

Лекция 6

Бозоны и фермионы с контактным взаимодействием

Михаил Лашкевич

Модель Либа—Линихера

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Модель Либа—Линихера

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right).$$

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right).$$

Уравнение Гайзенберга для поля φ имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2.$$

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right).$$

Уравнение Гайзенберга для поля φ имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2.$$

Если сделать замену $\varphi \rightarrow \hbar^{-1/2} \varphi$, $c \rightarrow \hbar c$, в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right).$$

Уравнение Гайзенберга для поля φ имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2.$$

Если сделать замену $\varphi \rightarrow \hbar^{-1/2} \varphi$, $c \rightarrow \hbar c$, в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Два оператора

$$Q = \int dx \varphi^+ \varphi, \quad P = -i \int dx \varphi^+ \partial_x \varphi \tag{1}$$

коммутируют с гамильтонианом: $[H, Q] = [H, P] = 0$.

Пусть $\varphi(t, x)$, $\varphi^+(t, x)$ — бозонный оператор и эрмитово сопряженный ему оператор с коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = \delta(x - x'), \quad [\varphi(x), \varphi(x')] = [\varphi^+(x), \varphi^+(x')] = 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\frac{\partial_x \varphi^+ \partial_x \varphi}{2m} + \frac{c}{2} (\varphi^+)^2 \varphi^2 \right).$$

Уравнение Гайзенберга для поля φ имеет вид

$$i \partial_t \varphi = -\frac{1}{2m} \partial_x^2 \varphi - c \varphi^+ \varphi^2.$$

Если сделать замену $\varphi \rightarrow \hbar^{-1/2} \varphi$, $c \rightarrow \hbar c$, в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Два оператора

$$Q = \int dx \varphi^+ \varphi, \quad P = -i \int dx \varphi^+ \partial_x \varphi \quad (1)$$

коммутируют с гамильтонианом: $[H, Q] = [H, P] = 0$.

Q — оператор числа частиц;

P — оператор импульса.

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Определим N -частичные состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle,$$

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Определим N -частичные состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle,$$

Определим действие гамильтониана на волновые функции χ :

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle.$$

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Определим N -частичные состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle,$$

Определим действие гамильтониана на волновые функции χ :

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle.$$

Первично-квантованный гамильтониан $\hat{H}_N$ имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j).$$

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Определим N -частичные состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle,$$

Определим действие гамильтониана на волновые функции χ :

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle.$$

Первично-квантованный гамильтониан $\hat{H}_N$ имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j).$$

Такую систему бозонов с дельтаобразным взаимодействием называют **моделью Либа—Линихера**. Она допускает точное решение.

Введем вакуум:

$$\varphi(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi^+(x) = 0.$$

Определим N -частичные состояния:

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle, \quad Q|\chi_N\rangle = N|\chi_N\rangle,$$

Определим действие гамильтониана на волновые функции χ :

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)(x_1, \dots, x_N) \varphi^+(x_N) \cdots \varphi^+(x_1) |0\rangle.$$

Первично-квантованный гамильтониан $\hat{H}_N$ имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + c \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(x_i - x_j).$$

Такую систему бозонов с дельтаобразным взаимодействием называют [моделью Либа—Линихера](#). Она допускает точное решение.

В случае $N = 1$ система представляет собой один свободный бозон:

$$\chi(x) = e^{ipx}, \quad E = \frac{p^2}{2m}.$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Рассмотрим случай $N = 2$. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, поэтому волновая функция будет линейной комбинацией плоских волн:

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Здесь использована симметрия: $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$.

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Рассмотрим случай $N = 2$. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, поэтому волновая функция будет линейной комбинацией плоских волн:

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Здесь использована симметрия: $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$. Энергия равна сумме энергий частиц:

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Рассмотрим случай $N = 2$. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, поэтому волновая функция будет линейной комбинацией плоских волн:

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Здесь использована симметрия: $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$. Энергия равна сумме энергий частиц:

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

Найдем отношение коэффициентов A_{21}/A_{12} , используя взаимодействие.

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Рассмотрим случай $N = 2$. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, поэтому волновая функция будет линейной комбинацией плоских волн:

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Здесь использована симметрия: $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$. Энергия равна сумме энергий частиц:

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

Найдем отношение коэффициентов A_{21}/A_{12} , используя взаимодействие. Перейдем в систему центра масс. Положим $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x = x_1 - x_2$. Гамильтониан

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{4m}\partial_X^2 - \frac{1}{m}\partial_x^2 + c\delta(x),$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Рассмотрим случай $N = 2$. При $x_1 \neq x_2$ взаимодействия нет, поэтому волновая функция будет линейной комбинацией плоских волн:

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} A_{12}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{21}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 < x_2; \\ A_{21}e^{ip_1x_1+ip_2x_2} + A_{12}e^{ip_2x_1+ip_1x_2}, & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

Здесь использована симметрия: $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$. Энергия равна сумме энергий частиц:

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m},$$

Найдем отношение коэффициентов A_{21}/A_{12} , используя взаимодействие. Перейдем в систему центра масс. Положим $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x = x_1 - x_2$. Гамильтониан

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{4m}\partial_X^2 - \frac{1}{m}\partial_x^2 + c\delta(x),$$

а волновая функция

$$\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right) = e^{iPX} \times \begin{cases} A_{12}e^{ipx/2} + A_{21}e^{-ipx/2} & \text{при } x < 0; \\ A_{21}e^{ipx/2} + A_{12}e^{-ipx/2} & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} P = p_1 + p_2, \\ p = p_1 - p_2. \end{matrix}$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Проинтегрируем уравнение $\hat{H}_2\chi = E\chi$ по небольшому интервалу $[-\epsilon, \epsilon]$.
Получим

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{m}\partial_x\chi\left(X+\frac{x}{2}, X-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-0}^{x=+0} + c\chi(X, X) \\ &= \frac{1}{2m}(\partial_{x_2}\chi(x_1, x_2) - \partial_{x_1}\chi(x_1, x_2))\Bigg|_{x_1=x_2-0}^{x_1=x_2+0} + c\chi(x_2, x_2). \end{aligned}$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Проинтегрируем уравнение $\hat{H}_2\chi = E\chi$ по небольшому интервалу $[-\epsilon, \epsilon]$.
Получим

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{m}\partial_x\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-0}^{x=+0} + c\chi(X, X) \\ &= \frac{1}{2m}(\partial_{x_2}\chi(x_1, x_2) - \partial_{x_1}\chi(x_1, x_2))\Bigg|_{x_1=x_2-0}^{x_1=x_2+0} + c\chi(x_2, x_2). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = S(p_1 - p_2), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}.$$

Модель Либа—Линихера. Двухчастичная волновая функция

Проинтегрируем уравнение $\hat{H}_2\chi = E\chi$ по небольшому интервалу $[-\epsilon, \epsilon]$.
Получим

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{m}\partial_x\chi\left(X + \frac{x}{2}, X - \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-0}^{x=+0} + c\chi(X, X) \\ &= \frac{1}{2m}(\partial_{x_2}\chi(x_1, x_2) - \partial_{x_1}\chi(x_1, x_2))\Bigg|_{x_1=x_2-0}^{x_1=x_2+0} + c\chi(x_2, x_2). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = S(p_1 - p_2), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}.$$

Функция $S(p)$ представляет собой матрицу рассеяния двух частиц, а функция $\Phi(p)$, такая что

$$\Phi(-p) = -\Phi(p)$$

представляет собой фазу рассеяния, сдвинутую на π .

Модель Либа—Линихера. Анзац Бете

Волновая функция должна

- 1 быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);

Модель Либа—Линихера. Анзац Бете

Волновая функция должна

- 1 быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);
- 2 быть симметричной по отношению к перестановкам $x_i \leftrightarrow x_j$;

Волновая функция должна

- 1 быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);
- 2 быть симметричной по отношению к перестановкам $x_i \leftrightarrow x_j$;
- 3 при $x_i = x_j$ удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N) - \partial_{x_i}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N))\Bigg|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(\{x_k\}_{k=1}^N)\Big|_{x_i=x_j} = 0.$$

Волновая функция должна

- ❶ быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);
- ❷ быть симметричной по отношению к перестановкам $x_i \leftrightarrow x_j$;
- ❸ при $x_i = x_j$ удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N) - \partial_{x_i}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N))\Big|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(\{x_k\}_{k=1}^N)\Big|_{x_i=x_j} = 0.$$

Будем искать волновые функции в виде **анзаца (подстановки) Бёте**

$$\chi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} A_\tau \exp\left(i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}\right), \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}.$$

Волновая функция должна

- 1 быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);
- 2 быть симметричной по отношению к перестановкам $x_i \leftrightarrow x_j$;
- 3 при $x_i = x_j$ удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N) - \partial_{x_i}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N))\bigg|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(\{x_k\}_{k=1}^N)\bigg|_{x_i=x_j} = 0.$$

Будем искать волновые функции в виде [анзаца \(подстановки\) Бёте](#)

$$\chi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} A_\tau \exp\left(i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}\right), \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}.$$

Условие 3 накладывает соотношение на коэффициенты

$$\frac{A_{\dots j i \dots}}{A_{\dots i j \dots}} = S(p_i - p_j), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}.$$

Волновая функция должна

- ① быть линейной комбинацией плоских волн при $x_i \neq x_j$ ($\forall i \neq j$);
- ② быть симметричной по отношению к перестановкам $x_i \leftrightarrow x_j$;
- ③ при $x_i = x_j$ удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2m}(\partial_{x_j}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N) - \partial_{x_i}\chi(\{x_k\}_{k=1}^N))\Big|_{x_i=x_j-0}^{x_i=x_j+0} + c\chi(\{x_k\}_{k=1}^N)\Big|_{x_i=x_j} = 0.$$

Будем искать волновые функции в виде **анзаца (подстановки) Бёте**

$$\chi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\tau \in S^N} A_\tau \exp\left(i \sum_{i=1}^N p_{\tau_i} x_{\sigma_i}\right), \quad x_{\sigma_1} < x_{\sigma_2} < \dots < x_{\sigma_N}.$$

Условие 3 накладывает соотношение на коэффициенты

$$\frac{A_{\dots j i \dots}}{A_{\dots i j \dots}} = S(p_i - p_j), \quad S(p) \equiv -e^{i\Phi(p)} = \frac{p - imc}{p + imc}.$$

Импульс и энергия состояния складываются из импульсов и энергий отдельных частиц:

$$P = \sum_{i=1}^N p_i, \quad E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}.$$

Наложим периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Наложим периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Удобно положить $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N < x_1 + L$ и сравнить выражения почленно.

Наложим периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Удобно положить $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N < x_1 + L$ и сравнить выражения почленно. Получим систему **уравнений Бете**

$$e^{ip_i L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(p_i - p_j) = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Это N уравнений для N неизвестных. Наборы $\{p_i\}$, удовлетворяющие уравнениям Бете, называются **решениями** уравнений Бете, а отдельные значения p_i — **корнями** уравнений Бете.

Наложим периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Удобно положить $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N < x_1 + L$ и сравнить выражения почленно. Получим систему **уравнений Бете**

$$e^{ip_i L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(p_i - p_j) = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Это N уравнений для N неизвестных. Наборы $\{p_i\}$, удовлетворяющие уравнениям Бете, называются **решениями** уравнений Бете, а отдельные значения p_i — **корнями** уравнений Бете. Хотя энергия системы складывается из энергий частиц, сами импульсы p_i в для разных решений расположены по-разному и не образуют эквидистантной лестницы, как в случае свободных частиц.

Наложим периодические граничные условия

$$\chi(x_1 + L, x_2, \dots, x_N) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Удобно положить $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N < x_1 + L$ и сравнить выражения почленно. Получим систему **уравнений Бете**

$$e^{ip_i L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N S(p_i - p_j) = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Это N уравнений для N неизвестных. Наборы $\{p_i\}$, удовлетворяющие уравнениям Бете, называются **решениями** уравнений Бете, а отдельные значения p_i — **корнями** уравнений Бете. Хотя энергия системы складывается из энергий частиц, сами импульсы p_i в для разных решений расположены по-разному и не образуют эквидистантной лестницы, как в случае свободных частиц.

Величины

$$I_n = \sum_{i=1}^N p_i^n$$

сохраняются и представляют собой собственные значения некоторых коммутирующих интегралов движения

$$\mathcal{I}_n = (-i)^n \int dx (\varphi^+ \partial_x^n \varphi + \dots), \quad [\mathcal{I}_n, H] = 0, \quad [\mathcal{I}_m, \mathcal{I}_n] = 0.$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все числа n_i должны быть различными. Каждому набору различных чисел $\{n_i\}$ отвечает единственное решение $\{p_i\}$.

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все числа n_i должны быть различны. Каждому набору различных чисел $\{n_i\}$ отвечает единственное решение $\{p_i\}$. Этим случай $c \neq 0$ отличается от случая $c = 0$, где все n_i целые и могут совпадать. Тем не менее, есть предельный переход $c \rightarrow +0$, который снимает противоречие (см. задачу 6.3).

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все числа n_i должны быть различны. Каждому набору различных чисел $\{n_i\}$ отвечает единственное решение $\{p_i\}$. Этим случай $c \neq 0$ отличается от случая $c = 0$, где все n_i целые и могут совпадать. Тем не менее, есть предельный переход $c \rightarrow +0$, который снимает противоречие (см. задачу 6.3).

Зафиксируем какое-то решение $\{p_i\}$ уравнений Бете. Рассмотрим уравнение

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n,$$

как уравнение, задающее функцию $p(n)$.

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все числа n_i должны быть различны. Каждому набору различных чисел $\{n_i\}$ отвечает единственное решение $\{p_i\}$. Этим случай $c \neq 0$ отличается от случая $c = 0$, где все n_i целые и могут совпадать. Тем не менее, есть предельный переход $c \rightarrow +0$, который снимает противоречие (см. задачу 6.3).

Зафиксируем какое-то решение $\{p_i\}$ уравнений Бете. Рассмотрим уравнение

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n,$$

как уравнение, задающее функцию $p(n)$. Очевидно $p(n_i) = p_i$. Мы будем говорить о числах n_i как о **заполненных состояниях**,

Прологарифмируем уравнения Бете:

$$p_i L + \sum_{j=1}^N \Phi(p_i - p_j) = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все числа n_i должны быть различны. Каждому набору различных чисел $\{n_i\}$ отвечает единственное решение $\{p_i\}$. Этим случай $c \neq 0$ отличается от случая $c = 0$, где все n_i целые и могут совпадать. Тем не менее, есть предельный переход $c \rightarrow +0$, который снимает противоречие (см. задачу 6.3).

Зафиксируем какое-то решение $\{p_i\}$ уравнений Бете. Рассмотрим уравнение

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n,$$

как уравнение, задающее функцию $p(n)$. Очевидно $p(n_i) = p_i$. Мы будем говорить о числах n_i как о **заполненных состояниях**, а о числах $n \neq n_i$ ($\forall i$) как о **вакантных состояниях**.

Модель Либа—Линихера. Основное состояние. Качественные соображения

В пределе $c \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(p) = 0$. Уравнения Бете принимают вид

$$p_i L = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все импульсы независимы с тем ограничением, что все значения n_i по-прежнему различны.

Модель Либа—Линихера. Основное состояние. Качественные соображения

В пределе $c \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(p) = 0$. Уравнения Бете принимают вид

$$p_i L = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все импульсы независимы с тем ограничением, что все значения n_i по-прежнему различны.

В основном состоянии есть некоторое значение импульса $p_{\max}$, такое что все состояния с $|p| \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $|p| > p_{\max}$ вакантны.

Модель Либа—Линихера. Основное состояние. Качественные соображения

В пределе $c \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(p) = 0$. Уравнения Бете принимают вид

$$p_i L = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все импульсы независимы с тем ограничением, что все значения n_i по-прежнему различны.

В основном состоянии есть некоторое значение импульса $p_{\max}$, такое что все состояния с $|p| \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $|p| > p_{\max}$ вакантны.

Очевидно, $p_{\max} = \frac{\pi}{L}(N-1)$, то есть n_i пробегают значения от $-\frac{N-1}{2}$ до $\frac{N-1}{2}$.

Модель Либа—Линихера. Основное состояние. Качественные соображения

В пределе $c \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(p) = 0$. Уравнения Бете принимают вид

$$p_i L = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все импульсы независимы с тем ограничением, что все значения n_i по-прежнему различны.

В основном состоянии есть некоторое значение импульса $p_{\max}$, такое что все состояния с $|p| \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $|p| > p_{\max}$ вакантны. Очевидно, $p_{\max} = \frac{\pi}{L}(N-1)$, то есть n_i пробегает значения от $-\frac{N-1}{2}$ до $\frac{N-1}{2}$. Следовательно, энергия основного состояния равна

$$E_N^{(0)}(+\infty) = \frac{\pi^2}{2mL^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-1-2k}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2 N(N-1)(2N-1)}{48mL^2} \simeq \frac{\pi^2 N^3}{24mL^2}.$$

Последнее приближенное равенство верно в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$, $\frac{N}{L} = \text{const}$.

При конечных $c > 0$ для положительных импульсов $\sum_j \Phi(p_i - p_j) > 0$, а для отрицательных импульсов < 0 . Поэтому

$$p_{\max}(c) < p_{\max}(+\infty), \quad E_N^{(0)}(c) < E_N^{(0)}(+\infty).$$

Более того, функции $p_{\max}(c)$ и $E_N^{(0)}(c)$ монотонно растут при $c > 0$

Модель Либа—Линихера. Основное состояние. Качественные соображения

В пределе $c \rightarrow +\infty$ имеем $\Phi(p) = 0$. Уравнения Бете принимают вид

$$p_i L = 2\pi n_i, \quad n_i - \frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Все импульсы независимы с тем ограничением, что все значения n_i по-прежнему различны.

В основном состоянии есть некоторое значение импульса $p_{\max}$, такое что все состояния с $|p| \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $|p| > p_{\max}$ вакантны. Очевидно, $p_{\max} = \frac{\pi}{L}(N-1)$, то есть n_i пробегает значения от $-\frac{N-1}{2}$ до $\frac{N-1}{2}$. Следовательно, энергия основного состояния равна

$$E_N^{(0)}(+\infty) = \frac{\pi^2}{2mL^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-1-2k}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2 N(N-1)(2N-1)}{48mL^2} \simeq \frac{\pi^2 N^3}{24mL^2}.$$

Последнее приближенное равенство верно в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$, $\frac{N}{L} = \text{const}$.

При конечных $c > 0$ для положительных импульсов $\sum_j \Phi(p_i - p_j) > 0$, а для отрицательных импульсов < 0 . Поэтому

$$p_{\max}(c) < p_{\max}(+\infty), \quad E_N^{(0)}(c) < E_N^{(0)}(+\infty).$$

Более того, функции $p_{\max}(c)$ и $E_N^{(0)}(c)$ монотонно растут при $c > 0$ и $p_{\max}(0) = 0$, $E_N^{(0)}(0) = 0$ (см. задачу 6.3).

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const.}$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const}$.

Расположим n_i в возрастающем порядке: $n_{i+1} > n_i$. В термодинамическом пределе $p_{i+1} - p_i \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Также $p(n+1) - p(n) \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем ввести спектральные плотности состояний и частиц.

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const}$.

Расположим n_i в возрастающем порядке: $n_{i+1} > n_i$. В термодинамическом пределе $p_{i+1} - p_i \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Также $p(n+1) - p(n) \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем ввести спектральные плотности состояний и частиц.

Спектральную плотность состояний определим как

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp(n)} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \right\rangle.$$

Усреднение производится по небольшому интервалу.

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const}$.

Расположим n_i в возрастающем порядке: $n_{i+1} > n_i$. В термодинамическом пределе $p_{i+1} - p_i \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Также $p(n+1) - p(n) \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем ввести спектральные плотности состояний и частиц.

Спектральную плотность состояний определим как

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp(n)} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \right\rangle.$$

Усреднение производится по небольшому интервалу.

Аналогично введем **спектральную плотность частиц**:

$$\rho^\bullet(p) = \frac{2\pi di}{L dp_i} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p_{i+1} - p_i)} \right\rangle.$$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const}$.

Расположим n_i в возрастающем порядке: $n_{i+1} > n_i$. В термодинамическом пределе $p_{i+1} - p_i \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Также $p(n+1) - p(n) \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем ввести спектральные плотности состояний и частиц.

Спектральную плотность состояний определим как

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp(n)} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \right\rangle.$$

Усреднение производится по небольшому интервалу.

Аналогично введем **спектральную плотность частиц**:

$$\rho^\bullet(p) = \frac{2\pi di}{L dp_i} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p_{i+1} - p_i)} \right\rangle.$$

Вернемся к уравнению

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n.$$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Рассмотрим термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, $N/L = \text{const}$.

Расположим n_i в возрастающем порядке: $n_{i+1} > n_i$. В термодинамическом пределе $p_{i+1} - p_i \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Также $p(n+1) - p(n) \sim L^{-1} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем ввести спектральные плотности состояний и частиц.

Спектральную плотность состояний определим как

$$\rho(p) = \frac{2\pi dn}{L dp(n)} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))} \right\rangle.$$

Усреднение производится по небольшому интервалу.

Аналогично введем **спектральную плотность частиц**:

$$\rho^\bullet(p) = \frac{2\pi di}{L dp_i} = \left\langle \frac{2\pi}{L(p_{i+1} - p_i)} \right\rangle.$$

Вернемся к уравнению

$$pL + \sum_{j=1}^N \Phi(p - p_j) = 2\pi n.$$

Возьмем разность двух таких уравнения с последовательными значениями n и поделим на $L(p(n+1) - p(n))$:

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} = \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}.$$

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)} \\ = \frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}.$$

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)} = \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} = \rho(p)$$

В правой части мы видим плотность состояний,

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} \stackrel{= \rho(p)}{=}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц.

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} \\ = \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} \stackrel{= \rho(p)}{=}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц. Теперь сумму превращаем в интеграл

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p).$$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} \stackrel{= \rho(p)}{=}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц. Теперь сумму превращаем в интеграл

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p).$$

Мы получили линейное интегральное уравнение, связывающее плотность частиц и плотность состояний.

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} = \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} \stackrel{= \rho(p)}{=}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц. Теперь сумму превращаем в интеграл

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p).$$

Мы получили линейное интегральное уравнение, связывающее плотность частиц и плотность состояний. Дополним эту систему условием на количество частиц

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) = \frac{N}{L}.$$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} \stackrel{= \rho(p)}{=} \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц. Теперь сумму превращаем в интеграл

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p).$$

Мы получили линейное интегральное уравнение, связывающее плотность частиц и плотность состояний. Дополним эту систему условием на количество частиц

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) = \frac{N}{L}.$$

Разумеется, спектральная плотность частиц не может превышать спектральную плотность состояний. Поэтому накладываем ограничение

$$0 \leq \rho^\bullet(p) \leq \rho(p).$$

Модель Либа—Линихера. Термодинамический предел

Перепишем уравнение так:

$$1 + \sum_{j=1}^N \frac{p_{j+1} - p_j}{2\pi} \frac{\Phi(p(n+1) - p_j) - \Phi(p(n) - p_j)}{p(n+1) - p(n)} \boxed{\frac{2\pi}{L(p_{j+1} - p_j)}} \stackrel{= \rho^\bullet(p)}{=} = \boxed{\frac{2\pi}{L(p(n+1) - p(n))}} \stackrel{= \rho(p)}{=}.$$

В правой части мы видим плотность состояний, а в левой — плотность частиц. Теперь сумму превращаем в интеграл

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p).$$

Мы получили линейное интегральное уравнение, связывающее плотность частиц и плотность состояний. Дополним эту систему условием на количество частиц

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) = \frac{N}{L}.$$

Разумеется, спектральная плотность частиц не может превышать спектральную плотность состояний. Поэтому накладываем ограничение

$$0 \leq \rho^\bullet(p) \leq \rho(p).$$

Импульс и энергия системы равны

$$P = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) p, \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p) \frac{p^2}{2m}.$$

Модель Либа—Линихера. Основное состояние

В случае основного состояния все состояния с $p \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $p > p_{\max}$ вакантны. Поэтому

$$\rho^{\bullet}(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases}$$

Модель Либа—Линихера. Основное состояние

В случае основного состояния все состояния с $p \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $p > p_{\max}$ вакантны. Поэтому

$$\rho^{\bullet}(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений

$$1 + \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho(p') = \rho(p), \quad \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) = \frac{N}{L}.$$

Модель Либа—Линихера. Основное состояние

В случае основного состояния все состояния с $p \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $p > p_{\max}$ вакантны. Поэтому

$$\rho^{\bullet}(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений

$$1 + \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho(p') = \rho(p), \quad \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) = \frac{N}{L}.$$

Импульс такой системы равен нулю, а плотность энергии равна

$$\frac{E}{L} = \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) \frac{p^2}{2m}.$$

Модель Либа—Линихера. Основное состояние

В случае основного состояния все состояния с $p \leq p_{\max}$ заполнены, а все состояния с $p > p_{\max}$ вакантны. Поэтому

$$\rho^\bullet(p) = \begin{cases} \rho(p), & |p| \leq p_{\max}; \\ 0, & |p| > p_{\max}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений

$$1 + \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp'}{2\pi} \Phi'(p - p') \rho(p') = \rho(p), \quad \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) = \frac{N}{L}.$$

Импульс такой системы равен нулю, а плотность энергии равна

$$\frac{E}{L} = \int_{-p_{\max}}^{p_{\max}} \frac{dp}{2\pi} \rho(p) \frac{p^2}{2m}.$$

Уравнения Бете в интегральной форме можно решать численно или аналитически в каких-то предельных случаях.

Модель фермионов с дельтаобразным взаимодействием

Модель Либа—Линихера является простейшим случаем интегрируемых моделей с дельтаобразным взаимодействием — моделей Янга—Годéна. Рассмотрим простейшую фермионную модель из этого класса.

Модель фермионов с дельтаобразным взаимодействием

Модель Либба—Линихера является простейшим случаем интегрируемых моделей с дельтаобразным взаимодействием — моделей Янга—Годéна.

Рассмотрим простейшую фермионную модель из этого класса.

Пусть $\psi_{\pm}(x)$, $\psi_{\pm}^{\dagger}(x)$ — фермионные поля с коммутационными соотношениями

$$\{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(x - x'), \quad \{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}(x')\} = \{\psi_{\varepsilon}^{\dagger}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = 0.$$

Модель фермионов с дельтаобразным взаимодействием

Модель Либба—Линихера является простейшим случаем интегрируемых моделей с дельтаобразным взаимодействием — моделей Янга—Годéна.

Рассмотрим простейшую фермионную модель из этого класса.

Пусть $\psi_{\pm}(x)$, $\psi_{\pm}^{\dagger}(x)$ — фермионные поля с коммутационными соотношениями

$$\{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(x - x'), \quad \{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}(x')\} = \{\psi_{\varepsilon}^{\dagger}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = 0.$$

Введем систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\sum_{\varepsilon=\pm} \frac{\partial_x \psi_{\varepsilon}^{\dagger} \partial_x \psi_{\varepsilon}}{2m} + c \psi_{+}^{\dagger} \psi_{-}^{\dagger} \psi_{-} \psi_{+} \right).$$

Обратим внимание, что здесь взаимодействуют только частицы с **разными спинами**.

Модель фермионов с дельтаобразным взаимодействием

Модель Либба—Линихера является простейшим случаем интегрируемых моделей с дельтаобразным взаимодействием — моделей Янга—Годэна.

Рассмотрим простейшую фермионную модель из этого класса.

Пусть $\psi_{\pm}(x)$, $\psi_{\pm}^{\dagger}(x)$ — фермионные поля с коммутационными соотношениями

$$\{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta(x - x'), \quad \{\psi_{\varepsilon}(x), \psi_{\varepsilon'}(x')\} = \{\psi_{\varepsilon}^{\dagger}(x), \psi_{\varepsilon'}^{\dagger}(x')\} = 0.$$

Введем систему с гамильтонианом

$$H = \int dx \left(\sum_{\varepsilon=\pm} \frac{\partial_x \psi_{\varepsilon}^{\dagger} \partial_x \psi_{\varepsilon}}{2m} + c \psi_{+}^{\dagger} \psi_{-}^{\dagger} \psi_{-} \psi_{+} \right).$$

Обратим внимание, что здесь взаимодействуют только частицы с **разными спинами**.

Числа частиц каждого спина и импульс

$$Q_{\varepsilon} = \int dx \psi_{\varepsilon}^{\dagger} \psi_{\varepsilon}, \quad P = -i \sum_{\varepsilon=\pm} \int dx \psi_{\varepsilon}^{\dagger} \partial_x \psi_{\varepsilon}$$

сохраняются: $[H, Q_{\varepsilon}] = [H, P] = 0$.

Введем вакуум условиями

$$\psi_\varepsilon(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_\varepsilon^+(x) = 0$$

Фермионная модель

Введем вакуум условиями

$$\psi_{\varepsilon}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_{\varepsilon}^{+}(x) = 0$$

и состояния с фиксированным числом частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \cdots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle.$$

Фермионная модель

Введем вакуум условиями

$$\psi_{\varepsilon}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_{\varepsilon}^{+}(x) = 0$$

и состояния с фиксированным числом частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle.$$

Гамильтониан $\hat{H}_N$, действующий на волновые функции определяется уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle$$

Фермионная модель

Введем вакуум условиями

$$\psi_{\varepsilon}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_{\varepsilon}^{+}(x) = 0$$

и состояния с фиксированным числом частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle.$$

Гамильтониан $\hat{H}_N$, действующий на волновые функции определяется уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle$$

и равен

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + \frac{c}{2} \sum_{i < j} (1 - \sigma_i^3 \sigma_j^3) \delta(x_i - x_j),$$

Оператор σ_i^{α} действует на i -й спин ε_i .

Введем вакуум условиями

$$\psi_{\varepsilon}(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\psi_{\varepsilon}^{+}(x) = 0$$

и состояния с фиксированным числом частиц

$$|\chi_N\rangle = \int d^N x \chi^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle.$$

Гамильтониан $\hat{H}_N$, действующий на волновые функции определяется уравнением

$$H|\chi_N\rangle = \int d^N x (\hat{H}_N \chi)^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}(x_1, \dots, x_N) \psi_{\varepsilon_N}^{+}(x_N) \dots \psi_{\varepsilon_1}^{+}(x_1) |0\rangle$$

и равен

$$\hat{H}_N = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2 + \frac{c}{2} \sum_{i < j} (1 - \sigma_i^3 \sigma_j^3) \delta(x_i - x_j),$$

Оператор σ_i^{α} действует на i -й спин ε_i . Оператор $\frac{1}{2}(1 - \sigma_i^3 \sigma_j^3)$ действует единицей на пару противоположных спинов и нулем на пару одинаковых спинов.

