

Задачи занятия 10 марта 2016 года.

Задача 1 Рассмотрим отображение $f : S^2 \rightarrow S^2$. Пусть ω – некоторая форма на образе с ненулевым интегралом, ω^* – ее обратный образ. Обозначим

$$I[f] = \int_{S^2} \omega^*,$$

где интеграл берется по сфере-прообразу. Докажите, что

$$\frac{\delta I}{\delta f(x)} \equiv 0.$$

Задача 2 Пусть f то же, что и в предыдущей задаче,

$$J = \frac{\int_{S^2} \omega^*}{\int_{S^2} \omega},$$

причем интеграл в числителе берется по сфере-прообразу, а в знаменателе – по сфере-образу. Докажите, что

$$\frac{\delta J}{\delta \omega(x)} \equiv 0.$$

Задача 3 Рассмотрим поверхность M в \mathbb{R}^3 . Определим отображение Гаусса $M \rightarrow S^2$ следующим правилом: каждой точке M ставится в соответствие единичный нормальный вектор. Обозначим ω стандартную форму площади на S^2 . Докажите, что

$$\omega^* = K d\sigma,$$

где K – гауссова кривизна, а $d\sigma$ – форма площади на M .

Задача 4 Вычислите степень гауссова отображения для сферы с g ручками.

Задача 5 Вычислите

$$\int K d\sigma$$

по сфере с g ручками.