Лекция 13
$O(N)$-модель: $1/N$-разложение

Рассмотрим общую $O(N)$-модель в пространстве Минковского:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1. \tag{1}$$

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\boldsymbol{n},\omega] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - \omega(\boldsymbol{n}^2-1)), \tag{2}$$

где вектор $\boldsymbol{n}$ теперь пробегает любые значения в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega\, D\boldsymbol{n}\, e^{iS[\boldsymbol{n},\omega]+ig^{-1/2}\int d^2x\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{n}}. \tag{3}$$

Интеграл по $\boldsymbol{n}$ — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\boldsymbol{n},\omega] + ig^{-1/2}\int d^2x\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega)\delta_{ij}\frac{n_j}{g^{1/2}}\right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}}\right) + i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega\,(\det(\partial_\mu^2+\omega))^{-N/2}\exp\left(i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right),$$

где $G(x,x'|\omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x,x'|\omega) = \delta(x-x'). \tag{4}$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega\,\exp\left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right), \tag{5}$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2+\omega) + \int d^2x\,\frac{\omega}{2g}. \tag{6}$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N\to\infty$. Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{ const } = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2+\omega_0) &= V\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0 - k^2 - i0)\\
&= iV\int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0+k^2)\\
&\frac{iV}{2\pi}\int_0^\Lambda dk\,k\log(\omega_0+k^2) = \frac{iV}{4\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2} du\,\log u = \frac{iV}{4\pi}\left[u\log\frac{u}{e}\right]_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2}\\
&= \frac{iV}{4\pi}\left((\omega_0+\Lambda^2)\log\frac{\Lambda^2}{e} - \omega_0\log\frac{\omega_0}{e}\right)\\
&= \frac{iV}{4\pi}\left(\omega_0\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2\log\frac{\Lambda^2}{e}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под логарифмом мы пренебрегли ω_0 по сравнению с Λ. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V\left(-\frac{N}{8\pi}\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g}\right).$$

Отсюда находим

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{Ng}\right). \tag{8}$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \to \infty$ следует устремить к нулю и g, причем таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d\log\Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{4\pi}g^2. \tag{9}$$

Важно то, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2}\rho(x)$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2}\rho(x)$:

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}[\omega_0 + (2/N)^{1/2}\rho] &= \text{const } + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log\Big(1 + (2/N)^{1/2}\rho(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}\Big) \\
&= \text{const } + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(1 + i(2/N)^{1/2}\rho G) \\
&= \text{const } - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\operatorname{tr}(\rho G)^n. \\
&= \text{const } - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\int d^{2n}x\,\rho(x_1)G(x_1,x_2)\ldots\rho(x_n)G(x_n,x_1). \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь $G(x_1,x_2) = G(x_1,x_2|m^2)$. Член с $n = 1$, линейный по ρ, опущен ввиду предположения, что эффективное действие имеет минимум при $\rho = 0$. Квадратичный член в действии имеет вид

$$\frac{i}{2}\int d^2x_1\,d^2x_2\,\rho(x_1)G(x_1,x_2)\rho(x_2)G(x_2,x_1).$$

Поэтому пропагатор $D(x_1,x_2)$ поля $\rho(x)$ есть оператор, обратный к

$$D^{-1}(x_1,x_2) = G(x_1,x_2)G(x_2,x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель $(2/N)^{1/2}$ перед ρ. Он позволяет избавиться от коэффициента $2/N$ в пропагаторе $D(x_1,x_2)$.

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k) = \overset{k}{\text{- - - - - - - - - - - -}} = -\left(\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)}\right)^{-1}. \tag{11}$$

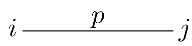
Кроме того, оператор $G(x,x'|\omega)$, входящий в (5), тоже следует разложить по $\rho(x)$:

$$G[m^2 + (2/N)^{1/2}\rho] = \frac{1}{G^{-1}[m^2] + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\tfrac{2}{N}\right)^{n/2}G(\rho G)^n$$

$$G(x_1,x_2|m^2 + (2/N)^{1/2}\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{2}{N}\right)^{n/2}\int d^{2n-2}y\,G(x_1,y_1)\rho(y_1)G(y_1,y_2)\ldots\rho(y_n)G(y_n,x_2).$$

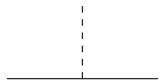
Изобразим $G(x_1, x_2)$ сплошной линией:

$G_{ij}(p) =$



$$= G(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{12}$$

Если еще ввести вершину



$$= -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}, \tag{13}$$

Можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1) Диаграмма состоит из пунктирных линий (11), сплошных линий (12) и вершин (13).
2) Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2} n_i$.
3) Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи g. Порядок диаграммы по $1/N$ равен $\frac{1}{2}V - L$, где V — число вершин, а L — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи g, массой m и параметром обрезания Λ можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке $1/N$ можно получить, что

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g}\right). \tag{14}$$

Давайте теперь попробуем вычислить S-матрицу $O(N)$-модели. Разберемся сначала с кинематикой. У нас имеется N частиц массы m. Пусть две такие частицы с быстротами θ_1 и θ_2 рассеиваются друг на друге, образуя две новые частицы той же массы с быстротами θ_1' и θ_2'. Тогда

$$m \operatorname{ch}\theta_1 + m \operatorname{ch}\theta_2 = m \operatorname{ch}\theta_1' + m \operatorname{ch}\theta_2',$$
$$m \operatorname{sh}\theta_1 + m \operatorname{sh}\theta_2 = m \operatorname{sh}\theta_1' + m \operatorname{sh}\theta_2'.$$

Это уравнение имеет только два решения: $\theta_1' = \theta_1$, $\theta_2' = \theta_2$ и $\theta_1' = \theta_2$, $\theta_2' = \theta_1$. Матрицу рассеяния двух частиц в две можно представить в виде

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1, \theta_2; \theta_1', \theta_2') = (2\pi)^2 \delta(p_1' - p_1)\delta(p_2' - p_2) S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p_2' - p_1)\delta(p_1' - p_2) S_{ij}^{j'i'}(\theta_1 - \theta_2).$$

Чтобы правильно нормировать, нужно преобразовать дельта-функции к стандартному виду дельта-функции по двумерному импульсному пространству. Для, например, первого члена имеем

$$(2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{ch}\theta_1 \operatorname{ch}\theta_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2).$$

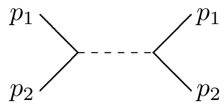
Следовательно, в стандартных обозначениях

$$M_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = 4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2) S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2).$$

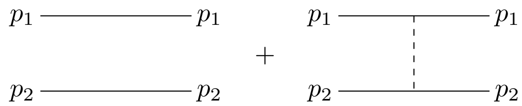
Условие совместимости с $O(N)$-симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j} S_3(\theta). \tag{15}$$

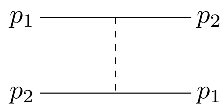
В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, S_1(\theta) =$ 

,

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, S_2(\theta) =$ 

,

$4m^2 \operatorname{sh}\theta\, S_3(\theta) =$ 

.

Для вычисления этих диаграмм нам понадобится явная формула для $D(k)$. Она имеет вид

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}} \log \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}-1}. \tag{16}$$

Эта громоздкая формула становится вполне элементарной в параметризации

$$k^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \tag{17}$$

Заметим, что угол θ в этой параметризации совпадает с $\theta_1 - \theta_2$ в случае диаграммы для S_3. Имеем

$$D(k) = 4\pi i m^2 \cdot \frac{\operatorname{sh}\theta}{\theta}. \tag{18}$$

Подставляя эти выражения в диаграммы, получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh}\theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \tag{19}$$

Литература

[1] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
[2] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
[3] А. М. Цвелик, Квантовая теория поля в теории конденсированного состояния.

Задачи

1. Докажите, что

$$e^{iS[\boldsymbol{n}]}\delta(\boldsymbol{n}^2 - 1) = \int D\omega\, e^{iS[\boldsymbol{n},\omega]}.$$

2. Получите (16).

3. Модель Гросса–Невё для N-компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ-матрицами, см. также лекцию 11 вводного курса) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left(\frac{i}{2}\bar\psi_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{g}{8}(\bar\psi_i\psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar\psi = \psi^T\gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp\left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$