Лекция 5.

10 октября 2001 г.

На предыдущей лекции мы доказали, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k,x)\Psi_2(k',x)dx = \alpha(k)\delta(k+k') + \beta(k)\delta(k-k'). \tag{1}$$

Несложно проверить, что если

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right), \tag{2}$$

то при вещественных $k \neq 0$

$$\Psi_1(k,x) = a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-kx} + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \to -\infty, \tag{3}$$

$$\Psi_1(k,x) = e^{ikx} + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{4}$$

$$\Psi_2(k,x) = e^{ikx} + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \to -\infty, \tag{5}$$

$$\Psi_2(k,x) = a(-k)e^{ikx} - b(k)e^{-kx} + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{6}$$

(коэффициенты при экспонентах в формуле (6) легко выводятся из независимости вронскиана любой пары решений от x). Функции $\Psi_1(k,x)$, $\Psi_2(k,x)$ аналитически продолжаются по k в верхнюю и нижнюю полуплоскость соответственно, и при $\operatorname{Im} k > 0$

$$\Psi_1(k,x) = a(k)e^{ikx}\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)\right), \quad x \to -\infty, \tag{7}$$

$$\Psi_1(k,x) = e^{ikx}\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)\right), \quad x \to +\infty, \tag{8}$$

$$\Psi_2(-k,x) = e^{-ikx}\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)\right), \quad x \to -\infty, \tag{9}$$

$$\Psi_2(-k,x) = a(k)e^{-ikx}\left(1 + O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)\right), \quad x \to +\infty, \tag{10}$$

Поскольку добавки к экспонентам абсолютно интегрируемы по x на всей прямой, то их вклад в скалярное произведение оказывается регулярной функцией. Поэтому при вычислении коэффициента при δ-функции ими можно принебречь, что и дает следующий ответ: Пусть $\operatorname{Im} k \geq 0$, $k' = -k + \tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k,x)\Psi_2(-k+\tilde{k},x)dx = a(k)\delta(\tilde{k}). \tag{11}$$

Для чего нам все это нужно? Предложенный способ вычисления высших уравнений иерархии KdV через дробные степени оператора Шредингера не очень удобен на практике. На практике удобнее пользоваться рекурсионным оператором, выводом формулы для которого мы и займемся.

Наша программа следующая:

1. Мы вычислим производную функции $\Psi_1(k,x)$ в силу $2n+1$ высшего уравнения KdV в терминах так назывемого ядра Коши-Бейкера-Ахиезера (введенного в работе [1], см. также [2]).

2. Разлагая вблизи точки $k=\infty$ производную функции $\Psi_1(k,x)$ получаем производную потенциала $u(x)$ по времени t_{2n+1} (т.е. правую часть соответствующего уравнени KdV) как производную по x коэффициента при k^{-2n-2} в разложении по $1/k$ вблизи бесконечности функции $\Phi(k,x) = \tilde{\Psi}(k,x)\tilde{\Psi}(-k,x)$.

3. Мы убедимся, что функция $\Phi(k,x)$ удовлетворяет простому дифференциальному уравнению 3 порядка, из которого легко вычисляется ее асимптотическое разложение по $1/k$ вблизи бесконечности.

Самым сложным технически оказывется первый шаг.

Мы будем работать в пространстве формальных асимптотических рядов вида

$$f(k,x) = X(k,x)e^{ikx}, \tag{12}$$

где

$$X(k,x) = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{\chi_j(x)}{k^j}, \tag{13}$$

N – некоторое целое число, которое может быть как положительным, так и отрицательным, $\chi_j(x)$ – гладкие функции переменной x. Несложно понять, что

Лемма 1 *1. Оператор умножения на произвольную функцию $V(k,x)$ вида*

$$V(k,x) = \sum_{j=M}^{\infty} \frac{v_j(x)}{k^j}, \tag{14}$$

где все $v_j(x)$ гладкие, переводит пространство рядов (12) в себя.

2. *Оператор ∂_x переводит пространство рядов (12) в себя.*

3. *Оператор ∂_x на пространстве рядов (12) однозначно обратим и имеет место формула:*

$$\partial_x^{-1}(v(x)e^{ikx}) = \frac{1}{ik}v(x)e^{ikx} - \frac{1}{(ik)^2}v'(x)e^{ikx} + \frac{1}{(ik)^3}v''(x)e^{ikx} - \frac{1}{(ik)^4}v'''(x)e^{ikx} + \ldots. \tag{15}$$

Тем самым определено действие введеных в первой лекции формальных псевдодифференциальных операторов на пространстве рядов (12) (сходимость следует из того, что в каждом порядке по $1/k$ участвует лишь конечное число слагаемых).

Лемма 2 *Уравнение Шредингера*

$$-f''(k,x) + u(x)f(k,x) = k^2 f(k,x) \tag{16}$$

имеет единственное с точностью до умножения на произвольный не зависящий от x ряд

$$\alpha(k) = \sum_{j=M}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^j} \tag{17}$$

решение в пространстве рядов (12).

Сперва отметим, что умножение на произвольную функцию вида (17) переводит решение (16) в решение. Поэтому без ограничения общности можно искать функцию $f(k,x)$ в виде

$$f(k,x) = \chi(k,x)e^{ikx}, \tag{18}$$

где
$$\chi(k,x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j(x)}{k^j}, \tag{19}$$
Подставляя (18) в (16) получаем уравнение
$$-\chi''(k,x) - 2ik\chi'(k,x) + u(x)\chi(k,x) = 0. \tag{20}$$
Подставляя ряд (19) в (20) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, получаем систему уравнений первого порядка
$$\left\{ \begin{array}{c} 2i\chi_1'(x) = u(x) \\ 2i\chi_2'(x) = u(x)\chi_1(x) - \chi_1''(x) \\ \dots \\ 2i\chi_{j+1}'(x) = u(x)\chi_j(x) - \chi_j''(x) \\ \dots \end{array} \right. \tag{21}$$
Все уравнения имеют по одной константе интегрирования. Преобразованием
$$\chi(k,x) \to \chi(k,x)(\chi(k,0))^{-1} \tag{22}$$
мы однозначно фиксируем их равными 0 при $x = 0$.

Поскольку операторы L и $(-L)^{1/2}$ коммутируют, то $(-L)^{1/2}$ перводит решения (16) снова в решения. Тем самым если $f(k,x)$ – решение (16) в виде ряда (12), то
$$(-L)^{1/2} f(k,x) = \beta(k) f(k,x), \tag{23}$$
где $\beta(k)^2 = -k^2$, и $\beta(k) = \pm ik$. Поскольку
$$(-L)^{1/2} = \partial_x + \dots, \tag{24}$$
то
$$(-L)^{1/2} f(k,x) = (ik + O(1)) f(k,x), \tag{25}$$
т.е. мы доказали:

Лемма 3 *Пусть $f(k,x)$ – решение уравнения Шредингера (16) в виде ряда (12), $(-L)^{1/2}$ – квадратный корень из оператора Шредингера вида*
$$(-L)^{1/2} = \partial_x + \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x) \partial_x^{-j}. \tag{26}$$
Тогда
$$(-L)^{1/2} f(k,x) = ik f(k,x), \tag{27}$$

Как доказали в Лекции 4, вся иерархия высших KdV совместна, т.е. можно построить решение, зависящее от любого конечного набора времен $t_1 =$, $t_3 = t$, t_5, $\ldots$, t_{2N+1} и удовлетворяющего одновременно первым N уравнениям иерархии KdV. При этом переменная x играет выделенную роль, поскольку по ней производится преобразование рассеяния. Поэтому для сокращения формул мы будем использовть следующие обозначения: $u(x, t, t_5, \ldots, t_{2N+1}) = u(x, \vec{t})$, $\Psi(k, x, t, t_5, \ldots, t_{2N+1}) = \Psi(k, x, \vec{t})$.

Для вычисления прозводной волновой функции в силу $2n+1$ высшего уравнения KdV мы воспользуемся тем, что

1. Высшие уравнения KdV записываются как
$$[\partial_{t_{2n+1}} - A_{2n+1}, L] = 0, \tag{28}$$
где $A_{2n+1} = \{(-L)^{(2n+1)/2}\}_- = \partial^{2n+1} + \ldots$, $\{(-L)^{(2n+1)/2}\}_-$ – дифференциальная часть формального псевдодифференциального оператора $(-L)^{(2n+1)/2}$.

2. Имеет место доказанное на прошлой лекции соотношение
$$\partial_{t_{2n+1}} \tilde{\Psi}(k, x, \vec{t}) = (A_{2n+1} - (ik)^{2n+1}) \tilde{\Psi}(k, x, \vec{t}). \tag{29}$$

3. Поскольку имеет место (27) и $(-L)^{(2n+1)/2} - A_{2n+1} = \{(-L)^{(2n+1)/2}\}_+$ – оператор, разлагающийся только по отрицательным степеням ∂_x, то
$$(A_{2n+1} - (ik)^{2n+1}) \tilde{\Psi}(k, x, \vec{t}) = O\left(\frac{1}{k}\right) e^{ikx}. \tag{30}$$

4. Предположим для простоты, что дискретный спектр отсутствует. Тогда функция $F_n(k, x, \vec{t}) = A_{2n+1} \tilde{\Psi}(k, x, \vec{t})$ обладает следующим набором свойств

   (a) $F_n(k, x, \vec{t})$ голоморфна по k вне вещественной оси.

   (b) $F(k + i0, x, \vec{t}) = F(k - i0, x, \vec{t}) + r(k, \vec{t}) F(-k - i0, x, \vec{t}), \quad k \in \mathbf{R}$.

Оказывается, что аналитические свойства свойства функции $F_n(k, x, \vec{t})$ из пунктов (3)-(4) полностью определяют ее. Во-первых, предположим, что потенциал $u(x, \vec{t})$ – бесконечно дифференциируемая функция переменной x (в противном случае начинаются трудности, связанные с тем что высшие уравнения KdV с большими номерами нужно понимать в смысле обобщенных функций). Тогда $r(x,\vec{t})$ стремится к 0 при $|k|\to\infty$ быстрее любой степени k и при больших k разрывом $F_n(k,x,\vec{t})$ на вещественной оси можно принебречь. Обозначим γ контур $|k|=R_0$, $R_0\gg 1$. Определим функцию $\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})$ следующим образом

$$\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})=\begin{cases} A_{2n+1}\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t}) \ \text{ при } \ |k|<R_0 \\ (A_{2n+1}-(ik)^{2n+1})\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t}) \ \text{ при } \ |k|>R_0. \end{cases} \tag{31}$$

Тем самым $\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})$ оказывется решением обощенной задачи Римана о факторизации. В отличие от обычной задачи Римана, которую мы рассматривали ранее, здесь функциия внутри контура уже не голоморфна, а имеет разрыв первого рода при вещественных k с соотношением пункта 4.b. Для ее решения воспользуемся следующим обобщением интеграла Коши:

$$\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\omega(k,\xi,x,\vec{t})(i\xi)^{2n+1}\tilde{\Psi}(\xi,x,\vec{t})d\xi, \tag{32}$$

где ядро $\omega(k,\xi,x,\vec{t})$, определенное при достаточно большим по модулю ξ и называемое ядром Коши-Бейкера-Ахиезера, обладает следующим набором свойств:

1. $\omega(k,\xi,x,\vec{t})$ голоморфно по k при $\operatorname{Im}k\neq 0$, $k\neq\xi$.
2. $\omega(k,\xi,x,\vec{t})=\frac{1}{\xi-k}+O(1)$ при $k\to\xi$.
3. $\omega(k,\xi,x,\vec{t})=O\left(\frac{1}{k}\right)e^{ikx}$ при $|k|\to\infty$.
4. $\omega(k+i0,\xi,x,\vec{t})=\omega(k-i0,\xi,x,\vec{t})+r(k,\vec{t})\omega(-k-i0,\xi,x,\vec{t}), \quad k\in\mathbf{R}$.

Скачок на контуре γ у функции, задавемой интегралом (32) в соответствие с формулой Племеля-Сохоцкого

$$\frac{1}{w-z-i0}-\frac{1}{w-z+i0}=2\pi i\delta(z-w), \tag{33}$$

равен $(ik)^{2n+1}\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t})$, как и должно быть согласно (31). Из пункта 3 следует формула (30). Свойства $\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})$ сформулированные в пункте 4, вытекают из свойств $\omega(k,\xi,x,\vec{t})$, пункты 1, 4.

Таким образом, нам осталось построить ядро Коши-Бейкера-Ахиезера. Оно задается следующей явной формулой

$$\omega(k,\xi,x,\vec{t}) = -i\int\limits_{\pm\infty}^{x}\tilde{\Psi}(k,\tilde{x},\vec{t})\tilde{\Psi}(-\xi,\tilde{x},\vec{t})d\tilde{x}. \qquad (34)$$

При этом если $\operatorname{Im} k < \operatorname{Im}\xi$, то интегрирование ведется от точки $x=-\infty$, если $\operatorname{Im} k > \operatorname{Im}\xi$, то от точки $x=+\infty$. Свойства 1-4 несложно выводятся из соответствующих свойств $\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t})$. Единственное, что нужно проверить – отсутствие разрыва на линии $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im}\xi$, где меняется предел интегрирования. Однако непрерывность на линии $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im}\xi$ непосредственно следует из соотношения ортогональности (11).

Первая часть нашего плана наконец-то выполнена! Перейдем ко второй.

Напомним, что

$$u(x,\vec{t}) = 2i\partial_x\chi_1(x,\vec{t}), \qquad (35)$$

где $\chi_1(x,\vec{t})$ – первый из коэффициентов разложения предэкспоненты волновой функции в бесконечности

$$\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t}) = \chi(k,x,\vec{t})e^{ikx}, \quad \chi(k,x,\vec{t}) = 1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\chi_j(x,\vec{t})}{k^j}. \qquad (36)$$

Тем самым, для вычисления $\partial_{t_{2n+1}}u(x,\vec{t})$ нужно разложить в окрестности точки $k=\infty$ функцию $\partial_{t_{2n+1}}\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t})$. Поскольку вне контура γ она совпадает с $\tilde{F}_n(k,x,\vec{t})$, нужно сделать разложение по $1/k$ в (32), а для этого разложим по $1/k$ ядро Коши-Бейкера-Ахиезера. Подставляя в (34) асимптотику функции $\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t}) = e^{ikx}\left(1+O\left(1/k\right)\right)$ получаем:

$$\omega(k,\xi,x,\vec{t}) = -\left(\frac{1}{k}\tilde{\Psi}(-\xi,\tilde{x},\vec{t})+O\left(1/k^2\right)\right)e^{ikx}. \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (32) получаем с учетом (35)

$$\frac{\partial u(x,\vec{t})}{\partial t_{2n+1}} = -2i\partial_x\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}(i\xi)^{2n+1}\tilde{\Psi}(\xi,x,\vec{t})\tilde{\Psi}(-\xi,x,\vec{t})d\xi\right), \qquad (38)$$

т.е.

$$\frac{\partial u(x,\vec{t})}{\partial t_{2n+1}} = 2(-1)^n\partial_x\phi_{2n+2}(x,\vec{t}), \qquad (39)$$

где $\phi_{2n+2}(x,\vec{t})$ – коэффициенты разложения функции $\Phi(k,x,\vec{t}) = \tilde{\Psi}(k,x,\vec{t})\tilde{\Psi}(-k,x,\vec{t})$ по $1/k$

$$\Phi(k,x,\vec{t}) = 1 + \frac{\phi_2(x,\vec{t})}{k^2} + \frac{\phi_4(x,\vec{t})}{k^4} + \frac{\phi_6(x,\vec{t})}{k^6} + \ldots . \tag{40}$$

Здесь мы использовали формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi^k} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = 1 \\ 0 & \text{при} \quad k \neq 1. \end{cases} \tag{41}$$

Наконец приступим к третьей части – выведем рекуррентное соотношение на правые части уравнений иерархии KdV.

Лемма 4 *Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – произвольная пара решений уравнения*

$$-\psi'' + u(x)\psi = k^2\psi. \tag{42}$$

Тогда функция

$$F(x) = \psi_1(x)\psi_2(x) \tag{43}$$

удовлетворяет уравнению 3 порядка

$$F'''(x) = 4u(x)F'(x) - 4k^2F'(x) + 2u'(x)F(x) \tag{44}$$

Доказательство получается прямым вычислением. Учитывая, что

$$\psi'' = (u(x) - k^2)\psi, \quad \psi''' = (u(x) - k^2)\psi' + u'(x)\psi, \tag{45}$$

получаем

$$(\psi_1(x)\psi_2(x))''' = \psi_1(x)'''\psi_2(x) + 3\psi_1(x)''\psi_2(x)' + 3\psi_1(x)'\psi_2(x)'' + \psi_1(x)\psi_2(x)''' =$$

$$\begin{gathered} (u(x) - k^2)\psi_1'(x)\psi_2(x) + u'(x)\psi_1(x)\psi_2(x) + 3(u(x) - k^2)\psi_1(x)\psi_2'(x) + \\ +3(u(x) - k^2)\psi_1'(x)\psi_2(x) + (u(x) - k^2)\psi_1(x)\psi_2'(x) + u'(x)\psi_1(x)\psi_2(x) = \\ 4(u(x) - k^2)(\psi_1(x)\psi_2(x))' + 2u'(x)\psi_1(x)\psi_2(x). \end{gathered} \tag{46}$$

Зададим оператор Λ, называемый **рекурсионным оператором**, формулой

$$\Lambda = \frac{1}{4}\partial_x^2 - u(x) - \frac{1}{2}u'(x)\partial_x^{-1}. \tag{47}$$

Тогда уравнение (44) можно переписать в следующей форме

$$-k^2F'(x) = \Lambda F'(x). \tag{48}$$

Тем самым, для коэффициентов разложения функции $\Phi'(k,x,\vec{t}) = (\tilde{\Psi}(k,x,\vec{t})\tilde{\Psi}(-k,x,\vec{t}))'$ получаем

$$\phi'_{2n}(k,x,\vec{t}) = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}\Lambda^{n-1}\partial_x u(x,\vec{t}), \tag{49}$$

и иерархия KdV записывается как

$$\partial_{t_{2n+1}}u(x,\vec{t}) = \Lambda^n \partial_x u(x,\vec{t}). \tag{50}$$

В частности, при $n=0$ получаем

$$u_{t_1} = u_x = \partial_x u, \tag{51}$$

при $n=1$

$$u_{t_3} = \Lambda u_x = \frac{1}{4}\partial_x^2 u_x - uu_x - \frac{1}{2}u_x u = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x = \partial_x\left(\frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2\right), \tag{52}$$

т.е., как и ожидалось, мы получили уравнение KdV, при $n=2$

$$\begin{gathered} u_{t_5} = \Lambda\left(\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x\right) = \\ = \frac{1}{4}\partial_x^2\left(\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x\right) - u\left(\frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x\right) - \frac{1}{2}u_x\left(\frac{1}{4}u_{xx} - \frac{3}{4}u^2\right) = \\ = \frac{1}{16}u^V - \frac{3}{8}uu_{xxx} - \frac{9}{8}u_xu_{xx} - \frac{1}{4}uu_{xxx} + \frac{3}{2}u^2u_x - \frac{1}{8}u_xu_{xx} + \frac{3}{8}u^2u_x = \\ = \frac{1}{16}u^V - \frac{5}{8}uu_{xxx} - \frac{5}{4}u_xu_{xx} + \frac{15}{8}u^2u_x. \end{gathered} \tag{53}$$

Тем самым, первое из высших уравнений KdV, отвечающее выбору $A_5 = \{(-l)^{5/2}\}_-$ имеет вид

$$u_{t_5} = \frac{1}{16}u^V - \frac{5}{8}uu_{xxx} - \frac{5}{4}u_xu_{xx} + \frac{15}{8}u^2u_x = \partial_x\left(\frac{1}{16}u^{IV} - \frac{5}{8}uu_{xx} - \frac{5}{16}u_x^2 + \frac{5}{8}u^3\right). \tag{54}$$

Здесь

$$u^{IV} = u_{xxxx}, \quad u^V = u_{xxxxx}.$$

Список литературы

[1] P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov, *Virasoro action on Riemann surfaces, Grassmanians,* $\det\bar{\partial}$ *and Segal-Wilson* τ*- function*, Problems of modern quantum field theory (Invited lecvtures of the spring school held in Alushta USSR, April 24 - May 5, 1989), ed. A.A.Belavin, A.U.Klimyk, A.B.Zamolodchikov, Springer-Verlag, 1989, pp. 86-106.

[2] P.G.Grinevich, A.Yu.Orlov, E.I.Schulman, *On the symmetries of the integrable systems*, Important developments in soliton theory, ed. A. Fokas, V.E. Zakharov, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 283-301 (1993).

[3] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский "Теория солитонов. Метод обратной задачи". М. Наука, 1980.

[4] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. "Спектральное преобразование и солитоны". М.Мир, 1985.

[5] М.Абловиц, Х.Сигур. "Солитоны и метод обратной задачи". М. Мир, 1987.