Лекция 9
Квантование фермионов

Рассмотрим *алгебру Клиффорда*, соответствующую одному фермионному состоянию в формализме вторичного квантования:

$$a^2 = (a^+)^2 = 0, \qquad aa^+ + a^+a = 1. \tag{1}$$

Введем вакуумное состояние $|0\rangle$:

$$a|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Соответствующий фоковский модуль натянут на два вектора $|0\rangle$ и $|1\rangle = a^+|0\rangle$. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \varepsilon a^+ a \tag{2}$$

для которого состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ являются собственными векторами с энергиями 0 и ε соответственно. Мы полностью описали квантовую эволюцию системы и можем вычислить любые корреляционные функции. Действительно, для двухточек получаем

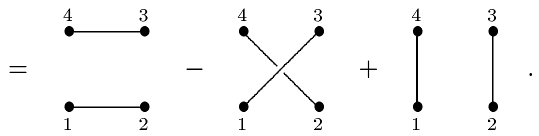
$$\langle 0|a(t)a^+(0)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt}ae^{-iHt}a^+|0\rangle = \langle 0|ae^{-i\varepsilon t}a^+|0\rangle = e^{-i\varepsilon t},$$
$$\langle 0|a^+(t)a(0)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt}a^+e^{-iHt}a|0\rangle = 0.$$

Многоточечные функции вычисляем по

Теореме Вика. *Чтобы вычислить многоточечную корреляционную функцию фермионных полей с квадратичным гамильтонианом, следует рассмотреть все спаривания, затем для каждого спаривания переставить поля так чтобы спариваемые поля стояли по соседству. При этом каждой перестановке полей следует сопоставить знак минус. Затем каждому спариванию сопоставить двухточку.*

Например, для четырехточки из произвольных линейных по a, a^+ полей ϕ_i можно написать

$$\langle 0|\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle = \langle 0|\phi_1\phi_2|0\rangle\langle 0|\phi_3\phi_4|0\rangle - \langle 0|\phi_1\phi_3|0\rangle\langle 0|\phi_2\phi_4|0\rangle + \langle 0|\phi_1\phi_4|0\rangle\langle 0|\phi_2\phi_3|0\rangle$$



Графически знак минус отвечает перестановке двух хвостов.

Вычислим среднее, имеющее смысл производящей функции,

$$\begin{aligned} Z[\zeta,\bar\zeta] &= \langle e^{i\int dt\,(\bar\zeta a+\zeta a^+)}\rangle = \langle 0|\mathrm{T}e^{i\int dt\,(\bar\zeta a+\zeta a^+)}|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1>\dots>t_n} d^n t\, i^n\langle 0|z(t_1)\dots z(t_n)|0\rangle, \qquad z(t) = \bar\zeta(t)a(t) + \zeta(t)a^+(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Sic! При определении нормального упорядочения мы обращались с $z(t)$ так же как с бозонным полем.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} Z[\zeta,\bar\zeta] &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{t_1>\dots>t_{2n}} d^{2n}t\,\bar\zeta(t_1)\zeta(t_2)\dots\bar\zeta(t_{2n-1})\zeta(t_{2n})e^{-i\varepsilon(t_1-t_2+\dots+t_{2n-1}-t_{2n})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{t_1,t_2>\dots>t_{2n-1},t_{2n}} d^{2n}t\,\bar\zeta(t_1)\zeta(t_2)\dots\bar\zeta(t_{2n-1})\zeta(t_{2n})\prod_{j=1}^{n}\theta(t_{2j-1}-t_{2j})e^{-i\varepsilon(t_{2j-1}-t_{2j})} \end{aligned}$$

($\theta(t)$ — ступенчатая функция). Эту формулу можно упростить, если считать, что $\zeta(t)$, $\bar\zeta(t)$ *анти*коммутируют друг с другом. Действительно, если мы в этом случае возьмем интеграл по всем t_i по всей вещественной оси, то, например, вклад от подобласти, где $t_1 > t_2 > t_4 > t_3$, сократится с вкладом, где $t_1 > t_4 > t_2 > t_3$. Таким образом, хотя порядок пар “нечетный–четный” будет произволен, сами пары сохранятся. Число перестановок таких пар равно $n!$ и

$$\begin{aligned} Z[\zeta,\bar\zeta] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^{2n}t\, \bar\zeta(t_1)\zeta(t_2)\ldots\bar\zeta(t_{2n-1})\zeta(t_{2n}) \prod_{j=1}^{n} G(t_{2j-1},t_{2j}) \\ &= \exp\left(-\int dt\,dt'\,\bar\zeta(t)\zeta(t')G(t,t')\right), \qquad G(t,t') = \theta(t-t')e^{-i\varepsilon(t-t')}. \end{aligned} \tag{4}$$

Антикоммутативность переменных $\zeta(t)$, $\bar\zeta(t)$ ничего не портит, так как позволяет определить корреляционные функции как формальные вариационные производные производящей функции при $\zeta(t) = \bar\zeta(t) = 0$, например

$$\langle a(t)a^+(t')\rangle = -\frac{\delta}{\delta\zeta(t')}\frac{\delta}{\delta\bar\zeta(t)} Z[\zeta,\bar\zeta]\bigg|_{\zeta(t)=\bar\zeta(t)=0} = G(t,t')$$

(здесь порядок взятия производных важен). Отметим, что антикоммутативность источников приводит к следующему естественному определению хронологического произведения фермионов:

$$\mathrm{T}[\phi(t_1)\phi(t_2)] = \begin{cases} \phi(t_1)\phi(t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ -\phi(t_2)\phi(t_1) & \text{при } t_1 < t_2. \end{cases}$$

Задача 1. *Вывести из (4) теорему Вика для фермионов.*

Давайте определим теперь функциональный интеграл. Действие, соответствующее гамильтониану (2) имеет вид

$$S[a,a^+] = i\int dt\, a^+(\dot a + i\varepsilon a). \tag{5}$$

В этом случае $ia^+ = \partial L/\partial\dot a$ — импульс, соответствующий a, и мы имеем

$$H = p\dot q - L = (ia^+)\dot a - ia^+(\dot a + i\varepsilon a) = \varepsilon a^+ a.$$

Классические уравнения движения имеют вид

$$\dot a = -i\varepsilon a, \qquad \dot a^+ = i\varepsilon a^+.$$

Отметим, что

$$iS[a,a^+] = -(a^+, Ka), \qquad K = \partial_t + i\varepsilon + 0, \tag{6}$$

причем

$$KG(t,t') = \delta(t-t') \tag{7}$$

и $G(t,t')$ убывает при $t - t' \to \mp i\infty$, если продолжение на мнимую ось определено по правилу викова поворота. Если бы мы определили производящий функционал как

$$Z[\zeta,\bar\zeta] = \int Da\,Da^+\, e^{iS + i(\bar\zeta,a) + i(\zeta,a^+)}, \tag{8}$$

но считали бы источники ζ, $\bar\zeta$ антикоммутативными величинами, то мы бы вынуждены были сдвигать коммутирующие переменные на антикоммутирующие сдвижки, что сделало бы интеграл бессмысленным. Если бы мы считали ζ и $\bar\zeta$ коммутирующими, то мы бы получили простую формулу (4), неверную для коммутирующих источников. Заметим также, что классический предел коммутационных соотношений (1) должен иметь вид

$$a^2 = (a^+)^2 = aa^+ + a^+a = 0.$$

Поэтому естественно считать переменные $a(t)$, $a^+(t)$ антикоммутирующими и брать функциональный интеграл по антикоммутирующим переменным. Что бы это значило? Конечно, “антикоммутирующие переменные” — никакие не переменные, а образующие грассмановой алгебры (алгебры форм). Именно, пусть имеется набор букв θ_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда грассманова алгебра — это ассоциативная алгебра с соотношениями

$$\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0.$$

Базис в этой алгебре дается упорядоченными произведениями $\theta_{i_1} \ldots \theta_{i_k}$, $0 \le k \le n$, $i_1 < \cdots < i_k$. Размерность k-линейного подпространства равна $\binom{n}{k}$, а размерность всей алгебры равна 2^n.

Определим *функцию* антикоммутирующих переменных $f(\theta) = f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ как произвольный элемент грассмановой алгебры. Естественно определить *производную* соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} 1 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_i} \cdot \theta_j + \theta_j \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{ij} \qquad \left(\text{т. е.} \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_j f(\theta)) = \delta_{ij} f(\theta) - \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta) \right).$$

Можно также определить *интеграл* как

$$\int d\theta_i \, 1 = 0, \qquad \int d\theta_i \, \theta_i = 1, \qquad d\theta_i \, \theta_j + \theta_j \, d\theta_i = 0$$

с естественными свойствами определенных интегралов. Очевидно,

$$\int d\theta_i \, \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta) = 0.$$

Очевидно, что

$$\int d\theta_1 \, d\theta_2 \, e^{-k\theta_1\theta_2 - \zeta_1\theta_1 - \zeta_2\theta_2} = \int d\theta_1 \, d\theta_2 \, (1 - k\theta_1\theta_2 - \zeta_1\theta_1 - \zeta_2\theta_2 - \zeta_1\zeta_2\theta_1\theta_2) = k(1 + k^{-1}\zeta_1\zeta_2) = k e^{k^{-1}\zeta_1\zeta_2},$$

где ζ_i — тоже антикоммутирующие переменные (образующие алгебры), а k — число.

Отсюда легко получить, что

$$\int d^n\theta e^{-\frac{1}{2}(\theta, K\theta) - (\zeta, \theta)} = \sqrt{\det K} \, e^{-\frac{1}{2}(\zeta, K^{-1}\zeta)}, \tag{9}$$

где K — антисимметричная матрица, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — антикоммутирующие переменные. Это грассманов аналог формулы (16) из Лекции 1. Обратим внимание на то, что корень из определителя K стоит в числителе.

В комплексном случае можно ввести два комплексно сопряженных набора переменных θ_i, θ_i^+, так что (9) даст

$$\int d^n\theta^+ \, d^n\theta \, e^{-(\theta^+, K\theta) - (\bar\zeta, \theta) + (\zeta, \theta^+)} = \det K \cdot e^{-(\bar\zeta K^{-1} \zeta)}, \tag{10}$$

где K — числовая матрица, $\bar\zeta_i$, ζ_i — грассмановы переменные. Из (7), (9) и (10) получаем (с точностью до константы) (4).

В общем случае фермионные степени свободы описываются антикоммутирующими переменными.

Задача 2. *Рассмотрим нерелятивистские взаимодействующие фермионы с действием*

$$S = \sum_{\sigma = \pm} \int dt \, d^3x \, \psi_\sigma^+ \left(i\partial_t \psi_\sigma + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi_\sigma \right) - \sum_{\sigma, \sigma' = \pm} \int dt \, d^3x \, d^3x' \, V_{\sigma\sigma'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_\sigma^+(\mathbf{x}) \psi_{\sigma'}^+(\mathbf{x}') \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}') \psi_\sigma(\mathbf{x}).$$

Построить диаграммную технику. Показать, что каждой петле следует сопоставить множитель (-1).