Лекция 7
Двумерная модель Изинга. Точное решение.

Вернемся к трансфер-матрице модели Изинга:

$$T_{\vec{\sigma}}^{\vec{\sigma}'} \equiv T_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_N}^{\sigma'_1\sigma'_2\ldots\sigma'_N} = \prod_{j=1}^{N} e^{K\sigma_j\sigma'_j + L\sigma_j\sigma_{j+1}}. \tag{1}$$

Эту трансфер-матрицу естественно разбить в произведение двух операторов:

$$T = T_0T_1, \qquad (T_0)_{\vec{\sigma}}^{\vec{\sigma}'} = \prod_{i=1}^{N} e^{K\sigma_i\sigma'_i}, \qquad (T_1)_{\vec{\sigma}}^{\vec{\sigma}'} = \prod_{i=1}^{N} e^{L\sigma_i\sigma_{i+1}}. \tag{2}$$

Запишем эти операторы в виде экспонент от матриц Паули. Для T_1 это сделать легко:

$$T_1 = e^{L\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z}. \tag{3}$$

Для T_0 это немного сложнее. Вычислим экспоненту

$$\begin{aligned} e^{L^*\sigma^x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L^*\sigma^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{K^{*2k}}{(2k)!} + \frac{K^{*2k+1}\sigma^x}{(2k+1)!}\right) = \operatorname{ch} L^* + \sigma^x \operatorname{sh} L^* \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} L^* & \operatorname{sh} L^* \\ \operatorname{sh} L^* & \operatorname{ch} L^* \end{pmatrix} = e^{-K} \operatorname{ch} L^* \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 2K}} \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Но T_0 представляет собой тензорное произведение матриц $\begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}$, действующих на каждое пространство V_i. Поэтому

$$T_0 = (2\operatorname{sh} 2K)^{N/2} e^{L^* \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x}. \tag{4}$$

Удобно ввести операторы Онзагера

$$A_0 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x, \qquad A_1 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z. \tag{5}$$

Эти операторы не коммутируют друг с другом и образуют некоторую ассоциативную алгебру, изучая представления которой, можно найти спектр трансфер-матрицы. Именно так действовал Онзагер. Но есть и более простой способ. Заметим, что оператор A_0, тоже можно записать в виде, квадратичном по матрицам Паули:

$$A_0 = -\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i^y\sigma_i^z - \sigma_i^z\sigma_i^y).$$

Заметим, что операторы σ^z, σ^y удовлетворяют алгебре Клиффорда

$$(\sigma^y)^2 = (\sigma^z)^2 = 1, \qquad [\sigma^y, \sigma^z]_+ = 0.$$

Беда в том, что в разных узлах эти операторы коммутируют:

$$[\sigma_i^a, \sigma_j^b] = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Вот тут-то на выручку и приходят фермионы, определенные в предыдущей лекции. Запишем их так:

$$\psi_i^1 = \sigma_i^z\mu_{i-1/2}, \qquad \psi_i^2 = \sigma_i^y\mu_{i-1/2}. \tag{6}$$

Множители $\mu_{i-1/2} = \prod_{j=1}^{i-1} \sigma_j^y$ как раз и заставляют эти переменные антикоммутировать. Удобно ввести операторы

$$a_i = \frac{\psi_i^1 - \mathrm{i}\psi_i^2}{2}, \qquad a_i^+ = \frac{\psi_i^1 + \mathrm{i}\psi_i^2}{2} \tag{7}$$

и
$$\tilde\sigma^{\pm} = \frac{\sigma^z \pm \mathrm{i}\sigma^y}{2}. \tag{8}$$

В этих обозначениях соотношения (6) переписываются в виде

$$a_i = \sigma_i^- \mu_{i-1/2}, \qquad a_i^+ = \sigma_i^+ \mu_{i-1/2}. \tag{9}$$

В этом виде соотношения легко обратить. Действительно

$$a_i^+ a_i = \sigma_i^+ \sigma_i^- = \frac{1-\sigma_i^x}{2},$$

то есть
$$\sigma_i^x = 1 - 2a_i^+ a_i = 1 - 2n_i^f = (-1)^{n_i^f}, \tag{10}$$

где n_i^f — фермионное число в iм узле. Следовательно,

$$\mu_{i-1/2} = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j^f}, \qquad \tilde\sigma^+ = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j^f} a_i^+, \qquad \tilde\sigma^- = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j^f} a_i. \tag{11}$$

Преобразование (6)/(9)/(11) называется *преобразованием Йордана–Вигнера.*

Теперь легко выразить онзагеровские операторы A_0, A_1 через фермионы:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{i=1}^{N} (1 - 2a_i^+ a_i), \\ A_1 &= \sum_{i=1}^{N-1} (a_i^+ - a_i)(a_{i+1}^+ + a_{i+1}^+) - (a_N^+ - a_N)(a_1^+ + a_1)(-1)^{\sum_{i=1}^{N} n_i^f}. \end{aligned} \tag{12}$$

Последний член неудобен, так как нарушает квадратичность этих операторов по фермионам. С другой стороны он представляет собой граничный вклад и в термодинамическом пределе не должен влиять на лидирующую асимптотику свободной энергии. Поэтому, хотя учесть его и не очень сложно, мы не будем углубляться в эти тонкости и положим

$$A_1 = \sum_{i=1}^{N} (a_i^+ - a_i)(a_{i+1}^+ + a_{i+1}^+). \tag{13}$$

Но даже после этого операторы A_0 и A_1 не коммутируют, поэтому диагонализовать их одновременно нельзя. Попробуем сначала воспользоваться трансляционной инвариантностью. Разложим a_i в ряд Фурье,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{\mathrm{i}qn} \eta_q, \qquad q = \frac{2\pi\nu}{N}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, N-1 \bmod N, \tag{14}$$

и подставим в выражения для A_0, A_1. Получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_q (1 - 2\eta_q^+ \eta_q), \\ A_1 &= \sum_q (e^{\mathrm{i}q} \eta_q^+ \eta_{-q}^+ - e^{-\mathrm{i}q} \eta_q \eta_q^+ + e^{\mathrm{i}q} \eta_q^+ \eta_q - e^{-\mathrm{i}q} \eta_q \eta_{-q}). \end{aligned}$$

Мы видим, что в эти операторы волновые числа q и $-q \sim 2\pi - q$ входят парами. Поэтому удобно написать
$$A_i = \sum_{0 \le q < \pi} A_i(q),$$

причем
$$\begin{aligned} A_0(q) &= 2(1 - \eta_q^+ \eta_q - \eta_{-q}^+ \eta_{-q}), \\ A_1(q) &= -A_0(q) \cos q + 2i(\eta_q^+ \eta_{-q}^+ + \eta_q \eta_{-q}) \sin q, \end{aligned}$$

при $q \neq 0$ и

$$A_0(0) = 2(1 - \eta_0^+\eta_0 - \eta_\pi^+\eta_\pi), \qquad A_1(0) = 2(\eta_0^+\eta_0 - \eta_\pi^+\eta_\pi) \qquad \text{для четных } N \text{ и}$$
$$A_0(0) = 1 - 2\eta_0^+\eta_0, \qquad A_1(0) = 2\eta_0^+\eta_0 - 1 \qquad \text{для нечетных } N.$$

Это означает, что

$$T = (2\operatorname{sh} 2K)^{N/2} \prod_{0\le q<\pi} T(q), \qquad T(q) = T_0(q)T_1(q),$$

где

$$T_0(q) = e^{L^* A_0(q)}, \qquad T_1(q) = e^{LA_1(q)}.$$

Все операторы $T(q)$ коммутируют друг с другом, так что задача диагонализации T сводится к диагонализации матриц $T(q)$ размера 4×4. Определим вакуум $|0\rangle_q$ условием $\eta_q|0\rangle = 0$ при всех q. Введем базис

$$|++\rangle = |0\rangle, \quad |-+\rangle = \eta_q^+|0\rangle, \quad |+-\rangle = \eta_{-q}^+|0\rangle, \quad |--\rangle = \eta_q^+\eta_{-q}^+|0\rangle$$

при $q \neq 0$,

$$|++\rangle = |0\rangle, \quad |-+\rangle = \eta_0^+|0\rangle, \quad |+-\rangle = \eta_\pi^+|0\rangle, \quad |--\rangle = \eta_0^+\eta_\pi^+|0\rangle$$

при $q = 0$ и четном N и

$$|+\rangle = |0\rangle, \quad |-\rangle = \eta_0^+|0\rangle.$$

при $q = 0$ и нечетном N. Расположим базисные векторы в порядке: $|++\rangle$, $|--\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ и $|+\rangle$, $|-\rangle$. Тогда матрицы A_i выглядят как

$$A_0(q) = \begin{pmatrix} 2 &&& \\ & -2 && \\ && 0 & \\ &&& 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1(q) = \begin{pmatrix} -2\cos q & -2\mathrm{i}\sin q && \\ 2\mathrm{i}\sin q & 2\cos q && \\ && 0 & 0 \\ && 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

при $q \neq 0$ и

$$A_0(0) = \begin{pmatrix} 2 &&& \\ & -2 && \\ && 0 & \\ &&& 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1(0) = \begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 0 && \\ && 2 & \\ &&& -2 \end{pmatrix} \qquad (N \text{ — четное}),$$
$$A_0(0) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_1(0) = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \qquad (N \text{ — нечетное})$$

при $q = 0$.

Это блочные матрицы по отношению к разложению $\mathbb{C}^4$ в сумму двумерных подпространств $(\mathbb{C}|++\rangle \oplus \mathbb{C}|--\rangle) \oplus (\mathbb{C}|-+\rangle \oplus \mathbb{C}|+-\rangle)$. Тогда в первом подпространстве

$$A_0^{(1)}(q) = A_0^{(1)}(0) = 2\sigma^z, \qquad A_1^{(1)}(q) = 2\sigma^y \sin q - 2\sigma^z \cos q, \qquad A_1^{(1)}(0) = 0.$$

Во втором подпространстве

$$A_0^{(2)}(q) = A_0^{(2)}(0) = 0, \qquad A_1^{(2)}(q) = 0, \qquad A_1^{(2)}(0) = 2\sigma^z.$$

При нечетных N имеем

$$A_0(0) = -A_1(0) = \sigma^z.$$

В таком виде легко взять экспоненты от этих операторов. В первом подпространстве

$$T_0^{(1)}(q) = e^{2L^*\sigma^z} = \operatorname{ch} 2L^* + \sigma^z \operatorname{sh} 2L^* = \begin{pmatrix} e^{2L^*} & \\ & e^{-2L^*} \end{pmatrix},$$
$$T_1^{(1)}(q) = e^{2L(\sigma^y \sin q - \sigma^z \cos q)} = \operatorname{ch} 2L + (\sigma^y \sin q - \sigma^z \cos q)\operatorname{sh} 2L$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2L - \operatorname{sh} 2L \cos q & -\mathrm{i}\operatorname{sh} 2L \sin q \\ \mathrm{i}\operatorname{sh} 2L \sin q & \operatorname{ch} 2L + \operatorname{sh} 2L \cos q \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T^{(1)}(q) = \begin{pmatrix} e^{2L^*}(\operatorname{ch} 2L - \operatorname{sh} 2L \cos q) & -\mathrm{i}e^{2L^*} \operatorname{sh} 2L \sin q \\ \mathrm{i}e^{-2L^*} \operatorname{sh} 2L \sin q & e^{-2L^*}(\operatorname{ch} 2L + \operatorname{sh} 2L \cos q) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_{1,2}(q) = e^{\pm\varepsilon(q)}$, где

$$\operatorname{ch} \varepsilon(q) = \operatorname{ch} 2L^* \operatorname{ch} 2L - \operatorname{sh} 2L^* \operatorname{sh} 2L \cos q. \tag{15}$$

На втором пространстве $T^{(2)}(q) = 1$ за исключением точки $q = 0$, где $T^{(2)}(q) = e^{2L\sigma^z}$ и $\lambda_{3,4}(0) = e^{\pm 2L}$.

Спектр собственных значений трансфер-матрицы удобно записать в виде

$$\Lambda(\vec{\alpha}) = (2 \operatorname{sh} 2K)^{N/2} \exp \sum_q \alpha_q \frac{\varepsilon(q)}{2}. \tag{16}$$

Здесь $\alpha_q = \pm 1$.

Это означает, что имеются фермионные поля ξ_q, ξ_q^+, такие что

$$T = (2 \operatorname{sh} 2K)^{N/2} e^{-\sum_q \varepsilon(q)\left(\xi_q^+ \xi_q - \frac{1}{2}\right)}. \tag{17}$$

Можно показать, что фермионные моды ξ_q, ξ_q^+ получаются из мод η_q, η_q^+ преобразованием Боголюбова.

Наибольшему собственному значению Λ_1 отвечает, очевидно, случай $\alpha_\nu = +$ для всех ν. Следовательно, наибольшее собственное значение равно

$$\Lambda_1 = (2 \operatorname{sh} 2K)^{N/2} e^{\frac{1}{2} \sum_{0 \le q < 2\pi} \varepsilon(q)}, \tag{18}$$

а свободная энергия в термодинамическом пределе имеет вид

$$F = -\frac{T}{2} \log(2 \operatorname{sh} 2K) - T \int_0^\pi \frac{dq}{2\pi} \operatorname{arch}(\operatorname{ch} 2L^* \operatorname{ch} 2L - \operatorname{sh} 2L^* \operatorname{sh} 2L \cos q). \tag{19}$$

Точка фазового перехода связана с особенностью свободной энергии. Если

$$\operatorname{ch} 2L^* \operatorname{ch} 2L - \operatorname{sh} 2L^* \operatorname{sh} 2L \equiv \operatorname{ch} 2(L^* - L) > 1,$$

подынтегральное выражение не имеет особенностей и функция F аналитична. Однако при $L^* \to L$ подынтегральное выражение ведет себя как $|L^* - L|$ при $q = 0$. Это может свидетельствовать об особенности свободной энергии при

$$L^* = L,$$

то есть на самодуальной линии.

Нетрудно проверить, что вблизи самодуальной кривой

$$L^* - L = \left(\frac{J}{T_c} + \frac{I}{T_c} \operatorname{sh} \frac{2J}{T_c}\right) \tau.$$

Поэтому величину $L^* - L$ можно считать мерой τ. Рассмотрим теперь спектр возбуждений в окрестности критической области

$$L^* - L \ll 1 \tag{20}$$

при малых волновых векторах $q \ll 1$. Нетрудно получить следующую формулу:

$$E(q) = \sqrt{m^2 + q^2}, \qquad E(q) = \frac{\varepsilon(q)}{\operatorname{sh} 2L}, \qquad m = \frac{2(L^* - L)}{\operatorname{sh} 2L}. \tag{21}$$

Если мы определим гамильтониан как

$$H = -\frac{1}{\operatorname{sh} 2L} \log \frac{T}{(2 \operatorname{sh} 2K)^{N/2}}, \tag{22}$$

то мы имеем стандартный релятивистский спектр возбуждений. Отсюда мы заключаем, что

$$r_c = m^{-1} \propto \tau^{-1},$$

то есть критические индексы

$$\nu = 1, \qquad \alpha = 0. \tag{23}$$

Равенство α нулю не означает, что нет никакой особенности в зависимости теплоемкости от температуры. Можно показать, что особенность свободной энергии $\propto (L^* - L)^2 \log |L^* - L| \propto (T - T_c)^2 \log |T - T_c|$, т. е. она очень слабая и существенно проявляется лишь в теплоемкости $C \propto \log |T - T_c|$.

Что касается размерностей полей $\sigma(x)$, $\mu(x)$, то мы обсудим их в другой раз.

Задачи

1. Вывести формулы (12).

2. Найти преобразование Боголюбова

$$\eta_q = A_q \xi_q + B_q \xi^+_{-q}, \qquad |A_q|^2 + |B_q|^2 = 1, \qquad A_q B_{-q} + A_{-q} B_q = 0,$$

приводящее к формуле (17) для трансфер-матрицы.

3. Покажите, что сингулярная часть свободной энергии двумерной модели Изинга пропорциональна $(T - T_c)^2 \log |T - T_c|$.