1 Билинейные соотношения Римана.

В данной лекции мы выведем билинейные соотношения Римана в той форме, в которой они нам понадобятся для доказательства теоремы Римана-Роха.

Пусть Γ–неособая компактная риманова поверхность рода g. Мы будем также предполагать, что на Γ зафиксирован канонический базис циклов $a_1,\ldots,a_g$, $b_1,\ldots,b_g$. Пусть $\mathcal{D}$ – некоторой дивизор на Γ:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_-,$$

где $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_-$ – положительная и отрицательная часть дивизора $\mathcal{D}$ соответственно.

$$\mathcal{D}_+ = \sum_{j=1}^{n_+} k_j P_j, \quad \mathcal{D}_- = -\sum_{w=1}^{n_-} l_w Q_w, \quad k_j, l_w \in \mathbb{Z}, \quad k_j > 0, \quad l_w > 0.$$

Далее мы будем считать, что в окрестности всех точек P_j, Q_j выбраны локальные координаты. Для простоты, мы будем обозначать их одной и той же буквой z.

Ранее с помощью проекторов Вейля нами была доказана следующия теорема (см., например, книгу Спрингера):

Теорема 1 *Для любой неособой компактой римановой поверхность* Γ *рода* g*:*

1. *Существует единственный базис голоморфных дифференциалов (дифференциалов первого рода)* $\omega_1,\ldots,\omega_g$ *таких, что*

$$\oint_{a_t} \omega_j = \delta_{tj}.$$

2. *Для любой точки* R *и любого целого числа* $s \geq 2$ *существует единственный мероморфный дифференциал (дифференциал второго рода)* $\Omega_R^{(s)}$ *такой, что*

   (a) $\Omega_R^{(s)}$ *имеет единственный полюс в точке* R *(с нулевым вычетом) такой, что*

$$\Omega_R^{(s)} = d\left(\frac{1}{(z-R)^{s-1}}\right) + O(1)$$

(b) *Дифференциал* $\Omega_R^{(s)}$ *удовлетворяет условию нормировки*

$$\oint_{a_t} \Omega_R^{(s)} = 0, \quad t = 1, \ldots, g.$$

3. *Для любой пары точек* R_1, R_2, *существует единственный мероморфный дифференциал (дифференциал третьего рода)* $\Omega_{R_1,R_2}^{(1)}$ *такой, что*

   (a) $\Omega_{R_1,R_2}^{(1)}$ *имеет два полюса первого порядка в точках* R_1, R_2, *с вычетами* -1 *и* $+1$ *соответственно.*

   (b) *Дифференциал* $\Omega_{R_1,R_2}^{(1)}$ *удовлетворяет условию нормировки*

$$\oint_{a_t} \Omega_{R_1,R_2}^{(1)} = 0, \quad t = 1, \ldots, g,$$

Замечание 1 *Нам важно, что указанная теорема верна без дополнительного предположения, что наши данные – "общего положения".*

Введем следующие два пространства:

1. V_0 – пространство, порожденное мероморфными дифференциалами второго рода

$$\Omega_{P_j}^{(s)}, \quad j = 1, \ldots, n_+, \quad s = 2, \ldots, k_j + 1.$$

   Его размерность равна $\deg(\mathcal{D}_+) = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n_+}$. Будем считать, что его базисные элементы упорядочены по следующему правилу:

$$\Omega_{P_1}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_1}^{(k_1+1)}, \Omega_{P_2}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_2}^{(k_2+1)}, \ldots, \Omega_{P_{n_+}}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_{n_+}}^{(k_{n_+}+1)}.$$

2. V_1 – пространство, порожденное следующими дифференциалами:

   (a) Голоморфными дифференциалами ω_t, $t = 1, \ldots, g$.

   (b) Мероморфными дифференциалами третьего рода $\Omega_{Q_1,Q_w}^{(1)}$, $w = 2, \ldots, n_-$.

   (c) Мероморфными дифференциалами второго рода $\Omega_{Q_w}^{(s)}$, $w = 1, \ldots, n_-$, $s = 2, \ldots, l_w$.

Понятно, что

$$\dim(V_1) = \begin{cases} g & \text{если} \quad n_- = 0, \\ g - 1 - \deg(\mathcal{D}_-) & \text{если} \quad n_- > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\deg(\mathcal{D}_-) = -l_1 - l_2 - \ldots - l_{n_-}.$$

Будем считать, что базисные элементы V_1 упорядочены по следующему правилу:

$$\omega_1, \ldots, \omega_g, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_2}, \ldots, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_{n_-}},$$

$$\Omega^{(2)}_{Q_1}, \ldots, \Omega^{(l_1)}_{Q_1}, \Omega^{(2)}_{Q_2}, \ldots, \Omega^{(l_2)}_{Q_2}, \ldots, \Omega^{(2)}_{Q_{n_-}}, \ldots, \Omega^{(l_{n_-})}_{Q_{n_-}}.$$

Замечание 2 *Отметим, что если $n_- = 0$, или $n_- = 1$ и $l_1 = 1$ то V_1 совпадает с пространством голоморфных дифференциалов. Если $n_- = 1$ и $l_1 > 1$ то V_1 порождено дифференциалами первого и второго рода. Если $n_- > 1$ и все $l_w = 1$ то V_1 порождено дифференциалами первого и третьего рода. В остальных случаях в базис пространства входят дифференциалы всех трех родов.*

Нам понадобятся следующие обозначения.

1. В окрестности точки Q_w все дифференциалы $\Omega^{(s)}_{P_j}$, голоморфны. Обозначим $\alpha^{(s);u}_{j;w}$ разложения в ряд Тейлора их первообразных в этих точках:

$$\int_{Q_1}^{z} \Omega^{(s)}_{P_j} = \int_{Q_1}^{Q_w} \Omega^{(s)}_{P_j} + \sum_{u=1}^{\infty} \alpha^{(s);u}_{j;w} \, (z - Q_w)^u, \;\; j = 1, \ldots, n_+, \;\; s = 2, \ldots, k_j \;\; w = 1, \ldots, n_-.$$

2. В окрестности точки P_j все дифференциалы ω_t, $\Omega^{(s)}_{Q_w}$, $\Omega^{(s)}_{Q_1,Q_w}$, голоморфны. Обозначим их коэффффиценты разложений в ряд Тейлора $\omega^u_{t;j}$, $\beta^{(s);u}_{w;j}$, $\beta^{(1);u}_{w;j}$ соответственно:

$$\omega_t = \sum_{u=0}^{\infty} \omega^u_{t;j} \, (z - P_j)^u dz, \quad t = 1, \ldots, g, \quad j = 1, \ldots, n_+,$$

$$\Omega^{(s)}_{Q_w} = \sum_{u=0}^{\infty} \beta^{(s);u}_{w;j} \, (z - P_j)^u dz, \;\; w = 1, \ldots, n_-, \;\; s = 2, \ldots, l_w \;\; j = 1, \ldots, n_+,$$

$$\Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} = \sum_{u=0}^{\infty} \beta^{(1);u}_{w;j} \, (z - P_j)^u dz, \quad w = 2, \ldots, n_-, \quad j = 1, \ldots, n_+, .$$

Для вывода билинейных соотношений Римана мы будем использовать кососимметрическое спаривание на пространстве мероморфных дифференциалов.

Будем считать, что кривая Γ разрезана вдоль циклов так, чтобы получился $4g$ – угольник Γ' с границей $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

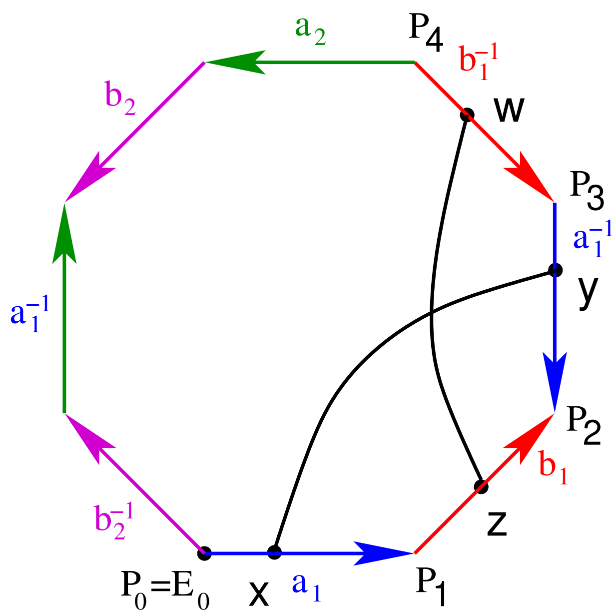

Рис. 1: $4g$ – угольник для $g = 2$.

Пусть $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$ – пара мероморфных дифференциалов на Γ, полюса которых лежат вне разрезов. Тогда зададим спаривание $<,>$ формулой

$$< \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2 >= \int_{\partial\Gamma'} \left(d^{-1} \tilde{\Omega}_1 \right) \tilde{\Omega}_2, \qquad (2)$$

где

$$\left(d^{-1} \tilde{\Omega}_1 \right) (\gamma) = \int_{P_0}^{\gamma} \tilde{\Omega}_1,$$

причем путь интегрирования берется достаточно близким к границе. Тогда имеет место доказанное ранее соотношение:

$$< \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2 >= \sum_{t=1}^{g} \left[\oint_{a_t} \tilde{\Omega}_1 \oint_{b_t} \tilde{\Omega}_2 - \oint_{b_t} \tilde{\Omega}_1 \oint_{a_t} \tilde{\Omega}_2 \right]. \qquad (3)$$

С другой стороны, интеграл (2) можно вычислять через вычеты, что и порождает билинейные соотношения Римана.

Посмотрим, какие соотношения возникают из следующих спариваний:

1. $< \Omega^{(s)}_{P_j}, \omega_t >$;

2. $< \Omega^{(s)}_{P_j}, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w}$;

3. $< \Omega^{(s)}_{P_j}, \Omega^{(u)}_{Q_w} >$, $u \geq 2$.

Мы имеем:

1. В этом случае

$$\oint_{a_t} \Omega^{(s)}_{P_j} = 0, \quad t = 1, \ldots, g, \quad \oint_{a_0} \omega_t = \delta_{jt},$$

следовательно

$$< \Omega^{(s)}_{P_j}, \omega_t >= - \int_{b_t} \Omega^{(s)}_{P_j}.$$

Подинтегральная форма имеет единственную особенность в точке P_j, причем вблизи этой точки

$$\Omega^{(s)}_{P_j} = d \left(\frac{1}{(z - P_j)^{s-1}} \right) + O(1), \quad \omega_t = \sum_{u=0}^{\infty} \omega^{u}_{t;j} \; (z - P_j)^u dz,$$

следовательно

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\omega_t = \left(\frac{1}{(z - P_j)^{s-1}} + O(1) \right) \left(\sum_{u=0}^{\infty} \omega^{u}_{t;j} \; (z - P_j)^u dz \right),$$

$$< \Omega^{(s)}_{P_j}, \omega_t >= 2\pi i \omega^{s-2}_{t;j}$$

Мы получили билинейное соотношение Римана для дифференциалов первого и второго рода:

$$\int_{b_t} \Omega^{(s)}_{P_j} = -2\pi i \omega^{s-2}_{t;j}. \qquad (4)$$

2. Поскольку в этом случае у обоих дифференциалов интегралы по a-циклам равны 0, следовательно

$$< \Omega^{(s)}_{P_j}, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} >= 0.$$

Подинтегральная форма имеет три особенности в точке P_j, Q_1, Q_w причем вблизи этих точек

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} = \left(\frac{1}{(z-P_j)^{s-1}} + O(1)\right)\left(\sum_{u=0}^{\infty}\beta^{(1);u}_{w;j}\ (z-P_j)^u dz\right),\ \ \gamma \sim P_j,$$

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} = \left(\int_{P_0}^{Q_1}\Omega^{(s)}_{P_j} + o(1)\right)\left(\frac{-dz}{(z-Q_1)} + O(1)\right),\ \ \gamma \sim Q_1,$$

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} = \left(\int_{P_0}^{Q_W}\Omega^{(s)}_{P_j} + o(1)\right)\left(\frac{dz}{(z-Q_w)} + O(1)\right),\ \ \gamma \sim Q_w.$$

Поскольку интеграл по $\partial\Gamma'$ равен 0, сумма вычетов равна 0 и

$$\int_{Q_1}^{Q_w}\Omega^{(s)}_{P_j} = \int_{P_0}^{Q_w}\Omega^{(s)}_{P_j} - \int_{P_0}^{Q_1}\Omega^{(s)}_{P_j},$$

мы получили билинейное соотношение Римана для дифференциалов второго и третьего рода:

$$\int_{Q_1}^{Q_w}\Omega^{(s)}_{P_j} = -\beta^{(1);s-2}_{w;j} \tag{5}$$

3. Поскольку в этом случае у обоих дифференциалов интегралы по a-циклам равны 0, следовательно

$$< \Omega^{(s)}_{P_j}, \Omega^{(u)}_{Q_w} >= 0.$$

Подинтегральная форма имеет две особенности в точке P_j, Q_w причем вблизи этих точек

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\Omega^{(u)}_{Q_w} = \left(\frac{1}{(z-P_j)^{s-1}} + O(1)\right)\left(\sum_{v=0}^{\infty}\beta^{(u);v}_{w;j}\ (z-P_j)^v dz\right),\ \ \gamma \sim P_j,$$

$$(d^{-1}\Omega^{(s)}_{P_j})\Omega^{(u)}_{Q_w} = \left(\int_{P_0}^{Q_w} \Omega^{(s)}_{P_j} + \sum_{v=1}^{\infty} \alpha^{(s);v}_{j;w}\ (z-Q_w)^v\right)\left(-\frac{(u-1)dz}{(z-Q_w)^u} + O(1)\right),\ \ \gamma\sim Q_w.$$

Поскольку интеграл по $\partial\Gamma'$ равен 0, сумма вычетов равна 0. мы получили билинейное соотношение Римана для дифференциалов второго и второго рода:

$$(u-1)\alpha^{(s);u-1}_{j;w} = \beta^{(u);s-2}_{w;j} \tag{6}$$

2 Теорема Римана-Роха.

Пусть Γ–неособая компактная риманова поверхность рода g. Мы будем также предполагать, что на Γ зафиксирован канонический базис циклов $a_1,\ldots,a_g$, $b_1,\ldots,b_g$. Пусть $\mathcal{D}$ – некоторой дивизор на Γ:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_-,$$

где $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_-$ – положительная и отрицательная часть дивизора $\mathcal{D}$ соответственно.

$$\mathcal{D}_+ = \sum_{j=1}^{n_+} k_j P_j,\quad \mathcal{D}_- = -\sum_{w=1}^{n_-} l_w Q_w,\quad k_j, l_w \in \mathbb{Z},\quad k_j > 0,\quad l_w > 0.$$

Напомним, что величина

$$\deg(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{n_+} k_j - \sum_{w=1}^{n_-} l_w,$$

называется **степенью дивизора** $\mathcal{D}$.

Обозначим

$$\deg(\mathcal{D}_+) = \sum_{j=1}^{n_+} k_j,\quad \deg(\mathcal{D}_-) = -\sum_{w=1}^{n_-} l_w$$

Введем следующие два пространства:

1. $L_0(-\mathcal{D})$ – пространство мероморфных **функций**, подчиненных дивизору $-\mathcal{D}$; функции из этого пространства могут иметь полюса порядка **не выше** k_j в точках P_j соответственно, не имеют других полюсов, в точках Q_w они обязаны иметь нули порядка **не менее** l_w (это ограничения типа неравенств).

2. $L_1(\mathcal{D})$ – пространство мероморфных **дифференциалов**, подчиненных дивизору $\mathcal{D}$; дифференциалы из этого пространства могут иметь полюса порядка **не выше** l_w в точках Q_w соответственно, не имеют других полюсов, в точках P_j они обязаны иметь нули порядка **не менее** k_j (это также ограничения типа неравенств).

Имеет место **Теорема Римана-Роха,** связывающая **комплексные** размерности этих пространств:

Теорема 2

$$\dim_{\mathbb{C}}(L_0(-\mathcal{D})) - \dim_{\mathbb{C}}(L_1(\mathcal{D})) = \deg(\mathcal{D}) + 1 - g.$$

Замечание 3 *Заметим, что, по–отдельности, обе величины* $\dim_{\mathbb{C}}(L_0(-\mathcal{D}))$ *и* $\dim_{\mathbb{C}}(L_1(\mathcal{D}))$ *зависят не только от степени* $\mathcal{D}$*, но и от положения точек, составляющих* $\mathcal{D}$*. В тоже время их разность уже зависит лишь от степени* $\mathcal{D}$*.*

Доказательство.
Шаг 1. Для начала изучим простейшие случаи, когда $n_+ = 0$.

- Пусть $n_+ = n_- = 0$. Тогда $L_0(-\mathcal{D})$ – пространство голоморфных ограниченных функций на Γ, по теореме Лиувилля все его элементы – константы; $L_1(\mathcal{D})$ – пространство голоморфных дифференциалов,

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) = 1, \quad \dim(L_1(\mathcal{D})) = g, \quad \deg(\mathcal{D}) = 0,$$

  и. тем самым

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) - \dim(L_1(\mathcal{D})) = 1 - g = \deg(\mathcal{D}) + 1 - g.\blacksquare$$

- Пусть $n_+ = 0$, $n_- > 0$. Тогда $L_0(-\mathcal{D})$ – пространство голоморфных ограниченных функций на Γ, имеющих хотя бы один ноль, т.е. $\dim(L_0(-\mathcal{D})) = 0$.

  1. Если $n_- = 1$, то пространство $L_1(\mathcal{D})$ порождено дифференциалами

     (a) первого рода $\omega_1, \ldots, \omega_g$;

     (b) второго рода $\Omega^{(s)}_{Q_1}$, $s = 2, \ldots, l_1$, поэтому

$$\dim(L_1(\mathcal{D})) = g + l_1 - 1 = g - 1 - \deg(\mathcal{D}),$$

следовательно,

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) - \dim(L_1(\mathcal{D})) = \deg(\mathcal{D}) + 1 - g.\blacksquare$$

2. Если $n_- > 1$, то пространство $L_1(\mathcal{D})$ порождено дифференциалами
   (a) первого рода $\omega_1, \ldots, \omega_g$;
   (b) второго рода $\Omega^{(s)}_{Q_w}$, $w = 1, \ldots, n_-$, $s = 2, \ldots, l_w$;
   (c) третьего рода $\Omega^{(1)}_{Q_1, Q_w}$, $w = 2, \ldots, n_-$,

   поэтому

$$\dim(L_1(\mathcal{D})) = g + (l_1 - 1) + \ldots + (l_{n_-} - 1) + (n_- - 1) =$$

$$= g + l_1 + \ldots + l_{n_-} - 1 = g - 1 - \deg(\mathcal{D}),$$

   следовательно,

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) - \dim(L_1(\mathcal{D})) = 1 - g = \deg(\mathcal{D}) + 1 - g.\blacksquare$$

Шаг 2. Теперь займемся нетривиальным случаем $n_+ > 0$. Для этого воспользуемся описаниями пространств $L_0(-\mathcal{D})$ и $L_1(\mathcal{D})$, даваемыми леммами 1 и 2 соответственно.

Лемма 1 *1. Рассмотрим пространство $\tilde{V}_0$ дифференциалов вида $\tilde{\Omega} = df$, где $f(\gamma) \in L_0(-\mathcal{D})$. Оно допускает следующее описание: это подпространство пространства V_0, введенного в предыдущей части, задаваемое следующими условиями:*

(a) Интегралы от $\tilde{\Omega}$ по всем базисным b–циклам равны 0:

$$\oint_{b_t} \tilde{\Omega} = 0, \quad t = 1, \ldots, g.$$

(b) Если $n_- \geq 2$, то имеют место соотношения

$$\int_{Q_1}^{Q_w} \tilde{\Omega} = 0, \quad w = 2, 3, \ldots, n_-.$$

(c) *Если* $n_- \geq 1$ *и* $l_w \geq 2$ *для некоторого* w, *то в точке* Q_w *дифференциал* $\tilde{\Omega}$ *имеет ноль порядка не ниже* $l_w - 1$.

2. *Пространство* $L_0(-\mathcal{D})$ *и пространство* $\tilde{V}_0$ *связаны следующим образом:*

   (a) *Если* $n_- = 0$, *зафиксируем точку* P_0 *на* Γ. *Тогда любая функция* $f(\gamma) \in L_0(-\mathcal{D})$ *однозначно представима в виде*

$$f(\gamma) = \mathcal{C}_0 + \int_{P_0}^{\gamma} \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} \in \tilde{V}_0, \tag{7}$$

   где $\mathcal{C}_0$ *– произвольная комплексная константа. В этом случае*

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) = \dim(\tilde{\Omega}) + 1. \tag{8}$$

   (b) *Если* $n_- > 0$, *то любая функция* $f(\gamma) \in L_0(-\mathcal{D})$ *однозначно представима в виде*

$$f(\gamma) = \int_{Q_1}^{\gamma} \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} \in \tilde{V}_0. \tag{9}$$

   В этом случае

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) = \dim(\tilde{\Omega}). \tag{10}$$

Доказательство. Если $f(\gamma) \in L_0(-\mathcal{D})$, то все интегралы по a–циклам от df равны 0, вычеты равны нулю, порядки полюсов в точках P_j не превышают k_j+1, других полюсов нет, откуда сразу следует, что $df \in \tilde{V}_0$. Кроме того, все все интегралы по b–циклам от df также равны 0, если $n_- \geq 2$, то

$$\int_{Q_1}^{Q_w} \tilde{\Omega} = f(Q_w) - f(Q_1) = 0,$$

и в тех точках Q_w, где $l_w > 1$ дифференциал df имеет ноль порядка не менее $l_w - 1$.

С другой стороны, если $\tilde{\Omega} \in \tilde{V}_0$, и все его интегралы по b–циклам равны 0, то первообразная от $\tilde{\Omega}$ также мероморфна и имеет в точках P_j полюса порядка не выше k_j. Если $n_- = 0$, то других ограничений нет. Если $n_- > 0$, то константа интегрирования фиксируется условием $f(Q_1) = 0$ и легко видеть, что все остальные ограничения на f также выполнены. ■

Лемма 2

Пространство дифференциалов $\tilde{\omega} \in L_1(\mathcal{D})$ – это линейное подпространство пространства V_1, введенного в предыдущей части, задаваемое следующими условиями

- *В точке P_j дифференциал $\tilde{\omega}$ имеет ноль порядка не ниже k_j.*

Шаг 3. Перепишем линейные ограничения из лемм 1 и 2 в виде систем линейных уравнений, пользуясь введенными в первой части базисами в пространствах V_0, V_1.

Для элементов пространства V_0 мы будем использовать следующие разложения по базисным векторам:

$$\tilde{\Omega} = \left[\Omega_{P_1}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_1}^{(k_1+1)}, \Omega_{P_2}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_2}^{(k_2+1)}, \ldots, \Omega_{P_{n_+}}^{(2)}, \ldots, \Omega_{P_{n_+}}^{(k_{n_+}+1)}\right] \vec{c}, \qquad (11)$$

где

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_1^{(k_1+1)} \\ c_2^{(2)} \\ \vdots \\ c_2^{(k_2+1)} \\ \vdots \\ c_{n_+}^{(2)} \\ \vdots \\ c_{n_+}^{(k_{n_+}+1)} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Выпишем матрицу $\mathcal{A}$ линейных соотношений на вектор $\vec{c}$. Указанная матрица:

1. Имеет $k_1 + \ldots + k_{n_+}$ столбцов. Каждый столбец соответствует одному из базисных дифференциалов $\Omega_{P_j}^{(s)}$ в V_0, порядок столбцов такой же, как и в формуле (11).

2. Имеет блочный вид

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

где

3. Матрица $\mathcal{A}_1$ содержит g строк, содержащих интегралы от базисных дифференциалов по всем b–циклам:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_1}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_1}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_1}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_1}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \\ -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_2}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_2}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_2}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_2}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_g}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_g}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_g}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{a_g}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

4. Матрица $\mathcal{A}_2$ не содержит ни одной строки если $n_- < 2$, содержит $n_- - 1$ строку, если $n_- \geq 2$. В w-ой строке этой матрицы стоят интегралы от базисных дифференциалов от точки Q_1 то точки Q_{w+1}:

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} -\int\limits_{Q_1}^{Q_2}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\int\limits_{Q_1}^{Q_2}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_2}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_2}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \\ -\int\limits_{Q_1}^{Q_3}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\int\limits_{Q_1}^{Q_3}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_3}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_3}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\int\limits_{Q_1}^{Q_{n_-}}\Omega^{(2)}_{P_1} & -\int\limits_{Q_1}^{Q_{n_-}}\Omega^{(3)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_{n_-}}\Omega^{(k_1+1)}_{P_1} & \dots & -\int\limits_{Q_1}^{Q_{n_-}}\Omega^{(k_{n_+}+1)}_{P_{n_+}} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

5. Матрица $\mathcal{A}_3$ содержит $(l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \ldots + (l_{n_-} - 1)$ строку. В частности, она не содержит ни одной строки если $n_- = 0$ или все $l_w = 1$. Первая группа из $l_1 - 1$ строки содержит первый $l_1 - 1$ коэффициент разложения в ряд Тейлора базисных дифференциалов в точке Q_1, следующая группа из $l_2 - 1$ строки содержит первый $l_2 - 1$ коэффициент разложения в ряд Тейлора базисных дифференциалов в точке Q_2, последняя группа с номером n_- содержит $l_{n_1} - 1$ строку, в которою водит $l_{n_-} - 1$ коэффициент разложения в ряд Тейлора базисных дифференциалов в точке Q_{n_-}.

$$\mathcal{A}_3 = \tag{16}$$

$$
= \left[\begin{array}{cccccc}
\alpha_{1;1}^{(2);1} & \alpha_{1;1}^{(3);1} & \ldots & \alpha_{1;1}^{(k_1+1);1} & \ldots & \alpha_{n_+;1}^{(k_{n_+}+1);1} \\
2\alpha_{1;1}^{(2);2} & 2\alpha_{1;1}^{(3);2} & \ldots & 2\alpha_{1;1}^{(k_1+1);2} & \ldots & 2\alpha_{n_+;1}^{(k_{n_+}+1);2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(l_1-1)\alpha_{1;1}^{(2);l_1-1} & (l_1-1)\alpha_{1;1}^{(3);l_1-1} & \ldots & (l_1-1)\alpha_{1;1}^{(k_1+1);l_1-1} & \ldots & (l_1-1)\alpha_{n_+;1}^{(k_{n_+}+1);l_1-1} \\
\hline
\alpha_{1;2}^{(2);1} & \alpha_{1;2}^{(3);1} & \ldots & \alpha_{1;2}^{(k_1+1);1} & \ldots & \alpha_{n_+;2}^{(k_{n_+}+1);1} \\
2\alpha_{1;2}^{(2);2} & 2\alpha_{1;2}^{(3);2} & \ldots & 2\alpha_{1;2}^{(k_1+1);2} & \ldots & 2\alpha_{n_+;2}^{(k_{n_+}+1);2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(l_2-1)\alpha_{1;2}^{(2);l_2-1} & (l_2-1)\alpha_{1;2}^{(3);l_2-1} & \ldots & (l_2-1)\alpha_{1;2}^{(k_1+1);l_2-1} & \ldots & (l_2-1)\alpha_{k_{n_+};2}^{(n_++1);l_2-1} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\alpha_{1;n_-}^{(2);1} & \alpha_{1;n_-}^{(3);1} & \ldots & \alpha_{1;n_-}^{(k_1+1);1} & \ldots & \alpha_{n_+;n_-}^{(k_{n_+}+1);1} \\
2\alpha_{1;n_-}^{(2);2} & 2\alpha_{1;n_-}^{(3);2} & \ldots & 2\alpha_{1;n_-}^{(k_1+1);2} & \ldots & 2\alpha_{n_+;n_-}^{(k_{n_+}+1);2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(l_{n_-}-1)\alpha_{1;n_-}^{(2);l_{n_-}-1} & (l_{n_-}-1)\alpha_{1;n_-}^{(3);l_{n_-}-1} & \ldots & (l_{n_-}-1)\alpha_{1;n_-}^{(k_1+1);l_{n_-}-1} & \ldots & (l_{n_-}-1)\alpha_{n_+;n_-}^{(k_{n_+}+1);l_{n_-}-1}
\end{array}\right].
$$

Легко проверить, что:

Лемма 3 *Пусть дифференциал $\tilde{\Omega}$ задан формулой (11). Тогда для него выполнены пункты 1), 2) и 3) леммы 1 если и только если $\vec{c}$ удовлетворяет уравнениям*

$$\mathcal{A}_1\vec{c} = \vec{0}, \tag{17}$$

$$\mathcal{A}_2\vec{c} = \vec{0}, \tag{18}$$

$$\mathcal{A}_3\vec{c} = \vec{0}, \tag{19}$$

соответственно.

Другими словами, дифференциал $\tilde{\Omega}$ является дифференциалом функции из $L_0(-\mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда вектор $\vec{c}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{A}\vec{c} = \vec{0}. \tag{20}$$

Для элементов пространства V_1 мы будем использовать следующие разложения по базисным векторам:

$$\tilde{\omega} = \tag{21}$$

$$= \left[\omega_1, \ldots, \omega_g | \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_2}, \ldots, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w} | \Omega^{(2)}_{Q_1}, \ldots, \Omega^{(l_1)}_{Q_1}, \ldots, \Omega^{(2)}_{Q_{n_-}}, \ldots, \Omega^{(l_{n_-})}_{Q_{n_-}}\right] \vec{h}$$

где

$$\vec{h} = \left[\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_g \\ \hline h^{(1)}_2 \\ \vdots \\ h^{(1)}_w \\ \hline h^{(2)}_1 \\ \vdots \\ h^{(l_1)}_1 \\ \vdots \\ h^{(2)}_{n_-} \\ \vdots \\ h^{(l_{n_-})}_{n_-}. \end{array}\right] \qquad (22)$$

Выпишем матрицу $\mathcal{B}$ линейных соотношений на вектор $\vec{h}$. Указанная матрица:

1. Имеет $k_1 + \ldots + k_{n_+}$ строк. В первой группе из k_1 строк каждый столбец содержит первые k_1 коэффициентов разложения в ряд Тейлора соответствущего базиснного дифференциалов в точке P_1, в следующей группе из k_2 строк строк каждый столбец содержит первые k_2 коэффициентов разложения в ряд Тейлора соответствующего базисного дифференциалов в точке P_2, в последней группе с номером n_+ из k_{n_+} строк каждый столбец содержит первые k_{n_+} коэффициентов разложения в ряд Тейлора соответствующего базисного дифференциалов в точке P_{n_+}.

2. Поскольку базис мероморфных дифференциалов состоит из трех групп:

   (a) g дифференциалов первого рода $\omega_1, \ldots, \omega_g$,

(b) $n_- - 1$ дифференциал третьего рода $\Omega^{(1)}_{Q_1,Q_2}, \ldots, \Omega^{(1)}_{Q_1,Q_w}$,

(c) $(l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \ldots + (l_{n_-} - 1)$ дифференциал второго рода $\Omega^{(2)}_{Q_1}, \ldots, \Omega^{(l_1)}_{Q_1}, \ldots, \Omega^{(2)}_{Q_{n_-}}, \ldots, \Omega^{(l_{n_-})}_{Q_{n_-}}$,

матрица $\mathcal{B}$ имеет блочный вид,

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

(блоки $\mathcal{B}_2$ или $\mathcal{B}_3$ могут быть пустыми если в базисе отсутствуют соответствующие дифференциалы). При этом:

3. Матрица $\mathcal{B}_1$ содержит g столбцов, каждый из которых соответствует базисному дифференциалу первого рода:

$$\mathcal{B}_1 = \left[\begin{array}{cccc} \omega^0_{1;1} & \omega^0_{2;1} & \ldots & \omega^0_{g;1} \\ \omega^1_{1;1} & \omega^1_{2;1} & \ldots & \omega^1_{g;1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^{k_1-1}_{1;1} & \omega^{k_1-1}_{2;1} & \ldots & \omega^{k_1-1}_{g;1} \\ \hline \omega^0_{1;2} & \omega^0_{2;2} & \ldots & \omega^0_{g;2} \\ \omega^1_{1;2} & \omega^1_{2;2} & \ldots & \omega^1_{g;2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^{k_2-1}_{1;2} & \omega^{k_2-1}_{2;2} & \ldots & \omega^{k_2-1}_{g;2} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \omega^0_{1;n_+} & \omega^0_{2;n_+} & \ldots & \omega^0_{g;n_+} \\ \omega^1_{1;n_+} & \omega^1_{2;n_+} & \ldots & \omega^1_{g;n_+} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^{k_{n_+}-1}_{1;n_+} & \omega^{k_{n_+}-1}_{2;n_+} & \ldots & \omega^{k_{n_+}-1}_{g;n_+} \end{array}\right]. \tag{24}$$

4. Матрица $\mathcal{B}_2$ не содержит ни одного столбца если $n_- < 2$, содержит $n_- - 1$ столбец, если $n_- \geq 2$, каждый из которых соответствует

базисному дифференциалу третьего рода:

$$\mathcal{B}_2 = \left[\begin{array}{cccc}
\beta_{2;1}^{(1);0} & \beta_{3;1}^{(1);0} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(1);0} \\
\beta_{2;1}^{(1);1} & \beta_{3;1}^{(1);1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(1);1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{2;1}^{(1);k_1-1} & \beta_{3;1}^{(1);k_1-1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(1);k_1-1} \\
\hline
\beta_{2;2}^{(1);0} & \beta_{3;2}^{(1);0} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(1);0} \\
\beta_{2;2}^{(1);1} & \beta_{3;2}^{(1);1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(1);1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{2;2}^{(1);k_2-1} & \beta_{3;2}^{(1);k_2-1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(1);k_2-1} \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
\beta_{2;n_+}^{(1);0} & \beta_{3;n_+}^{(1);0} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(1);0} \\
\beta_{2;n_+}^{(1);1} & \beta_{3;n_+}^{(1);1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(1);1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{2;n_+}^{(1);k_{n_+}-1} & \beta_{3;n_+}^{(1);k_{n_+}-1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(1);k_{n_+}-1}
\end{array}\right]. \tag{25}$$

5. Матрица $\mathcal{B}_3$ содержит $(l_1-1)+(l_2-1)+\ldots+(l_{n_-}-1)$ столбец. В частности, она не содержит ни одного столбца если $n_-=0$ или все $l_w=1$. Каждый из столбцов соответствует базисному дифференциалу второго рода:

$$\mathcal{B}_3 = \tag{26}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\beta_{1;1}^{(2);0} & \dots & \beta_{1;1}^{(l_1);0} & \beta_{2;1}^{(2);0} & \dots & \beta_{2;1}^{(l_2);0} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(2);0} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(l_{n_-});0} \\
\beta_{1;1}^{(2);1} & \dots & \beta_{1;1}^{(l_1);1} & \beta_{2;1}^{(2);1} & \dots & \beta_{2;1}^{(l_2);1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(2);1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(l_{n_-});1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{1;1}^{(2);k_1-1} & \dots & \beta_{1;1}^{(l_1);k_1-1} & \beta_{2;1}^{(2);k_1-1} & \dots & \beta_{2;1}^{(l_2);k_1-1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(2);k_1-1} & \dots & \beta_{n_-;1}^{(l_{n_-});k_1-1} \\
\hline
\beta_{1;2}^{(2);0} & \dots & \beta_{1;2}^{(l_1);0} & \beta_{2;2}^{(2);0} & \dots & \beta_{2;2}^{(l_2);0} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(2);0} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(l_{n_-});0} \\
\beta_{1;2}^{(2);1} & \dots & \beta_{1;2}^{(l_1);1} & \beta_{2;2}^{(2);1} & \dots & \beta_{2;2}^{(l_2);1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(2);1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(l_{n_-});1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{1;2}^{(2);k_2-1} & \dots & \beta_{1;2}^{(l_1);k_2-1} & \beta_{2;2}^{(2);k_2-1} & \dots & \beta_{2;2}^{(l_2);k_2-1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(2);k_2-1} & \dots & \beta_{n_-;2}^{(l_{n_-});k_2-1} \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\
\hline
\beta_{1;n_+}^{(2);0} & \dots & \beta_{1;n_+}^{(l_1);0} & \beta_{2;n_+}^{(2);0} & \dots & \beta_{2;n_+}^{(l_2);0} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(2);0} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(l_{n_-});0} \\
\beta_{1;n_+}^{(2);1} & \dots & \beta_{1;n_+}^{(l_1);1} & \beta_{2;n_+}^{(2);1} & \dots & \beta_{2;n_+}^{(l_2);1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(2);1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(l_{n_-});1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\beta_{1;n_+}^{(2);k_{n_+}-1} & \dots & \beta_{1;n_+}^{(l_1);k_{n_+}-1} & \beta_{2;n_+}^{(2);k_{n_+}-1} & \dots & \beta_{2;n_+}^{(l_2);k_{n_+}-1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(2);k_{n_+}-1} & \dots & \beta_{n_-;n_+}^{(l_{n_-});k_{n_+}-1}
\end{array}\right].$$

Поскольку матрица $\mathcal{B}$ составлена из коэффициентов тейлоровских разложений базисных дифференциалов пространства V_1 в точках $P_1, \ldots, P_{n_+}$, сразу видно, что

Лемма 4 *Пусть дифференциал $\tilde{\omega}$ задан формулой (21). Тогда он лежит в $L_1(\mathcal{D})$ если и только если $\vec{h}$ удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{B}\vec{h} = \vec{0}. \tag{27}$$

Ключевым для доказательства теоремы Римана-Роха является следующее утверждение:

Лемма 5 *Матрица $\mathcal{B}$ получается из матрицы $\mathcal{A}$ транспонированием:*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^t, \tag{28}$$

или, что эквивалентно,

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1^t, \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2^t, \quad \mathcal{B}_3 = \mathcal{A}_3^t. \tag{29}$$

В частности, ранги матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны:

$$rank(\mathcal{B}) = rank(\mathcal{A}). \tag{30}$$

Соотношение (29) является прямым следствием доказанных в предыдущей части билинейных соотношений Римана:

$$\int_{b_t} \Omega_{P_j}^{(s)} = -2\pi i \omega_{t;j}^{s-2}, \tag{31}$$

$$\int_{Q_1}^{Q_w} \Omega_{P_j}^{(s)} = -\beta_{w;j}^{(1);s-2}, \tag{32}$$

$$(u-1)\alpha_{j;w}^{(s);u-1} = \beta_{w;j}^{(u);s-2} \tag{33}$$

Теперь у нас все готово для завершения доказательства теоремы Римана-Роха.

Как было отмечено в предыдущей части,

$$\dim(V_0) = \deg(\mathcal{D}_+),$$

$$\dim(V_1) = \begin{cases} g & \text{если} \quad n_- = 0, \\ g - 1 - \deg(\mathcal{D}_-) & \text{если} \quad n_- > 0, \end{cases}$$

Также мы имеем

$$\dim(L_0(-\mathcal{D})) = \begin{cases} \dim(V_0) - \operatorname{rank}(\mathcal{A}) + 1 & n_- = 0 \\ \dim(V_0) - \operatorname{rank}(\mathcal{A}) & n_- \geq 1, \end{cases}$$

$$\dim(L_1(\mathcal{D})) = \dim(V_1) - \operatorname{rank}(\mathcal{B})$$

- Пусть $n_- = 0$. Тогда $\deg(\mathcal{D}_-) = 0$, $\deg(\mathcal{D}) = \deg(\mathcal{D}_+)$,

  $$\dim(L_0(-\mathcal{D})) - \dim(L_1(\mathcal{D})) = \dim(V_0) - \cancel{\mathrm{rank}(\mathcal{A})} + 1 - \dim(V_1) + \cancel{\mathrm{rank}(\mathcal{B})} =$$

  $$= \dim(V_0) + 1 - \dim(V_1) = \deg(\mathcal{D}_+) + 1 - g = 1 - g + \deg(\mathcal{D}).$$

- Пусть $n_- \geq 1$. Тогда $\deg(\mathcal{D}) = \deg(\mathcal{D}_+) + \deg(\mathcal{D}_-)$,

  $$\dim(L_0(-\mathcal{D})) - \dim(L_1(\mathcal{D})) = \dim(V_0) - \cancel{\mathrm{rank}(\mathcal{A})} - \dim(V_1) + \cancel{\mathrm{rank}(\mathcal{B})} =$$

  $$= \dim(V_0) - \dim(V_1) = \deg(\mathcal{D}_+) - g + 1 - \deg(\mathcal{D}_-) = 1 - g + \deg(\mathcal{D}).$$

Теорема Римана-Роха доказана. ■

Имеет место достаточно простое, но важное обобщение этой теоремы:

Следствие 1 *Обозначим $L_{-j}(-\mathcal{D})$ – пространство мероморфных $-j$–* ***форм****, подчиненных дивизору $-\mathcal{D}$, $L_{1+j}(\mathcal{D})$ – пространство мероморфных $1+j$–* ***форм****, подчиненных дивизору $\mathcal{D}$.*

Тогда

$$\dim(L_{-j}(-\mathcal{D})) - \dim(L_{1+j}(\mathcal{D})) = (2-2g)\left(j + \frac{1}{2}\right) + \deg(\mathcal{D}). \qquad (34)$$

Доказательство. Пусть ω обозначает произвольный голоморфный дифференциал, K–дивизор его нулей, $\deg(K) = 2g - 2$. Любой элемент $\phi \in L_{-j}(-\mathcal{D})$ однозначно представим в виде

$$\phi = (\omega)^{-j} f,$$

где f некоторая мероморфная функция, причем

$$\phi \in L_{-j}(-\mathcal{D}) \text{ тогда и только тогда, когда } f \in L_0(-\tilde{\mathcal{D}}), \quad \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - jK.$$

Аналогично, любой элемент $\psi \in L_{1+j}(\mathcal{D})$ однозначно представим в виде

$$\psi = (\omega)^{-j} \tilde{\Omega},$$

где $\tilde{\Omega}$–некоторый мероморфный дифференциал, причем

$$\psi \in L_{1+j}(\mathcal{D}) \text{ тогда и только тогда, когда } \tilde{\Omega} \in L_1(\tilde{\mathcal{D}}).$$

Тем самым,

$$\dim(L_{-j}(-\mathcal{D})) - \dim(L_{1+j}(\mathcal{D})) = \dim(L_0(-\tilde{\mathcal{D}})) - \dim(L_1(\tilde{\mathcal{D}})) =$$

$$= 1 - g + \deg(\tilde{\mathcal{D}}) = 1 - g + \deg(\mathcal{D}) - j\deg(K) = 1 - g + \deg(\mathcal{D}) + (2-2g)j. \blacksquare$$