Лекция 9

$O(2)$-модель в двух измерениях и переход Березинского–Костерлица–Таулеса.

В этих лекциях мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве с действием[1]

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2T}\int d^dx\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \tag{1}$$

которые называются моделями $\boldsymbol{n}$-поля или $O(N)$-моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$-симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, поля в которых лежат на многообразиях.

В прошлой лекции мы говорили, что в случае $d = 2$ в системе с непрерывной симметрией отсутствует спонтанное упорядочение, поскольку корреляционные функции поперечных (голдстоуновских) полей в этом случае растут логарифмически на больших масштабах и размывают локально скоррелированные значения параметра порядка. Мы также задали вопрос о том, означает ли это отсутствие фазового перехода в двумерных системах. В этой лекции мы увидим, что, несмотря на отсутствие упорядочения, фазовый переход в некоторых случаях имеет место.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$-модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos\varphi, \qquad n_2 = \sin\varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2T}\int d^2x\,(\partial_\mu\varphi)^2, \tag{2}$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \tag{3}$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Эту модель можно рассматривать как непрерывный аналог нескольких микроскопических моделей. Самой простой из них является модель классического двумерного плоского магнетика (непрерывна XY-модель). Пусть в узлах $\boldsymbol{r} = (ij)$ квадратной решетки находятся единичные классические спины $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{r}}$ на плоскости. Система описывается статсуммой

$$Z = \int \prod_{(ij)} dn\, e^{\beta\sum_{(ij)}(\boldsymbol{n}_{ij}(\boldsymbol{n}_{i+1,j}+\boldsymbol{n}_{i,j+1})-2)} = \prod_{ij}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi_{ij}}{2\pi}\, e^{\beta\sum_{(ij)}(\cos(\varphi_{ij}-\varphi_{i+1,j})+\cos(\varphi_{ij}-\varphi_{i,j+1})-2)}. \tag{4}$$

В пределе низких температур (слабой связи) косинус можно разложить в ряд и написать:

$$Z \simeq \prod_{ij}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi_{ij}}{2\pi}\, e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{(ij)}\left((\varphi_{ij}-\varphi_{i+1,j})^2+(\varphi_{ij}-\varphi_{i,j+1})^2\right)} \simeq \int D\varphi\, e^{-S[\varphi]}.$$

Здесь разности вида $\varphi_{\boldsymbol{r}} - \varphi_{\boldsymbol{r}'}$ следует понимать как наименьшую разность по модулю 2π. Например если $\varphi_{\boldsymbol{r}}$ немного больше $-\pi$, а $\varphi_{\boldsymbol{r}'}$ немного меньше π, то разность надо заменять на $\varphi_{\boldsymbol{r}} - \varphi_{\boldsymbol{r}'} + 2\pi$.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)}e^{in\varphi(y)}\rangle = e^{-mn\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle} \sim |x-y|^{\frac{T}{2\pi}m^2}\delta_{|m|,|n|}, \qquad m,n\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Это значит, что конформные размерности равны

$$d_{e^{im\varphi}} = \frac{T}{4\pi}m^2, \qquad d_{\boldsymbol{n}} = \frac{T}{4\pi}. \tag{6}$$

На самом деле это совсем не так и результат существенно зависит от значения константы T. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{7}$$

[1] Константа связи T в этой формуле равна φ_s^{-2}, если мы стартуем с теории Ландау, но может действиетльно оказаться температурой (см. ниже).

в эвклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{\vec{q}\vec{x}}(x) = \sum_{a=1}^{n} q_a \operatorname{Im}\log(z - z_a) = \sum_{a=1}^{n} \frac{q_a}{2i} \log \frac{z - z_a}{\bar{z} - \bar{z}_a}, \qquad q_a \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

где

$$z = x^1 + ix^2,$$
$$\bar{z} = x^1 - ix^2.$$

Эти решения, хотя и имеют сингулярности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a. В простейшем случае $n = 1$ решение в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ имеет вид

$$\varphi_{q_1 x_1}(x) = q_1 \theta.$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (8):

$$\begin{aligned} S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{2}{T} \int d^2x\, \partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}}\, \bar{\partial}\varphi_{\vec{q}\vec{x}} \\ &= \frac{1}{2T} \int d^2x \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b)} \\ &= \frac{1}{2T} \left(\sum_a q_a^2 \int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} + \sum_{a<b} q_a q_b \int d^2x\, \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2}. \right) \end{aligned}$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших, и на малых масштабах:

$$\int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} \simeq 2\pi \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{r} = 2\pi \log \frac{R}{r_0},$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Чтобы его взять, удобно считать, что $x_a = y_a = 0$, $x_b = X$, $y_b = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\int d^2x\, \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \\ &\qquad = 2 \int d^2x\, \frac{x(x - X) + y^2}{(x^2 + y^2)((x - X)^2 + y^2)} = 2 \int_0^1 dt \int d^2x\, \frac{x(x - X) + y^2}{(x^2 + y^2 + t(X^2 - 2xX))^2} \\ &\qquad = |x \to x + tX| = 2 \int_0^1 dt \int d^2x\, \frac{x^2 + y^2 + (2t - 1)xX + t(1 - t)X^2}{(x^2 + y^2 + t(1 - t)X^2)^2} \\ &\simeq 4\pi \int_0^1 dt \int_0^R dr\, \frac{r(r^2 + t(1 - t)X^2)}{(r^2 + t(1 - t)X^2)^2} = 2\pi \int_0^1 dt \int_0^{R^2} \frac{d\xi}{\xi + t(1 - t)X^2} = 2\pi \int_0^1 dt \log \frac{R^2}{t(1 - t)X^2} \\ &\qquad = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} - 4\pi \int_0^1 \log t = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} + 4\pi \end{aligned}$$

Последним слагаемым можно пренебречь. Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$\begin{aligned} S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{1}{2T} \left(\pi \sum_a q_a^2 \log \frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi \sum_{a<b} q_a q_b \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2T} \left(\sum_a q_a \right)^2 \log R^2 - \frac{\pi}{2T} \sum_a q_a^2 \log r_0^2 + \frac{1}{2T} \sum_{a<b} q_a q_b\, 2\pi \log \frac{1}{|z_a - z_b|^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Первый член стремится к бесконечности, когда размер системы велик. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие

$$\sum_a q_a = 0. \tag{10}$$

Второе слагаемое ультрафиолетово расходится. Если мы рассматриваем $O(2)$-модель как предел большой массы μ для разложения Ландау, описанного в предыдущей лекции, то величина r_0 будет конечной и точное значение будет зависеть от структуры кора вихрей. По порядку величины

$$r_0 \sim \mu^{-1}.$$

Давайте теперь попробуем написать функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \int D\varphi\, e^{-S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]-(J,\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{11}$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (9) не меняется при заменах $z_a \leftrightarrow z_b$, $q_a \leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1,\dots,q_n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{T} \int d^2x\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\mu\varphi_{\vec{q}\vec{x}}.$$

Первый член дается выражением (9). Интеграл в последнем члене равен

$$\int d^2x\, \partial_\mu\varphi\, \partial^\mu \sum_{a=1}^{n} \frac{q_a}{2i} \log\frac{z-z_a}{\bar{z}-\bar{z}_a} = \sum_{a=1}^{n} q_a \int d^2x\, \partial_\mu\varphi\, \partial^\mu \frac{1}{2i} \log\frac{z-z_a}{\bar{z}-\bar{z}_a}.$$

Далее

$$\frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar{z}} = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}$$

и

$$\partial_\mu \frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar{z}} = -\epsilon_{\mu\nu}\frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \log\frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int d^2x\, \partial_\mu\varphi\partial^\mu \sum_{a=1}^{n} \frac{q_a}{2i} \log\frac{z-z_a}{\bar{z}-\bar{z}_a} &= \sum_a q_a \int d^2x\, \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\, \partial_\nu \log\frac{1}{|z-z_a|^2} \\
&= -\sum_a q_a \int d^2x\, \epsilon^{\mu\nu}\varphi\, \partial_\mu\partial_\nu \log\frac{1}{|z-z_a|^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{T}\sum q_a^2 - 2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{T}q_a q_b}\, e^{-(J,\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{12}$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi\, e^{-S[\varphi]-(J,\varphi)}. \tag{13}$$

Без потери общности можно рассмотреть источники J вида

$$J_{\vec{J}\vec{y}}(x) = -i\sum_{j=1}^{k} J_j \delta(x-y_j). \tag{14}$$

Тогда

$$Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{T}\sum_a q_a^2 - \frac{T}{4\pi}\sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{T}q_a q_b}$$

$$\times \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j/2} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{2\frac{T}{4\pi} J_j J_{j'}}, \tag{15}$$

где $w_j = y_j^1 + iy_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при низких температурах плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при высоких температурах имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского–Костерлица–Таулеса (ВКТ)*.

Естественно, что мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода ВКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри начинают удерживаться в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного, начинают инфракрасно сходиться при больших n. Кроме того, из-за электронейтральности

$$\sum_{a<b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left(\sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{T} \left(-\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $T < T_{\text{ВКТ}}$, причем

$$T_{\text{ВКТ}} = \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

При этом корреляционные функции имеют степенной вид, а размерности физических полей даются формулами (6). Мы видим, что корреляционные функции в этой фазе убывают сравнительно медленно и, хотя спонтанная «намагниченность» и равна нулю, система обладает определенной *поперечной жесткостью*. Жесткая фаза демонстрирует критическое поведение с критическими индексами, непрерывно зависящими от температуры. Отметим, что температура $T_{\text{ВКТ}}$ конечна в единицах решеточной модели (4).

При $T > T_{\text{ВКТ}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0, так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом коре вихря. Заметим, что условие (16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{T}\sum q_a^2 - 2n}$ для системы простых вихрей $q = \pm 1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0, корреляционная длина пропорциональна r_0, и, таким образом, даже у "идеальной" $O(2)$-модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (15) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \tag{17}$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \tag{18}$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \phi \tag{19}$$

или

$$\partial\tilde{\phi} = \partial\phi, \qquad \bar{\partial}\tilde{\phi} = -\bar{\partial}\phi. \tag{20}$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на уравнениях движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_L(z)$ и $\phi_R(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_L(z) - \phi_R(\bar{z}). \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle\phi_L(z)\phi_L(z')\rangle_0 = \log\frac{R}{z-z'}, \qquad \langle\phi_R(\bar{z})\phi_R(\bar{z}')\rangle_0 = \log\frac{R}{\bar{z}-\bar{z}'}, \qquad \langle\phi_L(z)\phi_R(\bar{z}')\rangle_0 = 0 \tag{22}$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{L,R}} \to r_0^{\alpha^2/2} e^{i\alpha\phi_{L,R}}, \qquad e^{i\alpha\phi} \to r_0^{\alpha^2} e^{i\alpha\phi}, \qquad e^{\beta\tilde{\phi}} \to r_0^{-\beta^2} e^{\beta\tilde{\phi}}. \tag{23}$$

Тогда экспоненциальные операторы перестают быть безразмерными и приобретают размерность $d = \alpha^2/2$, α^2 и $-\beta^2$ соответственно. Эта размерность совпадает с *масштабной размерностью* этих операторов. По определению, оператор O обладает масштабной размерностью d_O, если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O(x) \to s^{d_O} O(sx)$$

во всех операторах.

Корреляционные функции экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle e^{i\alpha_1\phi_L(z_1)}\dots e^{i\alpha_n\phi_L(z_n)}\rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_a \alpha_a\right)^2} \prod_{a<b}(z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle e^{i\alpha_1\phi_R(\bar{z}_1)}\dots e^{i\alpha_n\phi_R(\bar{z}_n)}\rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_a \alpha_a\right)^2} \prod_{a<b}(\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\beta_j\tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{n} e^{i\alpha_a\phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &\qquad = \prod_{a<b}|z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'}|w_j - w_{j'}|^{2\beta_a\beta_b} \prod_{a,j}\left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a}\right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum\alpha_a = 0, \\ 0, & \text{в пр. сл.} \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в подынтегральным выражением в (15) при

$$\begin{aligned} \alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{T}}\, q_a, \\ \beta_j &= \sqrt{\frac{T}{4\pi}}\, J_j, \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда получаем

$$Z[J_{\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{T}\sum q_a^2 + \frac{T}{4\pi}\sum J_j^2 - 2n} \int d^2x_1\dots d^2x_n \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{T}{4\pi}}\,J_j\tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{n} e^{i\sqrt{\frac{\pi}{T}}\,q_a\phi(x_a)} \right\rangle_0. \tag{27}$$

Отсюда очевидно следует, что

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{T}{4\pi}}\tilde{\phi}(x). \tag{28}$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q| > 1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ вихрей заряда 1. Тогда, исключив несущественный множитель $r_0^{\frac{T}{4\pi}\sum J_j^2}$, производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{T}-2)}}{(2n)!}\binom{2n}{n}\int d^2x_1\ldots d^2x_{2n}\left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{T}{4\pi}}J_j\tilde{\phi}(y_j)}\prod_{a=1}^{n} e^{i\sqrt{\frac{\pi}{T}}\phi(x_a)}\prod_{a=n+1}^{2n} e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{T}}\phi(x_a)}\right\rangle_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{T}-2)}}{(2n)!}\int d^2x_1\ldots d^2x_{2n}\left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{T}{4\pi}}J_j\tilde{\phi}(y_j)}\prod_{a=1}^{2n}\left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{T}}\phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{T}}\phi(x_a)}\right)\right\rangle_0 \\
&= \left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{T}{4\pi}}J_j\tilde{\phi}(y_j)}\exp\left(2r_0^{\frac{\pi}{T}-2}\int d^2x\,\cos\sqrt{\frac{\pi}{T}}\phi(x)\right)\right\rangle_0 \\
&= \int D\phi\, e^{-S_{\mathrm{SG}}[\phi]}\prod_{j=1}^{k} e^{i\sqrt{\frac{T}{4\pi}}J_j\tilde{\phi}(y_j)},
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$S_{\mathrm{SG}}[\phi] = \int d^2x\left(\frac{(\partial_\mu\phi)^2}{8\pi} - \lambda\cos\beta\phi\right) \tag{30}$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{T}}, \qquad \lambda = 2r_0^{\frac{\pi}{T}-2}. \tag{31}$$

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущенных свободный безмассовый бозон. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\mathrm{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\mathrm{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\mathrm{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\mathrm{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода Костерлица–Таулеса.

Пояснение

Это пояснение касается определения экспоненциальных полей. Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_L(z)$. Прежде всего, введем нормальное произведение полей $:\ldots:$ с помощью рекурсионного соотношения

$$:\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n):\varphi(z) = :\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n)\varphi(z): + \sum_{i=1}^{n}:\varphi(z_1)\ldots\overset{\hat{i}}{\ldots}\varphi(z_n):\langle\varphi(z_i)\varphi(z)\rangle$$

с начальным условии

$$:1: = 1.$$

Здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$:\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_m)::\varphi(w_1)\ldots\varphi(w_n): =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le m\\ 1\le j_1,\ldots,j_k\le n}} :\varphi(z_1)^{\widehat{i_1}\ldots\widehat{i_k}}\varphi(z_m)::\varphi(w_1)^{\widehat{j_1}\ldots\widehat{j_k}}\varphi(w_n):\prod_{l=1}^{k}\langle\varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l})\rangle.$$

Вернемся к операторным экспонентам. Интересны три разновидности таких экспонент. Во-первых, это формальные экспоненты $[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\text{nonren}}$. Во-вторых, это экспоненты, переопределенные соотношениями (23), $[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\text{ren}}$. И, в-третьих, это нормальные экспоненты $:e^{i\alpha\varphi(z)}:$.

Операторные произведения формальных экспонент

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{nonren}}[e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{nonren}} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]}[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{nonren}}$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{nonren}}\ldots[e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\text{nonren}}\rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i\alpha_i^2}\prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j}$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Например,

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}:\rangle = 1.$$

Проблема в том, что корреляторы нормальных экспонент явно содержат инфракрасную обрезку. Действительно, раскладывая экспоненты в ряды, можно убедиться, что

$$[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\text{nonren}} = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}:.$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}::e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = \left(\frac{z_1-z_2}{R}\right)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}:.$$

Корреляционные функции имеют вид

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\rangle = \prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j}.$$

Все эти выражения явно содержат параметр инфракрасной обрезки R. Давайте *определим* перенормированные экспоненты условием

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}]_{\text{ren}} \stackrel{\text{def}}{=} R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i\alpha_i\right)^2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}:.$$

В случае $n=1$ это определение совпадает с определением (23). Для таких перенормированных экспонент операторное произведение хорошо определено и не содержит инфракрасной обрезки:

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}}[e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{ren}} = (z_1-z_2)^{\alpha_1\alpha_2}[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{ren}}.$$

Корреляционная функция формально содержит инфракрасную обрезку:

$$\langle[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}}\ldots[e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\text{ren}}\rangle = R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i\alpha_i\right)^2}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}.$$

Однако это выражение имеет хороший предел при $R\to\infty$:

$$\langle[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}}\ldots[e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\text{ren}}\rangle = \begin{cases}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i\alpha_i=0\\ 0, & \text{если } \sum_i\alpha_i\neq 0\end{cases}.$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}]_{\text{ren}}\rangle = \begin{cases}1, & \text{если } \sum_i\alpha_i=0\\ 0, & \text{если } \sum_i\alpha_i\neq 0\end{cases}.$$

Задачи

1. Вывести формулу (17).

2. Показать, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R.

3. Вывести формулы (24).