Лекция 2
Флуктуации и теоретико-полевая модель. Гипотеза подобия и критические индексы.

Предыдущую лекцию мы кончили на том, что приближение среднего поля не вполне самосогласованно и вблизи критической точки должна играть значительную роль корреляция между близко лежащими спинами. Приближение среднего поля исходило из того, что уменьшение среднего спина с ростом температуры связано с тем, что спин все сильнее и сильнее «болтается» в среднем поле всей решетки. Но на самом деле он «болтается» скорее в среднем поле ближайших к нему узлов, которое может быть сильнее среднего поля всей решетки, особенно вблизи критической точки, где островки упорядочения могли бы возникать и на фоне в среднем неупорядоченной системы. Давайте разобьем систему на блоки B_i с центрами в точках $\boldsymbol{r}_i$, каждый из которых содержит $N_i \gg 1$ спинов, но все-таки мал по сравнению с образцом. Следовательно в каждый момент времени в такой блок будет обладать собственным значением параметра порядка φ_i. После этого можно просуммировать по спинам внутри блоков при данном φ_i, а оставшееся суммирование заменить на интегрирование по $d\varphi_i$. Раз спины хорошо скоррелированы в довольно больших областях, то набор чисел φ_i можно аппроксимировать непрерывной функцией $\varphi(\boldsymbol{r})$, а интегрирование по $\prod_i \varphi_i$ заменить на континуальное интегрирование по $\mathcal{D}\varphi$. Позднее мы продемонстрируем явно корректность этих предположений на примере двумерной модели Изинга со взаимодействием только ближайших соседей.

Пусть решетка разбита на блоки B_i из N_i узлов. Давайте напишем статсумму:

$$Z = \sum_{\{\boldsymbol{r}\}} e^{-\beta E[\{\boldsymbol{r}\}]} \simeq \int \prod_i d\varphi_i \, e^{-\beta F_i(\varphi_i)} \prod_{i<j} e^{-\beta E_{ij}(\varphi_i,\varphi_j)},$$

где

$$e^{-\beta F_i(\varphi)} = \sum_{\{\sigma_{\boldsymbol{r}}\}_{\boldsymbol{r}\in B_i}} e^{-\beta E(\{\sigma_{\boldsymbol{r}}\}_{\boldsymbol{r}\in B_i})} \delta\left(\varphi - \frac{1}{N_i}\sum_{\boldsymbol{r}\in B_i} \sigma_{\boldsymbol{r}}\right)$$

— статсумма блока с заданным значением параметра порядка, а E_{ij} — подходящая аппроксимация для энергии взаимодействия блоков с данными параметрами порядка. Заменяя кратное интегрирование континуальным, получим

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\beta F[\varphi]}. \tag{1}$$

Здесь $F[\varphi]$ — функционал свободной энергии, который в первом приближении можно разбить на сумму свободных энергий блоков и сумму энергий взаимодействия ближайших блоков. Вблизи критической точки первый вклад легко извлечь из функционала Ландау. Переопределим $A' \to a^d A'$, $B \to a^d B$, $h \to a^d h$, так чтобы они относились к единице объема, а не к узлу решетки. Кроме того, для непрерывного радиус вектора вместо жирного значка $\boldsymbol{r}$ мы будем использовать букву $x = (x^\mu)_{\mu=1}^d$. При этом будем иметь ввиду, что новые переменные уже не привязаны жестко к решетке и мы можем согласованно менять их масштаб. Для аддитивной части получаем

$$F_1[\varphi] = F_0 + \int d^d x \, \left(A'\tau\varphi^2(x) + B\varphi^4(x) - h(x)\varphi(x)\right).$$

Здесь мы также ввели для большей общности неоднородное внешнее поле $h(x)$. Вклад энергии взаимодействия должен быть локален. В лидирующем порядке по градиентам имеем

$$F_2[\varphi] = \int d^d x \, K(\nabla\varphi(x))^2.$$

Итак, получаем

$$F[\varphi|h] = F_0 + \int d^d x \, \left(A'\tau\varphi^2(x) + B\varphi^4(x) + K(\nabla\varphi(x))^2 - h(x)\varphi(x)\right). \tag{2}$$

Статистическая сумма (1) с функционалом свободной энергии (2) имеет вид, характерный для квантовой теории поля в эвклидовом пространстве. Соответствующую статсумму как функционал от внешнего поля h мы будем обозначать как $Z[h]$.

Давайте вычислим парную корреляционную функцию в отсутствие внешнего поля

$$G(x,x') \equiv \langle \varphi(x)\varphi(x') \rangle = \frac{1}{Z[0]}\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x') e^{-\beta F[\varphi|0]} = \frac{1}{Z[0]}\, \frac{\delta^2 Z[h]}{\delta h(0)\delta h(x)}\bigg|_{h=0}. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала случай $\tau > 0$. Если флуктуации достаточно малы, мы можем пренебречь вкладом, содержащим φ^4. Тогда функционал $F[\varphi]$ квадратичен по φ и правая часть (3) вычисляется стандартным способом. Именно, представим квадратичный функционал

$$F[\varphi] \equiv F[\varphi|0] = F_0 + \int d^d x\, \left(A'\tau\varphi^2 + B(\nabla\varphi)^2\right). \tag{4}$$

в виде

$$\beta F[\varphi] = \frac{1}{2}(\mathcal{K}\varphi, \varphi)$$

с некоторой эрмитовой скобкой $(\cdot,\cdot)$ и эрмитовым оператором $\mathcal{K}$. Тогда корреляционная функция является решением уравнения

$$\mathcal{K}G(x,x') = \delta(x-x'),$$

где оператор $\mathcal{K}$ действует на $G(x,x')$ как на функцию переменной x. В однородной системе это уравнение легко решается методом Фурье.

Итак, в нашем случае

$$(\varphi,\chi) = \int d^d x\, \varphi(x)\overline{\chi(x)}, \qquad \mathcal{K} = 2TA'\tau - 2TK\nabla^2.$$

Переходя к Фурье-образу с обычной подстановкой $\nabla \to \mathrm{i}k$ ($\partial_\mu \to \mathrm{i}k_\mu$), получаем

$$G(x,x') = \frac{T_c}{2K}\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{e^{\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2+m^2}, \qquad m^2 = r_c^{-2} = \frac{A'}{K}\tau. \tag{5}$$

Поскольку мы рассматриваем систему вблизи критической точки, температура T заменена здесь на критическую температуру T_c. Величина r_c дает характерный масштаб для корреляционных функций. Чтобы выяснить его смысл, вычислим асимптотику корреляционной функции $G(x,0)$ при больших $|x|$. Для этого вспомним, что радиальная часть лапласиана имеет вид $r^{1-d}\partial_r r^{d-1}\partial_r$. Поэтому уравнение на $G(|x|) = G(x,0)$ принимает вид

$$\frac{1}{r^{d-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{dG}{dr}\right) - m^2 G = 0$$

с условиями

$$\begin{aligned} &G(r) \simeq \frac{T_c}{2K}\begin{cases} \frac{\Gamma(d/2)}{2(d-2)\pi^{d/2}r^{d-2}} & (d\neq 2) \\ -\frac{1}{4\pi}\log r & (d=2) \end{cases} && \text{при } r\to 0, \\ &G(r) \to 0 && \text{при } r \to \infty. \end{aligned}$$

При $d=3$ уравнение допускает простое решение

$$G(r) = \frac{T_c}{2K}\frac{e^{-r/r_c}}{4\pi r}. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что и в общем случае асимптотика содержит множитель e^{-r/r_c}. Таким образом, величина r_c имеет смысл *корреляционной длины.* На расстояниях больше или порядка r_c корреляционные функции спадают экспоненциально. Ниже нас будет интересовать порядок величины коррелятора на масштабах $\sim r_c$. Так как при $r = r_c$ корреляционная длина становится единственным масштабом в интеграле (5), мы имеем

$$G(r_c) \sim \frac{T_c}{K r_c^{d-2}} \sim \frac{T_c}{K}\left(\frac{A'|\tau|}{K}\right)^{\frac{d-2}{2}}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь случай $\tau < 0$. Здесь необходимо найти квадратичную часть функционала свободной энергии вблизи одного из минимумов, например, $\varphi = s(\tau) \equiv \sqrt{\frac{A'(-\tau)}{2B}}$. Положим $\tilde{\varphi} = \varphi - s(\tau)$. Тогда имеем

$$F[\varphi] = F_0 + \int d^d x \left(-\frac{A'^2\tau^2}{2B} + 2A'(-\tau)\tilde{\varphi}^2 + K(\nabla\tilde{\varphi})^2 \right). \tag{8}$$

Этот функционал, по сути, отличается от (4) только заменой $A'\tau \to -2A'\tau$. Поэтому корреляционная функция флуктуаций параметра порядка

$$\langle\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x')\rangle = \langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle - \langle\varphi\rangle^2 = G(|x - x'|), \qquad r_c^{-2} = \frac{2A'(-\tau)}{K}. \tag{9}$$

Соответственно, оценка для $G(r_c)$ совпадает с (7).

Теперь попробуем установить критерий применимости теории Ландау. Потребуем, чтобы парная корреляционная функция на масштабе корреляционной длины при $(T - T_c)/T_c = \tau$ была много меньше квадрата спонтанного значения параметра порядка ниже точки перехода при $(T - T_c)/T_c = -|\tau|$:

$$G(r_c) \ll s^2(-|\tau|). \tag{10}$$

Этот критерий называется *критерием Гинзбурга.* Более явно, теория среднего поля верна, если

$$\frac{T_c}{K}\left(\frac{A'|\tau|}{K}\right)^{\frac{d-2}{2}} \ll \frac{A'|\tau|}{B}$$

или

$$|\tau|^{4-d} \gg \mathsf{Gi} = \frac{T_c^2 B^2}{K^d A'^{4-d}}. \tag{11}$$

Величина Gi называется *числом Гинзбурга.* Если учитывать, что для применимости разложения Ландау требуется малость τ, $|\tau| \ll 1$, то теория Ландау для $d \le 4$ имеет область применимости при

$$\mathsf{Gi} \ll 1.$$

Заметим, что при $d > 4$ приближение среднего поля и теория Ландау обязательно будут верны при достаточно малых τ. Это значит, что никаких существенных флуктуационных эффектов на больших масштабах в системах высокой размерности нет. Обратим внимание, что в теории поля с действием (2) этот случай соответствует неперенормируемой теории.

При $d = 4$ применимость теории Ландау вообще не зависит от τ и определяется, по сути, малостью константы при члене четвертой степени B. На самом деле из-за перенормировок возникают логарифмические по τ выражения, поэтому критерий применимости требует уточнения. Оказывается, что при достаточно малых τ действительно имеются существенные флуктуационные эффекты.

При $d < 4$ теория среднего поля теряет свою применимость при $\tau \sim \mathsf{Gi}$ и флуктуационные эффекты тем сильнее, чем меньше τ, то есть чем больше корреляционная длина. Можно предположить, что при достаточно малых τ ($\tau \ll \mathsf{Gi}$) корреляционная длина вообще становится единственным характерным масштабом системы. Это предположение называется *гипотезой подобия.* Попробуем разобраться в физической основе гипотезы подобия.

Прежде всего, давайте избавимся от лишних параметров. Перенормировкой параметра порядка и внешнего поля

$$\varphi \to (T_c/2K)^{1/2}\varphi$$

давайте добъемся того, чтобы коэффициент при градиентном члене в βF стал равным $1/2$. Тогда «функционал действия» примет вид

$$\mathcal{S}[\varphi|h] \equiv \beta F[\varphi|(2K)^{1/2}h] - \beta F_0 = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 - h(x)\varphi \right), \tag{12}$$

где m^2 определено в (5), а

$$g = \frac{6T_cB}{K^2} \tag{13}$$

Тогда вклад длинноволновых флуктуаций в статсумму будет равен

$$Z[h] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\mathcal{S}[\varphi|h]}. \tag{14}$$

Мы видим, что параметр τ сам по себе, также как и число Гинзбурга не определены. Определена лишь комбинация $\mathsf{Gi}|\tau|^{d-4} = 2g^2/3m^{2(4-d)}$, которая, как и число Гинзбурга, безразмерна. Вспоминая, что масса m есть (в квадратичном приближении) обратная корреляционная длина, можно написать так

$$\mathsf{Gi}|\tau|^{d-4} \sim \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^{4-d},$$

где $r_0 = g^{1/(d-4)}$ — характерный радиус взаимодействия. Соответственно, при $d < 4$ условие Гинзбурга применимости теории среднего поля можно записать как

$$\text{Область среднего поля: } r_c \ll r_0.$$

В этом случае ближние корреляции несущественны и каждый блок спинов, определенный вначале лекции, можно считать находящимся в среднем поле остальных блоков. Если же реализуется обратный предел

$$\text{Флуктуационная область: } r_c \gg r_0,$$

то в на масштабах $r \gg r_0$ (при этом r может быть как меньше, так и больше r_c) масштаб r_0 «забывается». В этом случае мы можем стартовать с безмассовой теории ($r_c = \infty$), отвечающей критической точке, и исследовать ее инфракрасную асимптотику. Эта инфракрасная асимптотика представляет собой масштабно-инвариантную теорию поля. Затем можно получить поправки к этой теории, рассматривая массовый член $\frac{m}{2}\varphi^2$ как возмущение.

Итак, гипотеза подобия утверждает, что все физические величины теории зависят от одного-единственного масштаба r_c. При этом массовый параметр $m \propto \tau$ в функционале действия является с точки зрения теории поля *затравочной* массой и может вовсе не иметь размерности обратной корреляционной длины. Но согласно гипотезе подобия он тоже должен выражаться только через корреляционную длину. Но единственная возможная связь двух размерных величин — это степенной закон. Согласно традиции критические индексы выражаются не через корреляционную длину, а через параметры τ и h. При нулевом поле $h = 0$ и температуре, отличной от критической, для корреляционной длины r_c, удельной теплоемкости c, среднего значения параметра порядка $\langle\varphi\rangle$ и восприимчивости χ имеем

$$r_c \propto |\tau|^{-\nu}, \tag{15}$$
$$c \propto |\tau|^{-\alpha}, \tag{16}$$
$$\langle\varphi\rangle \propto |\tau|^{\beta} \qquad (\tau < 0). \tag{17}$$
$$\chi \propto |\tau|^{-\gamma}, \tag{18}$$

При критической температуре $\tau = 0$ и ненулевом поле величина поля h также связана с r_c степенным законом, поэтому имеем

$$r_c \propto |h|^{-\mu}, \tag{19}$$
$$c \propto |h|^{-\varepsilon}, \tag{20}$$
$$\langle\varphi\rangle \propto |h|^{1/\delta}, \tag{21}$$
$$\chi \propto |h|^{1/\delta-1} \tag{22}$$

Наконец, парная корреляционная функция $G(r)$ в критической точке ($\tau = 0$, $h = 0$) зависит от расстояния тоже степенным образом:

$$G(r) \propto r^{2-d-\eta}. \tag{23}$$

Это соотношение должно выполняться также при $\tau \neq 0$, $h \neq 0$ при условии, что $r \ll r_c$.

Мы ввели целых восемь критических индексов ν, α, β, γ, μ, ε, δ, η. Однако мы еще не использовали гипотезу подобия в полную силу. Сейчас мы увидим, что все эти индексы выражаются через два.

Прежде всего скажем, почему критические индексы совпадают для случаев $\tau > 0$ и $\tau < 0$. Рассмотрим, например, корреляционную длину как функцию двух параметров τ и h. Вне критической точки эта величина меняется непрерывно и должна быть аналитической функцией этих параметров. В силу гипотезы подобия ее можно записать как

$$r_c = \tau^{-\nu} f(k), \qquad k = h\tau^{-\nu/\mu}. \tag{24}$$

В силу (15) (скажем, при $\tau > 0$) и (19) функция $f(k)$ должна быть регулярна и не иметь нуля в точке $k = 0$, соответствующей $h = 0$, и вести себя как $k^{-\mu}$ при $k \to \infty$. Из этого выражения совпадение критических индексов и критических амплитуд во флуктуационной области при разных знаках τ становится очевидной.

Величины K, $\langle\varphi\rangle$, χ должны выражаться через r_c. Например

$$c \propto |\tau|^{-\alpha} \propto r_c^{\alpha/\nu}.$$

Следовательно, при ненулевом внешнем поле

$$c \propto \tau^{-\alpha}(f(k))^{\alpha/\nu} \propto \begin{cases} \tau^{-\alpha}, & h \to 0, \\ \tau^{-\alpha}k^{-\mu\alpha/\nu} = h^{-\mu\alpha/\nu}, & \tau \to 0. \end{cases}$$

Но во втором случае $c \propto h^{-\varepsilon}$, поэтому

$$\varepsilon\nu = \alpha\mu. \tag{25}$$

Аналогично,

$$\beta\mu\delta = \nu, \tag{26}$$

$$(\nu - \gamma\mu)\delta = \nu. \tag{27}$$

Итак, мы вывели три соотношения только из (24).

Теперь давайте используем тот факт, что функционал действия (или свободной энергии) безразмерен. Действительно, раз он стоит в экспоненте, он не должен меняться при одновременном изменении объема и корреляционной длины. Поэтому лагранжиан (или удельная свободная энергия) пропорционален r_c^{-d}. Отсюда, в частности следует, что

$$c \simeq T_c^{-1}\frac{d^2 f}{d\tau^2} \propto r_c^{-d+2/\nu}. \qquad \langle\varphi\rangle h \propto r_c^{-d}.$$

Следовательно,

$$\alpha = 2 - d\nu, \tag{28}$$

$$\delta^{-1} = d\mu - 1 \tag{29}$$

Последнее соотношение связывает размерности парной корреляционной функции $G(r)$ и спонтанной намагниченности $\langle\varphi\rangle$. Из соображений размерности

$$G(r) \propto \left(\frac{r}{r_c}\right)^{2-d-\eta} \qquad \text{при } r \ll r_c.$$

С другой стороны при $\tau < 0$ или $h \neq 0$ имеем

$$G(r) = \langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(0)\rangle = \langle\varphi(0)\rangle^2 \propto r_c^{-2\beta/\nu} \qquad \text{при } r \gg r_c.$$

Отсюда имеем

$$2 - d - \eta = -2\frac{\beta}{\nu}. \tag{30}$$

Мы получили шесть соотношений на восемь индексов. В более стандартном виде они записываются как

$$\mu = \nu/\beta\delta, \tag{31a}$$

$$\varepsilon = \alpha/\beta\delta, \tag{31b}$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \tag{31c}$$

$$\beta\delta = \beta + \gamma, \tag{31d}$$

$$\delta = -\frac{2+d-\eta}{2-d-\eta}, \tag{31e}$$

$$\alpha = 2 - d\nu. \tag{31f}$$

Мы видим, что все критические индексы выражаются через любые два индекса. Из эмпирических данных и численных экспериментов известно, что при $d = 3$ индексы α и η малы. Отсюда можно заключить, что

$$\beta \simeq 1/3, \qquad \gamma \simeq 4/3, \qquad \delta \simeq 5, \qquad \nu \simeq 2/3.$$

Однако хотелось бы научиться вычислять их более точно.

Кроме того, выражения (31) совершенно невозможно запомнить. Должен существовать какой-то более простой принцип для их вывода. В следующей лекции мы увидим, что этот принцип основан на идее возмущения масштабно-инвариантной теории массовым членом.

Задачи

1. Доменная стенка. В области применимости теории Ландау при $\tau < 0$ найти неоднородное распределение параметра порядка $\varphi(x)$, такое что $\varphi(x) \to s(\tau)$ при $x^1 \to \infty$ и $\varphi(x) \to -s(\tau)$ при $x^1 \to -\infty$.

2. Изотропный магнетик ниже точки перехода в магнитном поле на масштабах много больше корреляционной длины описывается свободной энергией

$$F[\boldsymbol{n}] = \int d^3x \, \left(K(\nabla n_i)^2 - M\boldsymbol{H}\boldsymbol{n}\right),$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в трехмерном пространстве, дающий направление спонтанного момента $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{H}$ — магнитное поле. Для удобства будем считать, что поле направлено по оси z. Найдите продольную восприимчивость

$$\chi_\parallel = \frac{\partial M_z}{\partial H},$$

связанную с флуктуациями вектора $\boldsymbol{n}$.