Лекция 14.
Точные формфакторы квазилокальных операторов

Михаил Лашкевич

Вспомним алгебру Фаддеева—Замолодчикова:

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2) - \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\,\alpha_2}_{\alpha'_1\,\alpha'_2} V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi) - 2\pi \sum_{\alpha'_1,\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2} S(-i\pi)^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha'_2\alpha'_1}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \qquad (1)$$

где

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightrightarrows} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi). \qquad (2)$$

Вспомним алгебру Фаддеева—Замолодчикова:

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2) - \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha'_1\alpha'_2} V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)$$
$$- 2\pi \sum_{\alpha'_1,\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2} S(-i\pi)^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha'_2\alpha'_1}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \qquad (1)$$

где

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightrightarrows} \equiv \mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - i\pi). \qquad (2)$$

При этом $V^\alpha(\theta)$ с $\theta \in \mathbb{R}$ имеют смысл операторов уничтожения, а

$$V^+_\alpha(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta} V^\beta(\theta - i\pi) \quad (\theta \in \mathbb{R}) \qquad (3)$$

— операторов рождения.

Вспомним алгебру Фаддеева—Замолодчикова:

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)-\sum_{\alpha_1'\alpha_2'}S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1'\alpha_2'}V^{\alpha_2'}(\theta_2)V^{\alpha_1'}(\theta_1)=2\pi C^{\alpha_1\alpha_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)$$
$$-2\pi\sum_{\alpha_1',\alpha_2'}C^{\alpha_1'\alpha_2'}S(-i\pi)^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha_2'\alpha_1'}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \quad (1)$$

где

$$\theta_i\in\mathcal{C}_{\rightrightarrows}\equiv\mathbb{R}\cup(\mathbb{R}-i\pi). \quad (2)$$

При этом $V^\alpha(\theta)$ с $\theta\in\mathbb{R}$ имеют смысл операторов уничтожения, а

$$V^+_\alpha(\theta)=\sum_\beta C_{\alpha\beta}V^\beta(\theta-i\pi)\quad(\theta\in\mathbb{R}) \quad (3)$$

— операторов рождения.
Определим нормальное упорядочение

$$:X:=X,\ \text{если}\ X=V^+_{\beta_1}(\vartheta_1)\cdots V^+_{\beta_L}(\vartheta_L)V^{\alpha_K}(\theta_K)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1),\quad \theta_i,\vartheta_j\in\mathbb{R};$$
$$:XV^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)Y:=\sum_{\alpha_1'\alpha_2'}S^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1'\alpha_2'}(\theta_1-\theta_2):XV^{\alpha_2'}(\theta_2)V^{\alpha_1'}(\theta_1)Y:. \quad (4)$$

Вспомним алгебру Фаддеева—Замолодчикова:

$$V^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)-\sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S(\theta_1-\theta_2)^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha'_1\alpha'_2}V^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1) = 2\pi C^{\alpha_1\alpha_2}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)$$
$$-2\pi\sum_{\alpha'_1,\alpha'_2} C^{\alpha'_1\alpha'_2}S(-i\pi)^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha'_2\alpha'_1}\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi), \quad (1)$$

где

$$\theta_i \in \mathcal{C}_{\rightrightarrows} \equiv \mathbb{R}\cup(\mathbb{R}-i\pi). \quad (2)$$

При этом $V^\alpha(\theta)$ с $\theta\in\mathbb{R}$ имеют смысл операторов уничтожения, а

$$V^+_\alpha(\theta) = \sum_\beta C_{\alpha\beta}V^\beta(\theta-i\pi) \quad (\theta\in\mathbb{R}) \quad (3)$$

— операторов рождения.
Определим нормальное упорядочение

$$:X: = X, \text{ если } X = V^+_{\beta_1}(\vartheta_1)\cdots V^+_{\beta_L}(\vartheta_L)V^{\alpha_K}(\theta_K)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1), \quad \theta_i,\vartheta_j\in\mathbb{R};$$
$$:XV^{\alpha_1}(\theta_1)V^{\alpha_2}(\theta_2)Y: = \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} S^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha'_1\alpha'_2}(\theta_1-\theta_2):XV^{\alpha'_2}(\theta_2)V^{\alpha'_1}(\theta_1)Y:. \quad (4)$$

Тривиальный пример: если $S(\theta)=\pm1$ мы имеем операторы рождения-уничтожения свободных бозонов или фермионов.

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta_i}{2\pi} \, e^{-ix\sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

$$\times \, {:}V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1){:}\,, \qquad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i.

Определим оператор

$$O(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta_i}{2\pi}\,e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}F_O(\theta_1,\dots,\theta_n)_{\alpha_1\dots\alpha_n}$$
$$\times :V^{\alpha_n}(\theta_n)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \qquad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1,\dots,\theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta)=m_\alpha \operatorname{ch}\theta, \qquad P^1_\alpha(\theta)=m_\alpha \operatorname{sh}\theta.$$

Трансляционно-инвариантные операторы

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta_i}{2\pi} \, e^{-ix \sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \times :V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \quad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch} \theta, \qquad P^1_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^{\theta}}$ с любым положительным τ.

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta_i}{2\pi}\, e^{-ix \sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \times :V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \quad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P_\alpha^0(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch} \theta, \qquad P_\alpha^1(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^{\theta}}$ с любым положительным τ.

Трансляционная инвариантность:

$$i\partial_\mu O(x) = [O(x), P_\mu], \quad (6)$$

Определим оператор

$$O(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta_i}{2\pi}\,e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

$$\times\ {:}V^{\alpha_n}(\theta_n)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1){:}\,, \qquad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1,\ldots,\theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta)=m_\alpha\operatorname{ch}\theta,\qquad P^1_\alpha(\theta)=m_\alpha\operatorname{sh}\theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^{\theta}}$ с любым положительным τ.
Трансляционная инвариантность:

$$i\partial_\mu O(x)=[O(x),P_\mu], \qquad (6)$$

где P_μ — оператор импульса:

$$P_\mu=\sum_\alpha\int_{\mathbb{R}}\frac{d\theta}{2\pi}\,P_{\alpha\mu}(\theta)V^+_\alpha(\theta)V^\alpha(\theta)$$

Определим оператор

$$O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta_i}{2\pi} \, e^{-ix\sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$
$$\times \, :V^{\alpha_n}(\theta_n) \cdots V^{\alpha_1}(\theta_1):, \qquad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{ch}\theta, \qquad P^1_\alpha(\theta) = m_\alpha \operatorname{sh}\theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^\theta}$ с любым положительным τ.
Трансляционная инвариантность:

$$i\partial_\mu O(x) = [O(x), P_\mu], \qquad (6)$$

где P_μ — оператор импульса:

$$P_\mu = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi} P_{\alpha\mu}(\theta) V^+_\alpha(\theta) V^\alpha(\theta) \quad \Rightarrow \quad [P_\mu, V^\alpha(\theta)] = -P_{\alpha\mu}(\theta) V^\alpha(\theta). \qquad (7)$$

Определим оператор

$$O(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}}\frac{d\theta_i}{2\pi}\,e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

$$\times\ {:}V^{\alpha_n}(\theta_n)\cdots V^{\alpha_1}(\theta_1){:}\,, \qquad (5)$$

заданный бесконечным набором мероморфных функций $F_O(\theta_1,\ldots,\theta_N)$ (формфакторов) комплексных переменных θ_i. Здесь

$$P^0_\alpha(\theta)=m_\alpha\operatorname{ch}\theta,\qquad P^1_\alpha(\theta)=m_\alpha\operatorname{sh}\theta.$$

Сходимость интегралов в мнимом времени требует, чтобы формфакторы росли медленнее, чем $e^{\tau e^{\theta}}$ с любым положительным τ.
Трансляционная инвариантность:

$$i\partial_\mu O(x)=[O(x),P_\mu], \qquad (6)$$

где P_μ — оператор импульса:

$$P_\mu=\sum_\alpha\int_{\mathbb{R}}\frac{d\theta}{2\pi}\,P_{\alpha\mu}(\theta)V^+_\alpha(\theta)V^\alpha(\theta)\quad\Rightarrow\quad[P_\mu,V^\alpha(\theta)]=-P_{\alpha\mu}(\theta)V^\alpha(\theta). \qquad (7)$$

Так как $P_0=H$ — гамильтониан, оператор $O(x)$ является решением уравнения Гайзенберга.

Лоренц-инвариантные операторы

Потребуем от операторов лоренц-инвариантности в виде:

$$F_O(\theta_1+\lambda,\ldots,\theta_n+\lambda)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{s_O\lambda}F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{8}$$

Число s_O называется лоренцевым спином оператора.

Потребуем от операторов лоренц-инвариантности в виде:

$$F_O(\theta_1+\lambda,\ldots,\theta_n+\lambda)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{s_O\lambda} F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{8}$$

Число s_O называется лоренцевым спином оператора. Отсюда следует, что

$$i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)O(x) = \epsilon^{\mu\nu}\left(is_O O(x) + [O(x),L]\right), \tag{9}$$

Потребуем от операторов лоренц-инвариантности в виде:

$$F_O(\theta_1 + \lambda, \ldots, \theta_n + \lambda)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = e^{s_O \lambda} F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}. \tag{8}$$

Число s_O называется лоренцевым спином оператора. Отсюда следует, что

$$i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) O(x) = \epsilon^{\mu\nu} \left(i s_O O(x) + [O(x), L] \right), \tag{9}$$

где оператор момента L определяется как

$$L = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi} V^+_\alpha(\theta) \frac{d}{d\theta} V^\alpha(\theta)$$

Потребуем от операторов лоренц-инвариантности в виде:

$$F_O(\theta_1+\lambda,\ldots,\theta_n+\lambda)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{s_O\lambda}F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \tag{8}$$

Число s_O называется лоренцевым спином оператора. Отсюда следует, что

$$i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)O(x) = \epsilon^{\mu\nu}\left(is_O O(x) + [O(x),L]\right), \tag{9}$$

где оператор момента L определяется как

$$L = i\int_{\mathbb{R}}\frac{d\theta}{2\pi}V_\alpha^+(\theta)\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta) \quad \Rightarrow \quad [L,V^\alpha(\theta)] = -i\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta). \tag{10}$$

Лоренц-инвариантные операторы

Потребуем от операторов лоренц-инвариантности в виде:

$$F_O(\theta_1+\lambda,\dots,\theta_n+\lambda)_{\alpha_1\dots\alpha_n} = e^{s_O\lambda} F_O(\theta_1,\dots,\theta_n)_{\alpha_1\dots\alpha_n}. \tag{8}$$

Число s_O называется лоренцевым спином оператора. Отсюда следует, что

$$i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)O(x) = \epsilon^{\mu\nu}\left(is_O O(x) + [O(x), L]\right), \tag{9}$$

где оператор момента L определяется как

$$L = i\int_{\mathbb{R}} \frac{d\theta}{2\pi} V^+_\alpha(\theta)\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta) \quad \Rightarrow \quad [L, V^\alpha(\theta)] = -i\frac{d}{d\theta}V^\alpha(\theta). \tag{10}$$

При преобразовании Лоренца, характеризуемом быстротой λ, корреляционные функции операторов будут умножаться на постоянный множитель:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n O(z_i,\bar z_i)\right\rangle = e^{\lambda\sum s_{O_i}}\left\langle \prod_{i=1}^n O(z_i e^\lambda, \bar z_i e^{-\lambda})\right\rangle.$$

Матричные элементы операторов

На вещественной оси функции F_O являются матричными элементами:

$$\langle \mathrm{vac}|O(x)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \tag{11}$$

при $\theta_1 > \cdots > \theta_n$.

На вещественной оси функции F_O являются матричными элементами:

$$\langle \text{vac}|O(x)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \qquad (11)$$

при $\theta_1 > \cdots > \theta_n$. Более обще,

$$\begin{aligned} &{}_{\beta_1\ldots\beta_{n'}}\langle\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n'}|O(x)|\theta_1,\ldots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \\ &\quad = \sum_{\{\beta'_i\}} e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)+ix\sum_{i=1}^{n'} P_{\beta_i}(\vartheta_i)} \prod_{i=1}^{n'} C_{\beta_i\beta'_i} \\ &\qquad \times F_O(\theta_1^-,\ldots,\theta_n^-,\vartheta_{n'}^+ - i\pi,\ldots,\vartheta_1^+ - i\pi)_{\alpha_1\ldots\alpha_n\beta'_{n'}\ldots\beta'_1}, \end{aligned} \qquad (12)$$

если $\theta_1 > \ldots > \theta_n$, $\vartheta_1 > \ldots > \vartheta_{n'}$, $\theta^\pm = \theta \pm i0$.

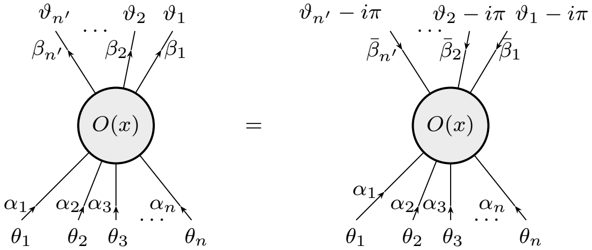
На вещественной оси функции F_O являются матричными элементами:

$$\langle \mathrm{vac}|O(x)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\dots\alpha_n} = e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)} F_O(\theta_1,\dots,\theta_n)_{\alpha_1\dots\alpha_n} \tag{11}$$

при $\theta_1 > \dots > \theta_n$. Более общо,

$$\begin{aligned} &{}_{\beta_1\dots\beta_{n'}}\langle \vartheta_1,\dots,\vartheta_{n'}|O(x)|\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{\alpha_1\dots\alpha_n} \\ &\quad = \sum_{\{\beta'_i\}} e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)+ix\sum_{i=1}^{n'} P_{\beta_i}(\vartheta_i)} \prod_{i=1}^{n'} C_{\beta_i\beta'_i} \\ &\qquad \times F_O(\theta_1^-,\dots,\theta_n^-,\vartheta_{n'}^+ - i\pi,\dots,\vartheta_1^+ - i\pi)_{\alpha_1\dots\alpha_n\beta'_{n'}\dots\beta'_1}, \end{aligned} \tag{12}$$

если $\theta_1 > \dots > \theta_n$, $\vartheta_1 > \dots > \vartheta_{n'}$, $\theta^\pm = \theta \pm i0$.
Графически это равенство можно изобразить так:



Корреляционные функции могут быть записаны в виде спектральных разложений. Например, двухточечная функция:

$$\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha_i'\}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\, e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}\prod_{i=1}^{n}C^{\alpha_i\alpha_i'}$$
$$\times F_{O_1}(\theta_1,\dots,\theta_n)_{\alpha_1\dots\alpha_n}F_{O_2}(\theta_n-i\pi,\dots,\theta_1-i\pi)_{\alpha_n'\dots\alpha_1'}. \quad (13)$$

Корреляционные функции могут быть записаны в виде спектральных разложений. Например, двухточечная функция:

$$\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha'_i\}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\,e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}\prod_{i=1}^{n}C^{\alpha_i\alpha'_i}$$
$$\times F_{O_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}F_{O_2}(\theta_n-i\pi,\ldots,\theta_1-i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}. \quad (13)$$

Эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции, только когда ряд убывает.

Корреляционные функции могут быть записаны в виде спектральных разложений. Например, двухточечная функция:

$$\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\, e^{-ix\sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(\theta_i)} \prod_{i=1}^{n} C^{\alpha_i\alpha'_i}$$
$$\times F_{O_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n} F_{O_2}(\theta_n - i\pi,\ldots,\theta_1 - i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}. \quad (13)$$

Эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции, только когда ряд убывает. Это верно для больших расстояний между операторами.

Корреляционные функции могут быть записаны в виде спектральных разложений. Например, двухточечная функция:

$$\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha'_i\}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\,e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}\prod_{i=1}^{n}C^{\alpha_i\alpha'_i}$$
$$\times F_{O_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}F_{O_2}(\theta_n-i\pi,\ldots,\theta_1-i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}. \quad (13)$$

Эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции, только когда ряд убывает. Это верно для больших расстояний между операторами. Действительно, рассмотрим операторы, разделенные мнимым временем τ. Тогда множитель

$$\left|e^{-ix\sum_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}(\theta_i)}\right| = e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}\operatorname{ch}\theta_i} \le e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}}$$

экспоненциально быстро убывает с числом частиц, причем тем быстрее, чем больше τ.

Корреляционные функции могут быть записаны в виде спектральных разложений. Например, двухточечная функция:

$$\langle O_1(x)O_2(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\{\alpha_i\},\{\alpha'_i\}}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^n\theta}{(2\pi)^n}\,e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)}\prod_{i=1}^n C^{\alpha_i\alpha'_i}$$
$$\times F_{O_1}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}F_{O_2}(\theta_n-i\pi,\ldots,\theta_1-i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}. \qquad (13)$$

Эта формула позволяет эффективно вычислять корреляционные функции, только когда ряд убывает. Это верно для больших расстояний между операторами. Действительно, рассмотрим операторы, разделенные мнимым временем τ. Тогда множитель

$$\left|e^{-ix\sum_{i=1}^n P_{\alpha_i}(\theta_i)}\right| = e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}\operatorname{ch}\theta_i} \le e^{-\tau\sum_i m_{\alpha_i}}$$

экспоненциально быстро убывает с числом частиц, причем тем быстрее, чем больше τ.

Условие эрмитовости:

$$O^+(x) = O(x) \quad\Leftrightarrow$$
$$(F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n})^* = \sum_{\{\alpha'_i\}}\prod_{i=1}^{n'} C_{\alpha_i\alpha'_i}\cdot F_O(\theta_n-i\pi,\ldots,\theta_1-i\pi)_{\alpha'_n\ldots\alpha'_1}$$
$$(\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\ \theta_i\in\mathbb{R}). \qquad (14)$$

Постулируем циклическое свойство:

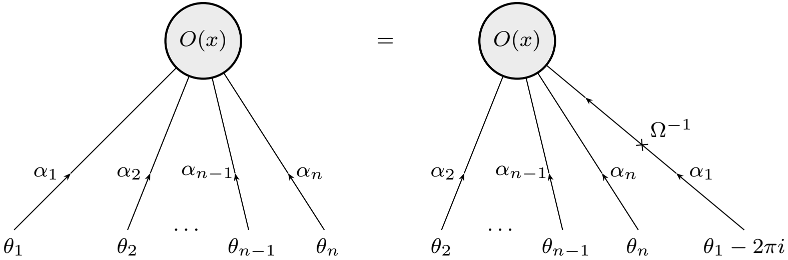
$$F_O(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=\sum_{\alpha'_1}(\Omega^{-1}(O))_{\alpha_1}^{\alpha'_1}F_O(\theta_2,\ldots,\theta_n,\theta_1-2\pi i)_{\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha'_1}. \tag{15}$$

Здесь $\Omega(O)$ — некоторая постоянная матрица.

Постулируем циклическое свойство:

$$F_O(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \sum_{\alpha_1'}(\Omega^{-1}(O))_{\alpha_1}^{\alpha_1'}F_O(\theta_2,\ldots,\theta_n,\theta_1-2\pi i)_{\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_1'}. \tag{15}$$

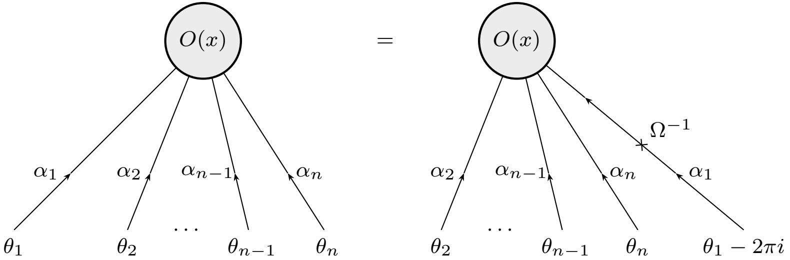
Здесь $\Omega(O)$ — некоторая постоянная матрица. Графически



Постулируем циклическое свойство:

$$F_O(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \sum_{\alpha_1'} (\Omega^{-1}(O))_{\alpha_1}^{\alpha_1'} F_O(\theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_1 - 2\pi i)_{\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_1'}. \tag{15}$$

Здесь $\Omega(O)$ — некоторая постоянная матрица. Графически



Нетрудно проверить, что

$$S_{12}(\theta)\Omega_1(O)\Omega_2(O) = \Omega_1(O)\Omega_2(O)S_{12}(\theta). \tag{16}$$

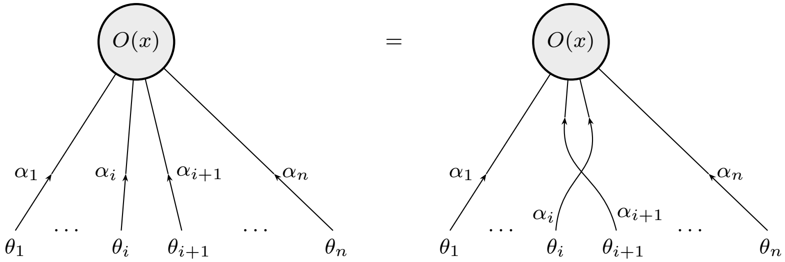
Перестановочное свойство

Постулируем перестановочное свойство:

$$F_O(\ldots,\theta_i,\theta_{i+1},\ldots)_{\ldots\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots} = \sum_{\alpha'_i\alpha'_{i+1}} S(\theta_i-\theta_{i+1})^{\alpha'_i\alpha'_{i+1}}_{\alpha_i\alpha_{i+1}} F_O(\ldots,\theta_{i+1},\theta_i,\ldots)_{\ldots\alpha'_{i+1}\alpha'_i\ldots}. \quad (17)$$

Постулируем перестановочное свойство:

$$F_O(\ldots,\theta_i,\theta_{i+1},\ldots)_{\ldots\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots} = \sum_{\alpha'_i\alpha'_{i+1}} S(\theta_i-\theta_{i+1})^{\alpha'_i\alpha'_{i+1}}_{\alpha_i\alpha_{i+1}} F_O(\ldots,\theta_{i+1},\theta_i,\ldots)_{\ldots\alpha'_{i+1}\alpha'_i\ldots}. \quad (17)$$



Кинематический полюс

Пока что не было никаких условий, которые связывают формфакторы с различным количеством частиц. Постулируем следующее условие кинематического полюса.

Кинематический полюс

Пока что не было никаких условий, которые связывают формфакторы с различным количеством частиц. Постулируем следующее условие кинематического полюса.

Формфакторы имеют полюсы на границе физического листа $0 \leq \mathrm{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \leq \pi$ в точках $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$.

Пока что не было никаких условий, которые связывают формфакторы с различным количеством частиц. Постулируем следующее условие кинематического полюса.

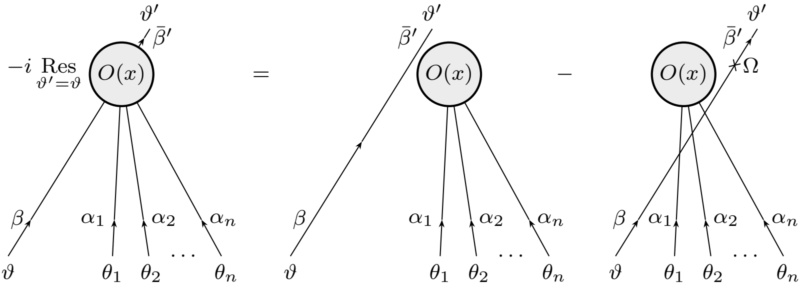
Формфакторы имеют полюсы на границе физического листа $0 \le \mathrm{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \le \pi$ в точках $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$. Вычет в полюсе для $(n+2)$-частичного формфактора выражается через n-частичный формфактор:

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\pi, \vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n} =$$
$$= i \sum_{\beta'', \{\alpha'_i\}} C_{\beta'\beta''} \left(\delta_\beta^{\beta''} \delta_\alpha^{\alpha'} - \sum_{\{\gamma_i\}} \Omega_{\gamma_n}^{\beta''}(O) \delta_\beta^{\gamma_0} \prod_{i=1}^n S(\vartheta - \theta_i)_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}{}_{\alpha_i}^{\alpha'_i} \right)$$
$$\times F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}. \quad (18)$$

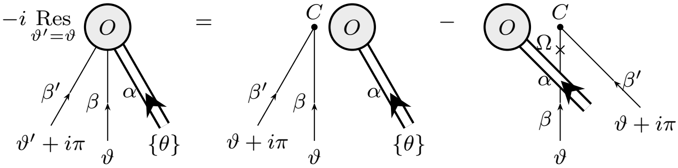
Пока что не было никаких условий, которые связывают формфакторы с различным количеством частиц. Постулируем следующее условие кинематического полюса.

Формфакторы имеют полюсы на границе физического листа $0 \le \mathrm{Im}(\theta_i - \theta_{i+1}) \le \pi$ в точках $\theta_i - \theta_{i+1} = i\pi$. Вычет в полюсе для $(n+2)$-частичного формфактора выражается через n-частичный формфактор:

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\pi, \vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n} =$$
$$= i \sum_{\beta'', \{\alpha'_i\}} C_{\beta'\beta''} \left(\delta_\beta^{\beta''} \delta_\alpha^{\alpha'} - \sum_{\{\gamma_i\}} \Omega_{\gamma_n}^{\beta''}(O) \delta_\beta^{\gamma_0} \prod_{i=1}^n S(\vartheta - \theta_i)_{\gamma_{i-1}\,\alpha_i}^{\gamma_i\,\alpha'_i} \right)$$
$$\times F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}. \quad (18)$$

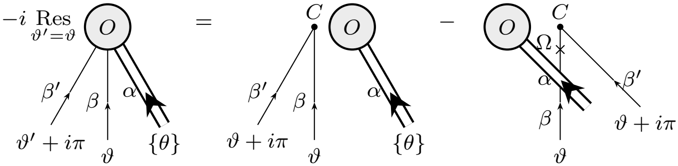


Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны

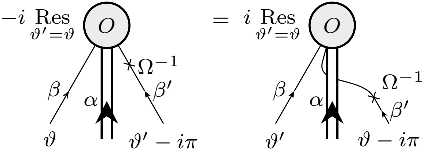


Согласованность с циклическим свойством

Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны

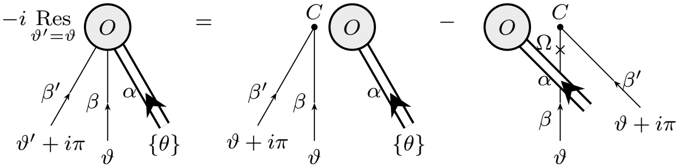


С другой стороны, тот же вычет можно записать в виде

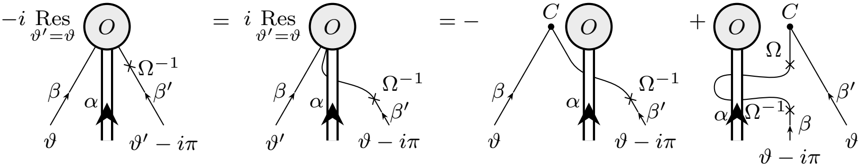


Согласованность с циклическим свойством

Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны

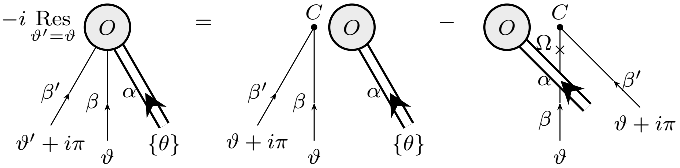


С другой стороны, тот же вычет можно записать в виде

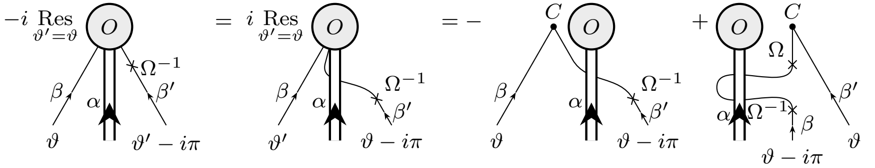


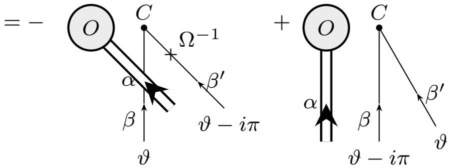
Согласованность с циклическим свойством

Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны

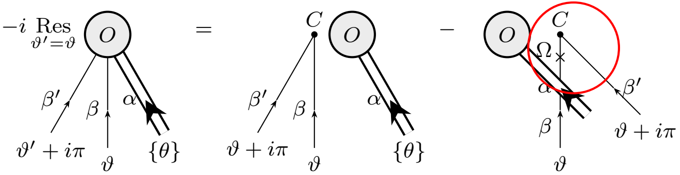


С другой стороны, тот же вычет можно записать в виде

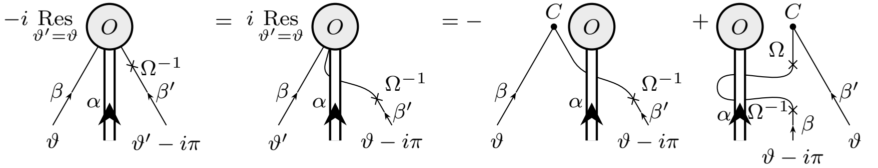


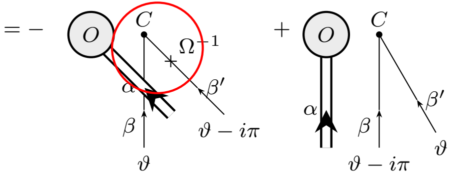


Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны



С другой стороны, тот же вычет можно записать в виде

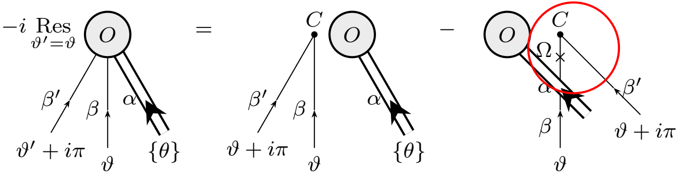




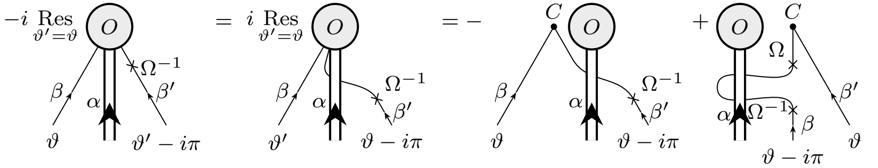
$\Rightarrow$ $$C\Omega = (\Omega^{-1})^t C$$

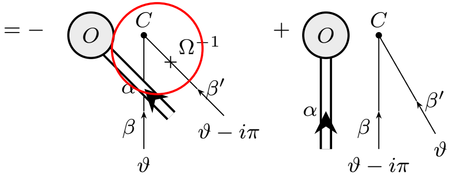
Согласованность с циклическим свойством

Проверим согласованность с циклическим условием. С одной стороны



С другой стороны, тот же вычет можно записать в виде





$\Rightarrow$

$$C\Omega = (\Omega^{-1})^t C$$

or

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O) \Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}.$$

Согласованность с циклическим свойством

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O) \Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_{\alpha} = 1$;

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_\alpha = 1$;
2. для пары заряженных частиц $\alpha, \bar\alpha$ блоки 2×2 вида $C_\alpha = \sigma^2$.

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_\alpha = 1$;
2. для пары заряженных частиц $\alpha, \bar\alpha$ блоки 2×2 вида $C_\alpha = \sigma^2$.

Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализовать: $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_\alpha)$.

Согласованность с циклическим свойством

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \qquad (19)$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_\alpha = 1$;
2. для пары заряженных частиц $\alpha, \bar{\alpha}$ блоки 2×2 вида $C_\alpha = \sigma^2$.

Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализовать: $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_\alpha)$. Тогда

$$\Omega_\alpha \Omega_{\bar{\alpha}} = 1.$$

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_\alpha = 1$;
2. для пары заряженных частиц $\alpha, \bar{\alpha}$ блоки 2×2 вида $C_\alpha = \sigma^2$.

Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализовать: $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_\alpha)$. Тогда

$$\Omega_\alpha \Omega_{\bar{\alpha}} = 1.$$

В частности, для нейтральных частиц $\Omega_\alpha = \pm 1$.

Итак,

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\alpha'}(O)\Omega^{\beta}_{\beta'}(O) = C_{\alpha'\beta'}. \tag{19}$$

Всегда можно выбрать базис из нейтральных и заряженных частиц. В нем матрица C будет иметь блочно-диагональный вид:

1. для нейтральной частицы α блок 1×1 вида $C_\alpha = 1$;
2. для пары заряженных частиц $\alpha, \bar{\alpha}$ блоки 2×2 вида $C_\alpha = \sigma^2$.

Дополнительной заменой базиса матрицу Ω можно диагонализовать: $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_\alpha)$. Тогда

$$\Omega_\alpha \Omega_{\bar{\alpha}} = 1.$$

В частности, для нейтральных частиц $\Omega_\alpha = \pm 1$. Кроме того, в C-симметричной модели $\Omega_{\bar{\alpha}} = \Omega^*_\alpha$, так что $|\Omega_\alpha| = 1$.

Динамические полюсы

Второй тип полюсов происходит от связанных состояниях и называется динамическими полюсами.

Динамические полюсы

Второй тип полюсов происходит от связанных состояниях и называется динамическими полюсами. Пусть имеется набор связанных состояний γ состояний β' и β.

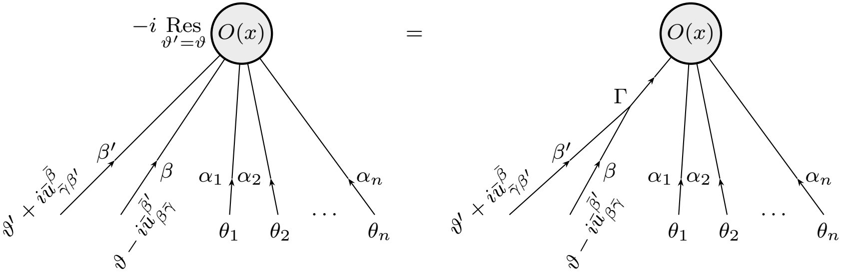
Второй тип полюсов происходит от связанных состояниях и называется динамическими полюсами. Пусть имеется набор связанных состояний γ состояний β' и β. Тогда формфакторы имеют полюс при $\theta_i - \theta_j = iu^{\gamma}_{\beta'\beta}$ и

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\bar{u}^{\bar{\beta}}_{\bar{\gamma}\beta'}, \vartheta - i\bar{u}^{\bar{\beta}'}_{\bar{\beta}\gamma}, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n}$$
$$= i\sum_{\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta'\beta} F_O(\vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\gamma\alpha_1\ldots\alpha_n}. \quad (20)$$

Второй тип полюсов происходит от связанных состояниях и называется динамическими полюсами. Пусть имеется набор связанных состояний γ состояний β' и β. Тогда формфакторы имеют полюс при $\theta_i - \theta_j = iu^{\gamma}_{\beta'\beta}$ и

$$\operatorname*{Res}_{\vartheta'=\vartheta} F_O(\vartheta' + i\bar u^{\bar\beta}_{\bar\gamma\beta'}, \vartheta - i\bar u^{\bar\beta'}_{\bar\beta\gamma}, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\beta'\beta\alpha_1\ldots\alpha_n}$$
$$= i\sum_{\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta'\beta} F_O(\vartheta, \theta_1, \ldots, \theta_n)_{\gamma\alpha_1\ldots\alpha_n}. \quad (20)$$

Графически



Произведение операторов

Рассмотрим произведение $O_1(x)O_2(y)$ двух операторов при условии

$$x^0 = y^0 + 0, \qquad x^1 > y^1. \tag{21}$$

Произведение операторов

Рассмотрим произведение $O_1(x)O_2(y)$ двух операторов при условии

$$x^0 = y^0 + 0, \qquad x^1 > y^1. \tag{21}$$

Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$. Обозначим $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\overleftarrow{\xi} = (\xi_k, \ldots, \xi_1)$, $\overrightarrow{V^\alpha(\xi)} = V^{\alpha_1}(\xi_1) \cdots V^{\alpha_k}(\xi_k)$, $P_\alpha(\xi) = \sum P_{\alpha_i}(\xi_i)$ и т. п.

Рассмотрим произведение $O_1(x)O_2(y)$ двух операторов при условии

$$x^0 = y^0 + 0, \qquad x^1 > y^1. \tag{21}$$

Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$. Обозначим $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\overleftarrow{\xi} = (\xi_k, \ldots, \xi_1)$, $\overrightarrow{V^\alpha(\xi)} = V^{\alpha_1}(\xi_1) \cdots V^{\alpha_k}(\xi_k)$, $P_\alpha(\xi) = \sum P_{\alpha_i}(\xi_i)$ и т. п.
Тогда

$$\begin{aligned} O_1(x)O_2(y) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\ldots,\{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n} \\ \times e^{-iP_\gamma(\xi)(x-y) - iP_\alpha(\theta)x - iP_\beta(\vartheta)y} \\ \times C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\xi^-}, \overrightarrow{\theta})_{\overrightarrow{\gamma}\,\overrightarrow{\alpha}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_{\overrightarrow{\beta}\,\overleftarrow{\gamma'}} :\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\,\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:. \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим произведение $O_1(x)O_2(y)$ двух операторов при условии

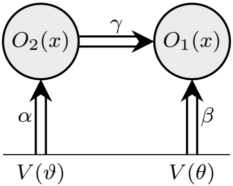
$$x^0 = y^0 + 0, \qquad x^1 > y^1. \tag{21}$$

Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$. Обозначим $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\overleftarrow{\xi} = (\xi_k, \dots, \xi_1)$, $\overrightarrow{V^\alpha(\xi)} = V^{\alpha_1}(\xi_1) \cdots V^{\alpha_k}(\xi_k)$, $P_\alpha(\xi) = \sum P_{\alpha_i}(\xi_i)$ и т. п.
Тогда

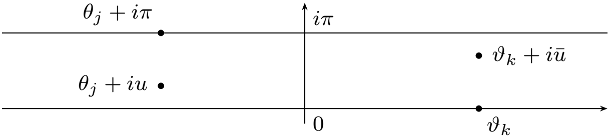
$$\begin{aligned} O_1(x)O_2(y) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\dots,\{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n} \\ \times e^{-iP_\gamma(\xi)(x-y) - iP_\alpha(\theta)x - iP_\beta(\vartheta)y} \\ \times C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\xi^-}, \overrightarrow{\theta})_{\overrightarrow{\gamma}\overrightarrow{\alpha}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_{\overrightarrow{\beta}\overleftarrow{\gamma'}} :\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:. \end{aligned} \tag{22}$$

Графически

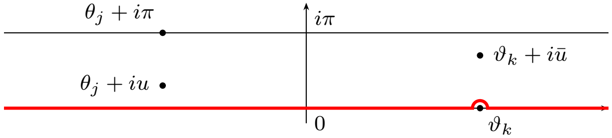
$O_1(x)O_2(y) =$



Чтобы прокоммутировать операторы, сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$:

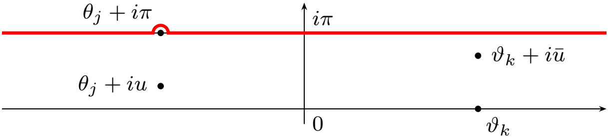


Чтобы прокоммутировать операторы, сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$:



Коммутирование операторов: сдвиг контуров

Чтобы прокоммутировать операторы, сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$:



$$O_1(x)O_2(x) =$$

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\dots,\{\gamma_i'\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n}$$

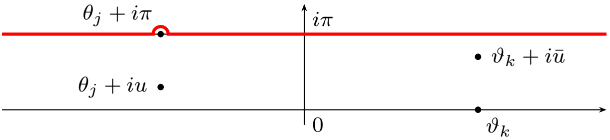
$$\times\, e^{iP_\gamma(\xi)(x-y)-iP_\alpha(\theta)x-iP_\beta(\vartheta)y}$$

$$\times\, C^{\gamma\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\xi^+ + i\pi},\, \vec{\theta})_{\vec{\gamma}\vec{\alpha}} F_{O_2}(\vec{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^-})_{\vec{\beta}\overleftarrow{\gamma''}}$$

$$\times\, :\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\,\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:$$

Коммутирование операторов: сдвиг контуров

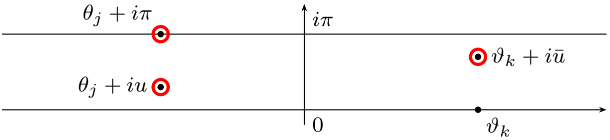
Чтобы прокоммутировать операторы, сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$:



$$
\begin{aligned}
&O_1(x)O_2(x) = \\
&\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\dots,\{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n} \\
&\times e^{iP_\gamma(\xi)(x-y) - iP_\alpha(\theta)x - iP_\beta(\vartheta)y} \\
&\times C^{\gamma\gamma'} \Omega^{\gamma''}_{\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{\xi^+ - i\pi})_{\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\gamma}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^-})_{\overrightarrow{\beta}\overleftarrow{\gamma''}} \\
&\times :\overleftarrow{V^{\beta'}(\vartheta)}\overleftarrow{V^{\alpha'}(\theta)}: \prod_{i,j} S(\theta_i - \vartheta_j)^{\alpha_i\beta_j}_{\alpha'_i\beta'_j}
\end{aligned}
$$

Коммутирование операторов: сдвиг контуров

Чтобы прокоммутировать операторы, сдвинем контур интегрирования по ξ_i вверх на $i\pi$:



$$
\begin{aligned}
&O_1(x)O_2(x) = \\
&\sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!k!} \sum_{\{\alpha_i\},\dots,\{\gamma'_i\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k\xi}{(2\pi)^k} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^m\theta}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d^n\vartheta}{(2\pi)^n} \\
&\times e^{iP_\gamma(\xi)(x-y) - iP_\alpha(\theta)x - iP_\beta(\vartheta)y} \\
&\times C^{\gamma\gamma'} \Omega^{\gamma''}_{\gamma'} F_{O_1}(\overrightarrow{\theta}, \overrightarrow{\xi^+ - i\pi})_{\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\gamma}} F_{O_2}(\overrightarrow{\vartheta}, \overleftarrow{\xi^-})_{\overrightarrow{\beta}\overleftarrow{\gamma''}} \\
&\times :\overleftarrow{V^{\beta'}(\vartheta)}\overleftarrow{V^{\alpha'}(\theta)}: \prod_{i,j} S(\theta_i - \vartheta_j)^{\alpha_i\beta_j}_{\alpha'_i\beta'_j} \qquad + \qquad ????
\end{aligned}
$$

Рассмотрим вклад кинематического полюса от θ_1 в интеграл по ξ_k:

$$- e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y)-iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x-i(P_\beta(\vartheta)+P_{\alpha_1}(\theta_1))y}$$

$$\times \sum_{\{\alpha\},\ldots,\{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1}\left((\overrightarrow{\xi^-})_k, (\overrightarrow{\theta})_1\right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overrightarrow{\alpha'})_1} F_{O_2}\left(\overrightarrow{\vartheta}, \theta_1, (\overleftarrow{\xi^+ - i\pi})_k\right)_{\overrightarrow{\beta},\alpha'_1,(\overleftarrow{\gamma})_1}$$

$$\times \left(\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\gamma''}_{\gamma} - \delta^{\delta_1}_{\alpha_1}\delta^{\alpha'_1}_{\delta'_k}\Omega^{\delta'_1}_{\delta_m}(O_1)\prod_{i=1}^{k-1} S(\theta_1-\xi_i+2\pi i)^{\delta'_{i+1}\,\gamma''_i}_{\delta'_i\,\gamma_i}\prod_{i=2}^{m} S(\theta_1-\theta_i)^{\delta_i\,\alpha'_i}_{\delta_{i-1}\,\alpha_i}\right)$$

$$\times :\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:,$$

где $(\xi)_j = \{\xi_i\}_{i\neq j}$.

Коммутирование операторов: кинематические полюсы

Рассмотрим вклад кинематического полюса от θ_1 в интеграл по ξ_k:

$$-\,e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y)-iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x-i(P_\beta(\vartheta)+P_{\alpha_1}(\theta_1))y}$$

$$\times\sum_{\{\alpha\},\dots,\{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1}\left((\overrightarrow{\xi^-})_k,(\overrightarrow{\theta})_1\right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overrightarrow{\alpha'})_1} F_{O_2}\left(\overrightarrow{\vartheta},\theta_1,(\overleftarrow{\xi^+-i\pi})_k\right)_{\overrightarrow{\beta},\alpha'_1,(\overleftarrow{\gamma})_1}$$

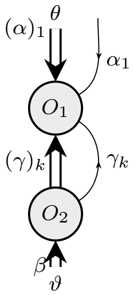
$$\times\left(\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\gamma''}_{\gamma}-\delta^{\delta_1}_{\alpha_1}\delta^{\alpha'_1}_{\delta'_k}\Omega^{\delta'_1}_{\delta_m}(O_1)\prod_{i=1}^{k-1}S(\theta_1-\xi_i+2\pi i)^{\delta'_{i+1}\,\gamma''_i}_{\delta'_i\,\gamma_i}\prod_{i=2}^{m}S(\theta_1-\theta_i)^{\delta_i\,\alpha'_i}_{\delta_{i-1}\,\alpha_i}\right)$$

$$\times\ :\overleftarrow{V}^{\alpha}(\theta)\overleftarrow{V}^{\beta}(\vartheta):\,,$$

где $(\xi)_j=\{\xi_i\}_{i\neq j}$.

Графически

$i\operatorname*{Res}_{\xi_k=\theta_1}$



Коммутирование операторов: кинематические полюсы

Рассмотрим вклад кинематического полюса от θ_1 в интеграл по ξ_k:

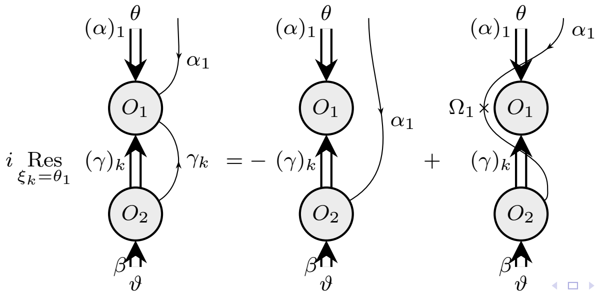
$$-\,e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y)-iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x-i(P_\beta(\vartheta)+P_{\alpha_1}(\theta_1))y}$$

$$\times\sum_{\{\alpha\},\dots,\{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1}F_{O_1}\left((\overrightarrow{\xi^-})_k,(\overrightarrow{\theta})_1\right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overrightarrow{\alpha'})_1}F_{O_2}\left(\overrightarrow{\vartheta},\theta_1,(\overleftarrow{\xi^+-i\pi})_k\right)_{\overrightarrow{\beta},\alpha'_1,(\overleftarrow{\gamma})_1}$$

$$\times\left(\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\gamma''}_{\gamma}-\delta^{\delta_1}_{\alpha_1}\delta^{\alpha'_1}_{\delta'_k}\Omega^{\delta'_1}_{\delta_m}(O_1)\prod_{i=1}^{k-1}S(\theta_1-\xi_i+2\pi i)^{\delta'_{i+1}\,\gamma''_i}_{\delta'_i\;\;\;\gamma_i}\prod_{i=2}^{m}S(\theta_1-\theta_i)^{\delta_i\;\;\alpha'_i}_{\delta_{i-1}\,\alpha_i}\right)$$

$$\times\;:\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\,\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:\,,$$

где $(\xi)_j=\{\xi_i\}_{i\neq j}$.
Графически



Рассмотрим вклад кинематического полюса от θ_1 в интеграл по ξ_k:

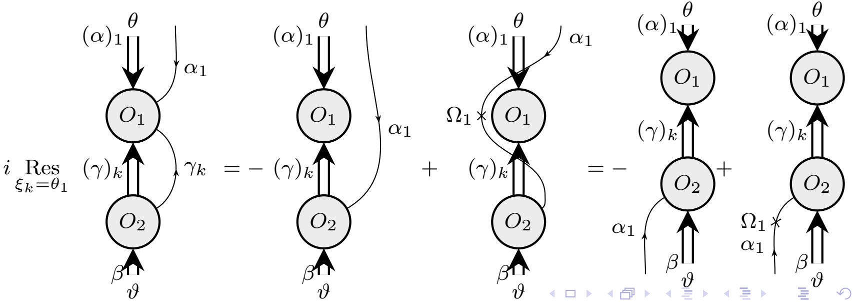
$$-\,e^{-iP_{(\gamma)_k}((\xi)_k)(x-y)-iP_{(\alpha)_1}((\theta)_1)x-i(P_\beta(\vartheta)+P_{\alpha_1}(\theta_1))y}$$

$$\times\sum_{\{\alpha\},\dots,\{\delta'\}} C^{(\gamma)_1(\gamma')_1} F_{O_1}\left((\overrightarrow{\xi^-})_k,(\overrightarrow{\theta})_1\right)_{(\overrightarrow{\gamma''})_k(\overrightarrow{\alpha'})_1} F_{O_2}\left(\overrightarrow{\vartheta},\theta_1,(\overleftarrow{\xi^+-i\pi})_k\right)_{\overrightarrow{\beta},\alpha'_1,(\overleftarrow{\gamma})_1}$$

$$\times\left(\delta_\alpha^{\alpha'}\delta_\gamma^{\gamma''}-\delta_{\alpha_1}^{\delta_1}\delta_{\delta'_k}^{\alpha'_1}\Omega_{\delta_m}^{\delta'_1}(O_1)\prod_{i=1}^{k-1}S(\theta_1-\xi_i+2\pi i)_{\delta'_i\;\gamma_i}^{\delta'_{i+1}\gamma''_i}\prod_{i=2}^{m}S(\theta_1-\theta_i)_{\delta_{i-1}\;\alpha_i}^{\delta_i\;\;\alpha'_i}\right)$$

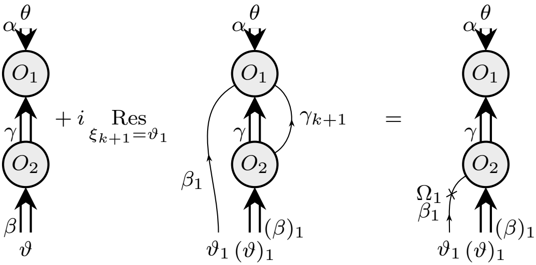
$$\times\;:\overleftarrow{V^\alpha(\theta)}\,\overleftarrow{V^\beta(\vartheta)}:\,,$$

где $(\xi)_j=\{\xi_i\}_{i\neq j}$.
Графически

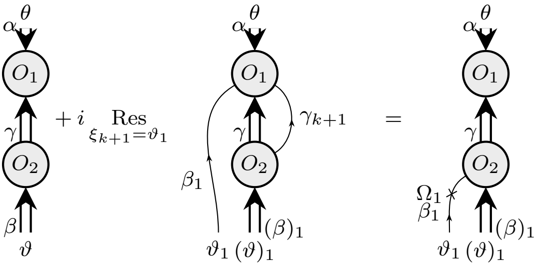


Коммутирование операторов: кинематические полюсы

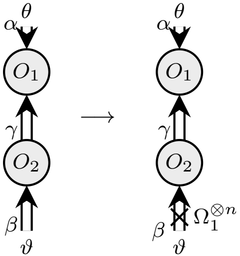
Перепишем это равенство по-другому:



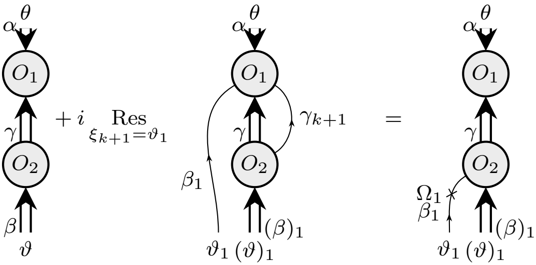
Перепишем это равенство по-другому:



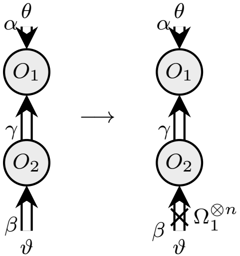
Многократно применяя эту процедуру (и аккуратно учитывая комбинаторику) получаем правило:



Перепишем это равенство по-другому:



Многократно применяя эту процедуру (и аккуратно учитывая комбинаторику) получаем правило:



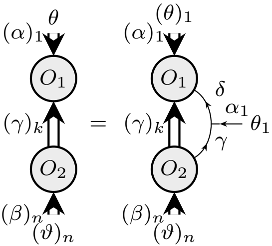
При этом $V(\vartheta)$ оказываются слева от $V(\theta)$: $:\overleftarrow{V}^{\beta}(\vartheta)\overleftarrow{V}^{\alpha}(\theta):$.
$\Rightarrow$ разложение для $O_2(y)O_1(x)$.

Но мы не учли динамические полюсы.

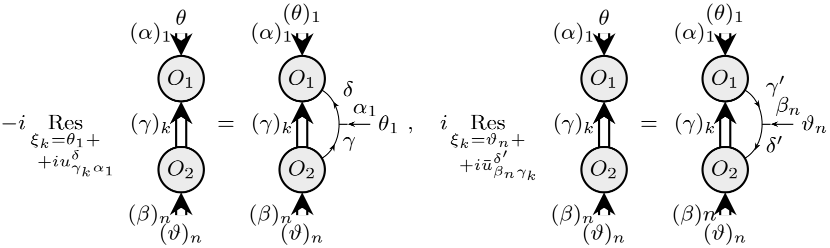
Коммутирование операторов: динамические полюсы

Но мы не учли динамические полюсы. Динамические полюсы встречаются всегда парами: один от O_1 и один от O_2.

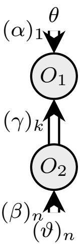
$$-i \operatorname*{Res}_{\substack{\xi_k=\theta_1+\\ +iu^{\delta}_{\gamma_k\alpha_1}}}$$

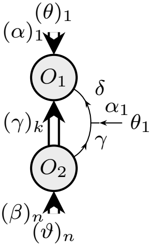


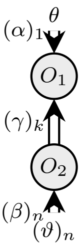
Но мы не учли динамические полюсы. Динамические полюсы встречаются всегда парами: один от O_1 и один от O_2.

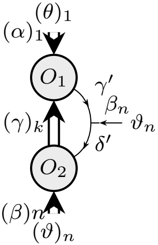


Но мы не учли динамические полюсы. Динамические полюсы встречаются всегда парами: один от O_1 и один от O_2.

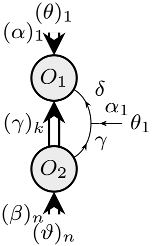
$-i \operatorname*{Res}_{\substack{\xi_k=\theta_1+\\ +iu^{\delta}_{\gamma_k\alpha_1}}}$ 

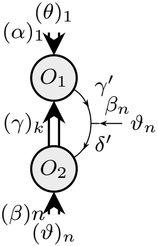
$=$ 

, $i \operatorname*{Res}_{\substack{\xi_k=\vartheta_n+\\ +i\bar{u}^{\delta'}_{\beta_n\gamma_k}}}$ 

$=$ 

В итоге суммы вкладов сокращается:



$-$ 

$\underset{\substack{\vartheta_n=\theta_1\\ \beta_n=\alpha_1\\ \gamma'=\bar{\delta}\\ \delta'=\bar{\gamma}}}{=} 0.$

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} \Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц.

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}}\prod_{i=1}^{n}\Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}=C(O_I,O_J)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются.

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} \Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются. Тогда мы будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны и

$$O_1(x) O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2) O_2(y) O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1) O_2(y) O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 < y^1. \end{cases} \tag{24}$$

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} \Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются. Тогда мы будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны и

$$O_1(x) O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2) O_2(y) O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1) O_2(y) O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 < y^1. \end{cases} \tag{24}$$

Произведение

$$e^{2\pi i \omega(O_1, O_2)} = \Omega(O_1, O_2) = C(O_1, O_2) C(O_2, O_1) \tag{25}$$

называют индексом взаимной локальности, а величину ω — показателем взаимной локальности.

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}}\prod_{i=1}^{n}\Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}=C(O_I,O_J)F_{O_J}(\theta_1,\ldots,\theta_n)_{\alpha_1\ldots\alpha_n},\tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются. Тогда мы будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны и

$$O_1(x)O_2(y)=\begin{cases}C(O_1,O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0=y^0,\ x^1>y^1;\\ C^{-1}(O_2,O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0=y^0,\ x^1<y^1.\end{cases}\tag{24}$$

Произведение

$$e^{2\pi i\omega(O_1,O_2)}=\Omega(O_1,O_2)=C(O_1,O_2)C(O_2,O_1)\tag{25}$$

называют индексом взаимной локальности, а величину ω — показателем взаимной локальности. В эвклидовой плоскости имеем

$$O_1(ze^{2\pi i},\bar z e^{-2\pi i})O_2(0,0)=\Omega(O_1,O_2)O_1(z,\bar z)O_2(0,0).$$

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} \Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \ldots, \theta_n)_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются. Тогда мы будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны и

$$O_1(x)O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 < y^1. \end{cases} \tag{24}$$

Произведение

$$e^{2\pi i \omega(O_1, O_2)} = \Omega(O_1, O_2) = C(O_1, O_2)C(O_2, O_1) \tag{25}$$

называют индексом взаимной локальности, а величину ω — показателем взаимной локальности. В эвклидовой плоскости имеем

$$O_1(ze^{2\pi i}, \bar{z}e^{-2\pi i})O_2(0,0) = \Omega(O_1, O_2)O_1(z, \bar{z})O_2(0,0).$$

Пусть

$$A^\alpha(x) = \int_{\mathcal{C}_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-iP_\alpha(\theta)x} V^\alpha(\theta) + \cdots$$

— некоторый локальный оператор, уничтожающий частицу сорта α (и рождающий ее античастицу).

Пусть

$$\sum_{\{\alpha'_i\}} \prod_{i=1}^{n} \Omega_{\alpha_i}^{\alpha'_i}(O_I) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} = C(O_I, O_J) F_{O_J}(\theta_1, \dots, \theta_n)_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \tag{23}$$

для любого набора частиц. Этому условию нетрудно удовлетворить, поскольку в подходящем базисе левая часть равна $\prod_\alpha \Omega_\alpha$, причем вклады частицы и античастицы сокращаются. Тогда мы будем говорить, что операторы O_1 и O_2 взаимно-квазилокальны и

$$O_1(x)O_2(y) = \begin{cases} C(O_1, O_2)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 > y^1; \\ C^{-1}(O_2, O_1)O_2(y)O_1(x), & x^0 = y^0,\ x^1 < y^1. \end{cases} \tag{24}$$

Произведение

$$e^{2\pi i \omega(O_1, O_2)} = \Omega(O_1, O_2) = C(O_1, O_2)C(O_2, O_1) \tag{25}$$

называют индексом взаимной локальности, а величину ω — показателем взаимной локальности. В эвклидовой плоскости имеем

$$O_1(ze^{2\pi i}, \bar{z}e^{-2\pi i})O_2(0,0) = \Omega(O_1, O_2)O_1(z, \bar{z})O_2(0,0).$$

Пусть

$$A^\alpha(x) = \int_{C_{\rightrightarrows}} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-iP_\alpha(\theta)x} V^\alpha(\theta) + \cdots$$

— некоторый локальный оператор, уничтожающий частицу сорта α (и рождающий ее античастицу). Тогда

$$\Omega_\alpha(O) = C(O, A^\alpha) = \Omega(O, A^\alpha) \tag{26}$$

Тем самым мы получили

Теорему Смирнова

Если наборы формфакторов двух операторов удовлетворяют формфакторным аксиомам, т.е. ограничению на рост, условиям лоренцева спина, цикличности, перестановки, кинематического и динамического полюсов, эти операторы взаимно-квазилокальны с индексом квазилокальности, определенным выше.

Тем самым мы получили

Теорему Смирнова

Если наборы формфакторов двух операторов удовлетворяют формфакторным аксиомам, т.е. ограничению на рост, условиям лоренцева спина, цикличности, перестановки, кинематического и динамического полюсов, эти операторы взаимно-квазилокальны с индексом квазилокальности, определенным выше.

Имеется обратная к этой теореме

Гипотеза Смирнова

Для любого набора взаимно-квазилокальных операторов наборы формфакторов этих операторов удовлетворяют формфакторным аксиомам.

Рассмотрим случай $S(\theta) = -1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Рассмотрим случай $S(\theta) = -1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Поле свободного фермиона:

$$\psi_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})} V(\theta), \quad s_{\psi_\pm} = \pm\frac{1}{2},\ \Omega_1(\psi_\pm) = -1. \tag{27}$$

Рассмотрим случай $S(\theta) = -1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Поле свободного фермиона:

$$\psi_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})} V(\theta), \quad s_{\psi_\pm} = \pm\frac{1}{2},\ \Omega_1(\psi_\pm) = -1. \tag{27}$$

Формфакторы свободного фермиона:

$$F_{\psi_\pm}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

Рассмотрим случай $S(\theta) = -1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2) + V(\theta_2)V(\theta_1) = 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 + i\pi).$$

Поле свободного фермиона:

$$\psi_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows} \frac{d\theta}{2\pi}\, e^{-iP(\theta)x \pm \frac{1}{2}(\theta + \frac{i\pi}{2})} V(\theta), \quad s_{\psi_\pm} = \pm\frac{1}{2},\ \Omega_1(\psi_\pm) = -1. \tag{27}$$

Формфакторы свободного фермиона:

$$F_{\psi_\pm}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \pm\delta_{n1}\sqrt{\frac{m}{2}} e^{\pm\frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{i\pi}{2})}.$$

Рассмотрим случай $S(\theta)=-1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2)+V(\theta_2)V(\theta_1)=2\pi\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)+2\pi\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi).$$

Поле свободного фермиона:

$$\psi_\pm(x)=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-iP(\theta)x\pm\frac{1}{2}(\theta+\frac{i\pi}{2})}V(\theta),\quad s_{\psi_\pm}=\pm\frac{1}{2},\ \Omega_1(\psi_\pm)=-1. \tag{27}$$

Формфакторы свободного фермиона:

$$F_{\psi_\pm}(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\pm\delta_{n1}\sqrt{\frac{m}{2}}e^{\pm\frac{1}{2}(\theta_1+\frac{i\pi}{2})}.$$

Для тензора энергии-импульса

$$T_{zz}=-\frac{i}{2}:\!\psi_+\,\partial\psi_+\!:,\qquad T_{\bar z\bar z}=\frac{i}{2}:\!\psi_-\,\bar\partial\psi_-\!:,\qquad T_{z\bar z}=\frac{im}{2}:\!\psi_+\psi_-\!:, \tag{28}$$

Рассмотрим случай $S(\theta)=-1$, что соответствует свободному фермиону или модели Изинга:

$$V(\theta_1)V(\theta_2)+V(\theta_2)V(\theta_1)=2\pi\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)+2\pi\delta(\theta_1-\theta_2+i\pi).$$

Поле свободного фермиона:

$$\psi_\pm(x)=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\mathcal{C}_\rightrightarrows}\frac{d\theta}{2\pi}\,e^{-iP(\theta)x\pm\frac{1}{2}(\theta+\frac{i\pi}{2})}V(\theta),\quad s_{\psi_\pm}=\pm\frac{1}{2},\ \Omega_1(\psi_\pm)=-1. \tag{27}$$

Формфакторы свободного фермиона:

$$F_{\psi_\pm}(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\pm\delta_{n1}\sqrt{\frac{m}{2}}e^{\pm\frac{1}{2}(\theta_1+\frac{i\pi}{2})}.$$

Для тензора энергии-импульса

$$T_{zz}=-\frac{i}{2}:\!\psi_+\,\partial\psi_+\!:,\qquad T_{\bar z\bar z}=\frac{i}{2}:\!\psi_-\,\bar\partial\psi_-\!:,\qquad T_{z\bar z}=\frac{im}{2}:\!\psi_+\psi_-\!:, \tag{28}$$

имеем ненулевые формфакторы только при $n=2$:

$$\begin{aligned}
F_{T_{zz}}(\theta_1,\theta_2)&=\frac{im^2}{4}e^{\theta_1+\theta_2}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{zz}}=2, && \Omega_1(T_{zz})=1,\\
F_{T_{\bar z\bar z}}(\theta_1,\theta_2)&=\frac{im^2}{4}e^{-\theta_1-\theta_2}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{\bar z\bar z}}=-2, && \Omega_1(T_{\bar z\bar z})=1,\\
F_{T_{z\bar z}}(\theta_1,\theta_2)&=\frac{im^2}{4}\operatorname{sh}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, && s_{T_{z\bar z}}=0, && \Omega_1(T_{z\bar z})=1.
\end{aligned} \tag{29}$$

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$.

Модель Изинга

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$. В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \qquad .$$

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$.
В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$. В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Можно ввести два поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с формфакторами

$$F_\sigma(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \qquad s_\sigma = 0,\ \Omega_1(\sigma) = -1, \tag{31}$$

$$F_\mu(\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n+1} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0,\ \Omega_1(\mu) = 1. \tag{32}$$

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$. В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Можно ввести два поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с формфакторами

$$F_\sigma(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \qquad s_\sigma = 0,\ \Omega_1(\sigma) = -1, \tag{31}$$

$$F_\mu(\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n+1} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0,\ \Omega_1(\mu) = 1. \tag{32}$$

По свойствам взаимной локальности имеется четыре класса операторов:

$\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$. В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Можно ввести два поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с формфакторами

$$F_\sigma(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \qquad s_\sigma = 0,\ \Omega_1(\sigma) = -1, \tag{31}$$

$$F_\mu(\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n+1} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0,\ \Omega_1(\mu) = 1. \tag{32}$$

По свойствам взаимной локальности имеется четыре класса операторов:

- $\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.
- $\{\mu\}$: Бозонные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Семейство включает μ.

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$.
В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Можно ввести два поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с формфакторами

$$F_\sigma(\theta_1,\ldots,\theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8}\prod_{i<j}^{2n}\operatorname{th}\frac{\theta_i-\theta_j}{2}, \qquad s_\sigma = 0,\ \Omega_1(\sigma) = -1, \tag{31}$$

$$F_\mu(\theta_1,\ldots,\theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8}\prod_{i<j}^{2n+1}\operatorname{th}\frac{\theta_i-\theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0,\ \Omega_1(\mu) = 1. \tag{32}$$

По свойствам взаимной локальности имеется четыре класса операторов:

- $\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.
- $\{\mu\}$: Бозонные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Семейство включает μ.
- $\{\sigma\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает σ.

Найдем минимальный формфактор, то есть функцию $R(\theta)$, такую, что

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \qquad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

не имеющую полюсов на физическом листе $0 \le \operatorname{Im}\theta \le \pi$ кроме точки $\theta = i\pi$. В случае модели Изинга минимальный формфактор равен

$$R(\theta) = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}.$$

Можно ввести два поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с формфакторами

$$F_\sigma(\theta_1, \ldots, \theta_{2n}) = i^n G_\sigma m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \qquad s_\sigma = 0,\ \Omega_1(\sigma) = -1, \tag{31}$$

$$F_\mu(\theta_1, \ldots, \theta_{2n+1}) = i^{n-1} G_\mu m^{1/8} \prod_{i<j}^{2n+1} \operatorname{th}\frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad s_\mu = 0,\ \Omega_1(\mu) = 1. \tag{32}$$

По свойствам взаимной локальности имеется четыре класса операторов:

- $\{\varepsilon\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Это семейство включает в себя, например, 1 и $T_{\mu\nu}$.
- $\{\mu\}$: Бозонные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = 1$. Семейство включает μ.
- $\{\sigma\}$: Бозонные четные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает σ.
- $\{\psi\}$: Фермионные нечетные операторы с $\Omega_1(O) = -1$. Семейство включает $\psi_\pm$.

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x),
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x),
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x),
\end{gathered} \tag{33}$$

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered} \tag{33}$$

Имеется три сектора взаимно-локальных операторов:

- «бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;

Для представителей этих классов имеем $(x^0 = y^0)$

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x),\\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x),\\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x),\\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x),\\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x),\\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered} \tag{33}$$

Имеется три сектора взаимно-локальных операторов:

- «бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;
- «фермионный» сектор $\{\varepsilon, \psi\}$;

Для представителей этих классов имеем ($x^0 = y^0$)

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered} \tag{33}$$

Имеется три сектора взаимно-локальных операторов:

- «бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;
- «фермионный» сектор $\{\varepsilon, \psi\}$;
- «двойственный бозонный» сектор $\{\varepsilon, \sigma\}$.

Для представителей этих классов имеем $(x^0 = y^0)$

$$\begin{gathered}
\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(y)\varepsilon(x), \\
\varepsilon(x)\mu(y) = \mu(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\sigma(y) = \sigma(y)\varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)\psi(y) = \psi(y)\varepsilon(x), \\
\mu(x)\mu(y) = \mu(y)\mu(x), \\
\mu(x)\sigma(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\sigma(y)\mu(x), \quad \mu(x)\psi(y) = \operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\mu(x), \\
\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(y)\sigma(x), \quad \sigma(x)\psi(y) = -\operatorname{sign}(x^1 - y^1)\psi(y)\sigma(x), \\
\psi(x)\psi(y) = -\psi(y)\psi(x).
\end{gathered} \tag{33}$$

Имеется три сектора взаимно-локальных операторов:

- «бозонный» сектор $\{\varepsilon, \mu\}$;
- «фермионный» сектор $\{\varepsilon, \psi\}$;
- «двойственный бозонный» сектор $\{\varepsilon, \sigma\}$.

Бозонный и двойственный бозонный сектор отвечают параметру беспорядка и параметру порядка при $T < T_c$. По двойственности Крамерса—Ваннье они меняются местами при $T > T_c$.

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t$$

Модель sh-Гордона

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t \;\Rightarrow\; R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \operatorname{sh} \pi t}, \tag{34}$$

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t \;\Rightarrow\; R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \operatorname{sh} \pi t}, \tag{34}$$

В модели sh-Гордона имеем

$$R(\theta) = \exp\left(4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi p t}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi (p+1) t}{2}}{\operatorname{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi)t\right). \tag{35}$$

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, f(t) \sin\theta t \;\Rightarrow\; R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2\,\mathrm{sh}\,\pi t}, \tag{34}$$

В модели sh-Гордона имеем

$$R(\theta) = \exp\left(4\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi p t}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi(p+1)t}{2}}{\mathrm{sh}^2\,\pi t} \cos(\theta - i\pi)t \right). \tag{35}$$

Можно проверить, что

$$R(\theta)R(\theta + i\pi) = \frac{\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{sh}\,\theta - i\sin\pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \qquad f(z) = 1 + \frac{2i\sin\pi p}{z - z^{-1}}. \tag{36}$$

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta) R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin \theta t \ \Rightarrow \ R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \operatorname{sh} \pi t}, \tag{34}$$

В модели sh-Гордона имеем

$$R(\theta) = \exp \left(4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi p t}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi (p+1) t}{2}}{\operatorname{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi) t \right). \tag{35}$$

Можно проверить, что

$$R(\theta) R(\theta + i\pi) = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh} \theta - i \sin \pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \qquad f(z) = 1 + \frac{2i \sin \pi p}{z - z^{-1}}. \tag{36}$$

Функция $f(z)$ обладает свойством

$$\frac{f(e^{\theta})}{f(e^{-\theta})} = S(\theta). \tag{37}$$

Рассмотрим более общую S-матрицу. Уравнения на минимальный формфактор

$$R(\theta) = R(2\pi i - \theta), \quad R(\theta) = S(\theta)R(-\theta), \tag{30}$$

в случае одной частицы можно по правилу

$$S(\theta) = \exp i \int_0^\infty \frac{dt}{t} f(t) \sin\theta t \;\Rightarrow\; R(\theta) = R_0 \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{f(t)(\cos(\theta - i\pi)t - 1)}{2 \operatorname{sh} \pi t}, \tag{34}$$

В модели sh-Гордона имеем

$$R(\theta) = \exp\left(4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{2} \operatorname{sh}\frac{\pi p t}{2} \operatorname{sh}\frac{\pi(p+1)t}{2}}{\operatorname{sh}^2 \pi t} \cos(\theta - i\pi)t\right). \tag{35}$$

Можно проверить, что

$$R(\theta)R(\theta + i\pi) = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{sh}\theta - i\sin\pi p} = 1/f(e^{-\theta}), \qquad f(z) = 1 + \frac{2i\sin\pi p}{z - z^{-1}}. \tag{36}$$

Функция $f(z)$ обладает свойством

$$\frac{f(e^\theta)}{f(e^{-\theta})} = S(\theta). \tag{37}$$

Кроме того, положим

$$\rho = (-R(i\pi)\sin\pi p)^{-1/2}. \tag{38}$$

Тогда

$$F_O(\theta_1, \dots, \theta_n) = \rho^n \prod_{i<j}^{n} R(\theta_i - \theta_j) \cdot J_O(e_1^{\theta}, \dots, e_n^{\theta}), \tag{39}$$

Тогда

$$F_O(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\rho^n\prod_{i<j}^{n}R(\theta_i-\theta_j)\cdot J_O(e_1^{\theta},\ldots,e_n^{\theta}),\tag{39}$$

где $J_O(x_1,\ldots,x_n)$ — рациональные симметричные функции с полюсами в точка $x_i=-x_j$:

$$\operatorname*{Res}_{z'=-z} J_O(z',z,x_1,\ldots,x_n)=-iz\sin\pi p\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}f\left(\frac{z}{x_i}\right)-\prod_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_i}{z}\right)\right)J(x_1,\ldots,x_n).\tag{40}$$

Тогда

$$F_O(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \rho^n \prod_{i<j}^{n} R(\theta_i - \theta_j) \cdot J_O(e_1^\theta, \ldots, e_n^\theta), \tag{39}$$

где $J_O(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональные симметричные функции с полюсами в точка $x_i = -x_j$:

$$\operatorname*{Res}_{z'=-z} J_O(z', z, x_1, \ldots, x_n) = -iz \sin \pi p \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{z}{x_i}\right) - \prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i}{z}\right) \right) J(x_1, \ldots, x_n). \tag{40}$$

Функции

$$J_a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I_n = I_- \sqcup I_+} e^{i\pi a(\#I_- - \#I_+)} \prod_{\substack{i \in I_- \\ j \in I_+}} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right), \tag{41}$$

удовлетворяют (40) и дают формфакторы операторов $e^{\alpha\varphi(x)}/\langle e^{\alpha\varphi(0)}\rangle$, где

$$a = \frac{1}{2} - \alpha\sqrt{\frac{(-p)(1+p)}{2}}.$$