформной точке. Оказывается, добавление подходящих операторов низших размерностей (с бесконечными коэффициентами) сокращает ультрафиолетовые расходимости. Перенормированные таким образом операторы мы будем обозначать O_I.

Наша первая задача будет состоять в том, чтобы вычислить матрицу

$$\mathcal{D}^J_I = \langle\mathcal{O}^J(\infty)\mathcal{O}_I(0)\rangle \tag{13.14}$$

по теории возмущений при ненулевых значениях константы связи λ. Интегралы теории возмущений могут расходиться на больших и малых масштабах, поэтому будем изучать функцию

$$\mathcal{D}^J_I(R,r_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_{r_0\le|y_i|\le R}d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle\mathcal{O}^J(\infty)\Phi_{\rm p}(y_n)\cdots\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_I(0)\rangle_0. \tag{13.15}$$

При этом, чтобы интеграл мог быть не равен нулю, спины операторов $\mathcal{O}^J$ и $\mathcal{O}_I$ должны совпадать:[3]

$$\Delta_J-\bar\Delta_J=\Delta_I-\bar\Delta_I. \tag{13.16}$$

Давайте сначала рассмотрим член с $n=1$, то есть первый порядок теории возмущений. Под интегралом мы имеем произведение

$$\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_I(0)=\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}\mathcal{O}_J(0)|w_1|^{2\Delta_J-2\Delta_{\rm p}-2\Delta_I}+\cdots, \tag{13.17}$$

где точки обозначают члены, не дающие вклада в интеграл. То есть

$$\mathcal{D}^{(1)}{}^J_I=-\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}\int d^2y_1\,|y_1|^{2(\Delta_J-\Delta_{\rm p}-\Delta_I)}=-\pi\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}\times\begin{cases}(R^{2d_{JI}}-r_0^{2d_{JI}})/d_{JI}, & \text{если } d_{JI}\ne0,\\ \log(R^2/r_0^2), & \text{если } d_{JI}=0,\end{cases}$$

где

$$d_{JI}=d^{(1)}_{JI},\qquad d^{(n)}_{JI}=\Delta_J-\Delta_I+n(1-\Delta_{\rm p}). \tag{13.18}$$

Интеграл ультрафиолетово расходится, если $d_{JI}\le0$, то есть

$$\Delta_J\le\Delta_I-(1-\Delta_{\rm p}). \tag{13.19}$$

Чтобы он сходился необходимо вычесть из оператора $\mathcal{O}_I$ оператор $\mathcal{O}_J$ с подходящим бесконечным коэффициентом:

$$O_I(x)=\mathcal{O}_I(x)-\sum_{J,\ d_{JI}<0}\frac{\pi\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}}{d_{JI}}\mathcal{O}_J(x)r_0^{2d_{JI}}-\sum_{J,\ d_{JI}=0}\pi\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}\mathcal{O}_J(x)\log r_0^2+O(\lambda^2). \tag{13.20}$$

Тогда вклад нулевого порядка по теории возмущений сократит ультрафиолетовую расходимость в первом порядке и при условии (13.19) матрица

$$D^J_I(R)=\langle\mathcal{O}^J(\infty)O_I(0)\rangle=\mathcal{D}^J_I-\frac{\pi\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}}{d_{JI}}r_0^{2d_{JI}}+O(\lambda^2)=\delta^J_I-\frac{\pi\lambda\mathcal{C}^J_{{\rm p}I}}{d_{JI}}R^{2d_{JI}}+O(\lambda^2) \tag{13.21}$$

не будет зависеть от r_0. Эта формула написана для случая $d_{JI}\ne0$. Для $d_{JI}=0$ степенные функции, деленные на d_{JI}, заменяются логарифмами.

В общем случае порядка n теории возмущений условие ультрафиолетовой расходимости имеет вид

$$\Delta_J\le\Delta_I-n(1-\Delta_{\rm p}). \tag{13.22}$$

Поэтому ультрафиолетовая перенормировка оператора $\mathcal{O}_I$ имеет вид

$$O_I(x)=\sum_J U^J_I(r_0)\mathcal{O}_J(x),\qquad U^J_I(r_0)=\delta^J_I+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\times\begin{cases}0, & d^{(n)}_{JI}>0,\\ U^{(n)}{}^J_I r_0^{2d^{(n)}_{JI}}, & d^{(n)}_{JI}<0,\\ U^{(n)}{}^J_I\log r_0, & d^{(n)}_{JI}=0,\end{cases} \tag{13.23}$$

с подходящими коэффициентами $U^{(n)}{}^J_I$. Соответственно, матрица

$$D^J_I(R)=\langle\mathcal{O}^J(x)O_I(0)\rangle=\sum_K U^K_I(r_0)\mathcal{D}^J_K(R,r_0) \tag{13.24}$$

[3]Здесь существенно, что операторы находятся на бесконечном расстоянии друг от друга. В возмущенной теории корреляционные функции операторов с разными спинами могут быть не равны нулю. Однако в пределе (13.9) все члены разложения (13.15) для таких операторов обратятся в нуль.

не зависит от r_0 и может содержать только инфракрасную расходимость, то есть не иметь конечного предела при $R \to \infty$.

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_J$, удовлетворяющий *условию резонанса*

$$\Delta_J = \Delta_I - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{13.25}$$

В этом случае, как мы видели, ультрафиолетово-расходящаяся часть пропорциональна $\log r_0$. Но в этом случае перенормировка неоднозначна: она зависит от единиц измерения длины. Иными словами мы можем обезразмерить выражение под логарифмом произвольной константой μ размерности массы:

$$O_I = \mathcal{O}_I + 2C\mathcal{O}_J \log \mu r_0 + (\text{другие контрчлены}), \tag{13.26}$$

где C — некоторая константа. Перенормировка зависит от параметра μ.

Если в теории есть непрерывный параметр, от которого зависят размерности, резонанс может иметь еще один эффект. В точке резонанса оператора O_I с оператором $\mathcal{O}_J$, корреляционные функции оператора O_I имеют полюс. Выберем параметр так, чтобы в окрестности резонансной точки он совпадал с $d^{(n)}_{JI}$. Тогда для любой корреляционной функции оператора O_I в малой окрестности точки $d^{(n)}_{JI} = 0$ имеем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) X \rangle = \frac{C r_0^{2d^{(n)}_{JI}}}{2d^{(n)}_{JI}} \langle \mathcal{O}_J(x) X \rangle. \tag{13.27}$$

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{d^{(n)}_{JI}=0} \langle O_I(x) X \rangle = C \langle O_J(x) X \rangle. \tag{13.28}$$

Перенормированный оператор O_I непосредственно в точке $d^{(n)}_{JI} = 0$ можно определить вычитанием этого полюсного члена:

$$\langle O_I(x) X \rangle_{d^{(n)}_{JI}=0} = \lim_{d^{(n)}_{JI} \to 0} \left(\langle O_I(x) X \rangle - \frac{C\mu^{-2d^{(n)}_{JI}}}{d^{(n)}_{JI}} \langle O_J(x) X \rangle \right). \tag{13.29}$$

Множитель, содержащий константу μ размерности массы нужен, что согласовать размерности двух слагаемых. Замена $\mu \to \mu' = \mu \mathrm{e}^{\alpha}$ переопределяет перенормированный оператор: $O'_I = O_I + 2\alpha C O_J$. Ясно, что новый оператор ничем не хуже старого в качестве перенормированной версии оператора $\mathcal{O}_I$. Эта неоднозначность в точности соответствует неоднозначности параметра μ в конструкции (13.26). Конструкция (13.29) полностью эквивалентна конструкции (13.26) при условии, что имеется подходящий непрерывный параметр. Важная роль резонансов состоит в том, что они являются точным пертурбативным эффектом, и резонансные полюсы могут быть использованы в качестве условий бутстрапа при поиске решений эвристическими методами.

Теперь рассмотрим трехточечную функцию

$$\begin{aligned} G^K_{JI}(x, R) &= \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_J(x) O_I(0) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{|y_i| \le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^K(\infty) \Phi_{\mathrm{p}}(y_n) \cdots \Phi_{\mathrm{p}}(y_1) O_J(x) O_I(0) \rangle_0. \end{aligned} \tag{13.30}$$

Трехточечная функция выражается через структурную константу и двухточечную функцию:

$$G^K_{JI}(x, R) = \sum_L C^L_{JI}(x) \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_L(0) \rangle = \sum_L{}' C^L_{JI}(x) D^K_L(R). \tag{13.31}$$

Во втором равенстве суммирование по всем операторам заменено на суммирование по квазипримарным операторам, потому что второй множитель под знаком суммы равен нулю, если O_L представляет собой пространственно-временную производную. Таким образом, структурные функции для квазипримарных операторов находятся как

$$C^K_{JI}(x) = \sum_L{}' (D^{-1})^K_L(R) G^L_{JI}(x, R). \tag{13.32}$$

Важный факт состоит в том, что структурные функции не содержат инфракрасных расходимостей. Проверим это в первом порядке по теории возмущений. Имеем

$$G^K_{JI}(x,R) = \mathcal{C}^K_{JI}(x) - \lambda \int_{|x|<|y_1|<R} d^2y_1 \,{\sum_L}' \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{JI}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2} \\ - \lambda \int_{|y_1|<|x|} d^2y_1 \,{\sum_L}' \mathcal{C}^K_{JL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}I}|y_1|^{2d_{LI}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2). \quad (13.33)$$

Контрчлены сократят ультрафиолетовую расходимость во втором и третьем слагаемом, а инфракрасно-расходящиеся вклады могут быть только в втором слагаемом:

$$G^K_{JI}(x,R) = \mathcal{C}^K_{JI}(x) - \pi\lambda {\sum_L}' \left(\frac{\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{JI}(x)}{d_{KL}}(R^{2d_{KL}} - |x|^{2d_{KL}}) + \frac{\mathcal{C}^K_{JL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}I}}{d_{LI}}|x|^{2d_{LI}} \right) + O(\lambda^2).$$

Подставляя это и (13.21) в (13.32), видим, что слагаемое первого порядка в D^{-1} в точности сокращает слагаемое с R в G. Получаем

$$C^K_{JI}(x) = \mathcal{C}^K_{JI}(x) + \pi\lambda {\sum_L}' \left(\frac{\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{JI}(x)}{d_{KL}}|x|^{2d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}^K_{JL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}I}}{d_{LI}}|x|^{2d_{LI}} \right) + O(\lambda^2) \\ = z^{d_{K,JI}}\bar z^{\bar d_{K,JI}} \left(\mathcal{C}^K_{JI} + \pi t {\sum_L}' \left(\frac{\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{JI}}{d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}^K_{JL}\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}I}}{d_{LI}} \right) + O(t^2) \right), \qquad t = \lambda|x|^{2-2\Delta_{\mathrm{p}}}. \quad (13.34)$$

Здесь мы неявно предполагали, что оператор $\mathcal{O}_J$ не требует ультрафиолетовой перенормировки ($\mathcal{O}_J = O_J$). В случае, если он требует перенормировки, суммы по L расходятся, за исключением как раз слагаемых, содержащих $R^{2d_{KL}}$, поскольку они экспоненциально убывают с ростом Δ_L. Можно показать, что расходимость сокращается перенормировкой оператора $\mathcal{O}_J$ (см. задачу 1).

Итак, мы видим, что структурные функции допускают сходящееся разложение по теории возмущений для перенормированных операторов. Перейдем ко второй составляющей формулы (13.11) — вакуумным средним. Прежде всего, нужно определить эту величину. Пусть $\mathcal{O}_I(x)$ — квазипримарный оператор нулевого спина. Рассмотрим корреляционную функцию $\langle O^I(x)O_I(0)\rangle$. На малых масштабах мы можем выделить конформный вклад:

$$\langle O^I(x)O_I(0)\rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \cdots, \qquad |x| \to 0. \quad (13.35)$$

То, что мы обозначили точками есть вклад возмущения. Он мал при $|x|\to 0$ в унитарной теории, но в неунитарной (как мы убедимся ниже) он может быть не мал. Тем не менее, даже в неунитарном случае вклад $|x|^{-4\Delta_I}$ можно выделить по характерной особенности. Рассмотрим теперь большие расстояния. В теории, содержащей масштаб, корреляционные функции на больших расстояниях факторизуются:

$$\langle O^I(x)O_I(0)\rangle \to \langle O^I(x)\rangle\langle O_I(0)\rangle = \langle O_I(0)\rangle {\sum_J}' G^{IJ}\langle O_J(0)\rangle, \qquad |x|\to\infty. \quad (13.36)$$

Это имеет место не только в массивной теории, где приведенные корреляционные функции на больших масштабах спадают экспоненциально, но даже в безмассовой теории, где они спадают степенным образом. Уравнение (13.36) можно решить и найти (с точностью до знака) средние значения $\langle O_I\rangle$ в виде (13.13).

Одно вакуумное среднее немедленно получается из термодинамического анзаца Бете. Вспомним, что в энергии системы на конечной окружности есть вклад $-\varepsilon_\infty R$ пропорциональный длине системы R. Этот вклад, как мы говорили, связан с вычитанием из полной энергии системы энергии нулевых колебаний при $R=\infty$. Таким образом, мы можем интерпретировать ε_∞ как перенормированную плотность энергии системы. В эвклидовых компонентах тензора энергии-импульса

$$\varepsilon_\infty = \langle T_{22}\rangle = \langle 2T_{z\bar z} - T_{zz} - T_{\bar z\bar z}\rangle = 2\langle T_{z\bar z}\rangle = -\frac{1}{\pi}\langle\Theta\rangle.$$

То есть,
$$\langle\Theta\rangle = -\pi\varepsilon_\infty, \qquad \langle\Phi_{\rm p}\rangle = \frac{\varepsilon_\infty}{\lambda(1-\Delta_{\rm p})}. \tag{13.37}$$
Последнее равенство верно, когда Θ не содержит вкладов высших порядков теории возмущений.

Другой интересный и важный пример — это оператор $T\bar T$. В конформной теории поля это произведение хорошо определено, но в возмущенной теории оно перенормируется добавлением оператора Θ. Также оно находится в резонансе с оператором $\partial\bar\partial\Theta$, но этот оператор не является квазипримарным и не дает вклада в вакуумное среднее. Вместо того, чтобы аккуратно учитывать перенормировки, рассмотрим комбинацию [24]
$$(T\bar T)_\varepsilon(x) = \frac12 T(x+\varepsilon)\bar T(x) + \frac12 \bar T(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x) = -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \tag{13.38}$$
Каждое из трех произведений $T\bar T$, $\bar T T$, $\Theta\Theta$ расходится при $\varepsilon\to0$, но расходящаяся часть имеет вид пространственно-временной производной. В самом деле, нетрудно показать,что
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar T)_\varepsilon(x) = \partial_\nu J^\nu_\mu(x,\varepsilon), \qquad J^\nu_\mu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \tag{13.39}$$
Кроме того, в силу равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса имеем $\epsilon^{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\lambda}J^\nu_\mu(x,\varepsilon)=0$. Следовательно интеграл
$$J^\mu(x,\varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu\, J^\mu_\nu(x,\xi)$$
не зависит от траектории интегрирования. Отсюда немедленно следует, что $(T\bar T)_\varepsilon$ есть некоторый постоянный (то есть, не зависящий от ε) оператор плюс полная дивергенция:
$$(T\bar T)_\varepsilon(x) = (T\bar T)(x) + \partial_\mu J^\mu(x,\varepsilon). \tag{13.40}$$
Это определяет конечный оператор $T\bar T$ с точностью до пространственно-временных производных. В тоже время из (13.39) немедленно следует, что вакуумное среднее $\langle(T\bar T)_\varepsilon\rangle$ не зависит от ε:
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}\langle(T\bar T)_\varepsilon(x)\rangle = 0. \tag{13.41}$$
Отсюда получаем
$$\langle T\bar T\rangle = \langle(T\bar T)_\varepsilon(x)\rangle \underset{\varepsilon\to\infty}{=} -\langle\Theta\rangle^2. \tag{13.42}$$
Мы учли, что $\langle T\rangle = \langle\bar T\rangle = 0$, поскольку это операторы ненулевого спина.

Все остальные известные вакуумные средние найдены эвристическими методами. Несмотря на это они хорошо проверены и считаются точными. Приведем один пример. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеется формула [22]:
$$\langle e^{i\alpha\phi}\rangle = M^{\alpha^2}\exp\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2\operatorname{sh}t\operatorname{sh}pt\operatorname{sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t}\right). \tag{13.43}$$
Эта интегральная формула верна и для модели sh-Гордона, хотя функция и не продолжается в область $\beta^2<0$ аналитически. Параметр M связан с массой $m_{\rm kink}$ солитона или с параметром взаимодействия μ формулой
$$M = \frac{\sqrt\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac p2\right)}m_{\rm kink} = \left(\frac\pi2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)}\mu\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{13.44}$$
Связь между m и μ была найдена в [6] методом термодинамического анзаца Бете. Для примарных операторов минимальных конформных моделей формулы тоже известны [23]. В Φ_{13}-возмущенной модели $M(P,P')$ есть $P-1$ вакуумных состояний, и вакуумное среднее зависит от вакуума s согласно
$$\langle\Phi_{mn}\rangle_s = M^{2\Delta_{mn}}\frac{\sin\frac{\pi s}{P}|P'm-Pn|}{\sin\frac{\pi s}{P}(P'-P)}Q\left(\frac{P'm-Pn}{P'-P}\right), \qquad s=1,\dots,P-1, \tag{13.45}$$

где

$$Q(\eta) = \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\operatorname{ch} 2t \operatorname{sh} t(\eta-1) \operatorname{sh} t(\eta+1)}{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} tp \operatorname{sh} t(p+1)} - \frac{\eta^2-1}{2p(p+1)} e^{-4t} \right), \qquad p = \frac{P}{P'-P}. \tag{13.46}$$

При этом M связано с массой кинков формулой (13.44), а с константой связи λ формулой

$$M = \left(\frac{\pi\lambda(1-p)(2p-1)}{(p+1)^2} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)\Gamma\left(\frac{1-2p}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)\Gamma\left(\frac{3p}{p+1}\right)}} \right)^{\frac{p+1}{4}}. \tag{13.47}$$

В качестве простого примера вычисления корреляционной функции методом конформной теории возмущений рассмотрим модель Ли—Янга. В ней имеется всего два примарных оператора $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \Phi_{\mathrm{p}} = \varphi$ размерности $-\frac{1}{5}$. Для модели Ли—Янга известно, что массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем масса связана с константой связи согласно [21, 6]

$$h = \alpha m^{12/5}, \qquad \alpha = 0.0970\ldots \tag{13.48}$$

Нас будет интересовать парная корреляционная функция $G(x) = \langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля для оператора $\varphi(x)$ имеется разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121} T\bar{T}(0) + O(|x|^{12})\right) + |x|^{2/5} \mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} \left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right). \tag{13.49}$$

Структурная константа $\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}$ равна

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{13.50}$$

Интересующие нас вакуумные средние равны

$$\langle\varphi\rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h}, \qquad \langle T\bar{T}\rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \tag{13.51}$$

Соответственно,

$$G(x) = C^1_{\varphi\varphi}(x) + \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h} C^{\varphi}_{\varphi\varphi}(x) - \frac{\pi^2 m^4}{48} C^{T\bar{T}}_{\varphi\varphi}(x) + \cdots. \tag{13.52}$$

Обратим внимание, что при малых значениях $|x|$ второй член пропорционален $|x|^{2/5}$, в то время как первый — $|x|^{4/5}$. Это значит, что при любых ненулевых значениях константы связи h ультрафиолетовое поведение корреляционных функций определяется возмущением, а не конформной теорией поля. Это явление — следствие отрицательной размерности поля $\varphi(x)$.

Структурные функции выражаются в виде (13.34), но проще прямо вычислить интеграл и вычесть из него инфракрасно расходящуюся часть. В случае $C^1_{\varphi\varphi}(x)$ это можно сделать аналитически и получить

$$C^1_{\varphi\varphi}(x) = |x|^{4/5} + \kappa h \frac{\pi\gamma^2(1/5)}{14^2\gamma(2/5)}|x|^{16/5} + O(|x|^{28/5}) = |x|^{4/5}\left(1 + 0.0310\ldots \times (m|x|)^{12/5} + O(|x|^{24/5})\right). \tag{13.53}$$

В случае $C^{\varphi}_{\varphi\varphi}$ интеграл приходится брать численно и численно же исключать инфракрасную расходимость. Ответ имеет вид

$$C^{\varphi}_{\varphi\varphi}(r) = i\kappa|x|^{2/5}\left(1 + 0.0212\ldots \times (mr)^{12/5} + O(|x|^{24/5})\right). \tag{13.54}$$

Задачи

1. Покажите, что в (13.33) контрчлены из (13.20) действительно сокращают ультрафиолетовые расходимости. (Не забудьте, что ультрафиолетовые расходимости могут быть и вблизи точки $y_1 = x$, но они «спрятаны» в суммирование по L.)

2. Оцените ультрафиолетовые расходимости в nтом порядке теории возмущений и покажите, что неравенство (13.22) является условием наличия ультрафиолетовой расходимости.

3. Выведите (13.39).

4. Рассмотрим модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Покажите, в какой области значений α экспоненциальные операторы $e^{i\alpha\varphi}$ не требуют перенормировки в конформной теории возмущений.

5*. Используя технику, известную вам из конформной теории поля, вычислите интеграл

$$I(a,b;x) = \int d^2y\, |y|^{2a}|y-x|^{2b}$$

в области его сходимости. Аналитическим продолжением найдите член первого порядка в структурной функции $C^1_{\varphi\varphi}(x)$ теории Ли—Янга.