Лекция 20
Конформные семейства и конформные блоки

Пусть $\{\phi_I(x)\}$ — полный базис локальных полей в теории. Обычно предполагается, что произведение двух полей $\phi_I(x')\phi_J(x)$ можно разложить по этому базису:

$$\phi_I(x')\phi_J(x) = \sum_K C^K_{IJ}(x', x)\phi_c(x). \tag{1}$$

Функции $C^K_{IJ}(x', x)$ называются *структурными функциями.* В случае конформной теории поля и базиса, состоящего из полей фиксированных размерностей, имеем

$$\phi_I(z', \bar z')\phi_J(z, \bar z) = \sum_K (z' - z)^{\Delta_K - \Delta_I - \Delta_J}(\bar z' - \bar z)^{\bar\Delta_K - \bar\Delta_I - \bar\Delta_J} C^K_{IJ}\phi_K(x). \tag{2}$$

Теперь операторная алгебра описывается *структурными константами* C^K_{IJ}.

Структурные функции тесно связаны с корреляционными функциями в системе. Начнем с двухточечной корреляционной функции. Она просто выражается через одноточечные.

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\rangle = \sum_K C^K_{IJ}(x_1, x_2)\langle\phi_K(x)\rangle.$$

В конформной теории поля ненулевое вакуумное среднее на плоскости может иметь только поле конформной размерности 0. Предположим, что такое поле единственно и представляет собой единичное поле **1**. Поэтому в этом случае имеем

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\rangle = \frac{C^{\mathbf{1}}_{IJ}}{z_{12}^{\Delta_I + \Delta_J}\bar z_{12}^{\bar\Delta_I + \bar\Delta_J}}, \qquad x_{12} = x_1 - x_2.$$

Трехточечная корреляционная функция равна

$$\langle\phi_I(x_1)\phi_J(x_2)\phi_K(x_3)\rangle = \sum_M \frac{C^{\mathbf{1}}_{IM}C^M_{JK}}{z_{13}^{\Delta_I + \Delta_M} z_{23}^{\Delta_J + \Delta_K - \Delta_M}\bar z_{13}^{\bar\Delta_I + \bar\Delta_M}\bar z_{23}^{\bar\Delta_J + \bar\Delta_K - \bar\Delta_M}}.$$

Здесь мы сначала «слили» поля ϕ_J и ϕ_K и разложили результат по полям ϕ_M, а затем слили ϕ_I с ϕ_M. Мы могли бы сливать поля в другом порядке, например, сначала ϕ_I с ϕ_J, а потом ϕ_K, и получили бы другое выражение. Условие согласованности операторных разложений состоит в том, что все такие слияния должны дать один и тот же результат. Наиболее общее условие слияния получается при рассмотрении четырехточечных функций, но прежде чем их рассматривать, давайте воспользуемся тем, что мы знаем о конформной симметрии в двумерном пространстве, чтобы переписать разложение (2) более детально.

Мы уже знаем, что поля в конформной теории классифицируются представлениями двух копий алгебры Вирасоро. Поэтому естественно попробовать разбить сумму в сумму по *конформным семействам.* Пусть $\{\phi_i(x)\}$ — совокупность первичных полей в теории.[1] *Потомками* или *вторичными полями* мы будем называть операторы, получаемые действием генераторов алгебры Вирасоро на первичные поля, то есть линейные комбинации операторов вида

$$(\mathcal{L}_{-n_1}\ldots\mathcal{L}_{-n_k}\bar{\mathcal{L}}_{-m_1}\ldots\bar{\mathcal{L}}_{-m_l}\phi_i)(x),$$

Здесь $\mathcal{L}_n$ определены равенством

$$(\mathcal{L}_n\phi)(z) = \oint_{C_z}\frac{dw}{2\pi\mathrm{i}}(w - z)^{n+1}T(w)\phi(z). \tag{3}$$

Операторы $\bar{\mathcal{L}}_n$ определяются аналогично.

[1] Все первичные поля не образуют пространства. Пространство образуют только первичные поля данной размерности. Указанное множество представляет собой объединение базисов этих пространств.

Пространство всех потомков поля $\phi_i(x)$ мы будем называть его конформным семейством $[\phi_i]$. Тогда произведение первичных полей можно разложить так

$$\phi_i(z',\bar{z}')\phi_j(z,\bar{z}) = \sum_k (z'-z)^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j}(\bar{z}'-\bar{z})^{\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j} C_{ij}^k(\mathcal{L}_{ij}^k(z'-z)\bar{\mathcal{L}}_{ij}^k(\bar{z}'-\bar{z})\phi_k)(z,\bar{z}), \tag{4}$$

где $L_{ij}^k(z)$ — операторы, действующие на пространстве операторов, имеющие вид разложения по степеням z:

$$\mathcal{L}_{ij}^k(z) = 1 + z\beta_{ij}^k(1)\mathcal{L}_{-1} + z^2\Big(\beta_{ij}^k(2)\mathcal{L}_{-2} + \beta_{ij}^k(1,1)\mathcal{L}_{-1}^2\Big) + O(z^3). \tag{5}$$

Аналогично определяются операторы $\bar{\mathcal{L}}_{ij}^k(\bar{z})$.

Важный факт состоит в том, что коэффициенты $\beta_{ij}^k(n_1,\ldots,n_\kappa)$ однозначно определяются конформной симметрией. Давайте убедимся в этом на примере первых нескольких коэффициентов. Для этого поместим разложение (4) в точку 0 и подействуем на вакуум. Тогда получим

$$\phi_i(z,\bar{z})|j\rangle = \sum_k C_{ij}^k L_{ij}^k(z)\bar{L}_{ij}^k(\bar{z})|k\rangle. \tag{6}$$

Здесь $|i\rangle = \phi_i(0,0)|0\rangle$, а операторы $L_{ij}^k(z)$, $\bar{L}_{ij}^k$ определяются через L_n, $\bar{L}_n$ так же, как $\mathcal{L}_{ij}^k(z)$ через $\mathcal{L}_n$.

Поскольку операторы L_m и $\bar{L}_n$ коммутируют, мы можем временно забыть о существовании $\bar{L}_n$ и вообще координаты $\bar{z}$ и написать условно

$$\begin{aligned}\phi_i(z)|j\rangle &= CL(z)|k\rangle + \cdots \\ &= \Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots .\end{aligned}$$

Для компактности мы также опустили все индексы i, j, k. Подействуем справа на это уравнение операторами L_1 и L_2 (напомню, что они порождают весь набор L_n, $n>0$):

$$\begin{aligned}L_1\phi_i(z)|j\rangle &= \Big(2z\Delta_k\beta(1) + z^2\Big(3\beta(2) + 2(2\Delta_k+1)\beta(1,1)\Big)L_{-1} + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots , \\ L_2\phi_i(z)|j\rangle &= \Big(z^2\Big((4\Delta_k + c/2)\beta(2) + 6\Delta_k\beta(1,1)\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots .\end{aligned} \tag{7}$$

С другой стороны, к левым частям этих уравнений можно применить коммутационные соотношений, приведенные в предыдущей лекции, а потом снова разложить согласно (6):

$$\begin{aligned}L_1\phi_i(z)|j\rangle &= (z^2\partial + 2z\Delta_i)\phi_i(z)|j\rangle \\ &= (z^2\partial + 2z\Delta_i)z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots \\ &= z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(z\Delta_{ik}^j + z^2(\Delta_{ik}^j+1)\beta(1)L_{-1} + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots , \\ L_2\phi_i(z)|j\rangle &= (z^3\partial + 3z^2\Delta_i)\phi_i(z)|j\rangle \\ &= (z^3\partial + 3z^2\Delta_i)z^{-\Delta_{ij}^k}\Big(1 + z\beta(1)L_{-1} + z^2\Big(\beta(2)L_{-2} + \beta(1,1)L_{-1}^2\Big) + O(z^3)\Big)|k\rangle + \cdots \\ &= z^{-\Delta_{ij}^k}(z^2(\Delta_i + \Delta_{ik}^j) + O(z^3))|k\rangle + \cdots .\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}2\Delta_k\beta(1) = \Delta_{ik}^j, \\ 3\beta(2) + 2(2\Delta_k+1)\beta(1,1) = (\Delta_{ik}^j+1)\beta(1), \\ (4\Delta_k + c/2)\beta(2) + 6\Delta_k\beta(1,1) = 2\Delta_i + \Delta_k - \Delta_j.\end{gathered} \tag{9}$$

Первое уравнение имеет очевидное решение

$$\beta(1) = \frac{\Delta_{ik}^j}{2\Delta_k} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta_i - \Delta_j}{2\Delta_k},$$

конечное при всех Δ_k, кроме $\Delta_k = 0$. Но при $\Delta_k = 0$ структурные константы отличны от нуля только при $\Delta_i = \Delta_j$, поэтому $\beta(1) = 1/2$. Кроме того, при $\Delta_k = 0$ норма вектора $L_{-1}|k\rangle$ стремится к нулю и вклад этого слагаемого в корреляционные функции исчезает.

Левая часть двух оставшихся уравнений в точности совпадает с левой частью уравнений для нуль-вектора второго уровня, рассмотренных в предыдущей лекции. Это значит, что уравнения решаются однозначно для всех значений Δ_k, кроме Δ_{12} и Δ_{21}, при которых имеется нуль-вектор. При этом в этих точках с формально бесконечным коэффициентом входит именно нуль-вектор. Таким образом, корреляционные функции опять будут конечными.

Итак, мы установили, что в точках общего положения первые три коэффициента $\beta_{ij}^k(.)$ однозначно определяются конформной симметрией, на в вырожденных точках по Δ_k неоднозначность связана с нуль-вектором и несущественна для корреляционных функций. Есть итерационная процедура, предложенная Ал. Замолодчиковым, позволяющая не только доказать, что все коэффициенты $\beta_{ij}^k(.)$ однозначно определяются конформной симметрией, но и эффективно вычислять эти коэффициенты численно.

Вернемся к корреляционным функциям. Самосогласованность теории требует, чтобы

$$\langle L_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = \langle \bar{L}_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = 0.$$

Используя коммутационное соотношение, находим

$$\begin{aligned}0 = \langle L_1\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle = \langle L_1\phi_i(x)|j\rangle = (z^2\partial + 2z\Delta_i)\langle\phi_i(x)|j\rangle \\ = z(-(\Delta_i+\Delta_j)+2\Delta_i)\langle\phi_i(x)|j\rangle = z(\Delta_i-\Delta_j)\langle\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что парная корреляционная функция обращается в нуль, если $\Delta_i \neq \Delta_j$:

$$\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\rangle = \begin{cases}\frac{C_{ij}^{\mathbf{1}}}{(z_1-z_2)^{2\Delta_i}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{\Delta}_i}}, & \text{если } \Delta_i=\Delta_j,\ \bar{\Delta}_i=\bar{\Delta}_j, \\ 0, & \text{если } \Delta_i\neq\Delta_j \text{ или } \bar{\Delta}_i\neq\bar{\Delta}_j.\end{cases} \tag{10}$$

Матрицу $C_{ij}^{\mathbf{1}}$ можно рассматривать как метрику в пространстве первичных полей. При желании ее можно подходящим преобразованием полей одной размерности диагонализовать и даже сделать единичной матрицей. Это просто зафиксирует нормировку полей.

Рассмотрим теперь трехточечную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned}\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\rangle &= \sum_m \frac{C_{jk}^m\langle\phi_i(x_1)(\mathcal{L}_{jk}^m z_{23}\bar{\mathcal{L}}_{jk}^m\bar{z}_{23}\phi_m)(x_3)\rangle}{z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar{z}_{23}^{\bar{\Delta}_j+\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_m}} \\ &= \sum_m \frac{C_{jk}^m\langle\phi_i(x_1)\phi_m(x_3)\rangle + O\left(\left|\frac{z_{23}}{z_{13}}\right|\right)}{z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar{z}_{23}^{\bar{\Delta}_j+\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_m}} \\ &= \frac{\sum_m' C_{im}^{\mathbf{1}}C_{jk}^m + O\left(\left|\frac{z_{23}}{z_{13}}\right|\right)}{z_{13}^{2\Delta_i}\bar{z}_{13}^{2\bar{\Delta}_i}z_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_m}\bar{z}_{23}^{\bar{\Delta}_j+\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_m}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\sum_m'$ означает сумму по семействам m с теми же конформными размерностями, что и семейство i. При этом мы, по сути, считали, что $|z_1 - z_3| \gg |z_2 - z_3|$. Это значит, что по $z_2 - z_3$ мы нашли самый сингулярный член. Это позволяет найти явный вид трехточечных функций.

Пусть

$$C_{ijk} = \sum_m{}' C_{im}^{\mathbf{1}}C_{ji}^m. \tag{12}$$

Тогда трехточечная функция имеет вид

$$\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{z_{ij}^{\Delta_{ij}^k}\bar{z}_{ij}^{\bar{\Delta}_{ij}^k}z_{ik}^{\Delta_{ik}^j}\bar{z}_{ik}^{\bar{\Delta}_{ik}^j}z_{jk}^{\Delta_{jk}^i}\bar{z}_{jk}^{\bar{\Delta}_{jk}^i}}, \tag{13}$$

где

$$\Delta_{ij}^k = \Delta_i + \Delta_j - \Delta_k, \qquad \bar{\Delta}_{ij}^k = \bar{\Delta}_i + \bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}_k.$$

В пределе $|z_1 - z_3| \gg |z_2 - z_3|$ выражение (13) переходит в лидирующий член в последней строчке (11).

Рассмотрим теперь четырехточечные функции. Если у нас есть четыре комплексные переменные $z_1, \ldots, z_4$, мы можем ввести переменную

$$w = \frac{(z_4 - z_3)(z_2 - z_1)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}, \tag{14}$$

называемую *двойным отношением*. Пусть $z_3 = z$. Тогда двойное отношение определяет конформное дробно-линейное преобразование от переменной z к w:

$$w(z) = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z}{z - z_1}.$$

Заметим, что $w(z_1) = \infty$, $w(z_3) = 1$, $w(z_4) = 0$, то есть это преобразование переводит любые три точки z_1, z_3, z_4 в $0, 1, \infty$. Применим это преобразование к четырехточечной корреляционной функции

$$\langle \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\phi_k(x_3)\phi_l(x_4)\rangle$$

в функцию

$$\langle \phi_i(\infty,\infty)\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar w)\phi_l(0,0)\rangle = \langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar w)|l\rangle.$$

Здесь под $\phi_i(\infty)$ понимается предел

$$\phi_i(\infty,\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to\infty} z^{2\Delta_i}\bar z^{2\bar\Delta_i}\phi_i(z,\bar z)\rangle.$$

Будем исследовать эту последнюю функцию. Давайте получим разложение вблизи точки $w = 0$:

$$\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar w)|l\rangle = \sum_m \frac{C^m_{kl}}{w^{\Delta^m_{kl}}\bar w^{\bar\Delta^m_{kl}}}\langle i|\phi_j(1,1)L^m_{kl}(w)\bar L^m_{kl}(\bar w)|m\rangle.$$

Очевидно, что $\langle i|L^m_{kl}(w)\bar L^m_{kl}(\bar w) = \langle i|$. В силу коммутационных соотношений операторов L_n, $\bar L_n$ с первичными операторами коммутаторы $L^m_{kl}(w)$ и $\bar L^m_{kl}(\bar w)$ дают дифференциальные операторы $D^m_{jkl}(w,z)$ и $\bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)$:

$$\begin{aligned}
\phi_j(z,\bar z)L^m_{kl}(w) &= D^m_{jkl}(w,z)\phi_j(z,\bar z) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}(\ldots),\\
\phi_j(z,\bar z)\bar L^m_{kl}(w) &= \bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)\phi_j(z,\bar z) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar L_{-n}(\ldots).
\end{aligned} \tag{15}$$

Выражения, обозначенные многоточиями в скобках, нас не интересуют, поскольку убивают состояние $\langle i|$. В первых порядках по степеням w получаем

$$\begin{aligned}
D^m_{jkl}(w,z) = 1 &- w\beta^m_{kl}(1)(z^2\partial_z + 2\Delta_j z)\\
&- w^2\Big(\beta^m_{kl}(2)(z^3\partial_z + 3\Delta_j z^2) - \beta^m_{kl}(1,1)(z^2\partial_z + 2\Delta_j z)^2\Big) + O(w^3).
\end{aligned} \tag{16}$$

Очевидно, что $D^m_{jkl}(w,z)$ представляет собой дифференциальный оператор по z, а $\bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)$ — по $\bar z$. Также очевидно, что они коммутируют:

$$[D^m_{jkl}(w,z), \bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)] = 0. \tag{17}$$

Подставляя (15), получаем

$$\begin{aligned}
\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar w)|l\rangle &= \sum_m \frac{C^m_{kl}}{w^{\Delta^m_{kl}}\bar w^{\bar\Delta^m_{kl}}}\ D^m_{jkl}(w,z)\bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)\langle i|\phi_j(z,\bar z)|m\rangle\Big|_{z=\bar z=1}\\
&= \sum_m \frac{C_{ijm}C^m_{kl}}{w^{\Delta^m_{kl}}\bar w^{\bar\Delta^m_{kl}}}\ D^m_{jkl}(w,z)z^{-\Delta^i_{jm}}\Big|_{z=1}\ \bar D^m_{jkl}(\bar w,\bar z)\bar z^{-\bar\Delta^i_{jm}}\Big|_{\bar z=1}\ .
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{lk}^{ij}(m|w) &= w^{-\Delta_{kl}^{m}}\; D_{jkl}^{m}(w,z) z^{-\Delta_{jm}^{i}}\Big|_{z=1}\;, \\
\bar{\mathcal{F}}_{lk}^{ij}(m|\bar{w}) &= \bar{w}^{-\Delta_{kl}^{m}}\; \bar{D}_{jkl}^{m}(\bar{w},\bar{z}) \bar{z}^{-\bar{\Delta}_{jm}^{i}}\Big|_{\bar{z}=1}\;.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Для нас важно, что *конформные блоки* $\mathcal{F}_{lk}^{ij}(m|w)$ и $\bar{\mathcal{F}}_{lk}^{ij}(m|\bar{w})$ являются аналитическими функциями w и, соответственно, $\bar{w}$ и полностью определяются конформной алгеброй.

Четырехточечная корреляционная функция, таким образом, имеет вид

$$
\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle = \sum_m C_{ijm} C_{kl}^{m} \mathcal{F}_{lk}^{ij}(m|w) \bar{\mathcal{F}}_{lk}^{ij}(m|\bar{w}). \tag{19}
$$

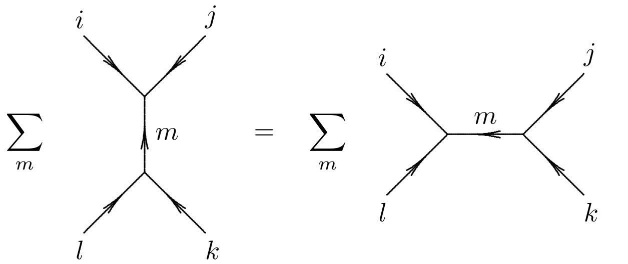
Мы можем переставить поля $\phi_j(1,1)$, $\phi_k(w,\bar{w})$, $\phi_l(0,0)$ и написать

$$
\begin{aligned}
\langle i|\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})|l\rangle &= Z_{jk}Z_{jl}Z_{kl}\langle i|\phi_l(1,1)\phi_k(1-w,1-\bar{w})|j\rangle \\
&= Z_{jk}Z_{jl}Z_{kl}\sum_m C_{ilm}C_{kj}^{m}\mathcal{F}_{jk}^{il}(m|1-w)\bar{\mathcal{F}}_{jk}^{il}(m|1-\bar{w}),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

где Z_{ij} — коэффициент, возникающий от перестановки операторов ϕ_i и ϕ_j. В случае локальных операторов он равен ± 1 в зависимости от спинов. Выражения (19) и (20) можно рассматривать как s- и t-канальные вычисления корреляционной функции, которые, очевидно, должны приводить к одному и тому же результату. Мы получаем так называемое *условие кроссинг-симметрии*

$$
\sum_m C_{ijm}C_{kl}^{m}\mathcal{F}_{lk}^{ij}(m|w)\bar{\mathcal{F}}_{lk}^{ij}(m|\bar{w}) = Z_{jk}Z_{jl}Z_{kl}\sum_m C_{ilm}C_{kj}^{m}\mathcal{F}_{jk}^{il}(m|1-w)\bar{\mathcal{F}}_{jk}^{il}(m|1-\bar{w}). \tag{21}
$$

Графически его можно изобразить так:



В вершинах графиков находятся структурные константы (входящей линии отвечает нижний индекс, а выходящей — верхний). Всему графику в целом сопоставляется произведение двух конформных блоков («левого» и «правого»). Условие кроссинг-симметрии выражает *ассоциативность* операторной алгебры, то есть тот факт, что произведение $\phi_j\phi_k\phi_l$ можно разлагать как $(\phi_j(\phi_k\phi_l))$ или как $((\phi_j\phi_k)\phi_l)$, получая один и тот же результат.

Условие кроссинг-симметрии можно рассматривать как уравнение на структурные константы, причем любое решение для данного набора полей сопоставляется некоторой конформной теории поля. Старшие n-точечные корреляционные функции выражаются аналогично через структурные константы C_{ij}^{k} и n-точечные конформные блоки, которые определяются аналогично четырехточечным. Таким образом условие кроссинг-симметрии представляет собой *условие бутстрапа* для конформной теории поля.

Для того, чтобы решить условие кроссинг-симметрии, нужно научиться переразлагать конформные блоки в s-канале через конформные блоки в t-канале:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{lk}^{ij}(m;w) &= \sum_{m'} K_{lk}^{ij}(m,m')\mathcal{F}_{jk}^{il}(m';1-w), \\
\bar{\mathcal{F}}_{lk}^{ij}(m;\bar{w}) &= \sum_{m'} \bar{K}_{lk}^{ij}(m,m')\bar{\mathcal{F}}_{jk}^{il}(m';1-\bar{w}).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Подставляя разложения (22) в условие кроссинг-симметрии (21), получаем *уравнение ассоциативности*:

$$
\sum_{m''} C_{ijm''}C_{kl}^{m''}K_{lk}^{ij}(m'',m)\bar{K}_{lk}^{ij}(m'',m') = Z_{jk}Z_{jl}Z_{kl}C_{ilm}C_{kj}^{m}\delta_{mm'}. \tag{23}
$$

Но чтобы найти коэффициенты $K^{ij}_{lk}(m,m')$, $\bar{K}^{ij}_{lk}(m,m')$ необходимо найти эффективное представление для конформных блоков. Мы обсудим это в Лекции 22.

Задачи

1. Для произвольного поля $\phi(x)$ выразить коммутаторы $[L_n,\phi(x)]$ через операторы $(\mathcal{L}_n\phi)(x)$.

2. Записать явно, как выражается произвольная четырехточечная функция $\langle\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\times\phi_k(x_3)\phi_l(x_4)\rangle$ через функцию в переменных двойного отношения $\langle\phi_i(\infty,\infty)\phi_j(1,1)\phi_k(w,\bar{w})\phi_l(0,0)\rangle$.

3. Найти первые три слагаемых в разложении конформного блока $\mathcal{F}^{ij}_{lk}(m;w)$ по степеням w.