Лекция 8. Гравитационные волны

Михаил Лашкевич

Разложение по плоским волнам

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции.

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Разложение по плоским волнам

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Разложение по плоским волнам

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Построим вещественные линейные комбинации таких решений:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \tag{5}$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Построим вещественные линейные комбинации таких решений:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},$$
$$A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \tag{5}$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Построим вещественные линейные комбинации таких решений:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \tag{5}$$
$$A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \quad |\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k}) + k^iA^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k}) = 0,$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\Box\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Построим вещественные линейные комбинации таких решений:

$$\begin{gathered}\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\ A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \quad |\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k}) + k^iA^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad A^{-}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = \left(A^{+}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\right)^*.\end{gathered} \tag{5}$$

Вернемся к линейным уравнениям Эйнштейна в пространстве без материи в рассмотренной калибровке:

$$\square\,\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0. \tag{1}$$

Раньше мы рассматривали решения, достаточно быстро спадающие на бесконечности. Ослабим это ограничение: разрешим ограниченные на бесконечности функции. Вначале рассмотрим комплексные решения в виде плоских волн:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad A_{\nu\mu} = A_{\mu\nu}, \tag{2}$$

Из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar{0}} = \pm\sqrt{(k^{\bar{i}})^2} = \pm|\boldsymbol{k}|, \qquad \boldsymbol{k} = k^{\bar{i}}\partial_i, \tag{3}$$

Из калибровочного условия получаем пространственно-временную поперечность

$$k^{\bar{\mu}}A_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

Построим вещественные линейные комбинации таких решений:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}\,A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},$$
$$A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k}) = A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}), \quad |\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k}) + k^iA^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad A^{-}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}) = \left(A^{+}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\right)^*. \tag{5}$$

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re} A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d - 1$.

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re} A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \quad \Box\xi^{\mu} = 0. \tag{8}$$

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \quad \Box\xi^{\mu} = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать преобразования с вектором ξ вида

$$\xi^{\mu} = \mathrm{Re}\, X^{\mu}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{9}$$

Такие преобразования не меняют вида волны (6).

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \quad \Box\,\xi^\mu = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать преобразования с вектором ξ вида

$$\xi^\mu = \mathrm{Re}\, X^\mu\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{9}$$

Такие преобразования не меняют вида волны (6). Из (8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0 + X^1), \\ A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a, \\ A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. \end{aligned} \tag{10}$$

Всего d независимых преобразований.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re} A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^\lambda{}_{,\lambda}, \quad \Box\xi^\mu = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать преобразования с вектором ξ вида

$$\xi^\mu = \operatorname{Re} X^\mu \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{9}$$

Такие преобразования не меняют вида волны (6). Из (8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0 + X^1), && \Rightarrow \text{ фиксируем } A'_{00} = 0 \\ A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a, \\ A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. \end{aligned} \tag{10}$$

Всего d независимых преобразований.

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \quad \Box \xi^\mu = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать преобразования с вектором ξ вида

$$\xi^\mu = \mathrm{Re}\, X^\mu\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{9}$$

Такие преобразования не меняют вида волны (6). Из (8) получаем

$$\begin{aligned}
A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0 + X^1), && \Rightarrow \text{ фиксируем } A'_{00} = 0 \\
A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a, && \Rightarrow \text{ фиксируем } A'_{0a} = 0 \\
A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Всего d независимых преобразований.

Плоская монохроматическая волна

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar{0}} = k^{\bar{1}} = \omega \neq 0$, $k^a = 0$ $(a \geq 2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, A_{\mu\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{6}$$

Будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1$; $a, b, \ldots = 2, \ldots, d-1$.
Условие калибровки дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}. \tag{7}$$

Остаточные калибровочные преобразования:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\lambda}, \quad \Box\xi^\mu = 0. \tag{8}$$

Будем рассматривать преобразования с вектором ξ вида

$$\xi^\mu = \mathrm{Re}\, X^\mu\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^0 - x^1)}. \tag{9}$$

Такие преобразования не меняют вида волны (6). Из (8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega(X^0 + X^1), && \Rightarrow \text{ фиксируем } A'_{00} = 0 \\ A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a, && \Rightarrow \text{ фиксируем } A'_{0a} = 0 \\ A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega(X^0 - X^1)\delta_{ab}. && \Rightarrow \text{ фиксируем } \sum A'_{aa} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Всего d независимых преобразований.

Поперечная калибровка и число степеней свободы

Итак, наложим d условий

$$A_{00} = -A_{01} = 0, \quad A_{0a} = -A_{1a} = 0, \quad \sum_a A_{aa} = 0. \tag{11}$$

Итак, наложим d условий

$$A_{00} = -A_{01} = 0, \quad A_{0a} = -A_{1a} = 0, \quad \sum_a A_{aa} = 0. \tag{11}$$

Всего имеется

$$\underbrace{\frac{d(d+1)}{2}}_{A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}} - \underbrace{d}_{\substack{\text{калибровочное}\\ \text{условие}\\ A_{0\mu}=-A_{1\mu}}} - \underbrace{d}_{\substack{\text{остаточная}\\ \text{калибровочная}\\ \text{свобода}}} = \frac{d(d-3)}{2}$$

степеней свободы.

Фурье-преобразование и степени свободы

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.

Фурье-преобразование и степени свободы

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f = 0.$$

Фурье-преобразование и степени свободы

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f = 0.$$

Перепишем в координатах светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$:

$$\partial_- \partial_+ f = 0, \quad \partial_\pm = \tfrac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$$

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0,\infty)\to\mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f = 0.$$

Перепишем в координатах светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$:

$$\partial_- \partial_+ f = 0, \quad \partial_\pm = \tfrac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$$

Общее решение этого уравнения

$$f(x^0, x^1) = f_R(x^-) + f_L(x^+) = \overbrace{f_R(x^0 - x^1)}^{\text{правая волна}} + \overbrace{f_L(x^0 + x^1)}^{\text{левая волна}},$$

где $f_{R,L}(u)$ — две произвольные вещественнозначные функции.

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f = 0.$$

Перепишем в координатах светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$:

$$\partial_- \partial_+ f = 0, \quad \partial_\pm = \tfrac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$$

Общее решение этого уравнения

$$f(x^0, x^1) = f_R(x^-) + f_L(x^+) = \overbrace{f_R(x^0 - x^1)}^{\text{правая волна}} + \overbrace{f_L(x^0 + x^1)}^{\text{левая волна}},$$

где $f_{R,L}(u)$ — две произвольные вещественнозначные функции.
Чтобы решить задачу Коши, нужно задать две функции при $x^0 = 0$. Можно выбрать $f(0, x^1)$ и $\partial_0 f(0, x^1)$. Действительно, тогда мы знаем

$$\partial_1 f(0, x^1) = -\dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1),$$
$$\partial_0 f(0, x^1) = \dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1).$$

Интегрированием находим обе функции $f_{R,L}(u)$ с точностью до константы.

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f = 0.$$

Перепишем в координатах светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$:

$$\partial_- \partial_+ f = 0, \quad \partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$$

Общее решение этого уравнения

$$f(x^0, x^1) = f_R(x^-) + f_L(x^+) = \overbrace{f_R(x^0 - x^1)}^{\text{правая волна}} + \overbrace{f_L(x^0 + x^1)}^{\text{левая волна}},$$

где $f_{R,L}(u)$ — две произвольные вещественнозначные функции.
Чтобы решить задачу Коши, нужно задать две функции при $x^0 = 0$. Можно выбрать $f(0, x^1)$ и $\partial_0 f(0, x^1)$. Действительно, тогда мы знаем

$$\partial_1 f(0, x^1) = -\dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1),$$
$$\partial_0 f(0, x^1) = \dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1).$$

Интегрированием находим обе функции $f_{R,L}(u)$ с точностью до константы.
Итак, если в результате изучения монохромной волны, движущейся направо, мы нашли одно комплексное число $\tilde{f}_k$, то ему соответствуют в прямом пространстве два вещественных числа $f(0, x^1)$ и $\dot{f}(0, x^1)$ в начальный момент времени в каждой точке пространства x^1.

Преобразование Фурье $f(x) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,\tilde{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ дает взаимно-однозначное соответствие между $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{f}_k : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
Пусть $f(x^0, x^1)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)f = 0.$$

Перепишем в координатах светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$:

$$\partial_-\partial_+ f = 0, \quad \partial_\pm = \tfrac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$$

Общее решение этого уравнения

$$f(x^0, x^1) = f_R(x^-) + f_L(x^+) = \overbrace{f_R(x^0 - x^1)}^{\text{правая волна}} + \overbrace{f_L(x^0 + x^1)}^{\text{левая волна}},$$

где $f_{R,L}(u)$ — две произвольные вещественнозначные функции.
Чтобы решить задачу Коши, нужно задать две функции при $x^0 = 0$. Можно выбрать $f(0, x^1)$ и $\partial_0 f(0, x^1)$. Действительно, тогда мы знаем

$$\partial_1 f(0, x^1) = -\dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1),$$
$$\partial_0 f(0, x^1) = \dot{f}_R(-x^1) + \dot{f}_L(x^1).$$

Интегрированием находим обе функции $f_{R,L}(u)$ с точностью до константы.
Итак, если в результате изучения монохромной волны, движущейся направо, мы нашли одно комплексное число $\tilde{f}_k$, то ему соответствуют в прямом пространстве два вещественных числа $f(0, x^1)$ и $\dot{f}(0, x^1)$ в начальный момент времени в каждой точке пространства x^1. То есть мы имеем одну степень свободы в каждой точке.

Поперечная калибровка в координатном пространстве

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \dots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Поперечная калибровка в координатном пространстве

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \ldots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Поперечная калибровка в координатном пространстве

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \ldots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\,dx^+\,dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\,dx^a\,dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \ldots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Калибровочное условие дает $\dot{\psi}^L_{-\mu}(x^+) = -\dot{\psi}^R_{+\mu}(x^-)$.

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \ldots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Калибровочное условие дает $\dot\psi^L_{-\mu}(x^+) = -\dot\psi^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть зависит только от x^+, а правая — только от x^-. $\Rightarrow$ Обе части постоянны.

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \dots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\,dx^+\,dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\,dx^a\,dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Калибровочное условие дает $\dot\psi^L_{-\mu}(x^+) = -\dot\psi^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть зависит только от x^+, а правая — только от x^-. $\Rightarrow$ Обе части постоянны. Линейные вклады $\psi^{R,L}_{\mu\nu}(t) = at + b$ нас не интересуют. Поэтому примем

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \ldots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Калибровочное условие дает $\dot\psi^L_{-\mu}(x^+) = -\dot\psi^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть зависит только от x^+, а правая — только от x^-. $\Rightarrow$ Обе части постоянны. Линейные вклады $\psi^{R,L}_{\mu\nu}(t) = at + b$ нас не интересуют. Поэтому примем

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0. \quad (15)$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием можно обратить в нуль компоненты $\psi^L_{+\mu}, \psi^R_{-\mu}$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu}\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ (поперечная калибровка).

Рассмотрим одномерную волну $h_{\mu\nu}(x)$, не зависящую от x^a $(a = 2, \dots, d-1)$. Запишем ее в координатах светового конуса:

$$ds^2 = h_{++}(dx^+)^2 + h_{--}(dx^-)^2 + (1 + 2h_{+-})\, dx^+\, dx^- - (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \quad (12)$$

Волновое уравнение и условие калибровки имеют вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0. \quad (13)$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}(x^-) + \psi^L_{\mu\nu}(x^+). \quad (14)$$

Калибровочное условие дает $\dot\psi^L_{-\mu}(x^+) = -\dot\psi^R_{+\mu}(x^-)$. Левая часть зависит только от x^+, а правая — только от x^-. $\Rightarrow$ Обе части постоянны. Линейные вклады $\psi^{R,L}_{\mu\nu}(t) = at + b$ нас не интересуют. Поэтому примем

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0. \quad (15)$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием можно обратить в нуль компоненты $\psi^L_{+\mu}, \psi^R_{-\mu}$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu}\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ (поперечная калибровка). Тогда $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h^R_{ab}(x^-) + h^L_{ab}(x^+), \qquad h_{\alpha\mu} = 0, \qquad \eta^{ab}h^{R,L}_{ab} = 0. \quad (16)$$

Поляризация гравитационной волны

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

Поляризация гравитационной волны

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$.

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$

$$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}:\ \ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$

$$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}:\ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$

$$2)\ dx^a = -dx^b = dr/\sqrt{2}:\ dl^2 = dr^2(1 + h_{ab}).$$

Поляризация гравитационной волны

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

  $$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$
  $$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}: \ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$
  $$2)\ dx^a = -dx^b = dr/\sqrt{2}: \ dl^2 = dr^2(1 + h_{ab}).$$

  При этом объем шара $\sum (dx^a)^2 \leq dr^2$ остается постоянным.

Поляризация гравитационной волны

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$
$$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}: \ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$
$$2)\ dx^a = -dx^b = dr/\sqrt{2}: \ dl^2 = dr^2(1 + h_{ab}).$$

  При этом объем шара $\sum(dx^a)^2 \leq dr^2$ остается постоянным.
- Элементы h_{aa} сжимают сферу в направлении оси x^a.

Поляризация гравитационной волны

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$
$$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}:\ \ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$
$$2)\ dx^a = -dx^b = dr/\sqrt{2}:\ \ dl^2 = dr^2(1 + h_{ab}).$$

  При этом объем шара $\sum (dx^a)^2 \le dr^2$ остается постоянным.
- Элементы h_{aa} сжимают сферу в направлении оси x^a. Поскольку $\sum_a h_{aa} = 0$, объем шара опять остается постоянным.

Рассмотрим волну, движущуюся вправо. Временные компоненты метрики постоянны, а расстояние между соседними точками $x^\bullet$ и $x^\bullet + dx^\bullet$ равно

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (\delta_{ab} - h_{ab})\, dx^a\, dx^b. \tag{17}$$

Рассмотрим маленькую $(d-2)$-мерную сферу $\delta_{ab}\, dx^a\, dx^b = dr^2$, $dx^1 = 0$ вокруг точки x. Величины h_{ab} деформируют эту сферу. Именно

- Элемент h_{ab} с $a \neq b$ сжимает сферу вдоль прямой $dx^a = dx^b$ и растягивает вдоль прямой $dx^a = -dx^b$. Действительно, в плоскости $x^a x^b$

$$dl^2 = (dx^a)^2 - 2h_{ab}\, dx^a\, dx^b + (dx^b)^2 \text{ (без суммирования) и}$$
$$1)\ dx^a = dx^b = dr/\sqrt{2}:\ \ dl^2 = dr^2(1 - h_{ab}),$$
$$2)\ dx^a = -dx^b = dr/\sqrt{2}:\ \ dl^2 = dr^2(1 + h_{ab}).$$

  При этом объем шара $\sum (dx^a)^2 \leq dr^2$ остается постоянным.
- Элементы h_{aa} сжимают сферу в направлении оси x^a. Поскольку $\sum_a h_{aa} = 0$, объем шара опять остается постоянным.

В силу калибровки $h_{0\mu} = 0$ имеем $\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}) = 0$. Поэтому

$$\ddot{x}^\mu = -2\Gamma^\mu_{i0}\dot{x}^i\dot{x}^0 - \Gamma^\mu_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

и неподвижная свободная частица ($\dot{x}^i = 0$) остается неподвижной во время прохождении волны.

Поляризация гравитационной волны: $d = 4$

Разберем подробнее четырехмерный случай. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{18}$$

Поляризация гравитационной волны: $d = 4$

Разберем подробнее четырехмерный случай. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{18}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times \, dx^2 \, dx^3. \tag{19}$$

Поляризация гравитационной волны: $d = 4$

Разберем подробнее четырехмерный случай. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{18}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times\, dx^2\, dx^3. \tag{19}$$

Опять рассмотрим маленькую окружность радиуса dr. Пусть θ — угол между точкой окружности и осью x^2:

$$dx^2 = dr\cos\theta, \qquad dx^3 = dr\sin\theta.$$

Разберем подробнее четырехмерный случай. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{18}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times \, dx^2 \, dx^3. \tag{19}$$

Опять рассмотрим маленькую окружность радиуса dr. Пусть θ — угол между точкой окружности и осью x^2:

$$dx^2 = dr \cos\theta, \qquad dx^3 = dr \sin\theta.$$

Отсюда имеем

$$dl_2 = dr \left(1 - \frac{h_+}{2}\cos 2\theta - \frac{h_\times}{2}\sin 2\theta\right) = dr \left(1 - \frac{h_*}{2}\cos 2(\theta - \varphi)\right), \tag{20}$$

где

$$h_+ = h_* \cos 2\varphi, \qquad h_\times = h_* \sin 2\varphi.$$

Разберем подробнее четырехмерный случай. Имеется две независимые компоненты

$$h_+ = h_{22} = -h_{33}, \qquad h_\times = h_{23}. \tag{18}$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = (1 - h_+)(dx^2)^2 + (1 + h_+)(dx^3)^2 - 2h_\times\, dx^2\, dx^3. \tag{19}$$

Опять рассмотрим маленькую окружность радиуса dr. Пусть θ — угол между точкой окружности и осью x^2:

$$dx^2 = dr \cos\theta, \qquad dx^3 = dr \sin\theta.$$

Отсюда имеем

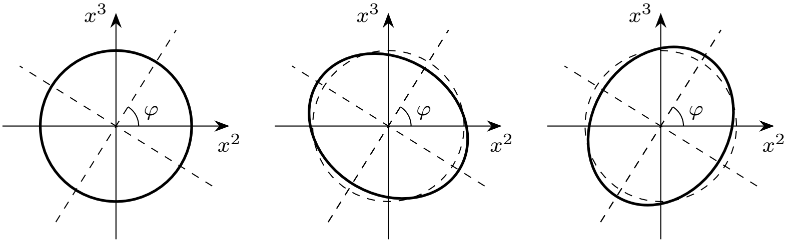
$$dl_2 = dr\left(1 - \frac{h_+}{2}\cos 2\theta - \frac{h_\times}{2}\sin 2\theta\right) = dr\left(1 - \frac{h_*}{2}\cos 2(\theta - \varphi)\right), \tag{20}$$

где

$$h_+ = h_* \cos 2\varphi, \qquad h_\times = h_* \sin 2\varphi.$$

Наличие двух независимых коэффициентов h_+ и $h_\times$ означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с $\varphi = 0$ (определяемой функцией h_+) и с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (определяемой функцией $h_\times$).

Поляризация гравитационной волны: $d = 4$



(a) (b) (c)

Рис.: Изменение формы пространственной окружности в линейно поляризованной гравитационной волне в поперечной плоскости: (a) исходная окружность до того, как ее достигла волна; (b) фаза $h_* > 0$; фаза $h_* < 0$ (в случае монохромной волны, например, через полупериод после фазы (b)).

Энергия и импульс гравитационной волны: введение

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{21}$$

Энергия и импульс гравитационной волны: введение

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{21}$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$,

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \qquad (21)$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$, но так вы получите неправильный ответ.

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{21}$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$, но так вы получите неправильный ответ. Дело в том, что $t^{\mu\nu}$ — величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$. Поэтому и метрику надо разлагать до второго порядка.

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \tag{21}$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$, но так вы получите неправильный ответ. Дело в том, что $t^{\mu\nu}$ — величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$. Поэтому и метрику надо разлагать до второго порядка. Рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots . \tag{22}$$

Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ — решение линейной задачи, а $h^{(2)}_{\mu\nu}$ — величина второго порядка по $h^{(1)}_{\mu\nu}$.

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \qquad (21)$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$, но так вы получите неправильный ответ. Дело в том, что $t^{\mu\nu}$ — величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$. Поэтому и метрику надо разлагать до второго порядка. Рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots . \qquad (22)$$

Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ — решение линейной задачи, а $h^{(2)}_{\mu\nu}$ — величина второго порядка по $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Находим

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + \cdots , \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} h^{(1)})^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots . \end{aligned} \qquad (23)$$

Выясним, какие энергию и импульс переносит волна. По определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa} = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}. \quad (21)$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$ и вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}$, подставив туда полученное решение для $h_{\mu\nu}$, но так вы получите неправильный ответ. Дело в том, что $t^{\mu\nu}$ — величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$. Поэтому и метрику надо разлагать до второго порядка. Рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots . \quad (22)$$

Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ — решение линейной задачи, а $h^{(2)}_{\mu\nu}$ — величина второго порядка по $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Находим

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + \cdots , \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} h^{(1)})^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots . \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь мы изменили обозначения. Буквами h, ψ мы теперь обозначаем соответствующие матрицы (при необходимости поднимая и опуская индексы с помощью $\eta_{\mu\nu}$), а их следы изображаем значком tr:

$$\operatorname{tr} a = a_\mu^{\bar{\mu}} = \eta^{\mu\nu}a_{\mu\nu}, \quad (ab)_{\mu\nu} = a_\mu{}^{\bar{\lambda}} b_{\lambda\nu}, \ldots$$

Учтем, что в нашей задаче $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$:

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \quad g^{\alpha b} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\
g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\
|g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} h^{(1)2}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Символы Кристоффеля во втором порядке

Учтем, что в нашей задаче $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \quad g^{\alpha b} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Наложим калибровочное условие вида

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0, \qquad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\operatorname{tr} h^{(2)}. \tag{25}$$

Учтем, что в нашей задаче $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \quad g^{\alpha b} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Наложим калибровочное условие вида

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0, \qquad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\operatorname{tr} h^{(2)}. \tag{25}$$

В символах Кристоффеля легко отделяются вклады $h^{(2)}$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}, \tag{26}$$

Учтем, что в нашей задаче $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$, $\operatorname{tr} h^{(1)} = 0$:

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}, \quad g^{\alpha b} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}, \\
g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + (h^{(1)2})^{\overline{ab}}, \\
|g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Наложим калибровочное условие вида

$$
\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}{}_{,\nu} = 0, \qquad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\operatorname{tr} h^{(2)}. \tag{25}
$$

В символах Кристоффеля легко отделяются вклады $h^{(2)}$:

$$
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{26}
$$

Вклады, содержащие только $h^{(1)}$ имеют вид

$$
\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b} = \frac{1}{2}(\eta^{cd} - h^{(1)\overline{cd}})h^{(1)}_{bd,\alpha}, \qquad \tilde{\Gamma}^{\gamma}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1)}_{ab}{}^{,\gamma}. \tag{27}
$$

Остальные равны нулю.

Для тензора Риччи получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \tag{28}$$

Для тензора Риччи получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \tag{28}$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}{}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1)}{}_{,\alpha}h^{(1)}{}_{,\beta}), \quad \tilde{R}_{\alpha b} = 0, \\
\tilde{R}_{ab} = \frac{1}{4}\,\Box(h^{(1)2})_{ab}, \quad \tilde{R} = \frac{3}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}{}_{,\alpha}).
\end{gathered} \tag{29}$$

Для тензора Риччи получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \tag{28}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}{}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1)}{}_{,\alpha}h^{(1)}{}_{,\beta}), \quad \tilde{R}_{\alpha b} = 0,\\ \tilde{R}_{ab} = \frac{1}{4}\,\Box(h^{(1)2})_{ab}, \quad \tilde{R} = \frac{3}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)}{}_{,\alpha}).\end{gathered} \tag{29}$$

Получаем уравнение для вклада второго порядка

$$\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}. \tag{30a}$$

Для тензора Риччи получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}, \tag{28}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(h^{(1)} h^{(1)}{}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1)}{}_{,\alpha} h^{(1)}{}_{,\beta}), \quad \tilde{R}_{\alpha b} = 0,\\ \tilde{R}_{ab} = \frac{1}{4}\,\Box(h^{(1)2})_{ab}, \quad \tilde{R} = \frac{3}{4}\,\mathrm{tr}(h^{(1),\bar{\alpha}} h^{(1)}{}_{,\alpha}).\end{gathered} \tag{29}$$

Получаем уравнение для вклада второго порядка

$$\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}. \tag{30a}$$

Разложением получаем суперпотенциалы

$$\begin{aligned}16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(1 + \mathrm{tr}\, h^{(2)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, h^{(1)2}\right)(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta})\\ &\quad - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta} h^{(2)\overline{\gamma\delta}} + h^{(2)\overline{\alpha\gamma}}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma} h^{(2)\overline{\beta\delta}},\end{aligned} \tag{30b}$$

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} = -h^{(2)\overline{\alpha b}}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma} h^{(2)\overline{b\delta}}, \tag{30c}$$

$$\begin{aligned}16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} &= \left(1 + \mathrm{tr}\, h^{(2)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, h^{(1)2}\right)\eta^{ab}\eta^{\gamma\delta}\\ &\quad - \left(h^{(1)\overline{ab}} + h^{(2)\overline{ab}} - (h^{(1)2})^{\overline{ab}}\right)\eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab} h^{(2)\gamma\delta}.\end{aligned} \tag{30d}$$

Псевдотензор энергии импульса гравитационной волны

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$.

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия.

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия. Во всех остальных компонентах, выражая $\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = -2\tilde{R}_{\mu\nu}$ и применяя калибровочное условие, тоже можно избавиться от $h^{(2)}$.

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия. Во всех остальных компонентах, выражая $\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = -2\tilde{R}_{\mu\nu}$ и применяя калибровочное условие, тоже можно избавиться от $h^{(2)}$.

Окончательно получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha} h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\Box \operatorname{tr} h^2\right), \tag{31a}$$

(31b)

(31c)

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия. Во всех остальных компонентах, выражая $\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = -2\tilde{R}_{\mu\nu}$ и применяя калибровочное условие, тоже можно избавиться от $h^{(2)}$.

Окончательно получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha} h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\Box \operatorname{tr} h^2\right), \tag{31a}$$

$$t^{\alpha b} = 0, \tag{31b}$$

$$\tag{31c}$$

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box\, h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия. Во всех остальных компонентах, выражая $\Box\, h^{(2)}_{\mu\nu} = -2\tilde{R}_{\mu\nu}$ и применяя калибровочное условие, тоже можно избавиться от $h^{(2)}$.

Окончательно получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha} h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\,\Box\operatorname{tr} h^2\right), \tag{31a}$$

$$t^{\alpha b} = 0, \tag{31b}$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G}\left(\Box(h^2)^{ab} - \frac{1}{4}\eta^{ab}\,\Box\operatorname{tr} h^2\right). \tag{31c}$$

Теперь надо вычислить $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda}$. Для примера найдем

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}{}_{,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + (h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta})^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое равно нулю в силу волнового уравнения, а второе — в силу калибровочного условия. Во всех остальных компонентах, выражая $\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = -2\tilde{R}_{\mu\nu}$ и применяя калибровочное условие, тоже можно избавиться от $h^{(2)}$.

Окончательно получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha}h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\Box \operatorname{tr} h^2\right), \quad (31a)$$

$$t^{\alpha b} = 0, \quad (31b)$$

$$t^{ab} = \frac{1}{32\pi G}\left(\Box(h^2)^{ab} - \frac{1}{4}\eta^{ab}\Box \operatorname{tr} h^2\right). \quad (31c)$$

Поперечные компоненты t^{ab} не равны нулю только когда имеется две встречные волны:

$$h(x) = h^R(x^-) + h^L(x^+).$$

Если $h^L = 0$, выражение упрощается, поскольку $\Box f(h(x^-)) = 0$ для любой функции f компонент h. Поэтому

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}, \qquad t^{\alpha b} = 0, \qquad t^{ab} = 0. \tag{32}$$

Если $h^L = 0$, выражение упрощается, поскольку $\Box f(h(x^-)) = 0$ для любой функции f компонент h. Поэтому

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} h_b^{a,\alpha} h_a^{b,\beta}, \qquad t^{\alpha b} = 0, \qquad t^{ab} = 0. \tag{32}$$

В лоренц-инвариантном виде (когда направление волнового вектора произвольно) можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \operatorname{tr} h^{,\mu} h^{,\nu} = \frac{1}{32\pi G} h_\kappa^{\lambda,\mu} h_\lambda^{\kappa,\nu}. \tag{33}$$

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{35}$$

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{35}$$

При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot\varphi^- g_{--} + 2\dot\varphi^i g_{-i})\dot\varphi^- + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j, \quad g'_{-i} = \dot\varphi^- g_{-i} + \dot\varphi^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \tag{36}$$

где точкой мы обозначили производную по x'^-.

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{35}$$

При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot\varphi^- g_{--} + 2\dot\varphi^i g_{-i})\dot\varphi^- + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j, \quad g'_{-i} = \dot\varphi^- g_{-i} + \dot\varphi^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \tag{36}$$

где точкой мы обозначили производную по x'^-.
Задача 1. Покажите, что если $\det(g_{ij}) \neq 0$, таким преобразованием мы можем перейти к синхронной системе координат.

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{35}$$

При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot\varphi^- g_{--} + 2\dot\varphi^i g_{-i})\dot\varphi^- + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j, \quad g'_{-i} = \dot\varphi^- g_{-i} + \dot\varphi^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \tag{36}$$

где точкой мы обозначили производную по x'^-.
Задача 1. Покажите, что если $\det(g_{ij}) \neq 0$, таким преобразованием мы можем перейти к синхронной системе координат.
Пусть теперь $\det(g_{ij}) = 0$. Пусть (g^i) есть такой вектор, что $g_{ij}g^j = 0$. Выберем одну из координат (обозначим ее x^+), для которой $g^+ \neq 0$. Изменяя норму (g^i) мы можем положить $g^+ = -1$. Полагая $a, b = 2, \ldots, d-1$, получаем

$$g_{a+} = g_{ab}g^b, \qquad g_{++} = g_{ab}g^a g^b. \tag{37}$$

Рассмотрим решение для метрики в вакууме, которое зависит лишь от одной координаты, которую обозначим x^-:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^-) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i g_{\mu\nu} = 0 \quad (i \neq -). \tag{34}$$

Такое решение допускает замену координат вида

$$x^i = x'^i + \varphi^i(x'^-), \qquad x^- = \varphi^-(x'^-), \tag{35}$$

При этом метрика преобразуется по правилу

$$g'_{--} = (\dot\varphi^- g_{--} + 2\dot\varphi^i g_{-i})\dot\varphi^- + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j, \quad g'_{-i} = \dot\varphi^- g_{-i} + \dot\varphi^j g_{ij}, \quad g'_{ij} = g_{ij}, \tag{36}$$

где точкой мы обозначили производную по x'^-.
Задача 1. Покажите, что если $\det(g_{ij}) \neq 0$, таким преобразованием мы можем перейти к синхронной системе координат.
Пусть теперь $\det(g_{ij}) = 0$. Пусть (g^i) есть такой вектор, что $g_{ij}g^j = 0$.
Выберем одну из координат (обозначим ее x^+), для которой $g^+ \neq 0$. Изменяя норму (g^i) мы можем положить $g^+ = -1$. Полагая $a, b = 2, \ldots, d-1$, получаем

$$g_{a+} = g_{ab}g^b, \qquad g_{++} = g_{ab}g^a g^b. \tag{37}$$

Задача 2. Покажите, что преобразованием вида (35) можно привести метрику к виду

$$g_{--} = 0, \qquad g_{-+} = \frac{1}{2}, \qquad g_{-a} = 0, \qquad a = 2, \ldots, d-1. \tag{38}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2}g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot{g}_{bc}g^{cd}\dot{g}_{da}. \tag{43}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^-\,dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a\,dx^+)(dx^b + g^b\,dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-)\,dx^a\,dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2}g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot{g}_{bc}g^{cd}\dot{g}_{da}. \tag{43}$$

Уравнение $R_{--} = 0$ является единственным уравнением на g_{ab}. Это значит, что любое решение зависит от $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \frac{d(d-3)}{2}$ произвольных функций.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-) \, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2} g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2} g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4} g^{ab}\dot{g}_{bc} g^{cd}\dot{g}_{da}. \tag{43}$$

Уравнение $R_{--} = 0$ является единственным уравнением на g_{ab}. Это значит, что любое решение зависит от $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \frac{d(d-3)}{2}$ произвольных функций. Положим

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \qquad \det(\gamma_{ab}) = 1. \tag{44}$$

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^-\,dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a\,dx^+)(dx^b + g^b\,dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-)\,dx^a\,dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2}g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2}g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4}g^{ab}\dot{g}_{bc}g^{cd}\dot{g}_{da}. \tag{43}$$

Уравнение $R_{--} = 0$ является единственным уравнением на g_{ab}. Это значит, что любое решение зависит от $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \frac{d(d-3)}{2}$ произвольных функций. Положим

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \qquad \det(\gamma_{ab}) = 1. \tag{44}$$

Задача 6. Найдите дифференциальное уравнение для $\chi(x^-)$.

Тогда метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^- \, dx^+ + g_{ab}(dx^a + g^a \, dx^+)(dx^b + g^b \, dx^+). \tag{39}$$

Задача 3. Найдите компоненты R_{ab} тензора Риччи.

$$R_{ab} = -g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d. \tag{40}$$

В силу уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$. Следовательно, $\dot{g}^a = 0$. Тогда преобразованием $x^a + g^a x^+ \to x^a$ приводим метрику к виду

$$ds^2 = dx^- dx^+ + g_{ab}(x^-)\, dx^a \, dx^b. \tag{41}$$

Задача 4. Найдите символы Кристоффеля.

$$\Gamma^a_{b-} = \frac{1}{2}\kappa^a_b = \frac{1}{2} g^{ac}\dot{g}_{cb}, \qquad \Gamma^+_{ab} = -\kappa_{ab} = -\dot{g}_{ab}. \tag{42}$$

Задача 5. Найдите компоненту тензора Риччи R_{--}.

$$R_{--} = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}^a_a - \frac{1}{4}\kappa^b_a\kappa^a_b = -\frac{1}{2} g^{ab}\ddot{g}_{ab} + \frac{1}{4} g^{ab}\dot{g}_{bc} g^{cd}\dot{g}_{da}. \tag{43}$$

Уравнение $R_{--} = 0$ является единственным уравнением на g_{ab}. Это значит, что любое решение зависит от $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 = \frac{d(d-3)}{2}$ произвольных функций. Положим

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \qquad \det(\gamma_{ab}) = 1. \tag{44}$$

Задача 6. Найдите дифференциальное уравнение для $\chi(x^-)$.

$$\ddot{\chi} = \frac{1}{4(d-2)}\dot{\gamma}^{ab}\dot{\gamma}_{ab}\chi. \tag{45}$$

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$. Значит в координатах

$$x^0 = \frac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \frac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1.

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$.
Значит в координатах

$$x^0 = \tfrac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \tfrac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1.
Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt\, (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Поэтому χ будет убывать по закону $\chi(t) = 1 - \mathrm{const} \cdot t^2$.

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$. Значит в координатах

$$x^0 = \tfrac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \tfrac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1. Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt \, (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Поэтому χ будет убывать по закону $\chi(t) = 1 - \mathrm{const} \cdot t^2$. В какой-то момент $x^- = t_0$ величина χ достигнет нуля.

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot\gamma(0) = 0$.
Значит в координатах

$$x^0 = \tfrac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \tfrac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1.
Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot\chi \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt\,(\dot\gamma_{ab})^2.$$

Поэтому χ будет убывать по закону $\chi(t) = 1 - \mathrm{const}\cdot t^2$. В какой-то момент $x^- = t_0$ величина χ достигнет нуля.
Рассмотрим метрику вблизи точки t_0:

$$ds^2 = dx^- dx^+ - A^2(x^- - t_0)^2 \delta_{ab}\, dx^a\, dx^b. \tag{46}$$

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$.
Значит в координатах

$$x^0 = \tfrac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \tfrac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1.
Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt\, (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Поэтому χ будет убывать по закону $\chi(t) = 1 - \mathrm{const} \cdot t^2$. В какой-то момент $x^- = t_0$ величина χ достигнет нуля.
Рассмотрим метрику вблизи точки t_0:

$$ds^2 = dx^- dx^+ - A^2(x^- - t_0)^2 \delta_{ab}\, dx^a\, dx^b. \tag{46}$$

Задача 7. Сделайте замену координат

$$x^- = y^- + t_0, \qquad x^a = \frac{y^a}{Ay^-}, \qquad x^+ = y^+ - \frac{\delta_{ab} y^a y^b}{y^-} \tag{47}$$

и найдите метрику в новых координатах.

Заменой координат (35) можно добиться того, чтобы $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$.
Значит в координатах

$$x^0 = \tfrac{1}{2}(x^+ + x^-), \qquad x^1 = \tfrac{1}{2}(x^+ - x^-)$$

начальные данные следует задавать $d(d-3)/2$ произвольными функциями x^1.
Рассмотрим опять слабую волну $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ тогда $\chi(x^-) \simeq 1$ и

$$\dot{\chi} \simeq -\frac{1}{4(d-2)} \int_0^t dt\, (\dot{\gamma}_{ab})^2.$$

Поэтому χ будет убывать по закону $\chi(t) = 1 - \mathrm{const} \cdot t^2$. В какой-то момент $x^- = t_0$ величина χ достигнет нуля.
Рассмотрим метрику вблизи точки t_0:

$$ds^2 = dx^- dx^+ - A^2(x^- - t_0)^2 \delta_{ab}\, dx^a\, dx^b. \tag{46}$$

Задача 7. Сделайте замену координат

$$x^- = y^- + t_0, \qquad x^a = \frac{y^a}{Ay^-}, \qquad x^+ = y^+ - \frac{\delta_{ab} y^a y^b}{y^-} \tag{47}$$

и найдите метрику в новых координатах.

$$ds^2 = dy^-\, dy^+ - \delta_{ab}\, dy^a\, dy^b. \tag{48}$$

Это преобразование показывает, что в на поверхности $x^- = t_0$ многообразие не имеет особенности.