Лекция 13.
Конформная теория возмущений

Михаил Лашкевич

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{O}_I(x) = \Delta_I \mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0 \mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I \mathcal{O}_I(x),$$

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}_I(x) = \Delta_I\mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0\mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I\mathcal{O}_I(x),$$

и операцией вычисления среднего значения $\langle\cdots\rangle_0$.

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}_I(x) = \Delta_I\mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0\mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I\mathcal{O}_I(x),$$

и операцией вычисления среднего значения $\langle\cdots\rangle_0$. Будем считать, что единственный оператор с ненулевым средним — это единичный оператор $1 = \mathcal{O}_0(x)$:

$$\langle\mathcal{O}_I(x)\rangle_0 = 0 \ (I \neq 0), \quad \langle 1\rangle_0 = 1.$$

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}_I(x) = \Delta_I\mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0\mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I\mathcal{O}_I(x),$$

и операцией вычисления среднего значения $\langle\cdots\rangle_0$. Будем считать, что единственный оператор с ненулевым средним — это единичный оператор $1 = \mathcal{O}_0(x)$:

$$\langle\mathcal{O}_I(x)\rangle_0 = 0 \ (I \neq 0), \quad \langle 1\rangle_0 = 1.$$

Произведение двух операторов можно разложить по локальным операторам:

$$\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}_{IJ}^K(x)\mathcal{O}_K(0). \tag{1}$$

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}_I(x) = \Delta_I\mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0\mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I\mathcal{O}_I(x),$$

и операцией вычисления среднего значения $\langle\cdots\rangle_0$. Будем считать, что единственный оператор с ненулевым средним — это единичный оператор $1 = \mathcal{O}_0(x)$:

$$\langle\mathcal{O}_I(x)\rangle_0 = 0 \ (I \neq 0), \quad \langle 1\rangle_0 = 1.$$

Произведение двух операторов можно разложить по локальным операторам:

$$\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}_{IJ}^K(x)\mathcal{O}_K(0). \tag{1}$$

Структурные функции $C_{IJ}^K(x)$ в конформной теории поля имеют простой вид

$$\mathcal{C}_{IJ}^K(x) = \mathcal{C}_{IJ}^K z^{\Delta_K-\Delta_I-\Delta_J}\bar{z}^{\bar{\Delta}_K-\bar{\Delta}_I-\bar{\Delta}_J}. \tag{2}$$

Рассмотрим конформную теорию поля, определенную набором операторов $\mathcal{O}_I(x)$ с фиксированными конформными размерностями

$$\mathcal{L}_0\mathcal{O}_I(x) = \Delta_I\mathcal{O}_I(x), \quad \bar{\mathcal{L}}_0\mathcal{O}_I(x) = \bar{\Delta}_I\mathcal{O}_I(x),$$

и операцией вычисления среднего значения $\langle\cdots\rangle_0$. Будем считать, что единственный оператор с ненулевым средним — это единичный оператор $1 = \mathcal{O}_0(x)$:

$$\langle\mathcal{O}_I(x)\rangle_0 = 0 \ (I \neq 0), \quad \langle 1\rangle_0 = 1.$$

Произведение двух операторов можно разложить по локальным операторам:

$$\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0) = \sum_K \mathcal{C}^K_{IJ}(x)\mathcal{O}_K(0). \tag{1}$$

Структурные функции $C^K_{IJ}(x)$ в конформной теории поля имеют простой вид

$$\mathcal{C}^K_{IJ}(x) = \mathcal{C}^K_{IJ} z^{\Delta_K-\Delta_I-\Delta_J}\bar{z}^{\bar{\Delta}_K-\bar{\Delta}_I-\bar{\Delta}_J}. \tag{2}$$

Набор конформных размерностей и структурных констант полностью задает теорию.

Применим операторные разложения к вычислению корреляционных функций:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}_{I_N}(x_N)\cdots\mathcal{O}_{I_1}(x_1)\rangle_0 \\ = \sum_{J_1,\ldots,J_{N-2}} \mathcal{C}^{0}_{I_N J_{N-2}}(x_N-x_1)\cdots\mathcal{C}^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3-x_1)\mathcal{C}^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2-x_1)\end{aligned} \quad (3)$$

при условии

$$|x_N-x_1|>\cdots>|x_3-x_1|>|x_2-x_1|. \quad (4)$$

Применим операторные разложения к вычислению корреляционных функций:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle_0 \\ = \sum_{J_1,\ldots,J_{N-2}} \mathcal{C}^0_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1) \cdots \mathcal{C}^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) \mathcal{C}^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1) \tag{3}$$

при условии

$$|x_N - x_1| > \cdots > |x_3 - x_1| > |x_2 - x_1|. \tag{4}$$

Ограничимся корреляционными функциями квазипримарных операторов, то есть операторов, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{O}_I(x) = \bar{\mathcal{L}}_1 \mathcal{O}_I(x) = 0. \tag{5}$$

Применим операторные разложения к вычислению корреляционных функций:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle_0 \\ = \sum_{J_1,\ldots,J_{N-2}} \mathcal{C}^0_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1) \cdots \mathcal{C}^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) \mathcal{C}^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1) \qquad (3)$$

при условии

$$|x_N - x_1| > \cdots > |x_3 - x_1| > |x_2 - x_1|. \qquad (4)$$

Ограничимся корреляционными функциями квазипримарных операторов, то есть операторов, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{O}_I(x) = \bar{\mathcal{L}}_1 \mathcal{O}_I(x) = 0. \qquad (5)$$

Остальные оператор являются потомками вида $\mathcal{L}^k_{-1} \bar{\mathcal{L}}^l_{-1} \mathcal{O}_I(x) = \partial^k \bar{\partial}^l \mathcal{O}_I(x)$. Корреляционные функции потомков являются производными корреляционных функций квазипримарных операторов. Отношение структурных констант потомка к структурным константам квазипримарного оператора полностью определяется конформными размерностями.

Сопряженный оператор и оператор на бесконечности

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ} = \mathcal{C}^{0}_{IJ}$, причем $G_{IJ} = 0$, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$.

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ} = \mathcal{C}^0_{IJ}$, причем $G_{IJ} = 0$, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$. Определим также числа G^{IJ} как элементы матрицы $(G^{-1})^t$.

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ} = \mathcal{C}^0_{IJ}$, причем $G_{IJ} = 0$, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$. Определим также числа G^{IJ} как элементы матрицы $(G^{-1})^t$. Введем сопряженный оператор

$$\mathcal{O}^I(x) = \sum_J{}' G^{IJ} \mathcal{O}_J(x), \tag{6}$$

где штрих обозначает суммирование по квазипримарным операторам.

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ}=\mathcal{C}^0_{IJ}$, причем $G_{IJ}=0$, если $\Delta_I\ne\Delta_J$ или $\bar\Delta_I\ne\bar\Delta_J$. Определим также числа G^{IJ} как элементы матрицы $(G^{-1})^t$. Введем сопряженный оператор

$$\mathcal{O}^I(x)={\sum_J}'G^{IJ}\mathcal{O}_J(x),\tag{6}$$

где штрих обозначает суммирование по квазипримарным операторам. Тогда

$$\langle\mathcal{O}^I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0=\delta^I_Jz^{-2\Delta_I}\bar z^{-2\bar\Delta_I}.\tag{7}$$

Сопряженный оператор и оператор на бесконечности

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ} = \mathcal{C}^0_{IJ}$, причем $G_{IJ} = 0$, если $\Delta_I \neq \Delta_J$ или $\bar{\Delta}_I \neq \bar{\Delta}_J$. Определим также числа G^{IJ} как элементы матрицы $(G^{-1})^t$. Введем сопряженный оператор

$$\mathcal{O}^I(x) = \sum_J{}' G^{IJ} \mathcal{O}_J(x), \tag{6}$$

где штрих обозначает суммирование по квазипримарным операторам. Тогда

$$\langle \mathcal{O}^I(x) \mathcal{O}_J(0) \rangle_0 = \delta^I_J z^{-2\Delta_I} \bar{z}^{-2\bar{\Delta}_I}. \tag{7}$$

Определим также оператор в бесконечно удаленной точке:

$$\mathcal{O}^I(\infty) = \lim_{x\to\infty} z^{2\Delta_I} \bar{z}^{2\bar{\Delta}_I} \mathcal{O}^I(x). \tag{8}$$

На квазипримарных операторах можно определить «метрику» $G_{IJ}=\mathcal{C}^0_{IJ}$, причем $G_{IJ}=0$, если $\Delta_I\neq\Delta_J$ или $\bar\Delta_I\neq\bar\Delta_J$. Определим также числа G^{IJ} как элементы матрицы $(G^{-1})^t$. Введем сопряженный оператор

$$\mathcal{O}^I(x)=\sum_J{}' G^{IJ}\mathcal{O}_J(x), \tag{6}$$

где штрих обозначает суммирование по квазипримарным операторам. Тогда

$$\langle\mathcal{O}^I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0=\delta^I_J z^{-2\Delta_I}\bar z^{-2\bar\Delta_I}. \tag{7}$$

Определим также оператор в бесконечно удаленной точке:

$$\mathcal{O}^I(\infty)=\lim_{x\to\infty} z^{2\Delta_I}\bar z^{2\bar\Delta_I}\mathcal{O}^I(x). \tag{8}$$

Имеем

$$\langle\mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0=\delta^I_J. \tag{9}$$

Возмущение конформной теории поля

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$.

Возмущение конформной теории поля

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle \cdots \rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle \cdots \rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}. \tag{11}$$

Возмущение конформной теории поля

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x \, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle \cdots \rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle \cdots \rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}. \tag{11}$$

Один из эффектов возмущения состоит в появлении ненулевых средних у бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle =$$

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle \cdots \rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle \cdots \rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}. \tag{11}$$

Один из эффектов возмущения состоит в появлении ненулевых средних у бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_\mathrm{p}}}, \text{ если } \bar\Delta_I = \Delta_I, \tag{12}$$

где G_I — безразмерная константа.

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\mathrm{p}} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_{\mathrm{p}}(x), \tag{10}$$

где Φ_{p} — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_{\mathrm{p}} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle\cdots\rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle\cdots\rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N)\cdots\mathcal{O}_{I_1}(x_1)\rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N)\cdots\mathcal{O}_{I_1}(x_1)e^{-\lambda\mathcal{S}_{\mathrm{p}}}\rangle_0}{\langle e^{-\lambda\mathcal{S}_{\mathrm{p}}}\rangle_0}. \tag{11}$$

Один из эффектов возмущения состоит в появлении ненулевых средних у бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x)\rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_{\mathrm{p}}}}, \text{ если } \bar{\Delta}_I = \Delta_I, \tag{12}$$

где G_I — безразмерная константа. Поэтому корреляционная функция

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N)\cdots\mathcal{O}_{I_1}(x_1)\rangle \\ &= \sum_{J_1,\ldots,J_{N-1}} C^{J_{N-1}}_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1)\cdots C^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) C^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1)\langle \mathcal{O}_{J_{N-1}}\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

уже не будет целой функцией параметра λ.

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle \cdots \rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle \cdots \rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}. \tag{11}$$

Один из эффектов возмущения состоит в появлении ненулевых средних у бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_\mathrm{p}}}, \text{ если } \bar{\Delta}_I = \Delta_I, \tag{12}$$

где G_I — безразмерная константа. Поэтому корреляционная функция

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \sum_{J_1,\dots,J_{N-1}} C^{J_{N-1}}_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1) \cdots C^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) C^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1) \langle \mathcal{O}_{J_{N-1}} \rangle \tag{13}$$

уже не будет целой функцией параметра λ.

Важный факт состоит в том, что структурные функции $C^K_{IJ}(x)$ не совпадают со структурными функциями конформной теории поля.

Пусть у нас есть конформная теория поля с формальным действием $\mathcal{S}_0$. Рассмотрим возмущенную теорию с действием

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_0 + \lambda \int d^2x\, \Phi_\mathrm{p}(x), \tag{10}$$

где Φ_p — бесспиновый локальный оператор с конформной размерностью $\Delta_\mathrm{p} < 1$. Это значит, что корреляционные функции $\langle \cdots \rangle$ определены через корреляционные функции конформной теории $\langle \cdots \rangle_0$ так:

$$\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda \mathcal{S}_\mathrm{p}} \rangle_0}. \tag{11}$$

Один из эффектов возмущения состоит в появлении ненулевых средних у бесспиновых операторов. Из размерных соображений получаем

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_\mathrm{p}}}, \text{ если } \bar\Delta_I = \Delta_I, \tag{12}$$

где G_I — безразмерная константа. Поэтому корреляционная функция

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{O}_{I_N}(x_N) \cdots \mathcal{O}_{I_1}(x_1) \rangle \\ &= \sum_{J_1,\ldots,J_{N-1}} C^{J_{N-1}}_{I_N J_{N-2}}(x_N - x_1) \cdots C^{J_2}_{I_3 J_1}(x_3 - x_1) C^{J_1}_{I_2 I_1}(x_2 - x_1) \langle \mathcal{O}_{J_{N-1}} \rangle \end{aligned} \tag{13}$$

уже не будет целой функцией параметра λ.

Важный факт состоит в том, что структурные функции $C^K_{IJ}(x)$ не совпадают со структурными функциями конформной теории поля. Дело в том, что интегрирование в $\mathcal{S}_\mathrm{p}$ по всей плоскости изменяет порядок следования операторов в разложении, вставляя в «промежутки» Φ_p.

Возмущение приводит к двум типам расходимости:

1. Ультрафиолетовые расходимости происходят от окрестностей операторов в произведениях вида

$$\mathcal{O}_I(x)\int d^2y_1\cdots d^2y_n\,\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1).$$

Возмущение приводит к двум типам расходимости:

1. Ультрафиолетовые расходимости происходят от окрестностей операторов в произведениях вида

$$\mathcal{O}_I(x) \int d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \, \Phi_{\mathrm{p}}(y_n) \cdots \Phi_{\mathrm{p}}(y_1).$$

   Они будут сокращаться вычитаниями операторов, возникающих в разложениях ультафиолетово-расходящихся произведений:

$$\mathcal{O}_I(x) \to \mathcal{O}_I(x) - \sum_K a_K \mathcal{O}_K(x),$$

   где a_K некоторые расходящиеся коэффициенты.

Расходимости в возмущенной теории

Возмущение приводит к двум типам расходимости:

1. Ультрафиолетовые расходимости происходят от окрестностей операторов в произведениях вида

$$\mathcal{O}_I(x) \int d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \Phi_{\mathrm{p}}(y_n) \cdots \Phi_{\mathrm{p}}(y_1).$$

   Они будут сокращаться вычитаниями операторов, возникающих в разложениях ультафиолетово-расходящихся произведений:

$$\mathcal{O}_I(x) \to \mathcal{O}_I(x) - \sum_K a_K \mathcal{O}_K(x),$$

   где a_K некоторые расходящиеся коэффициенты.

2. Инфракрасные расходимости неизбежны в теории возмущений для корреляционных функций в окрестности бесконечно удаленной точки.

Возмущение приводит к двум типам расходимости:

1. Ультрафиолетовые расходимости происходят от окрестностей операторов в произведениях вида

$$\mathcal{O}_I(x)\int d^2y_1\cdots d^2y_n\,\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1).$$

   Они будут сокращаться вычитаниями операторов, возникающих в разложениях ультафиолетово-расходящихся произведений:

$$\mathcal{O}_I(x)\to\mathcal{O}_I(x)-\sum_K a_K\mathcal{O}_K(x),$$

   где a_K некоторые расходящиеся коэффициенты.
2. Инфракрасные расходимости неизбежны в теории возмущений для корреляционных функций в окрестности бесконечно удаленной точки. Тем не менее, они будут сокращаться в структурных функциях.

Нормировочная матрица

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Нормировочная матрица

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{r_0 \le |y_i| \le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \tag{15}$$

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{r_0 \le |y_i| \le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \tag{15}$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J. \tag{16}$$

Нормировочная матрица

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{r_0 \le |y_i| \le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n) \cdots \Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 . \tag{15}$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J . \tag{16}$$

Рассмотрим первый порядок теории возмущений ($n = 1$).

Нормировочная матрица

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{r_0 \le |y_i| \le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \tag{15}$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J. \tag{16}$$

Рассмотрим первый порядок теории возмущений ($n = 1$). Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 &= \sum_K \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}J}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_K(0)\rangle_0 |w_1|^{2\Delta_I - 2\Delta_{\mathrm{p}} - 2\Delta_J} \\ &= \mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}|w_1|^{2\Delta_I - 2\Delta_{\mathrm{p}} - 2\Delta_J}.\end{aligned} \tag{17}$$

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \qquad (14)$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R, r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{r_0 \le |y_i| \le R} d^2 y_1 \cdots d^2 y_n \, \langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \qquad (15)$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J. \qquad (16)$$

Рассмотрим первый порядок теории возмущений ($n = 1$). Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 &= \sum_K \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}J} \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_K(0)\rangle_0 |w_1|^{2\Delta_I - 2\Delta_{\mathrm{p}} - 2\Delta_J} \\ &= \mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J} |w_1|^{2\Delta_I - 2\Delta_{\mathrm{p}} - 2\Delta_J}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{D}^{(1)}{}^I_J =$$

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R,r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{r_0\le|y_i|\le R} d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\rm p}(y_n)\cdots\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \tag{15}$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar{\Delta}_I = \Delta_J - \bar{\Delta}_J. \tag{16}$$

Рассмотрим первый порядок теории возмущений ($n=1$). Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 &= \sum_K \mathcal{C}^K_{{\rm p}J}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_K(0)\rangle_0 |w_1|^{2\Delta_I-2\Delta_{\rm p}-2\Delta_J}\\ &= \mathcal{C}^I_{{\rm p}J}|w_1|^{2\Delta_I-2\Delta_{\rm p}-2\Delta_J}.\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{D}^{(1)}{}^I_J = -\lambda\mathcal{C}^I_{{\rm p}J}\int d^2y_1\,|y_1|^{2(\Delta_I-\Delta_{\rm p}-\Delta_J)} = -\frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{{\rm p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right),$$

где

$$d_{IJ} = \Delta_I - \Delta_J + 1 - \Delta_{\rm p}. \tag{18}$$

Вычислим матрицу

$$\mathcal{D}^I_J = \langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_J(0)\rangle \tag{14}$$

Введем обрезку r_0 на малых расстояниях и R на больших расстояниях:

$$\mathcal{D}^I_J(R,r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{r_0\le|y_i|\le R} d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\rm p}(y_n)\cdots\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0. \tag{15}$$

Чтобы эти величины были ненулевыми операторы должны иметь одинаковый спин:

$$\Delta_I - \bar\Delta_I = \Delta_J - \bar\Delta_J. \tag{16}$$

Рассмотрим первый порядок теории возмущений ($n=1$). Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 &= \sum_K \mathcal{C}^K_{{\rm p}J}\langle \mathcal{O}^I(\infty)\mathcal{O}_K(0)\rangle_0|w_1|^{2\Delta_I-2\Delta_{\rm p}-2\Delta_J}\\ &= \mathcal{C}^I_{{\rm p}J}|w_1|^{2\Delta_I-2\Delta_{\rm p}-2\Delta_J}.\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{D}^{(1)}{}^I_J = -\lambda\mathcal{C}^I_{{\rm p}J}\int d^2y_1\,|y_1|^{2(\Delta_I-\Delta_{\rm p}-\Delta_J)} = -\frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{{\rm p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right),$$

где

$$d_{IJ} = \Delta_I - \Delta_J + 1 - \Delta_{\rm p}. \tag{18}$$

При $d_{IJ}\le 0$, то есть при

$$\Delta_I \le \Delta_J - (1-\Delta_{\rm p}). \tag{19}$$

интеграл ультрафиолетово расходится.

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x)r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка.

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$D^I_J(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) O_J(0)\rangle =$

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda \mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} \left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}} \right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda \mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} \mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$$D^I_J(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) O_J(0) \rangle = \mathcal{D}^I_J - \frac{\pi\lambda \mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2)$$

Сокращение ультрафиолетовой расходимости

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$$D^I_J(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) O_J(0)\rangle = \mathcal{D}^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} R^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) \tag{21}$$

не зависит от r_0 и конечна при $r_0 \to 0$.

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$$D^I_J(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) O_J(0)\rangle = \mathcal{D}^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} R^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) \tag{21}$$

не зависит от r_0 и конечна при $r_0 \to 0$.

В nм порядке по теории возмущений ультрафиолетовая расходимость имеется, если

$$d^{(n)}_{IJ} \equiv \Delta_I - \Delta_J + n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}) \leq 0. \tag{22}$$

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \tag{20}$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$$D^I_J(R) = \langle \mathcal{O}^I(\infty) O_J(0)\rangle = \mathcal{D}^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} R^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) \tag{21}$$

не зависит от r_0 и конечна при $r_0 \to 0$.

В nм порядке по теории возмущений ультрафиолетовая расходимость имеется, если

$$d^{(n)}_{IJ} \equiv \Delta_I - \Delta_J + n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}) \le 0. \tag{22}$$

Поэтому ультрафиолетовая перенормировка оператора $\mathcal{O}_J$ имеет вид

$$O_J(x) = \sum_I U^I_J(r_0)\mathcal{O}_I(x), \quad U^I_J(r_0) = \delta^I_J + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n U^{(n)I}{}_J r_0^{2d^{(n)}_{IJ}}, \tag{23}$$

причем $U^{(n)I}{}_J = 0$, если $d^{(n)}_{IJ} > 0$.

Итак,

$$\mathcal{D}^I_J = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\left(R^{2d_{IJ}} - r_0^{2d_{IJ}}\right) + O(\lambda^2).$$

Определим новый оператор

$$O_J(x) = \mathcal{O}_J(x) - \sum_{I,\ d_{IJ}<0} \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}}\mathcal{O}_I(x) r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2). \qquad (20)$$

Сумма в правой части сократит расходимость от вклада первого порядка. Тогда матрица

$$D^I_J(R) = \langle\mathcal{O}^I(\infty)O_J(0)\rangle = \mathcal{D}^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} r_0^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) = \delta^I_J - \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^I_{\mathrm{p}J}}{d_{IJ}} R^{2d_{IJ}} + O(\lambda^2) \qquad (21)$$

не зависит от r_0 и конечна при $r_0 \to 0$.

В nм порядке по теории возмущений ультрафиолетовая расходимость имеется, если

$$d^{(n)}_{IJ} \equiv \Delta_I - \Delta_J + n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}) \le 0. \qquad (22)$$

Поэтому ультрафиолетовая перенормировка оператора $\mathcal{O}_J$ имеет вид

$$O_J(x) = \sum_I U^I_J(r_0)\mathcal{O}_I(x), \quad U^I_J(r_0) = \delta^I_J + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n U^{(n)I}{}_J r_0^{2d^{(n)}_{IJ}}, \qquad (23)$$

причем $U^{(n)I}{}_J = 0$, если $d^{(n)}_{IJ} > 0$. Матрица

$$D^I_J(R) = \langle\mathcal{O}^I(x)O_J(0)\rangle = \sum_I U^K_J(r_0)\mathcal{D}^I_K(R, r_0) \qquad (24)$$

не зависит от r_0 и может содержать только инфракрасную расходимость.

Операторный резонанс

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d_{IJ}^{(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

Операторный резонанс

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d^{(n)}_{IJ} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}^I_J$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C.

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d^{(n)}_{IJ} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}^I_J$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C. Соответственно, оператор $\mathcal{O}_I$ должен быть перенормирован так:

$$O_J = \mathcal{O}_J - 2C\mathcal{O}_I \log \mu r_0, \tag{26}$$

где μ — произвольный параметр размерности массы.

Операторный резонанс

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d_{IJ}^{(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1-\Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}_J^I$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C. Соответственно, оператор $\mathcal{O}_I$ должен быть перенормирован так:

$$O_J = \mathcal{O}_J - 2C\mathcal{O}_I \log \mu r_0, \tag{26}$$

где μ — произвольный параметр размерности массы. Это означает, что определение оператора O_J не зависит от выбора размерного параметра.

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d^{(n)}_{IJ} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}^I_J$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C. Соответственно, оператор $\mathcal{O}_I$ должен быть перенормирован так:

$$O_J = \mathcal{O}_J - 2C\mathcal{O}_I \log \mu r_0, \tag{26}$$

где μ — произвольный параметр размерности массы. Это означает, что определение оператора O_J не зависит от выбора размерного параметра. Если в теории есть непрерывный параметр (модели или поля), корреляционные функции оператора $O_I(x)$ имеют полюс в точке, где $d^{(n)}_{IJ}(u_0) = 0$, с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{d^{(n)}_{IJ}=0} \langle O_J(x) X \rangle = C \langle O_I(x) X \rangle. \tag{27}$$

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d_{IJ}^{(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_{\mathrm{p}}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}_J^I$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C. Соответственно, оператор $\mathcal{O}_I$ должен быть перенормирован так:

$$O_J = \mathcal{O}_J - 2C\mathcal{O}_I \log \mu r_0, \tag{26}$$

где μ — произвольный параметр размерности массы. Это означает, что определение оператора O_J не зависит от выбора размерного параметра. Если в теории есть непрерывный параметр (модели или поля), корреляционные функции оператора $O_I(x)$ имеют полюс в точке, где $d_{IJ}^{(n)}(u_0) = 0$, с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{d_{IJ}^{(n)}=0} \langle O_J(x) X\rangle = C\langle O_I(x) X\rangle. \tag{27}$$

Перенормированный оператор O_J непосредственно в точке $d_{IJ}^{(n)} = 0$ определяется вычитанием этого полюсного члена:

$$\langle O_J(x) X\rangle_{d_{IJ}^{(n)}=0} = \lim_{d_{IJ}^{(n)}\to 0} \left(\langle O_J(x) X\rangle - \frac{C}{d_{IJ}^{(n)}} \langle O_I X\rangle \right). \tag{28}$$

Тонкий момент возникает, если имеется оператор $\mathcal{O}_I$, удовлетворяющий условию резонанса

$$d_{IJ}^{(n)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_I = \Delta_J - n(1 - \Delta_\mathrm{p}). \tag{25}$$

В этом случае $\mathcal{D}_J^I$ содержит слагаемое $2C \log \frac{r_0}{R}$ с некоторой константой C. Соответственно, оператор $\mathcal{O}_I$ должен быть перенормирован так:

$$O_J = \mathcal{O}_J - 2C\mathcal{O}_I \log \mu r_0, \tag{26}$$

где μ — произвольный параметр размерности массы. Это означает, что определение оператора O_J не зависит от выбора размерного параметра. Если в теории есть непрерывный параметр (модели или поля), корреляционные функции оператора $O_I(x)$ имеют полюс в точке, где $d_{IJ}^{(n)}(u_0) = 0$, с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{d_{IJ}^{(n)}=0} \langle O_J(x) X \rangle = C \langle O_I(x) X \rangle. \tag{27}$$

Перенормированный оператор O_J непосредственно в точке $d_{IJ}^{(n)} = 0$ определяется вычитанием этого полюсного члена:

$$\langle O_J(x) X \rangle_{d_{IJ}^{(n)}=0} = \lim_{d_{IJ}^{(n)} \to 0} \left(\langle O_J(x) X \rangle - \frac{C}{d_{IJ}^{(n)}} \langle O_I X \rangle \right). \tag{28}$$

Ясно, что оператор $O'_J = O_J + \alpha O_I$ с конечным α ничуть не хуже.

Рассмотрим трехточечную функцию

$$G_{IJ}^{K}(x,R)=\langle\mathcal{O}^K(\infty)O_I(x)O_J(0)\rangle$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\limits_{|y_i|\le R}d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle\mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)O_I(x)O_J(0)\rangle_0. \qquad (29)$$

Рассмотрим трехточечную функцию

$$G_{IJ}^{K}(x,R)=\langle\mathcal{O}^{K}(\infty)O_I(x)O_J(0)\rangle$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\limits_{|y_i|\le R} d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle\mathcal{O}^{K}(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)O_I(x)O_J(0)\rangle_0. \quad (29)$$

С другой стороны,

$$G_{IJ}^{K}(x,R)=\sum_L C_{IJ}^{L}(x)\langle\mathcal{O}^{K}(\infty)O_L(0)\rangle=\sum_L{}' C_{IJ}^{L}(x)D_L^K(R). \quad (30)$$

Рассмотрим трехточечную функцию

$$G^K_{IJ}(x,R) = \langle \mathcal{O}^K(\infty) O_I(x) O_J(0)\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int\limits_{|y_i|\le R} d^2y_1 \cdots d^2y_n \, \langle \mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1) O_I(x) O_J(0)\rangle_0. \qquad (29)$$

С другой стороны,

$$G^K_{IJ}(x,R) = \sum_L C^L_{IJ}(x)\langle \mathcal{O}^K(\infty) O_L(0)\rangle = {\sum_L}' C^L_{IJ}(x) D^K_L(R). \qquad (30)$$

Иными словами

$$C^K_{IJ}(x) = {\sum_L}' (D^{-1})^K_L(R) G^L_{IJ}(x,R). \qquad (31)$$

Рассмотрим трехточечную функцию

$$G^K_{IJ}(x,R)=\langle\mathcal{O}^K(\infty)O_I(x)O_J(0)\rangle$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\limits_{|y_i|\le R}d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle\mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)O_I(x)O_J(0)\rangle_0. \quad (29)$$

С другой стороны,

$$G^K_{IJ}(x,R)=\sum_L C^L_{IJ}(x)\langle\mathcal{O}^K(\infty)O_L(0)\rangle={\sum_L}' C^L_{IJ}(x)D^K_L(R). \quad (30)$$

Иными словами

$$C^K_{IJ}(x)={\sum_L}'(D^{-1})^K_L(R)G^L_{IJ}(x,R). \quad (31)$$

Инфракрасная расходимость связана с операторными разложениями возмущения с оператором $\mathcal{O}^K(\infty)$, а структурные функции относятся только к операторам вблизи точки 0, поэтому структурные функции не содержат инфракрасных расходимостей.

Рассмотрим трехточечную функцию

$$G_{IJ}^{K}(x,R)=\langle\mathcal{O}^K(\infty)O_I(x)O_J(0)\rangle$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int\limits_{|y_i|\le R}d^2y_1\cdots d^2y_n\,\langle\mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_n)\cdots\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)O_I(x)O_J(0)\rangle_0. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$G_{IJ}^{K}(x,R)=\sum_L C_{IJ}^L(x)\langle\mathcal{O}^K(\infty)O_L(0)\rangle={\sum_L}' C_{IJ}^L(x)D_L^K(R). \tag{30}$$

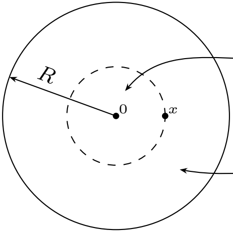
Иными словами

$$C_{IJ}^K(x)={\sum_L}'(D^{-1})_L^K(R)G_{IJ}^L(x,R). \tag{31}$$

Инфракрасная расходимость связана с операторными разложениями возмущения с оператором $\mathcal{O}^K(\infty)$, а структурные функции относятся только к операторам вблизи точки 0, поэтому структурные функции не содержат инфракрасных расходимостей. Проверим это в первом порядке по теории возмущений.

Структурные функции в первом порядке теории возмущений

Имеется две области интегрирования:

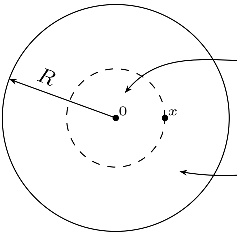


$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\mathcal{O}_I(x)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = {\sum_L}' \mathcal{C}^K_{IL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}J}|y_1|^{2d_{LJ}-2}$$

$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = {\sum_L}' \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{IJ}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

Структурные функции в первом порядке теории возмущений

Имеется две области интегрирования:



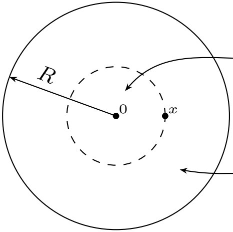
$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\mathcal{O}_I(x)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = {\sum_L}' \mathcal{C}_{IL}^{K}(x)\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^{L}|y_1|^{2d_{LJ}-2}$$

$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = {\sum_L}' \mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^{K}\mathcal{C}_{IJ}^{L}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$G_{IJ}^K(x,R) = \mathcal{C}_{IJ}^K(x) - \lambda\int_{|x|<|y_1|<R} d^2y_1 \, {\sum_L}' \mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^{K}\mathcal{C}_{IJ}^{L}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$-\lambda\int_{|y_1|<|x|} d^2y_1 \, {\sum_L}' \mathcal{C}_{IL}^{K}(x)\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^{L}|y_1|^{2d_{LJ}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2)$$

Имеется две области интегрирования:



$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\mathcal{O}_I(x)\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = \sum_L{}' \, \mathcal{C}_{IL}^K(x)\mathcal{C}_{{\rm p}J}^L |y_1|^{2d_{LJ}-2}$$

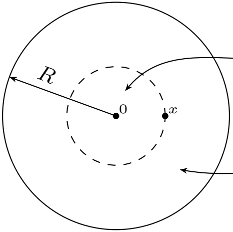
$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\rm p}(y_1)\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = \sum_L{}' \, \mathcal{C}_{{\rm p}L}^K\mathcal{C}_{IJ}^L(x) |y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$G_{IJ}^K(x,R) = \mathcal{C}_{IJ}^K(x) - \lambda \int_{|x|<|y_1|<R} d^2y_1 \sum_L{}' \, \mathcal{C}_{{\rm p}L}^K\mathcal{C}_{IJ}^L(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$- \lambda \int_{|y_1|<|x|} d^2y_1 \sum_L{}' \, \mathcal{C}_{IL}^K(x)\mathcal{C}_{{\rm p}J}^L|y_1|^{2d_{LJ}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2)$$

$$= \mathcal{C}_{IJ}^K(x) - \pi\lambda \sum_L{}' \left(\frac{\mathcal{C}_{{\rm p}L}^K\mathcal{C}_{IJ}^L(x)}{d_{KL}} (R^{2d_{KL}} - |x|^{2d_{KL}}) + \frac{\mathcal{C}_{IL}^K(x)\mathcal{C}_{{\rm p}J}^L}{d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2).$$

Имеется две области интегрирования:



$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\mathcal{O}_I(x)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = \sum_L{}' \, \mathcal{C}^K_{IL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}J}|y_1|^{2d_{LJ}-2}$$

$$\langle \mathcal{O}^K(\infty)\Phi_{\mathrm{p}}(y_1)\mathcal{O}_I(x)\mathcal{O}_J(0)\rangle_0 = \sum_L{}' \, \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{IJ}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$G^K_{IJ}(x,R) = \mathcal{C}^K_{IJ}(x) - \lambda \int_{|x|<|y_1|<R} d^2y_1 \sum_L{}' \, \mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{IJ}(x)|y_1|^{2d_{KL}-2}$$

$$- \lambda \int_{|y_1|<|x|} d^2y_1 \sum_L{}' \, \mathcal{C}^K_{IL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}J}|y_1|^{2d_{LJ}-2} + (\text{УФ-контрчлены}) + O(\lambda^2)$$

$$= \mathcal{C}^K_{IJ}(x) - \pi\lambda \sum_L{}' \left(\frac{\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{IJ}(x)}{d_{KL}} \left(R^{2d_{KL}} - |x|^{2d_{KL}}\right) + \frac{\mathcal{C}^K_{IL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}J}}{d_{LJ}}|x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2).$$

С другой стороны

$$(D^{-1})^K_L = \delta^K_L + \frac{\pi\lambda\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}}{d_{KL}} R^{2d_{KL}} + O(\lambda^2).$$

Инфракрасная расходимость сокращается и мы получаем

$$C^K_{IJ}(x) = \mathcal{C}^K_{IJ}(x) + \pi\lambda \sum_L{}' \left(\frac{\mathcal{C}^K_{\mathrm{p}L}\mathcal{C}^L_{IJ}(x)}{d_{KL}} |x|^{2d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}^K_{IL}(x)\mathcal{C}^L_{\mathrm{p}J}}{d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2) \tag{32}$$

Инфракрасная расходимость сокращается и мы получаем

$$
\begin{aligned}
C_{IJ}^K(x) &= \mathcal{C}_{IJ}^K(x) + \pi\lambda \sum_L{}' \left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^K \mathcal{C}_{IJ}^L(x)}{d_{KL}} |x|^{2d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{IL}^K(x)\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^L}{d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2) \\
&= z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \left(\mathcal{C}_{IJ}^K + \pi t \sum_L{}' \left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^K \mathcal{C}_{IJ}^L}{d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{IL}^K \mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^L}{d_{LJ}} \right) + O(t^2) \right), \qquad (32)
\end{aligned}
$$

где

$$
t = \lambda |x|^{2-2\Delta_{\mathrm{p}}}, \quad d_{K,IJ} = \Delta_K - \Delta_I - \Delta_J. \qquad (33)
$$

Инфракрасная расходимость сокращается и мы получаем

$$C_{IJ}^{K}(x)=\mathcal{C}_{IJ}^{K}(x)+\pi\lambda\sum_{L}{}'\left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^{K}\mathcal{C}_{IJ}^{L}(x)}{d_{KL}}|x|^{2d_{KL}}-\frac{\mathcal{C}_{IL}^{K}(x)\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^{L}}{d_{LJ}}|x|^{2d_{LJ}}\right)+O(\lambda^{2})$$

$$=z^{d_{K,IJ}}\bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}}\left(\mathcal{C}_{IJ}^{K}+\pi t\sum_{L}{}'\left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^{K}\mathcal{C}_{IJ}^{L}}{d_{KL}}-\frac{\mathcal{C}_{IL}^{K}\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^{L}}{d_{LJ}}\right)+O(t^{2})\right), \qquad (32)$$

где

$$t=\lambda|x|^{2-2\Delta_{\mathrm{p}}},\quad d_{K,IJ}=\Delta_{K}-\Delta_{I}-\Delta_{J}. \qquad (33)$$

Так как структурные функции определяются рядом теории возмущений, ожидается, что они являются целыми функциями переменной t:

$$C_{IJ}^{K}(x)=z^{d_{K,IJ}}\bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}}\tilde{C}_{IJ}^{K}(t)=z^{d_{K,IJ}}\bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}^{(n)}{}_{IJ}^{K}t^{n}. \qquad (34)$$

Инфракрасная расходимость сокращается и мы получаем

$$C_{IJ}^K(x) = \mathcal{C}_{IJ}^K(x) + \pi\lambda {\sum_L}' \left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^K \mathcal{C}_{IJ}^L(x)}{d_{KL}} |x|^{2d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{IL}^K(x)\mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^L}{d_{LJ}} |x|^{2d_{LJ}} \right) + O(\lambda^2)$$
$$= z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \left(\mathcal{C}_{IJ}^K + \pi t {\sum_L}' \left(\frac{\mathcal{C}_{\mathrm{p}L}^K \mathcal{C}_{IJ}^L}{d_{KL}} - \frac{\mathcal{C}_{IL}^K \mathcal{C}_{\mathrm{p}J}^L}{d_{LJ}} \right) + O(t^2) \right), \qquad (32)$$

где

$$t = \lambda |x|^{2-2\Delta_{\mathrm{p}}}, \quad d_{K,IJ} = \Delta_K - \Delta_I - \Delta_J. \qquad (33)$$

Так как структурные функции определяются рядом теории возмущений, ожидается, что они являются целыми функциями переменной t:

$$C_{IJ}^K(x) = z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \tilde{C}_{IJ}^K(t) = z^{d_{K,IJ}} \bar{z}^{\bar{d}_{K,IJ}} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}^{(n)}{}_{IJ}^{K} t^n. \qquad (34)$$

Вместе с существенно непертурбативными вакуумными средними

$$\langle \mathcal{O}_I(x) \rangle = G_I \lambda^{\frac{\Delta_I}{1-\Delta_{\mathrm{p}}}}, \text{ если } \bar{\Delta}_I = \Delta_I, \qquad (12)$$

структурные функции однозначно определяют корреляционные функции.

Что такое вакуумные средние. Пусть O_I — оператор нулевого спина. Тогда на малых расстояниях его парная корреляционная функция описывается конформной теорией поля:

$$\langle O^I(x) O_I(0) \rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \cdots, \qquad |x| \to 0. \tag{35}$$

Использует это в качестве условия нормировки.

Что такое вакуумные средние. Пусть O_I — оператор нулевого спина. Тогда на малых расстояниях его парная корреляционная функция описывается конформной теорией поля:

$$\langle O^I(x) O_I(0)\rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \cdots, \qquad |x| \to 0. \tag{35}$$

Использует это в качестве условия нормировки.
С другой стороны на больших расстояниях корреляционная функция расщепляется

$$\langle O^I(x) O_I(0)\rangle \to \langle O^I(x)\rangle\langle O_I(0)\rangle = \langle O_I(0)\rangle {\sum_J}' G^{IJ}\langle O_J(0)\rangle, \qquad |x| \to \infty. \tag{36}$$

Именно входящие в правую часть множители $\langle O_I\rangle$ при условии фиксированной нормировки на малых расстояниях мы и будем понимать под вакуумными средними.

Что такое вакуумные средние. Пусть O_I — оператор нулевого спина. Тогда на малых расстояниях его парная корреляционная функция описывается конформной теорией поля:

$$\langle O^I(x) O_I(0)\rangle = |x|^{-4\Delta_I} + \cdots\,, \qquad |x| \to 0. \tag{35}$$

Использует это в качестве условия нормировки.
С другой стороны на больших расстояниях корреляционная функция расщепляется

$$\langle O^I(x) O_I(0)\rangle \to \langle O^I(x)\rangle\langle O_I(0)\rangle = \langle O_I(0)\rangle {\sum_J}' G^{IJ}\langle O_J(0)\rangle, \qquad |x| \to \infty. \tag{36}$$

Именно входящие в правую часть множители $\langle O_I\rangle$ при условии фиксированной нормировки на малых расстояниях мы и будем понимать под вакуумными средними.
Для вычисления вакуумных средних мы не знаем общих методов.
Большинство известных ответов угадано на основе разнообразных бутстрапных соображений. Тем не менее, я приведу несколько примеров, где ответ можно получить явно.

В прошлый раз мы показали, что энергия системы длины R имеет вклад $-\varepsilon_\infty R$. Значит

$$-\varepsilon_\infty = \langle T_{22}\rangle = \langle 2T_{z\bar z} - T_{zz} - T_{\bar z\bar z}\rangle = 2\langle T_{z\bar z}\rangle = -\frac{1}{\pi}\langle\Theta\rangle.$$

В прошлый раз мы показали, что энергия системы длины R имеет вклад $-\varepsilon_\infty R$. Значит

$$-\varepsilon_\infty = \langle T_{22}\rangle = \langle 2T_{z\bar z} - T_{zz} - T_{\bar z\bar z}\rangle = 2\langle T_{z\bar z}\rangle = -\frac{1}{\pi}\langle\Theta\rangle.$$

То есть,

$$\langle\Theta\rangle = \pi\varepsilon_\infty, \qquad \langle\Phi_{\mathrm{p}}\rangle = -\frac{\varepsilon_\infty}{\lambda(1-\Delta_{\mathrm{p}})}. \tag{37}$$

Последнее равенство верно, если вклады высших порядков в Θ равны нулю.

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$.

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \frac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x)$$
$$= -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \qquad (38)$$

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$\begin{aligned}(T\bar{T})_\varepsilon(x) &= \tfrac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \tfrac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x) \\ &= -\tfrac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \qquad (38)\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J^\nu_\mu(x,\varepsilon), \quad J^\nu_\mu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \qquad (39)$$

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \tfrac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x)$$
$$= -\tfrac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \qquad (38)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J^\nu_\mu(x,\varepsilon), \quad J^\nu_\mu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \qquad (39)$$

Значит можно определить независящий от ε оператор $(T\bar{T})(x)$ и ток $J^\mu_\varepsilon(x)$, что

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J^\mu(x,\varepsilon), \quad J^\mu(x,\varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu\, J^\mu_\nu(x,\varepsilon). \qquad (40)$$

Последний интеграл не зависти от траектории интегрирования.

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \tfrac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x)$$
$$= -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \qquad (38)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J^\nu_\mu(x,\varepsilon), \quad J^\nu_\mu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \qquad (39)$$

Значит можно определить независящий от ε оператор $(T\bar{T})(x)$ и ток $J^\mu_\varepsilon(x)$, что

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J^\mu(x,\varepsilon), \quad J^\mu(x,\varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu\, J^\mu_\nu(x,\varepsilon). \qquad (40)$$

Последний интеграл не зависти от траектории интегрирования. Можно думать, что $(T\bar{T})(x)$ есть регуляризация оператора $-\pi^2\det T$.

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \tfrac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x)$$
$$= -\tfrac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \qquad (38)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J_\mu^\nu(x,\varepsilon), \quad J_\mu^\nu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \qquad (39)$$

Значит можно определить независящий от ε оператор $(T\bar{T})(x)$ и ток $J_\varepsilon^\mu(x)$, что

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J^\mu(x,\varepsilon), \quad J^\mu(x,\varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu\, J_\nu^\mu(x,\varepsilon). \qquad (40)$$

Последний интеграл не зависти от траектории интегрирования. Можно думать, что $(T\bar{T})(x)$ есть регуляризация оператора $-\pi^2 \det T$. Из (38) немедленно получаем

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}\langle(T\bar{T})_\varepsilon(x)\rangle = 0. \qquad (41)$$

Другой интересный пример: оператор $T\bar{T}$. Вне конформной точки это произведение требует регуляризации и перенормировки. Положим

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}T(x+\varepsilon)\bar{T}(x) + \frac{1}{2}\bar{T}(x+\varepsilon)T(x) - \Theta(x+\varepsilon)\Theta(x)$$
$$= -\frac{\pi^2}{2}\epsilon^{\mu\kappa}\epsilon^{\nu\lambda}T_{\mu\nu}(x+\varepsilon)T_{\kappa\lambda}(x). \quad (38)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}(T\bar{T})_\varepsilon(x) = \partial_\nu J^\nu_\mu(x,\varepsilon), \quad J^\nu_\mu(x,\varepsilon) = \frac{\pi^2}{2}\epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\kappa\lambda}T^{\kappa\rho}(x+\varepsilon)T^{\lambda\nu}(x). \quad (39)$$

Значит можно определить независящий от ε оператор $(T\bar{T})(x)$ и ток $J^\mu_\varepsilon(x)$, что

$$(T\bar{T})_\varepsilon(x) = (T\bar{T})(x) + \partial_\mu J^\mu(x,\varepsilon), \quad J^\mu(x,\varepsilon) = \int^\varepsilon d\xi^\nu\, J^\mu_\nu(x,\varepsilon). \quad (40)$$

Последний интеграл не зависти от траектории интегрирования. Можно думать, что $(T\bar{T})(x)$ есть регуляризация оператора $-\pi^2\det T$. Из (38) немедленно получаем

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\mu}\langle(T\bar{T})_\varepsilon(x)\rangle = 0. \quad (41)$$

Поэтому для вычисления среднего мы можем использовать предел $\varepsilon\to\infty$:

$$\langle T\bar{T}\rangle = \langle(T\bar{T})_\varepsilon(x)\rangle \underset{\varepsilon\to\infty}{=} -\langle\Theta\rangle^2. \quad (42)$$

$\boxed{\langle\Theta\rangle = \pi\varepsilon_\infty}$

Для справки приведу формулы для вакуумных средних в модели синус-Гордона и Φ_{13}-возмущенных минимальных моделей.

Вакуумные средние экспоненциальных и примарных операторов

Для справки приведу формулы для вакуумных средних в модели синус-Гордона и Φ_{13}-возмущенных минимальных моделей. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеем

$$\langle e^{i\alpha\phi} \rangle = M^{\alpha^2} \exp \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2\operatorname{sh} t \operatorname{sh} pt \operatorname{sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t} \right), \tag{43}$$

Для справки приведу формулы для вакуумных средних в модели синус-Гордона и Φ_{13}-возмущенных минимальных моделей. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеем

$$\langle e^{i\alpha\phi}\rangle = M^{\alpha^2}\exp\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2\operatorname{sh}t\operatorname{sh}pt\operatorname{sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t}\right), \tag{43}$$

где параметр M связан с массой кинка m_{kink} и с константой связи μ формулой

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} m_{\text{kink}} = \left(\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)}\mu\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{44}$$

Для справки приведу формулы для вакуумных средних в модели синус-Гордона и Φ_{13}-возмущенных минимальных моделей. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеем

$$\langle e^{i\alpha\phi}\rangle = M^{\alpha^2}\exp\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2\operatorname{sh}t\operatorname{sh}pt\operatorname{sh}(p+1)t}-\alpha^2 e^{-2(p+1)t}\right), \tag{43}$$

где параметр M связан с массой кинка m_{kink} и с константой связи μ формулой

$$M=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}m_{\mathrm{kink}}=\left(\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)}\mu\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{44}$$

В Φ_{13}-возмущении минимальной модели $M(P,P')$ имеется $P-1$ вакуумное состояние и вакуумное среднее зависит от этого состояния:

$$\langle\Phi_{mn}\rangle_s = M^{2\Delta_{mn}}\frac{\sin\frac{\pi s}{P}|P'm-Pn|}{\sin\frac{\pi s}{P}(P'-P)}Q\left(\frac{P'm-Pn}{P'-P}\right),\quad s=1,\dots,P-1, \tag{45}$$

Для справки приведу формулы для вакуумных средних в модели синус-Гордона и Φ_{13}-возмущенных минимальных моделей. Для экспоненциальных операторов в модели синус-Гордона имеем

$$\langle e^{i\alpha\phi}\rangle = M^{\alpha^2}\exp\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left(\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha\sqrt{2p(p+1)}t)}{2\operatorname{sh}t\operatorname{sh}pt\operatorname{sh}(p+1)t} - \alpha^2 e^{-2(p+1)t}\right), \tag{43}$$

где параметр M связан с массой кинка m_{kink} и с константой связи μ формулой

$$M = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}m_{\text{kink}} = \left(\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{p+1}\right)}\mu\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{44}$$

В Φ_{13}-возмущении минимальной модели $M(P,P')$ имеется $P-1$ вакуумное состояние и вакуумное среднее зависит от этого состояния:

$$\langle\Phi_{mn}\rangle_s = M^{2\Delta_{mn}}\frac{\sin\frac{\pi s}{P}|P'm-Pn|}{\sin\frac{\pi s}{P}(P'-P)}Q\left(\frac{P'm-Pn}{P'-P}\right), \quad s=1,\dots,P-1, \tag{45}$$

где

$$Q(\eta) = \exp\int_0^\infty\frac{dt}{t}\left(\frac{\operatorname{ch}2t\operatorname{sh}t(\eta-1)\operatorname{sh}t(\eta+1)}{\operatorname{ch}t\operatorname{sh}tp\operatorname{sh}t(p+1)} - \frac{\eta^2-1}{2p(p+1)}e^{-4t}\right), \quad p=\frac{P}{P'-P}. \tag{46}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_{\varphi} = -\frac{1}{5}$.

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{??} \quad , \tag{47}$$

Модель Ли—Янга

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0) \rangle$.

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121}T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}_{\varphi\varphi}^{\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121} T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

где

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{49}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\dots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121}T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

где

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{49}$$

Вакуумные средние равны

$$\langle\varphi\rangle = ?? \quad , \quad \langle T\bar{T}\rangle = ?? \quad . \tag{50}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121}T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

где

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{49}$$

Вакуумные средние равны

$$\langle\varphi\rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h}, \qquad \langle T\bar{T}\rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \tag{50}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121}T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

где

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{49}$$

Вакуумные средние равны

$$\langle\varphi\rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h}, \qquad \langle T\bar{T}\rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \tag{50}$$

Константы $C^1_{\varphi\varphi}(x)$ можно получить аналитически из интеграла:

$$\begin{aligned} C^1_{\varphi\varphi}(x) &= |x|^{4/5} + \kappa h\frac{\pi\gamma^2(1/5)}{14^2\gamma(2/5)}|x|^{16/5} + O(|x|^{28/5}) \\ &= |x|^{4/5}(1 + 0.0310\ldots \times (m|x|)^{12/5} + O(|x|^{24/5})). \end{aligned} \tag{51}$$

Рассмотрим модель Ли—Янга $M(2,5)$. В ней имеется всего два примарных поля $\Phi_{11} = 1$ и $\Phi_{12} = \varphi = \Phi_{\mathrm{p}}$ размерности $\Delta_\varphi = -\frac{1}{5}$. Массивной теории отвечает мнимая константа связи $\lambda = ih$, причем

$$h = \alpha m^{12/5}, \quad \alpha = 0.0970\ldots \tag{47}$$

Нас будет интересовать корреляционная функция $G(x) = \langle \varphi(x)\varphi(0)\rangle$. В конформной теории поля имеется операторное разложение

$$\varphi(x)\varphi(0) = |x|^{4/5}\left(1 + \frac{|x|^4}{121} T\bar{T}(0) + O(|x|^12)\right) + |x|^{2/5}\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi}\left(\varphi(0) + O(|x|^8)\right), \tag{48}$$

где

$$\mathcal{C}^{\varphi}_{\varphi\varphi} = i\kappa = \frac{i}{2}\gamma^{3/2}\left(\frac{1}{5}\right)\gamma^{1/2}\left(\frac{2}{5}\right), \qquad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)}. \tag{49}$$

Вакуумные средние равны

$$\langle\varphi\rangle = \frac{5im^2}{24\sqrt{3}h}, \qquad \langle T\bar{T}\rangle = -\frac{\pi^2 m^4}{48}. \tag{50}$$

Константы $C^1_{\varphi\varphi}(x)$ можно получить аналитически из интеграла:

$$\begin{aligned} C^1_{\varphi\varphi}(x) &= |x|^{4/5} + \kappa h \frac{\pi\gamma^2(1/5)}{14^2\gamma(2/5)}|x|^{16/5} + O(|x|^{28/5}) \\ &= |x|^{4/5}(1 + 0.0310\ldots \times (m|x|)^{12/5} + O(|x|^{24/5})). \end{aligned} \tag{51}$$

В случае $C^{\varphi}_{\varphi\varphi}$ интеграл приходится брать численно:

$$C^{\varphi}_{\varphi\varphi}(r) = i\kappa|x|^{2/5}(1 + 0.0212\ldots \times (mr)^{12/5} + O(|x|^{24/5})). \tag{52}$$