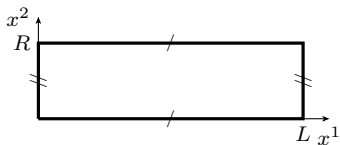


Лекция 11. Термодинамический анзац Бете: основы метода

Михаил Лашкевич

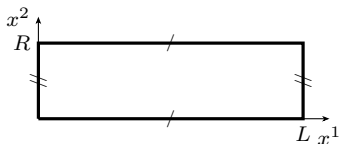
Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:



Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:

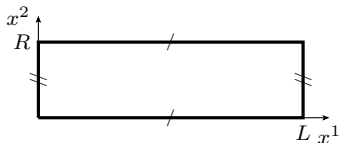


Мы можем рассматривать систему двумя способами:

- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.

Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:

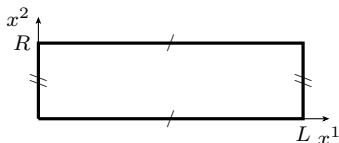


Мы можем рассматривать систему двумя способами:

- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.
- R -картина: x^2 — пространственная координата, x^1 — мнимое время. Тогда R — размер ящика, L — обратная температура.

Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:



Мы можем рассматривать систему двумя способами:

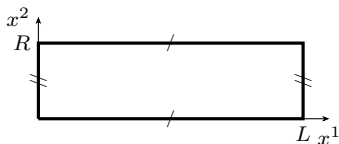
- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.
- R -картина: x^2 — пространственная координата, x^1 — мнимое время. Тогда R — размер ящика, L — обратная температура.

Предположим, что
$$R \ll \xi \ll L, \tag{1}$$

где ξ — корреляционная длина.

Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:



Мы можем рассматривать систему двумя способами:

- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.
- R -картина: x^2 — пространственная координата, x^1 — мнимое время. Тогда R — размер ящика, L — обратная температура.

Предположим, что
$$R \ll \xi \ll L, \quad (1)$$

где ξ — корреляционная длина. Тогда

- L -картина. Разреженная ($L \gg N\xi$?) система при высокой температуре. Термодинамика описывается S -матрицей.

Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:



Мы можем рассматривать систему двумя способами:

- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.
- R -картина: x^2 — пространственная координата, x^1 — мнимое время. Тогда R — размер ящика, L — обратная температура.

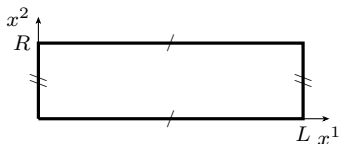
Предположим, что
$$R \ll \xi \ll L, \tag{1}$$

где ξ — корреляционная длина. Тогда

- L -картина. Разреженная ($L \gg N\xi$?) система при высокой температуре. Термодинамика описывается S -матрицей.
- R -картина. Сжатая система при низкой температуре описывается конформной теорией поля в ультрафиолетовой неподвижной точке РГ.

Квантовая теория поля на торе

Рассмотрим систему на прямоугольном торе $T_{L,R}$ размера $L \times R$ в эвклидовом пространстве:



Мы можем рассматривать систему двумя способами:

- L -картина: x^1 — пространственная координата, x^2 — мнимое время. Тогда L — размер ящика, R — обратная температура.
- R -картина: x^2 — пространственная координата, x^1 — мнимое время. Тогда R — размер ящика, L — обратная температура.

Предположим, что
$$R \ll \xi \ll L, \quad (1)$$

где ξ — корреляционная длина. Тогда

- L -картина. Разреженная ($L \gg N\xi$?) система при высокой температуре. Термодинамика описывается S -матрицей.
- R -картина. Сжатая система при низкой температуре описывается конформной теорией поля в ультрафиолетовой неподвижной точке РГ.

Вычисляя статсумму системы

$$Z(L, R) = \text{tr}_{\mathcal{H}_L} e^{-RH_L} = \text{tr}_{\mathcal{H}_R} e^{-LH_R}, \quad (2)$$

в двух картинах, мы можем установить связь между массивной теорией, описываемой S -матрицей, и конформной теорией поля на малых масштабах.

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - T_{\overline{\mathfrak{z}}\overline{\mathfrak{z}}} + 2T_{\mathfrak{z}\overline{\mathfrak{z}}}),$$

где $\mathfrak{z} = x^2 + ix^1$.

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + 2T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}),$$

где $\mathfrak{z} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова ($T_{\text{ЭВК}}^{\mu\nu} = -T_{\text{МИНК}}^{\mu\nu}$) тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}.$$

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + 2T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}),$$

где $\mathfrak{z} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова ($T_{\text{ЭВК}}^{\mu\nu} = -T_{\text{МИНК}}^{\mu\nu}$) тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}.$$

Тогда

$$H_R = H_R^{(0)} + H_R^{\text{p}} = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \quad (4)$$

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}} + 2T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}),$$

где $\mathfrak{z} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова ($T_{\text{ЭВК}}^{\mu\nu} = -T_{\text{МИНК}}^{\mu\nu}$) тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^{\text{P}} = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left(\mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_{\text{P}}) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_{\text{P}}(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}} + 2T_{\bar{3}\bar{3}}),$$

где $\bar{3} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова ($T_{\text{ЭВК}}^{\mu\nu} = -T_{\text{МИНК}}^{\mu\nu}$) тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^p = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left(\mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_p) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_p(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Пренебрегая возмущением, получаем

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R}, \quad c_{\text{eff}} = c - 12\Delta_{\text{min}} - 12\bar{\Delta}_{\text{min}}. \quad (5)$$

Здесь c_{eff} — **эффективный центральный заряд**.

Начнем с R -картины. Поскольку L очень велико,

$$\log Z(L, R) = -L\mathcal{E}_0(R) + O(L^0), \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_0(R)$ — энергия основного состояния гамильтониана H_R .

Рассмотрим возмущенную конформную теорию поля. Гамильтониан

$$H_R = \int_0^R dx^2 T_{11}(x) = \int_0^R dx^2 (-T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}} + 2T_{\bar{3}\bar{3}}),$$

где $\bar{3} = x^2 + ix^1$. Для эвклидова ($T_{\text{ЭВК}}^{\mu\nu} = -T_{\text{МИНК}}^{\mu\nu}$) тензора энергии-импульса имеем

$$T(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \bar{T}(x) = 2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}, \quad \Theta(x) = -2\pi T_{\bar{3}\bar{3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_R &= H_R^{(0)} + H_R^p = -\frac{\mathbb{T}_0 + \bar{\mathbb{T}}_0}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^R dx^2 \Theta(x) \\ &= \frac{2\pi}{R} \left(\mathbb{L}_0 + \bar{\mathbb{L}}_0 - \frac{c}{12} \right) + (1 - \Delta_p) \lambda \int_0^R dx^2 \Phi_p(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Пренебрегая возмущением, получаем

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R}, \quad c_{\text{eff}} = c - 12\Delta_{\text{min}} - 12\bar{\Delta}_{\text{min}}. \quad (5)$$

Здесь c_{eff} — **эффективный центральный заряд**. В случае мацубаровских граничных условий $\Delta_{\text{min}} \leq 0$, $c_{\text{eff}} \geq c$.

Теперь учтем возмущение:

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_P} \rangle_0}{\langle e^{-S_P} \rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \quad S_P = \lambda \int d^2x \Phi_P.$$

Теперь учтем возмущение:

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_P} \rangle_0}{\langle e^{-S_P} \rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \quad S_P = \lambda \int d^2x \Phi_P.$$

Здесь $\langle \cdots \rangle_0 = \langle \Phi_{\min} | \cdots | \Phi_{\min} \rangle$ — среднее в конформной теории поля,

Теперь учтем возмущение:

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_P} \rangle_0}{\langle e^{-S_P} \rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \quad S_P = \lambda \int d^2x \Phi_P.$$

Здесь $\langle \dots \rangle_0 = \langle \Phi_{\min} | \dots | \Phi_{\min} \rangle$ — среднее в конформной теории поля, $\varepsilon_\infty = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$ — вакуумное среднее тензора энергии-импульса на бесконечной прямой, которое необходимо вычитать при регуляризации энергии основного состояния.

Теперь учтем возмущение:

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \epsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_P} \rangle_0}{\langle e^{-S_P} \rangle_0} - \epsilon_\infty R, \quad S_P = \lambda \int d^2x \Phi_P.$$

Здесь $\langle \dots \rangle_0 = \langle \Phi_{\min} | \dots | \Phi_{\min} \rangle$ — среднее в конформной теории поля, $\epsilon_\infty = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$ — вакуумное среднее тензора энергии-импульса на бесконечной прямой, которое необходимо вычитать при регуляризации энергии основного состояния.

Вычислим $\mathcal{E}_0(R)$, прологарифмировав статсумму:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(R) &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \left\langle e^{-L\mathcal{E}_0^{(0)}(R) - S_P} \right\rangle_0 - \epsilon_\infty R \\ &= \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \epsilon_\infty R - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_P^n \rangle_0. \end{aligned}$$

Теперь учтем возмущение:

$$\mathcal{E}_0(R) = \langle \text{vac} | H_R | \text{vac} \rangle - \varepsilon_\infty R = \frac{\langle H_R e^{-S_P} \rangle_0}{\langle e^{-S_P} \rangle_0} - \varepsilon_\infty R, \quad S_P = \lambda \int d^2x \Phi_P.$$

Здесь $\langle \dots \rangle_0 = \langle \Phi_{\min} | \dots | \Phi_{\min} \rangle$ — среднее в конформной теории поля, $\varepsilon_\infty = \langle T_1^1 \rangle_{R=\infty}$ — вакуумное среднее тензора энергии-импульса на бесконечной прямой, которое необходимо вычитать при регуляризации энергии основного состояния.

Вычислим $\mathcal{E}_0(R)$, прологарифмировав статсумму:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(R) &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \left\langle e^{-L\mathcal{E}_0^{(0)}(R) - S_P} \right\rangle_0 - \varepsilon_\infty R \\ &= \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_P^n \rangle_0. \end{aligned}$$

Логарифм заменяет средние на связные средние $\langle \dots \rangle_{0,c}$:

$$\mathcal{E}_0(R) = \mathcal{E}_0^{(0)}(R) - \varepsilon_\infty R + \lambda \int dx^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \langle \Phi_P S_P^n \rangle_{0,c}.$$

Перемасштабируя, получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_P)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \quad (6)$$
$$\mathbb{M}_n(l) = \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c}$$

Перемасштабируя, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0(R) &= -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_p)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \\ \mathbb{M}_n(l) &= \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_p(x) \Phi_p(x_1) \cdots \Phi_p(x_n) \rangle_{0,c}\end{aligned}\tag{6}$$

Интеграл масштабным преобразованием приведен от $T_{L,R}$ к $T_{L/R,1}$.

Перемасштабируя, получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_P)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \quad (6)$$

$$\mathbb{M}_n(l) = \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c}$$

Интеграл масштабным преобразованием приведен от $T_{L,R}$ к $T_{L/R,1}$. В пределе $L/R \rightarrow \infty$ тор становится цилиндром, а цилиндр можно отобразить на плоскость. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(\infty) &= (2\pi)^{2-(2n+2)(1-\Delta_P)} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^n |z_i|^{2\Delta_P-2} \quad (7) \end{aligned}$$

Перемасштабируя, получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_P)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \quad (6)$$

$$\mathbb{M}_n(l) = \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c}$$

Интеграл масштабным преобразованием приведен от $T_{L,R}$ к $T_{L/R,1}$. В пределе $L/R \rightarrow \infty$ тор становится цилиндром, а цилиндр можно отобразить на плоскость. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(\infty) &= (2\pi)^{2-(2n+2)(1-\Delta_P)} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^n |z_i|^{2\Delta_P-2} \quad (7) \end{aligned}$$

Два основных случая:

- $\Delta_{\min} = 0$ или $\bar{\Delta}_{\min} = 0$. Тогда $\langle \Phi_P \rangle_{0,c} = 0$, и ряд начинается с $n = 1$;

Перемасштабируя, получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_P)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \quad (6)$$

$$\mathbb{M}_n(l) = \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c}$$

Интеграл масштабным преобразованием приведен от $T_{L,R}$ к $T_{L/R,1}$. В пределе $L/R \rightarrow \infty$ тор становится цилиндром, а цилиндр можно отобразить на плоскость. Поэтому

$$\mathbb{M}_n(\infty) = (2\pi)^{2-(2n+2)(1-\Delta_P)} \times \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^n |z_i|^{2\Delta_P-2} \quad (7)$$

Два основных случая:

- $\Delta_{\min} = 0$ или $\bar{\Delta}_{\min} = 0$. Тогда $\langle \Phi_P \rangle_{0,c} = 0$, и ряд начинается с $n = 1$;
- $\Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0$, причем $\langle \Phi_P \rangle_{0,c} \neq 0$, и ряд начинается с $n = 0$.

Перемасштабируя, получаем

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} R^{(2n+2)(1-\Delta_P)-1} \mathbb{M}_n(L/R) \quad (6)$$

$$\mathbb{M}_n(l) = \int_{T_{l,1}} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c}$$

Интеграл масштабным преобразованием приведен от $T_{L,R}$ к $T_{L/R,1}$. В пределе $L/R \rightarrow \infty$ тор становится цилиндром, а цилиндр можно отобразить на плоскость. Поэтому

$$\mathbb{M}_n(\infty) = (2\pi)^{2-(2n+2)(1-\Delta_P)} \times \int_{\mathbb{R}^2} d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \langle \Phi_P(x) \Phi_P(x_1) \cdots \Phi_P(x_n) \rangle_{0,c} \prod_{i=1}^n |z_i|^{2\Delta_P-2} \quad (7)$$

Два основных случая:

- $\Delta_{\min} = 0$ или $\bar{\Delta}_{\min} = 0$. Тогда $\langle \Phi_P \rangle_{0,c} = 0$, и ряд начинается с $n = 1$;
- $\Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0$, причем $\langle \Phi_P \rangle_{0,c} \neq 0$, и ряд начинается с $n = 0$.

Поэтому

$$\mathcal{E}_0(R) = -\frac{\pi c_{\text{eff}}}{6R} - \varepsilon_\infty R + O(R^\alpha), \quad \alpha = \begin{cases} 1 - 2\Delta_P, & \text{если } \Delta_{\min}, \bar{\Delta}_{\min} < 0; \\ 3 - 4\Delta_P, & \text{если } \Delta_{\min} = 0 \text{ или } \bar{\Delta}_{\min} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим простой случай. Пусть в модели имеется одна частица с матрицей $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Рассмотрим условие периодичности для **асимптотической** волновой функции:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N e^{i\phi(\theta_i - \theta_j)} = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Рассмотрим простой случай. Пусть в модели имеется одна частица с матрицей $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Рассмотрим условие периодичности для **асимптотической** волновой функции:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N e^{i\phi(\theta_i - \theta_j)} = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \operatorname{sh} \theta_i + \sum_{j=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (10)$$

причем $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+F}{2}$, если $S(0) = -1$, и $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{F}{2}$, если $S(0) = 1$.

Рассмотрим простой случай. Пусть в модели имеется одна частица с матрицей $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Рассмотрим условие периодичности для **асимптотической** волновой функции:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N e^{i\phi(\theta_i - \theta_j)} = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \operatorname{sh} \theta_i + \sum_{i=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (10)$$

причем $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+F}{2}$, если $S(0) = -1$, и $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{F}{2}$, если $S(0) = 1$. Для каждого решения уравнений Бете $\{\theta_i\}$ зададим функцию $\theta(n)$ уравнением

$$mL \operatorname{sh} \theta(n) + \sum_{i=1}^N \phi(\theta(n) - \theta_j) = 2\pi n. \quad (11)$$

Очевидно $\theta(n_i) = \theta_i$. Если $n \in \{n_i\}$ будем считать состояние n заполненным, иначе — пустым.

Рассмотрим простой случай. Пусть в модели имеется одна частица с матрицей $S(\theta) = \pm e^{i\phi(\theta)}$, $\phi(-\theta) = -\phi(\theta)$. Рассмотрим условие периодичности для асимптотической волновой функции:

$$e^{imL \operatorname{sh} \theta_i} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N e^{i\phi(\theta_i - \theta_j)} = (-1)^F, \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Прологарифмируем эти уравнения:

$$mL \operatorname{sh} \theta_i + \sum_{i=1}^N \phi(\theta_i - \theta_j) = 2\pi n_i, \quad (10)$$

причем $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{N-1+F}{2}$, если $S(0) = -1$, и $n_i \in \mathbb{Z} + \frac{F}{2}$, если $S(0) = 1$. Для каждого решения уравнений Бете $\{\theta_i\}$ зададим функцию $\theta(n)$ уравнением

$$mL \operatorname{sh} \theta(n) + \sum_{i=1}^N \phi(\theta(n) - \theta_j) = 2\pi n. \quad (11)$$

Очевидно $\theta(n_i) = \theta_i$. Если $n \in \{n_i\}$ будем считать состояние n заполненным, иначе — пустым. Мы будем полагать, что значения n_i упорядочены по возрастанию: $n_{i+1} \geq n_i$, причем равные значения отвечают кратным корням уравнений Бете, если таковые имеются.

L -картина. Термодинамический предел

Введем спектральную **плотность состояний** $\rho(\theta)$ и **плотность частиц** $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (12)$$

L -картина. Термодинамический предел

Введем спектральную **плотность состояний** $\rho(\theta)$ и **плотность частиц** $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (12)$$

Интеграл от ρ^\bullet дает плотность частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (13)$$

Введем спектральную плотность состояний $\rho(\theta)$ и плотность частиц $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (12)$$

Интеграл от ρ^\bullet дает плотность частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (13)$$

а интеграл с весом $m \operatorname{ch} \theta$ дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \operatorname{ch} \theta. \quad (14)$$

Все интегралы по θ мы будем понимать по всей прямой \mathbb{R} , если не оговорено иное.

Введем спектральную **плотность состояний** $\rho(\theta)$ и **плотность частиц** $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (12)$$

Интеграл от ρ^\bullet дает плотность частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (13)$$

а интеграл с весом $m \operatorname{ch} \theta$ дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \operatorname{ch} \theta. \quad (14)$$

Все интегралы по θ мы будем понимать по всей прямой \mathbb{R} , если не оговорено иное.

Обычным образом перепишем уравнения Бете в термодинамическом пределе в виде интегрального уравнения:

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta'). \quad (15)$$

L-картина. Термодинамический предел

Введем спектральную **плотность состояний** $\rho(\theta)$ и **плотность частиц** $\rho^\bullet(\theta)$:

$$\rho(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta(n+1) - \theta(n))} \right\rangle_{\theta(n) \simeq \theta}, \quad \rho^\bullet(\theta) = \left\langle \frac{2\pi}{L(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right\rangle_{\theta_i \simeq \theta}. \quad (12)$$

Интеграл от ρ^\bullet дает плотность частиц:

$$\int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) = \frac{N}{L}, \quad (13)$$

а интеграл с весом $m \operatorname{ch} \theta$ дает энергию состояния:

$$E[\rho^\bullet] = mL \int \frac{d\theta}{2\pi} \rho^\bullet(\theta) \operatorname{ch} \theta. \quad (14)$$

Все интегралы по θ мы будем понимать по всей прямой \mathbb{R} , если не оговорено иное.

Обычным образом перепишем уравнения Бете в термодинамическом пределе в виде интегрального уравнения:

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta'). \quad (15)$$

Теперь, по идее, надо найти все решения интегрального уравнения, вычислить энергии и записать статсумму. Это будет сложный функциональный интеграл, который надо вычислять методом перевала. Решение этой задачи сводится к минимизации свободной энергии.

Свободная энергия:

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet]. \quad (16)$$

Свободная энергия:

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet]. \quad (16)$$

Теперь нужно определить энтропию $S[\rho, \rho^\bullet]$. Рассмотрим два случая:

Свободная энергия:

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet]. \quad (16)$$

Теперь нужно определить энтропию $S[\rho, \rho^\bullet]$. Рассмотрим два случая:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с $S(0) = 1$ или бозонами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может быть заполнено только один раз.

Свободная энергия:

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet]. \quad (16)$$

Теперь нужно определить энтропию $S[\rho, \rho^\bullet]$. Рассмотрим два случая:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с $S(0) = 1$ или бозонами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может быть заполнено только один раз.
- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с $S(0) = 1$ или фермионами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может заполняться неограниченным числом частиц.

Свободная энергия:

$$F[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1}S[\rho, \rho^\bullet]. \quad (16)$$

Теперь нужно определить энтропию $S[\rho, \rho^\bullet]$. Рассмотрим два случая:

- «Фермионный» случай. Если частицы являются фермионами с $S(0) = 1$ или бозонами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может быть заполнено только один раз.
- «Бозонный» случай. Если частицы являются бозонами с $S(0) = 1$ или фермионами с $S(0) = -1$, каждое значение n_i может заполняться неограниченным числом частиц.

Разобьем вещественную прямую на небольшие интервалы $\Delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$. Тогда $S = \sum_k \Delta S_k$. Энтропия ΔS_k понимается как число «микроскопических» состояний, которыми реализуется «макроскопическое» состояние, которое задается числом частиц N_k^\bullet на числе состояний N_k этом интервале Δ_k .

- «Фермионный» случай. Число состояний = число сочетаний из N_k по N_k^\bullet :

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

- «Фермионный» случай. Число состояний = число сочетаний из N_k по N_k^\bullet :

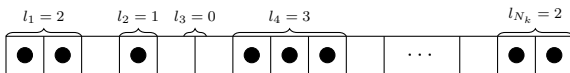
$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

- «Бозонный» случай. Число состояний = число сочетаний из $N_k + N_k^\bullet - 1$ по N_k^\bullet .

- «Фермионный» случай. Число состояний = число сочетаний из N_k по N_k^\bullet :

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

- «Бозонный» случай. Число состояний = число сочетаний из $N_k + N_k^\bullet - 1$ по N_k^\bullet . Действительно, возьмем $N_k + N_k^\bullet - 1$ ящиков и заполним их N_k^\bullet частицами. В нем останется $N_k - 1$ пустых мест:

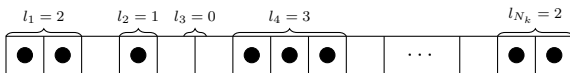


Количество точек между $(j - 1)$ -м и j -м пустыми местами отождествим с числом заполнения l_j состояния j в этом интервале. Таким образом, мы построили взаимно-однозначное соответствие между наборами чисел заполнения $\{l_j\}$, $\sum_j l_j = N_k^\bullet$ и сочетаниями.

- «Фермионный» случай. Число состояний = число сочетаний из N_k по N_k^\bullet :

$$\Delta S_k = \log \frac{N_k!}{N_k^\bullet!(N_k - N_k^\bullet)!} \simeq N_k \log N_k - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - (N_k - N_k^\bullet) \log(N_k - N_k^\bullet).$$

- «Бозонный» случай. Число состояний = число сочетаний из $N_k + N_k^\bullet - 1$ по N_k^\bullet . Действительно, возьмем $N_k + N_k^\bullet - 1$ ящиков и заполним их N_k^\bullet частицами. В нем останется $N_k - 1$ пустых мест:



Количество точек между $(j - 1)$ -м и j -м пустыми местами отождествим с числом заполнения l_j состояния j в этом интервале. Таким образом, мы построили взаимно-однозначное соответствие между наборами чисел заполнения $\{l_j\}$, $\sum_j l_j = N_k^\bullet$ и сочетаниями.

Отсюда

$$\Delta S_k = \log \frac{(N_k + N_k^\bullet - 1)!}{N_k^\bullet!(N_k - 1)!} \simeq (N_k + N_k^\bullet) \log(N_k + N_k^\bullet) - N_k^\bullet \log N_k^\bullet - N_k \log N_k.$$

В непрерывном пределе имеем

- «Фермионный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (17)$$

В непрерывном пределе имеем

- «Фермионный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (17)$$

- «Бозонный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (18)$$

В непрерывном пределе имеем

- «Фермионный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (17)$$

- «Бозонный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (18)$$

Чтобы упростить запись, введем знаковый множитель

$$\sigma = (-1)^F S(0) = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \quad (19)$$

В непрерывном пределе имеем

- «Фермионный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - (\rho - \rho^\bullet) \log(\rho - \rho^\bullet)) \quad (17)$$

- «Бозонный» случай:

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \rho^\bullet) - \rho^\bullet \log \rho^\bullet - \rho \log \rho) \quad (18)$$

Чтобы упростить запись, введем знаковый множитель

$$\sigma = (-1)^F S(0) = \begin{cases} 1 & \text{в «бозонном» случае;} \\ -1 & \text{в «фермионном» случае.} \end{cases} \quad (19)$$

Тогда энтропию можно записать в виде

$$S[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} ((\sigma\rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma\rho^\bullet) - \sigma\rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet). \quad (20)$$

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta')$$

Интегральное уравнение Бете можно переписать как вариационную производную

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta). \quad (15)$$

Интегральное уравнение Бете можно переписать как вариационную производную

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta). \quad (15)$$

Теперь мы можем найти минимум свободной энергии

$$F[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho^\bullet(\theta) m \operatorname{ch} \theta - R^{-1} ((\sigma \rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma \rho^\bullet) - \sigma \rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet)).$$

Интегральное уравнение Бете можно переписать как вариационную производную

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta). \quad (15)$$

Теперь мы можем найти минимум свободной энергии

$$F[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho^\bullet(\theta) m \operatorname{ch} \theta - R^{-1} ((\sigma \rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma \rho^\bullet) - \sigma \rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet)).$$

из условия

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} \\ &= mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma \rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma \rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Интегральное уравнение Бете можно переписать как вариационную производную

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta). \quad (15)$$

Теперь мы можем найти минимум свободной энергии

$$F[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho^\bullet(\theta) m \operatorname{ch} \theta - R^{-1} ((\sigma \rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma \rho^\bullet) - \sigma \rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet)).$$

из условия

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} \\ &= m R \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma \rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma \rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем функцию, называемую **псевдоэнергией**:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma \rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \quad (22)$$

Интегральное уравнение Бете можно переписать как вариационную производную

$$\rho(\theta) = m \operatorname{ch} \theta + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \rho^\bullet(\theta') \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \rho(\theta')}{\delta \rho^\bullet(\theta)} = \frac{1}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta). \quad (15)$$

Теперь мы можем найти минимум свободной энергии

$$F[\rho, \rho^\bullet] = L \int \frac{d\theta}{2\pi} (\rho^\bullet(\theta) m \operatorname{ch} \theta - R^{-1} ((\sigma \rho + \rho^\bullet) \log(\rho + \sigma \rho^\bullet) - \sigma \rho \log \rho - \rho^\bullet \log \rho^\bullet)).$$

из условия

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2\pi R}{L} \frac{\delta F[\rho[\rho^\bullet], \rho^\bullet]}{\delta \rho^\bullet(\theta)} \\ &= mR \operatorname{ch} \theta - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta' - \theta) \log \frac{\rho(\theta') + \sigma \rho^\bullet(\theta')}{\rho(\theta')} - \log \frac{\rho(\theta) + \sigma \rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем функцию, называемую **псевдоэнергией**:

$$\epsilon(\theta) = \log \frac{\rho(\theta) + \sigma \rho^\bullet(\theta)}{\rho^\bullet(\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho^\bullet(\theta)}{\rho(\theta)} = \frac{1}{e^{\epsilon(\theta)} - \sigma}. \quad (22)$$

Выражая минимум через псевдоэнергию $\epsilon(\theta)$, получаем **уравнение Янга—Янга**:

$$\epsilon(\theta) - \sigma \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta')} \right) = mR \operatorname{ch} \theta. \quad (23)$$

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения.

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения. Для свободной энергии F и пропорциональной ей (при больших L) энергии основного состояния в R -картине \mathcal{E}_0 имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (24)$$

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения. Для свободной энергии F и пропорциональной ей (при больших L) энергии основного состояния в R -картине \mathcal{E}_0 имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (24)$$

Удобно ввести не зависящую от размерных параметров скейлинговую функцию $f(r)$:

$$f(mR) = \sigma m R \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right) = R \mathcal{E}_0(R). \quad (25)$$

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения. Для свободной энергии F и пропорциональной ей (при больших L) энергии основного состояния в R -картине \mathcal{E}_0 имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (24)$$

Удобно ввести не зависящую от размерных параметров скейлинговую функцию $f(r)$:

$$f(mR) = \sigma m R \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right) = R \mathcal{E}_0(R). \quad (25)$$

Через нее выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (26)$$

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения. Для свободной энергии F и пропорциональной ей (при больших L) энергии основного состояния в R -картине \mathcal{E}_0 имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (24)$$

Удобно ввести не зависящую от размерных параметров скейлинговую функцию $f(r)$:

$$f(mR) = \sigma m R \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right) = R \mathcal{E}_0(R). \quad (25)$$

Через нее выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (26)$$

Дифференцируя уравнение Янга—Янга по R и сравнивая результат с уравнением Бете, получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, mR)}{\partial R}. \quad (27)$$

L -картина. Свободная энергия и плотность состояний

Все остальные величины можно выразить через решение $\epsilon(\theta, mR)$ этого нелинейного интегрального уравнения. Для свободной энергии F и пропорциональной ей (при больших L) энергии основного состояния в R -картине \mathcal{E}_0 имеем

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L} = \sigma m \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right). \quad (24)$$

Удобно ввести не зависящую от размерных параметров скейлинговую функцию $f(r)$:

$$f(mR) = \sigma m R \int \frac{d\theta}{2\pi} \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta)} \right) = R \mathcal{E}_0(R). \quad (25)$$

Через нее выражается эффективный центральный заряд:

$$c_{\text{eff}} = -\frac{6}{\pi} f(0). \quad (26)$$

Дифференцируя уравнение Янга—Янга по R и сравнивая результат с уравнением Бете, получаем

$$\rho(\theta) = \frac{\partial \epsilon(\theta, mR)}{\partial R}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N}{L} = \sigma \frac{\partial}{\partial R} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left(1 - \sigma e^{-\epsilon(\theta, mR)} \right). \quad (28)$$

L -картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц.

L -картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (29)$$

L -картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (29)$$

Продельвая все те же операции, получаем интегральное уравнение Бете

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (30)$$

L-картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (29)$$

Продельвая все те же операции, получаем интегральное уравнение Бете

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (30)$$

При выводе уравнения Янга—Янга удобнее фиксировать не числа частиц N_a , а **химические потенциалы** μ_a . Для нейтральных частиц $\mu_a = 0$, а для пар частица—античастица $\mu_a = -\mu_{\bar{a}}$.

L-картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (29)$$

Продельвая все те же операции, получаем интегральное уравнение Бете

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (30)$$

При выводе уравнения Янга—Янга удобнее фиксировать не числа частиц N_a , а **химические потенциалы** μ_a . Для нейтральных частиц $\mu_a = 0$, а для пар частица—античастица $\mu_a = -\mu_{\bar{a}}$. Ищем минимум большого термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (31)$$

L-картина. Несколько частиц с диагональной матрицей рассеяния

Пусть имеется набор частиц $a = 1, \dots, r$ с массами m_a и матрицами рассеяния

$$S_{ab}(\theta) = Z_{ab} e^{i\phi_{ab}(\theta)}, \quad Z_{ab} = \pm 1, \quad \phi_{ab}(\theta) = -\phi_{ba}(\theta).$$

Пусть $\sigma_a = 1$ для «бозонных» частиц и $\sigma_a = -1$ для «фермионных» частиц. Тогда уравнения Бете имеют вид:

$$m_a L \operatorname{sh} \theta_i^{(a)} + \sum_{b=1}^r \sum_{i=1}^{N_b} \phi_{ab}(\theta_i^{(a)} - \theta_j^{(b)}) = 2\pi n_i^{(a)}. \quad (29)$$

Продельвая все те же операции, получаем интегральное уравнение Бете

$$\rho_a(\theta) = m_a \operatorname{ch} \theta + \sum_{b=1}^r \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \rho_b^\bullet(\theta'). \quad (30)$$

При выводе уравнения Янга—Янга удобнее фиксировать не числа частиц N_a , а **химические потенциалы** μ_a . Для нейтральных частиц $\mu_a = 0$, а для пар частица—античастица $\mu_a = -\mu_{\bar{a}}$. Ищем минимум большого термодинамического потенциала

$$\Omega[\rho, \rho^\bullet] = E[\rho^\bullet] - R^{-1} S[\rho, \rho^\bullet] - \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (31)$$

В остальном выводе достаточно заменить

$$\rho \rightarrow \rho_a, \quad \rho^\bullet \rightarrow \rho_a^\bullet, \quad \epsilon \rightarrow \epsilon_a, \quad \sigma \rightarrow \sigma_a, \quad \phi(\theta - \theta') \rightarrow \phi_{ab}(\theta - \theta'), \quad \int \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow \sum_a \int \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Получаем уравнение Янга—Янга в виде

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')}) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (32)$$

Получаем уравнение Янга—Янга в виде

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')} \right) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (32)$$

Для большого потенциала имеем

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)} \right). \quad (33)$$

Получаем уравнение Янга—Янга в виде

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')} \right) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (32)$$

Для большого потенциала имеем

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)} \right). \quad (33)$$

Для плотности и числа частиц имеем

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)} \right). \quad (34)$$

Здесь m — общий множитель масс: $m_a = \kappa_a m$.

Получаем уравнение Янга—Янга в виде

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')} \right) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (32)$$

Для большого потенциала имеем

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)} \right). \quad (33)$$

Для плотности и числа частиц имеем

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)} \right). \quad (34)$$

Здесь m — общий множитель масс: $m_a = \kappa_a m$. Энергия $\mathcal{E}_0(R)$ выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \quad F = \Omega + \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (35)$$

Получаем уравнение Янга—Янга в виде

$$\epsilon_a(\theta) - \sum_{b=1}^r \sigma_b \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi'_{ab}(\theta - \theta') \log \left(1 - \sigma_b e^{-\epsilon_b(\theta')} \right) = R(m_a \operatorname{ch} \theta - \mu_a). \quad (32)$$

Для большого потенциала имеем

$$\frac{R\Omega}{L} = \sum_{a=1}^r \int \frac{d\theta}{2\pi} \sigma_a m_a \operatorname{ch} \theta \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta)} \right). \quad (33)$$

Для плотности и числа частиц имеем

$$\rho_a(\theta) = \frac{m}{R} \frac{\partial \epsilon_a(\theta)}{\partial m}, \quad \frac{N_a}{L} = \frac{\sigma_a m}{R} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d\theta}{2\pi} \log \left(1 - \sigma_a e^{-\epsilon_a(\theta, R)} \right). \quad (34)$$

Здесь m — общий множитель масс: $m_a = \kappa_a m$. Энергия $\mathcal{E}_0(R)$ выражается через свободную энергию

$$\mathcal{E}_0(R) = \frac{RF}{L}, \quad F = \Omega + \sum_{a=1}^r \mu_a N_a. \quad (35)$$

В симметричном случае $N_a = N_{\bar{a}} (\forall a)$, все $\mu_a = 0$, и ответы не отличаются от случая нейтральных частиц. Однако в некоторых задачах интересен и несимметричный случай.

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

1. Получите уравнение Янга—Янга.

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

1. Получите уравнение Янга—Янга.

$$\epsilon(p) + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p - p') \log(1 + e^{-\epsilon(p')}) = R \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right).$$

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p-p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

1. Получите уравнение Янга—Янга.

$$\epsilon(p) + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p-p') \log(1 + e^{-\epsilon(p')}) = R \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right).$$

2. Найдите большой термодинамический потенциал

$$\Omega =$$

Рассмотрим модель Либа—Линихера. В термодинамическом пределе уравнение Бете для него имеет вид

$$1 + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p-p') \rho^\bullet(p') = \rho(p), \quad \phi(p) = -i \log \frac{mc + ip}{mc - ip},$$

причем число частиц и энергия равны

$$N = L \int \frac{dp}{2\pi} \rho^\bullet(p), \quad E = L \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2m} \rho^\bullet(p).$$

1. Получите уравнение Янга—Янга.

$$\epsilon(p) + \int \frac{dp'}{2\pi} \phi'(p-p') \log(1 + e^{-\epsilon(p')}) = R \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right).$$

2. Найдите большой термодинамический потенциал

$$\Omega = - \frac{L}{R} \int \frac{dp}{2\pi} \log(1 + e^{-\epsilon(p)}).$$