

Лекция 2. Двухчастичные S -матрицы. Теория возмущений

Михаил Лашкевич

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

- ④ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 = m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2,$$

$$m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 = m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2$$

имеет два решения.

- ④ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ❶ $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;
- ❷ $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — рассеяние без изменения импульсов;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Оператор $S(\theta)$ действует на внутренние состояния частиц.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

Рассмотрим процесс рассеяния двух частиц масс m_1 и m_2 в себя:
 $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Введем быстроты

$$\varepsilon_i = m_i \operatorname{ch} \theta_i, \quad p_i = m_i \operatorname{sh} \theta_i.$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\begin{aligned} m_1 \operatorname{ch} \theta'_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{ch} \theta_1 + m_2 \operatorname{ch} \theta_2, \\ m_1 \operatorname{sh} \theta'_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta'_2 &= m_1 \operatorname{sh} \theta_1 + m_2 \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

имеет два решения.

- ① $\theta'_i = \theta_i$ — **рассеяние без изменения импульсов**;
- ② $\theta'_1 = 2\theta_0 - \theta_1$, $\theta'_2 = 2\theta_0 - \theta_2$, где $m_1 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_0) + m_2 \operatorname{sh}(\theta_2 - \theta_0) = 0$ — отражение.

Мы будем рассматривать только первый случай, потому что именно он реализуется в интегрируемых моделях. Матрицу рассеяния можно записать в виде

$$S(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2.$$

Оператор $S(\theta)$ действует на внутренние состояния частиц.

Важно. Все частицы одинаковой массы мы будем считать разными внутренними состояниями одной частицы. Таким образом, если $m_1 = m_2$, матрица рассеяния является матрицей рассеяния тождественных частиц. Все формулы остаются теми же самыми. Возникает только требование (анти)симметрии волновых функций.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1, p_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1 + p'_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

В случае $n = n' = 2$ сделаем замену переменных

$(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \rightarrow (P^0, P^1, P'^0, P'^1)$:

$$\begin{aligned} \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) &= \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) \\ &= \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P). \end{aligned}$$

Матрица упругого рассеяния для двух частиц

С другой стороны, матрицу рассеяния можно записать так:

$$S(\vec{\theta}; \vec{\theta}') = \hat{1} + (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\mathcal{M}(\vec{\theta}; \vec{\theta}')}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2\varepsilon_i \prod_{j=1}^{n'} 2\varepsilon'_j}}.$$

Здесь $P = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, p_1 + p_2)$, $P' = (\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2, p'_1, p_2)$,

$\hat{1}$ — проекция единичного оператора,

$\mathcal{M}$ — амплитуда рассеяния, вычисляемая по стандартным правилам диаграммной техники.

В случае $n = n' = 2$ сделаем замену переменных

$(p_1, p_2, p'_1, p'_2) \rightarrow (P^0, P^1, P'^0, P'^1)$:

$$\begin{aligned} \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) &= \left| \frac{\partial(P^0, P^1)}{\partial(p_1, p_2)} \right| \delta(P' - P) \\ &= \frac{p_1 \varepsilon_2 - p_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P) = \frac{m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \delta(P' - P). \end{aligned}$$

Получаем

$$S(\theta_1 - \theta_2) = 1 + \frac{\mathcal{M}(\theta_1, \theta_2; \theta_1, \theta_2)}{4m_1 m_2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Здесь 1 — единичный оператор на $V_1 \otimes V_2$.

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Запишем действие модели Тирринга в виде

$$S^{\text{MT}}[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2\pi g} A^\mu A_\mu \right).$$

Для внутренних линий имеем

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{\hat{p} - m + i0}, \quad \mu \text{ ----- } \nu = i\pi g g_{\mu\nu}, \quad \begin{array}{c} | \\ \hline \mu \end{array} = -i\gamma^\mu.$$

Для внешних линий имеем

$$\begin{aligned} p \longrightarrow &= u_p \quad \text{для входящего фермиона,} \\ -p \longrightarrow &= u_{-p} \quad \text{для выходящего антифермиона,} \\ p \longleftarrow &= \bar{u}_p \quad \text{для выходящего фермиона,} \\ -p \longleftarrow &= \bar{u}_{-p} \quad \text{для входящего антифермиона.} \end{aligned}$$

Кроме того, каждая фермионная петля дает множитель (-1) , каждая пара внешних антифермионных линий дает (-1) , и каждая перестановка двух букв u от стандартного порядка (справа налево для входящих частиц и слева направо — для выходящих) дает (-1) . Эти знаки мы будем ставить явно перед диаграммами.

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Решение:

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ ie^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} ie^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Модель Тирринга. Диаграммная техника

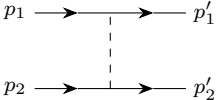
Буквы u_p для внешних линий должны удовлетворять уравнениям

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad (\hat{p} - m)u_p = 0.$$

Решение:

$$u_p = \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ i e^{-\theta/2} \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = [u_p]_{\theta \rightarrow \theta - i\pi} = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} i e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Нам понадобятся произведения, отвечающие четырехфермионному взаимодействию:


$$= -i\pi g (\bar{u}_{p'_1} \gamma^\mu u_{p_1}) (\bar{u}_{p'_2} \gamma_\mu u_{p_2}) = -4\pi i g m^2 \operatorname{ch} \frac{\theta_1 + \theta'_1 - \theta_2 - \theta'_2}{2}.$$

Модель Тирринга. Общий вид S -матрицы фермионов

Фермион и антифермион будем рассматривать как одну частицу массы m с пространством внутренних состояний

$$V = \mathbb{C}^2 = \text{span}(e_+, e_-)$$

Модель Тирринга. Общий вид S -матрицы фермионов

Фермион и антифермион будем рассматривать как одну частицу массы m с пространством внутренних состояний

$$V = \mathbb{C}^2 = \text{span}(e_+, e_-)$$

Семинар: Сохранение энергии и импульса в модели синус-Гордона (продолжение)