П.Г. Гриневич

“Римановы поверхности” – 2024

Список задач

1. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt[3]{z^2-1}$;
   (b) $\sqrt[3]{(z-1)^2 z}$;
   (c) $\sqrt[3]{(z^2+1)^2}$.
2. Выделить непрерывные однозначные ветви и построить схему римановой поверхности для функции $\sqrt{z^2}$.
3. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt[4]{z^2+2}$;
   (b) $\sqrt[4]{z^2}$;
   (c) $\sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$;
   (d) $\sqrt[4]{(z^2-1)^3(z+1)^3}$;
   (e) $\sqrt[4]{z(z-1)^3}$.
4. Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:
   (a) $\sqrt{\frac{1}{z-i}}$;
   (b) $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$;
   (c) $\sqrt[4]{\frac{(z+i)^2}{z(z-1)^3}}$.
5. Найти все значения:

(a) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{2i}$;

(b) $\frac{1-\sqrt{-2i}}{\sqrt{-4}}$;

(c) $\sqrt{i + \sqrt{-1}}$;

(d) $\sqrt[4]{(1+i)^2}$;

(e) $(\sqrt{i} + \sqrt{i})^2$.

6. Вычислить группу монодромий для функции $w(z)$ где

$$z = w^3 - 9w$$

7. Вычислите индексы особых точек векторных полей на плоскости:

   (a) $z^k \partial z, \quad k > 0$ в точке $z = 0$;

   (b) $z^k \partial z, \quad k < 0$ в точке $z = 0$;

   (c) $\exp\left[\frac{1}{z}\right] \partial z$ в точке $z = 0$;

   (d) $-y\partial_x + x\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

   (e) $x\partial_x + y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

   (f) $-x\partial_x - y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

   (g) $x\partial_x - y\partial_y$ в точке $x = y = 0$;

   (h) $(x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$ в точке $x = y = 0$.

8. Вычислите род поверхности $x^n + y^n + z^n = 0$.

9. Для каких p, q существуют **неразветвленные** накрытия поверхности рода p над поверхностью рода q.

10. Вычислить род римановой поверхности через число точек ветвления и число листов накрытия.

11. Рассмотрим регулярную поверхность, заданную алгебраическим уравнением $R(z, w) = 0$. Докажите, что дифференциал

$$\omega = \frac{dz}{R_w(z, w)} = -\frac{dw}{R_z(z, w)}$$

не имеет ни нулей ни особенностей вне бесконечно удаленных точек.

12. Рассмотрим уравнение $w^2 = P_n(z)$, где $P_n(z)$ – многочлен степени n без кратных корней. При каких k дифференциал $\frac{z^k dz}{w}$ голоморфен?

13. Докажите, что операция $*$ инвариантна относительно замен координат.

14. Выразите оператор
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
через операторы ∂_z, $\partial_{\bar{z}}$.

15. Докажите, что для $(1,0)$ форм
$$\iint_\Gamma \omega_1 \wedge \overline{*\omega_2} = \frac{1}{i} \iint_\Gamma \omega_1 \wedge \overline{\omega_2}$$

16. Докажите, что образующие $\tau \to \tau + 1$, $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ порождают всю группу $SL(2, \mathbb{Z})$:
$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

17. Найдите базис голоморфных 2-форм на гиперэллиптической кривой
$$\mu^2 = P_{2g+1}(\lambda), \quad \deg P_{2g+1}(\lambda) = 2g + 1,$$
для $g = 1, 2, 3$.

18. Рассмотрим риманову поверхность $\mu^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6)$. Пусть
$$|\lambda_1 - \lambda_2| \sim \varepsilon \ll 1, \quad |\lambda_3 - \lambda_4| \sim \varepsilon, \quad |\lambda_5 - \lambda_6| \sim \varepsilon,$$
$$|\lambda_1 - \lambda_3| \sim 1, \quad |\lambda_1 - \lambda_5| \sim 1, \quad |\lambda_3 - \lambda_5| \sim 1.$$
Вычислите асимптотику матрицы Римана для малых ε.

19. Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma : \mu^5 - \lambda^7 + R(\lambda, \mu) = 0$, причем предположим, что
$$R(\lambda, \mu) = \sum_{m,n} r_{m,n} \lambda^m \mu^n, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad 5m + 7n < 35.$$

(a) Вычислите род Γ;

(b) постройте базис голоморфных дифференциалов на Γ.

20. Рассмотрим риманову повнрхность $\Gamma : \mu^2 = \prod\limits_{k=1}^{6}(\lambda - \lambda_k)$ и пару точек γ_1, γ_2 на ней. Обозначим L_0 пространство мероморфных функций с полюсами первого порядка в γ_1, γ_2 и обозначим L_1 пространство голоморфных дифференциалов с нулями первого порядка в γ_1, γ_2. Вычислите $\dim L_0 - \dim L_1$ и сопоставьте ответ с теоремой Римана-Роха. Какие пары точек γ_1, γ_2 общего положения, а какие – необщего.

21. Пользуясь тем, что $\wp(z)$ задает отображение
$$\lambda = \wp(z),$$
обратное к отображению Абеля:
$$z = \int\limits_{\infty}^{\lambda} \frac{d\tilde{\lambda}}{\sqrt{4\tilde{\lambda}^3 - g_2\tilde{\lambda} - g_3}},$$
найти разложение в точке $z = 0$ функции $\wp(z)$ с точностью до $o(z^5)$ прямым вычислением с рядами.

22. Рассмотрим эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z)$, отвечающую кривой $\mu^2 = 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3$. Ее разложение в нуле имеет вид:
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + {}_4 z^4 + O(z^6).$$
Выразите c_2, c_3 через g_2, g_3.

23. Рассмотрим разложение в нуле эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$, отвечающей решетке периодов с базисом $1, \tau$.
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \geq 2} (2k+1) G_{2k}(\Gamma) z^{2k-2}.$$
Вычислите закон преобразования коэффициентов $G_{2k}(\Gamma)$ при преобразованиях:
$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

24. Докажите теоремы сложения для эллиптических функции Вейерштрасса, а именно: выразите как рациональные функции от $\wp(z)$, $\wp'(z)$ следующие функции

    (a) $\wp(z_1 + z_2)$;

    (b) $\wp'(z_1 + z_2)$;

    (c) $\zeta(z - z_1) + \zeta(z_1 - z_2) + \zeta(z_2 - z)$.

25. Выразите через тета-функции Римана элиилтические функции Якоби:

    (a) $sn(z)$;

    (b) $cn(z)$;

    (c) $dn(z)$.

26. Докажите, что отношения функций

$$\frac{\theta_j^2(z+1)}{\theta_j^2(z)}, \quad \frac{\theta_j^2(z+\tau)}{\theta_j^2(z)},$$

одинаковы при всех j и, тем самым отображение

$$z \to \left[\theta_0^2(z), \theta_1^2(z), \theta_1^2(z), \theta_3^2(z)\right]$$

– корректно определенное отображение $\Gamma \to \mathbb{C}P^3$.

27. Выпишите закон преобразования матрицы периодов Римана b_{kl} при симплектических заменах базиса циклов.

28. Докажите соотношение для формальных псевдодифференциальных операторов:

$$\partial_x^{-1} \circ u(x) = u(x) \circ \partial_x^{-1} - u'(x) \circ \partial_x^{-2} + u''(x) \circ \partial_x^{-3} - u'''(x) \circ \partial_x^{-4} + \dots$$

29. Вычислите оператор

$$A = \left[(\partial_x^2 - u(x))^{3/2}\right]_+$$

где вычисления проводятся в классе формальных псевдодифференциальных операторов и $\left[\ \ \right]_+$ означает проекцию на чисто дифференциальные операторы.