

Материалы по курсу “Теория поля”
Разработаны Сергеем Сергеевичем Вергелесом

ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, Черногоровка
3 февраля 2022 г.

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1

ЛАГРАНЖЕВ И ГАМИЛЬТОНОВ
ФОРМАЛИЗМЫ

§1-1. Формализм Лагранжа: одна степень свободы

Пусть эволюция системы во времени полностью описывается её траекторией $q(t)$, где q — координата системы. Сейчас мы предполагаем, что величина q является одномерной величиной. В таком случае системой может быть, например, одномерная координата материальной точки.

Уравнения движения определяются экстремумом функционала

$$S = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (1.1)$$

который называется действием. Здесь $L(q, \dot{q})$ — лагранжиан системы, который зависит от координаты системы q и скорости движения системы \dot{q} . Для наиболее простых теорий этот экстремум оказывается минимумом. Траектория $q(t)$, на которой достигается экстремум действия, называется истинной траекторией. По таким траекториям в действительности может эволюционировать классическая система.

Найдём истинную траектория частицы. На истинной траектории $q(t)$ действие достигает экстремума, поэтому при фиксированных граничных условиях любая малая вариация δq истинной траектории δq должна привести к нулевой вариации действия (линеаризованной по вариации траектории), $\delta S = 0$. Граничными условиями примем следующие условия: частица начинает двигаться в момент времени t_a в точке q_a , а заканчивает движение в момент времени t_b в точке q_b ; при вычислении вариации действия будем сначала предполагать, что вариации подвергнуты и граничные значения $q_{a,b}$ (тогда как $t_{a,b}$ фиксированы). В таком случае

$$\begin{aligned} \delta S &= S(\{q + \delta q\}) - S(\{q\}) = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \delta q \right|_a^b \end{aligned} \quad (1.2)$$

При фиксированном начальном и конечном положениях, когда $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$, вариация действия оказывается равной нулю, т.е. траектория $q(t)$ является истинной, если на ней выполняется уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \frac{\delta L}{\delta q}. \quad (1.3)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением по времени на координату q . Поскольку лагранжиан зависит от первой производной \dot{q} , то уравнение Лагранжа в общем случае является уравнением второго порядка. Поэтому для его решения необходимо два граничных условия, в нашем случае этими граничными условиями являются значения координаты q в начале и в конце движения.

Движение массивной частицы в потенциале.

Рассмотрим наиболее простой пример лагранжиана — лагранжиан нерелятивистской частицы массы m , движущейся в потенциале $\Pi(q)$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \Pi(q).$$

В этом случае уравнение Лагранжа принимает вид уравнения Ньютона для частицы, движущейся под действием внешней силы $f(q)$:

$$m\ddot{q} = f, \quad f(q) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Продолжение: книга Фейнман и Хибс, 1968, Гл.2, §1

§1-2. Формализм Гамильтона: одна степень свободы

Лагранжиан формально зависит от двух величин — координаты q и скорости \dot{q} . С другой стороны, при вариации действия S независимую вариацию имеет только траектория, $\delta q(t)$, тогда как вариация скорости может быть найдена из этой вариации простым дифференцированием по времени, $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$. Этот же факт находит отражение в том, что уравнение Лагранжа оканчивается уравнением второго порядка.

Как известно, дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка, при этом требуется ввести, помимо координаты q , ещё одну независимую функцию времени, которая должна иметь нетривиальную зависимость от скорости \dot{q} . Формализм Гамильтона, в частности, выполняет именно эту функцию. Кроме того, в нём уравнения движения переписываются в симметричной форме, что позволяет сделать ряд важных заключений.

Введём импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (1.4a)$$

и будем считать, что есть две возможности задать Лагранжиан: через пару переменных $\{q, \dot{q}\}$ и через пару переменных $\{q, p\}$; если известна одна пара переменных, то вторая пара может быть получена используя равенства (1.4a). Введём функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L. \quad (1.4b)$$

Вариация гамильтониана

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H} &= \dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = \\ &= \dot{q} \delta p - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \end{aligned} \quad (1.4c)$$

определяется только вариациями координаты и импульса, то есть гамильтониан *может* быть представлен как функция *только* пары $\{q, p\}$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p). \quad (1.4d)$$

Уравнение движения второго порядка (1.3) в формализме Лагранжа переписывается в виде системы двух уравнений первого порядка в формализме Гамильтона:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (1.4e)$$

Эквивалентность уравнений Гамильтона уравнению Лагранжа следует из вида вариации гамильтониана (1.4c). Переменные $\{q, p\}$ называют *каноническими переменными*.

Уравнения Гамильтона можно переписать в более компактной форме:

$$\partial_t Q = \hat{\epsilon} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q}, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

1-2.1 Скобки Пуассона

Скобки Пуассона двух некоторых функций F и G от канонических переменных вычисляются согласно равенству

$$[F, G] = \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta G}{\delta p} - \frac{\delta G}{\delta q} \frac{\delta F}{\delta p}. \quad (1.5a)$$

Из этого определения вытекает, что элементарная скобка Пуассона

$$[q, p] = 1. \quad (1.5b)$$

В терминах скобки Пуассона уравнения движения переписываются в виде

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}]. \quad (1.5c)$$

где $i = \{q, p\}$. Отсюда следует, что скорость изменения любой величины $F(q, p)$ определяется её скобкой Пуассона с Гамильтонианом

$$\dot{F} = [F, \mathcal{H}]. \quad (1.5d)$$

1-2.2 Каноническое преобразование

1-2.3 Переменные уничтожения и рождения a и a^*

Построим переменные

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix},$$

соответствующие операторам рождения-уничтожения в квантовой теории:

$$A = \hat{U}_a Q, \quad \frac{\delta}{\delta A} = \hat{U}_a^{-1, \tau} \frac{\delta}{\delta Q},$$

$$\hat{U}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/c & ic \\ 1/c & -ic \end{pmatrix}, \quad \det \hat{U}_a = -i.$$

Здесь безразмерная постоянная c не определена. Она может быть зафиксирована исходя из дополнительных (физических) соображений. В дальнейшем мы полагаем её равной единице. Скобка Пуассона

$$[a, a^*] = \frac{1}{\det \hat{U}_a} = i,$$

так что формально преобразование \hat{U}_a не является каноническим; В терминах новых переменных скобка Пуассона приобретает дополнительный множитель $\det \hat{U}_a$:

$$[F, G] = i \left(\frac{\delta F}{\delta a^*} \frac{\delta G}{\delta a} - \frac{\delta G}{\delta a^*} \frac{\delta F}{\delta a} \right).$$

В переменных a и a^* уравнения Гамильтона (1.4е) переписываются в виде

$$\dot{A} = -i\epsilon \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A}. \quad (1.6)$$

Формулы (1.4е)-(1.6) могут быть без труда обобщены на случай системы с N степенями свободы.

1-2.4 Действие в формализме Гамильтона

В формализме Гамильтона действие системы по-прежнему есть интеграл по времени от лагранжиана,

$$S = \int dt L, \quad (1.7)$$

но теперь лагранжиан зависит от четырёх переменных:

$$L = L(q, \dot{q}, p, \dot{p}) = p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p), \quad (1.8)$$

$$\text{или } L = L(a, \dot{a}, a^*, \dot{a}^*) = ia^*\dot{a} - \mathcal{H}(a, a^*),$$

с точностью до полного дифференциала по времени. Варьирование действия по $\{q, p\}$ даёт уравнения Гамильтона (1.4е), варьирование по переменным $\{a, a^*\}$ – уравнения (1.6).

Важно подчеркнуть, что временные производные от p, q входят в действие не более чем в первой степени. Поэтому уравнения движения Гамильтона (1.4е) оказываются уравнениями первой степени по времени, тогда как уравнение движения Лагранжа (1.3) в общем случае является уравнением второго порядка по времени.

Вариация действия (1.7) по положению начальной/конечной точек интегрирования даёт канонические импульсы и энергию. Воспользуемся (1.8), для того, чтобы переписать действие в виде

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L = \int (p dq - \mathcal{H} dt) \quad (1.9)$$

Предположим теперь, что при вариации $t_{a,b} \rightarrow t_{a,b} + \delta t_{a,b}$, $q_{a,b} \rightarrow q_{a,b} + \delta q_{a,b}$. Тогда вариация действия по изменению положения конца пути равна

$$\frac{\delta S}{\delta t_{a,b}} = \mp \mathcal{H}(t_{a,b}), \quad \frac{\delta S}{\delta q_{a,b}} = \pm p(t_{a,b}). \quad (1.10)$$

Методически интересно получить это же утверждение (1.10) из рассмотрения вариации действия в лагранжевой форме (1.2). Такой путь более громоздкий, поскольку тот факт, что уравнения Лагранжа являются уравнениями второй степени, нарушает независимость вариаций времени и координаты. Варьированное действие имеет вид

$$S_{\text{var}} = \int_{t_a + \delta t_a}^{t_b + \delta t_b} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}).$$

Для краткости выкладок ниже мы положим $\delta t_a = 0, \delta q_a = 0$. Вариация действия равна

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + (p_b \delta q(t_b) + L \delta t_b) = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + (p_b \delta q_b - \mathcal{H} \delta t_b), \end{aligned} \quad (1.11)$$

сравни с (1.2). В процессе выкладок мы воспользовались определениями импульса (1.4а) и гамильтониана (1.4б), а также следующим соотношением для вариации обобщённой координаты q

$$\delta q(t_{a,b}) = \delta q_{a,b} - \dot{q}(t_{a,b}) \delta t_{a,b},$$

которое можно понять, воспользовавшись Рис. 1.1. Второе слагаемое в (1.11) соответствует результату варьирования (1.10) концов траектории.

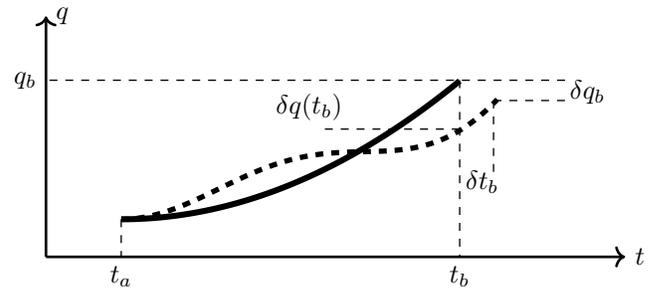


Рис. 1.1 Вариация действия с нефиксированным концом. Сплошная линия – неварьированный путь; штрихованная – варьированный.

1-2.5 Уравнение Гамильтона-Якоби

Вернёмся к уравнению (1.10). Гамильтониан в первом уравнении зависит от координаты и импульса, импульс же является частной производной действия по координате. Поэтому, полагая траекторию истинной и действие зависящим от времени, координаты начальной точки q и конечной точки q_a траектории, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \partial S / \partial q; t) = 0 \quad (1.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Гамильтона-Якоби (Hamilton-Jacobi equation)*. Наша конечная цель – найти траекторию частицы, например в виде зависимости $q(t)$.

Как от параметра, функция S зависит от координаты начальной точки траектории q_a , и от начального времени t_a .

$$S = S_b(t, q; q_a) + S_a(t_a, q_a). \quad (1.13)$$

Можно сказать, что разбиение справа есть сумма действий на промежутках времени (t_0, t) и (t_a, t_0) , где t_0 – произвольное фиксированное время. Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial q_a} = -p_a, \quad \frac{\partial S}{\partial t_a} = E_a. \quad (1.14)$$

где p_{ai} – начальный импульс частицы, а E_a – начальная энергия в точке 'a'; в силу уравнений движения $E_a = \mathcal{H}(t_a, q_a, p_a)$.

1-2.5.1 Несколько степеней свободы

Продолжим рассуждения, посчитав, что мы сделали прямолинейное обобщение выше изложенных рассуждений на систему с s степенями свободы. Как начальные координаты q_{ai} , так и начальные импульсы p_{ai} естественным образом не зависят от времени t – параметра вдоль траектории движения. Поэтому $2s$ величин q_{ai}, p_{ai} являются в этом смысле интегралами движения. Ещё одним интегралом движения является начальное t_a , тогда как начальная энергия E_a определяется уже названными интегралами движения.

В силу специфики конкретной задачи, от координат q_{ai} оказывается часто удобным перейти к другому набору $\alpha_i = \alpha_i(\{q_{ai}\})$ независимых интегралов движения. Время не следует включать в аргументы α_i в силу существования разбиения (1.13), но с точки зрения

уравнения Гамильтона-Якоби, сам кусок действия S_a можно считать постоянной интегрирования, зависящей как от параметров от величин α_i . Отвлекаясь теперь от смысла совокупности $\{\alpha_i, S_a\}$ как от начальных координат и времени, отметим, что с точки зрения уравнения Гамильтона-Якоби, функция S зависит от $s+1$ параметра и представима в виде разбиения (1.13), поскольку она входит в это уравнение только посредством своих частных производных.

Таким образом, алгоритм нахождения траектории системы с помощью уравнения Гамильтона-Якоби следующий. Сначала надо найти саму функцию S в виде (1.13):

$$S = f(t, q_i; \alpha_i) + A(\alpha_i). \quad (1.15)$$

Затем составить s уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (1.16)$$

где α_i и β_i – интегралы движения, определяемые начальными условиями. Эти s уравнений позволяют вычислить зависимости s координат q как функций от времени и $2s$ интегралов движения. При желании, вместо функции f в (1.16) можно дифференцировать всю функцию S , тогда в вычислениях будет непосредственно вовлечено начальное время t_a .

§1-3. Законы сохранения

Рассмотрим любую инфинитезимально малую вариацию истинной траектории $a(t)$ системы с одной степенью свободы:

$$a' = a + \delta a, \quad (1.17)$$

С учётом уравнений движения (1.3) получаем, что при инфинитезимально малом преобразовании на траектории истинного движения изменение лагранжиана равно

$$\delta S = \int dt(L' - L), \quad L' - L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right), \quad (1.18)$$

или в формализме Гамильтона

$$L' = L + \frac{d}{dt}(i a^* \delta a). \quad (1.18a)$$

1-3.1 Теорема Нётер

Теорема Нётер (*Noether's theorem*) утверждает, что если система обладает некоторой симметрией, выражающейся в инвариантности уравнений движения относительно некоторой группы преобразований, то система обладает сохраняющейся величиной.

При дальнейшем рассмотрении этого Пункта 1-3.1 мы предполагаем простейший вариант: у системы одна

степень свободы, и её лагранжиан не зависит явно от времени. В этом случае симметрия состоит в инвариантности уравнений движения относительно сдвига по времени, а сохраняющейся величиной является энергия.

Первый способ доказательства теоремы Нётер основан на рассмотрении малой произвольной вариации обобщённой координаты q и изложен в Пункте 1-3.1.2. Этот способ соответствует замене переменных поля в интеграле по траекториям. Пример применения замены переменных поля в интеграле по траекториям можно найти, например, в Вергелес, 2008, Приложение В: Тензор энергии импульса.

Второй вариант доказательства вытекает из рассмотрения произвольной деформации временной оси, см. Пункт 1-3.1.1. Логика этого метода, применённая в полевой задаче к деформации пространственных координат, соответствует методу виртуальных перемещений. В задачах о непрерывных средах метод виртуальных перемещений обычно применяют для нахождения тензора напряжений.

Наконец, есть вывод, в котором рассматриваются совместные деформация координаты временной оси и вариация обобщённой координаты, которые будучи взяты в совокупности, непосредственно соответствуют симметрии лагранжиана. Этот вывод дан, в частности, в

учебнике Пескин и Шредер (2001, §2.2, Теорема Нётер) и изложен в Пункте 1-3.1.3, но, по нашему мнению, является менее продуктивным.

1-3.1.1 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию временной оси

Отталкиваясь от того факта, что уравнения движения инвариантны относительно сдвига времени, рассмотрим произвольную деформацию временной оси

$$t' = t + u(t),$$

предполагая $u(t)$ малой величиной; будем также считать, что на границе временного промежутка интегрирования $u(t)$ обращается в ноль. В этом случае получаем следующие законы преобразования величин, их первых производных и меры интегрирования по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t &= (1 + \partial_{t'} u) \partial_{t'}, & dt &= (1 - \partial_{t'} u) dt', \\ f(t) &= f(t') - u \partial_{t'} f(t'), \\ \partial_t f(t) &= \partial_{t'} f(t') - u \partial_{t'}^2 f(t') \end{aligned} \quad (1.19)$$

в первом порядке по малому u (в выражении для $\partial_t a$ слагаемые, содержащие $\partial_t u$, взаимно сократились); подразумевается, что $f(t)$ и $f(t')$ – одна и та же функция, взятая, однако, от разных аргументов.

Вариация действия (1.7) при деформации временной оси (т.е. при замене переменной интегрирования) должна быть тождественно равна нулю,

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left(L \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} u \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) u dt = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отметим, что на этом шаге мы использовали отсутствие явной зависимости лагранжиана от времени, и поэтому именно здесь закладывается результат – сохранение энергии при движении. При втором варианте записи в (1.20) круглая скобка равна нулю в силу произвольности деформации u . Равенство нулю может быть интерпретировано следующим образом: первое слагаемое в скобке есть полная производная лагранжиана, которая может быть расписана через частные производные координаты и скорости (остальные слагаемые).

Теперь воспользуемся тем, что траектория $q(t)$ истинная, т.е. выполнено уравнение движения (1.3). Тогда после интегрирования по частям третьего слагаемого в круглой скобке правой части (1.20, первый вариант равенства) получим, что

$$0 = \delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) \dot{u} = \int dt u \partial_t H. \quad (1.21)$$

Ввиду произвольности вариации u , приходим к тому, что производная от гамильтониана должна обращаться в ноль,

$$\partial_t H = 0,$$

т.е. полная энергия системы сохраняется.

1-3.1.2 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию обобщённой координаты

Рассмотрим другой способ, основанный на вариации обобщённой координаты на истинной траектории. Пусть вариация координаты равна

$$q \rightarrow q + u\dot{q}, \quad \dot{q} \rightarrow \dot{q} + \partial_t(u\dot{q}). \quad (1.22)$$

Заметим, что вариация q соответствует (1.19), тогда как вариация \dot{q} уже другая: она получается непосредственным дифференцированием по времени вариации q . Величина u предполагается малой и обращающейся в ноль на границе временного промежутка интегрирования, а в остальном произвольная. Вариации действия и лагранжиана на истинной траектории суть

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L = 0, & \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} u \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial_t(u\dot{q}) = \\ &= u \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) + p \dot{q} \partial_t u = u \frac{dL}{dt} + p \dot{q} \partial_t u. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Мы воспользовались тем, что лагранжиан не зависит явно от времени, поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Теперь проведём интегрирование по частям во втором представлении вариации лагранжиана в (1.23). В результате мы получим, что вариация действия (1.7) равна тому же выражению (1.21), взятым с противоположным знаком.

Пусть теперь лагранжиан не зависит явно от обобщённой координаты q . В этом случае сохраняющейся величиной является также и канонический импульс. Покажем это. Вариацию координаты теперь возьмём в виде, соответствующему сдвигу по координате, а не по времени, как это было в (1.22). В результате вариация координаты и действия равны

$$\delta q = \partial_t u(t), \quad \delta S = \int p du = - \int \partial_t p u dt, \quad (1.24)$$

т.е. импульс сохраняется,

$$\partial_t p = 0.$$

1-3.1.3 Однопараметрическое семейство решений

Предположим, что для любой истинной траектории движения системы $q(t)$ (и $p(t)$), если запись ведётся в

формализме Гамильтона) существует семейство других истинных траекторий, задаваемых параметром α :

$$q'(t) = q'(q, \alpha), \quad p'(t) = p'(q, \alpha), \quad (1.25)$$

$$\text{или } a'(t) = a'(a, \alpha)$$

в терминах переменной $a(t)$. Для определённости мы полагаем, что если параметр $\alpha = 0$, то преобразование является тождественным, т.е. преобразованный путь совпадает с исходным.

Все траектории (1.25) являются решением (1.4е). Поэтому при преобразовании (1.25), в частности, при преобразовании (1.17), лагранжиан L в (1.7) изменяется на полный дифференциал по времени,

$$\delta S = \int dt(L' - L), \quad L' - L = \frac{dJ(\alpha)}{dt}, \quad (1.26)$$

поскольку вариация преобразованного действия должна приводить к траектории (1.25).

Теперь покажем, что существование семейства решений (1.25) означает, что при движении системы сохраняется некоторая величина I . Действительно, поскольку выражения (1.26) и (1.18) были получены непосредственно (без применения операции интегрирования по частям), то поправка к лагранжиану (1.26) при $\alpha \rightarrow 0$ равна аналогичной поправке (1.18). В результате полу-

чаем получаем

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad I = \partial_\alpha (ia^* \delta a - J) \Big|_{\alpha=0}, \quad (1.27)$$

где вариация пути δa соответствует параметрическому семейству (1.25),

$$\delta a = \alpha \partial_\alpha a'(t, \alpha) \Big|_{\alpha=0}.$$

Таким образом, для того, чтобы иметь возможность найти интеграл движения I , необходимо уметь вычислять величину J в (1.26), а точнее – величину $\partial_\alpha J \Big|_{\alpha=0}$ в (1.27).

Рассмотрим тот же элементарный пример закона сохранения энергии для системы с одной степенью свободы. Если лагранжиан системы (вместе с ним и гамильтониан) не зависит явно от времени, то из существования решения $a(t)$ следует существование решения

$$a'(t) = a(t + \alpha).$$

В этом случае величина J , введённая в (1.26) и необходимая нам в виде (1.27), равна

$$\delta a = \alpha \dot{a}, \quad \partial_\alpha J \Big|_{\alpha=0} = L.$$

Используя (1.7) получаем, что сохраняющаяся величина I в (1.27) есть гамильтониан, $I = H$.

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 2

ЧЕТЫРЁХ-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Литература Джексон (1965), Ландау и Лифшиц (1988), Топтыгин (2005), Топтыгин (2002), Мешков и Чириков (1987), Угаров (1977),

§2-1. Постулаты релятивистской механики

2-1.1 Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории.

Независимость вида математической записи законов физики относительно выбора инерциальной системы отсчёта должна предполагаться в любой физической теории. Если же все системы отсчёта принципиально одинаковы, то нет выделенной, а значит вопрос об абсолютной скорости тела бессмысленен. А. Пуанкаре в начале XX века сформулировал это интуитивное соображение так: в природе есть закон, заключающийся в том, что абсолютную скорость обнаружить невозможно никаким способом. Поэтому актуальным является только вопрос о том, как преобразуется математическое описание физических систем, когда мы изменяем систему отсчёта. Ответ на этот вопрос неразрывно связан с видом уравнений движения материи.

Первый закон Ньютона утверждает, что свободное тело, пущенное с любой скоростью в любом направлении, должно двигаться равномерно и прямолинейно в любой инерциальной системе координат. Следовательно, координаты для любых двух инерциальных прямоугольных декартовых систем связаны между собой некоторым линейным преобразованием. В этом утверждении не было бы ничего требующего задуматься, если бы речь шла только о 3-х пространственных координатах; тогда множество допустимых линейных преобразований ограничивалось бы ортогональными поворотами.

Однако в этих общих рассуждениях о линейном преобразовании может участвовать ещё одна координата — время, и всё равно прямолинейное движение будет оставаться прямолинейным в новой системе отсчёта. Понятно, что время должно быть всё же логически отделено. Необходимы дополнительные физические соображения, которые бы выделили допустимую подгруппу линейных преобразований всех 4-х координат. Как оказывается, для разных физических моделей ответ оказывается различным.

В классической механике максимальная относительная скорость движения двух тел может быть сколь угодно большой. Поэтому в ней рассматривалось всего два типа взаимодействия. Первое — гравитационное взаимодействие двух материальных точек, сформулированное И. Ньютоном. Считалось, что это взаимодействие распространяется с бесконечной скоростью, т.е. определяется текущим положением тел. Второе — это близкое взаимодействие двух абсолютно недеформируемых (абсолютно твёрдых) тел конечного размера, когда они приходят в соприкосновение. По определению, при воздействии на абсолютно твёрдое тело конечного размера в одной его точке, все другие его точки в этот же момент начинают испытывать ускорение, определяемое ускорением центра масс и угловым ускорением тела. Таким образом, здесь также встроено представление о бесконечной скорости распространения взаимодействия.

Математическое описание этих двух взаимодействий по форме остаётся тем же самым при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, если предположить, что координаты этих систем связаны между собой преобразованием Галилея. Пусть v — скорость системы K' относительно системы K . Преобразованием Галилея является

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (2.1)$$

где t, \mathbf{r} и t', \mathbf{r}' — координаты одной и той же материальной точки в инерциальных системах K и K' соответственно. Если законы физики инвариантны относительно преобразований вида (2.1), то говорят о галилеевской инвариантности. О механике в этом случае говорят как о *классической* или *галилеевской механике*. Время при преобразовании Галилея остаётся неизменным, и потому носит абсолютный характер.

Во второй половине XIX века Д.К. Максвелл сформулировал уравнения электродинамики в пустоте. Из этих уравнений может быть получено волновое уравнение, которое описывает распространение света. Проблема заключалась в том, что уравнения Максвелла не

обладают галилеевской инвариантностью. Наоборот, согласно уравнениям Максвелла электромагнитная (световая) волна в любой инерциальной системе координат распространяется с одной и той же скоростью, равной константе c . Численное значение этой константы равно

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с.}$$

Из этого факта следует общее ограничение: любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей скорости света. Действительно, в противном случае в системе отсчёта этого тела световая волна должна быть неподвижна, если тело движется со скоростью света по направлению распространения волны. Итак, *скорость c – максимальная скорость распространения взаимодействия, а любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей c .*

Для восстановления инвариантности уравнений физики при переходе из одной инерциальной системы координат в другую следовало отказаться от преобразования Галилея в пользу другого линейного преобразования координат. Такое преобразование предложил Х.А. Лоренц (поэтому оно носит его имя), но окончательно обдумал этот факт и сформулировал готовую теорию специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейн в 1905 году. В этой теории два события, одновременные в одной системе координат, но разнесённые по пространству, в общем случае не являются одновременными в другой системе координат. Понятие времени стало относительным. Поэтому новую теорию стали называть *теорией относительности (theory of relativity)*, построенную на её основе механику стали называть *релятивистской механикой*.

Тем не менее, при замене преобразования Галилея преобразованием Лоренца возникала новая проблема: теперь мгновенно распространяющееся гравитационное взаимодействие не могло быть органично включено в общефизическую картину. Процесс создания общей теории относительности (ОТО), включающей в себя и гравитацию (гравитационное взаимодействие теперь также распространялось с конечной скоростью), был завершён в 1916 году, где лидером также оказался А. Эйнштейн.

2-1.2 Постулаты специальной теории относительности

Упомянем сначала базовые постулаты, которые лежат в основе всех физических теорий.

Все физические явления описываются математическими законами. Не существует явлений материального мира, которые не могли бы быть описаны математической моделью.

Принцип причинности. Этот принцип утверждает, что какое-либо событие, произошедшее в любой время в любой точке, может повлиять только на то, что будет после этого события. В такой форме этот принцип ещё не формализован, при построении конкретной теории его надо доопределять.

Теперь перейдём к конкретной теории. Сейчас мы ограничиваемся специальной теорией относительности (СТО), в которой не рассматривается гравитация. Для расширения теории до общей теории относительности, включающей гравитацию, необходимо добавить новые постулаты и модифицировать часть постулатов СТО.

2-1.2.1 Базовые понятия в релятивистской механике

Свободное тело Будем говорить, что тело предоставлено самому себе, или называть его свободным телом, если оно находится на значительном расстоянии от других тел, так что его взаимодействием с этими другими телами можно пренебречь.

Инерциальная система отсчёта Инерциальной системой отсчёта называется система отсчёта, в которой тело, предоставленное самому себе, движется равномерно и прямолинейно.

Четырёх-мерное пространство-время Мы будем изучать движение тел и распространение волн в 4-мерном пространстве времени. Четыре измерения складываются из одного, соответствующего времени, и трёх, соответствующих обычному наблюдаемому пространству.

Событие Событием мы будем называть точку в четырёх-мерном пространстве-времени.

Событие фиксирует место и время.

2-1.2.2 Постулаты, касающиеся свойств пространства

Эти постулаты переходят в релятивистскую механику из классической механики.

- Пространство и время однородны: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её местоположения в пространстве и во времени.
- Пространство изотропно: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её ориентации в пространстве.

2-1.2.3 Постулаты, касающиеся инерциальных систем отсчёта

- Равноправие инерциальных систем отсчёта.
Во всех инерциальных системах отсчёта физические законы выглядят одинаково, т.е. одинакова их математическая запись.
- Ограниченность максимальной скорости.
Существует максимальная скорость движения или передачи сигнала в пространстве. Из предыдущего постулата следует, что она одна и та же во всех

инерциальных системах отсчёта. Эту максимальную скорость мы будем обозначать буквой

скорость света: c .

С максимальной скоростью c распространяется, в частности, свет в вакууме.

Второй постулат является новым с точки зрения классической механики.

2-1.3 Принцип минимума действия

Ньютонова механика формулировалась, исходя из постулирования уравнений движения. В дальнейшем было показано, что уравнения движения могут быть получены из принципа минимума действия.

Построение обновлённой теории предпочтительней начинать непосредственно с определения действия, и затем находить уравнения движения путём его минимизации. Соображения для такого выбора следующие. По смыслу, действие есть величина, не зависящая от выбора системы координат, или, как говорят, являющаяся релятивистским инвариантом. А именно, фиксированной траектории частицы, записанной в любой системе координат, действие ставит в соответствие одно и то же число. Уравнения движения не обладают этим простым свойством. Хотя они и имеют одинаковый математический вид во всех системах отсчёта, но конкретные значения величин в уравнении движения разумеется зависят от выбора системы координат.

Общие принципы построения действия для описания лагранжевой системы в специальной теории относительности (СТО) следующие:

- Действие должно являться релятивистским инвариантом, т.е. его значение для конкретной траектории системы не должно зависеть от выбора системы координат;
- Действие должно иметь максимально простой вид, который, тем не менее, должен содержать в себе всю необходимую физику.
- Согласно принципам построения лагранжиана в классической механике, в лагранжиан не должны входить производные от координат по времени более чем первого порядка.

Преобразование Лоренца перемешивает между собой временную и пространственные компоненты. Поэтому производные по времени и по координате должны входить в действие симметричным образом.

2-1.3.1 Поле и материальные точки в классической теории поля

В релятивистской теории не могут рассматриваться абсолютно твёрдые тела, поскольку абсолютно твёрдое тело предполагает бесконечную скорость распространения сигнала по этому телу. Поэтому массивные частицы

могут рассматриваться только как материальные точки. Для материальной частицы действие должно быть интегралом по той части пространства-времени, где существует частица. То есть, действие должно быть интегралом вдоль траектории частицы.

В специальной теории относительности получает самостоятельный смысл концепция поля. Если в ньютоновской механике взаимодействие передавалось непосредственно от одного тела к другому, а понятие поля могло рассматриваться только как вспомогательное, то в релятивистской механике поле приобретает собственное существование, вообще говоря независимое от частиц. Частица взаимодействует непосредственно только с полем в точке, где она находится. Взаимодействие с другими частицами происходит посредством распространяющегося поля: сначала одна частица создаёт изменение поля; после этого поле распространяется от этой частицы к другой со скоростью, не превышающей скорость света; затем та другая частица начинает испытывать воздействие пришедшего к ней изменённого поля. Действие для поля должно быть интегралом по всему пространству-времени от плотности лагранжиана поля.

Принцип построения действия при существовании различных частей системы состоит в том, что действие есть арифметическая сумма разных вкладов. Есть вклады, которые отвечают за движение отдельных частей – частиц и поля – самих по себе, а есть вклады, которые отвечают за взаимодействие этих частей.

2-1.3.2 Принцип ковариантности уравнений движения

2-1.4 Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией

Большинство точечных частиц помимо массы обладают также электрическим зарядом. Заряд частицы индуцирует электрическое поле, в результате чего полная энергия покоящейся частицы складывается из её энергии покоя, связанной с массой, и энергией электрического поля. Поскольку электрическое поле распределено по закону Кулона, то электрическая часть энергии оказывается формально бесконечной для точечной частицы – интеграл по пространству от объёмной плотности энергии электрического поля расходится на малых расстояниях от частицы.

Эта бесконечность проявляется в конкретных вычислениях при исследовании задачи об излучении ускоренно движущейся частицей электромагнитных волн. Можно подвести полный баланс сохранения энергии только между моментами, когда частица движется равномерно и прямолинейно. Однако пока она движется с ускорением, установить полный баланс энергии оказывается невозможным, поскольку в уравнении на баланс

присутствует бесконечная добавка от энергии поля точечного заряда.

Выход из этого даёт квантовая теория, согласно которой массивные частицы описываются волновой функ-

цией, имеющей конечный размер локализации. Если плотность заряда остаётся конечной во всех точках пространства, то электромагнитная энергия становится ограниченной по величине.

§2-2. Инерциальные системы координат

2-2.1 Инерциальные декартовы системы координат

Пусть в инерциальной системе отсчёта K задана декартова система координат. Пространственные координаты мы обозначаем

$$x^i \equiv r^i, \quad \{i, j, k, l, \dots\} = 1, 2, 3 \text{ или } x, y, z.$$

В Пункте 2-1 говорилось о том, что переход от одной инерциальной системы координат к другой должен соответствовать линейному преобразованию координат. Если при этом линейном преобразовании время остаётся неизменным, то мы получим преобразование Галилея (2.1). Для того, чтобы построить новую теорию, время надо включить время наравне с пространственными координатами в качестве одной из компонент полного 4-вектора, определяющего событие — место и время. Мы будем следовать традиции, в которой время t пропорциональна координате x^0 на нулевой оси декартовой системы координат,

$$x^0 \equiv ct,$$

где c — скорость света. Весь 4-вектор мы будем обозначать

$$x^\mu, \quad \{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 0, 1, 2, 3.$$

Если нам потребуется отделить временную (нулевую) координату от пространственных (трёх последних), то мы это будем обозначать следующим образом:

$$x \equiv \|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}.$$

В принципе, можно вводить декартову систему координат и в неинерциальной системе отсчёта. Если не будет оговорено противное, мы всегда будем подразумевать, что декартова система координат введена в инерциальной системе отсчёта, и будем отождествлять эти два понятия.

2-2.1.1 Интервал

Возьмём два события A и B с координатами

$$A: x^\mu, \quad B: x^\mu + dx^\mu \quad (2.2)$$

соответственно. По определению, интервалом между этими двумя событиями называется величина

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = \\ &= (dx^0)^2 - \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right) \end{aligned}$$

Если световой луч прошёл через оба события A и B (2.2), это означает, что интервал между ними равен нулю,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = 0. \quad (2.3)$$

Это равенство должно выполняться в любой системе координат, поскольку свет в пустоте распространяется всегда с фиксированной скоростью c .

2-2.1.2 Метрический тензор

Более кратко определение интервала можно записать в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu, \quad (2.4)$$

где по повторяющимся индексам происходит суммирование от 0 до 3. Так построенный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ представляет собой диагональную матрицу, его диагональные матричные элементы суть

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}.$$

Ниже в Пункте 2-3.2 показывается, что из постулатов специальной теории относительности вытекает, что $g_{\mu\nu}$, будучи преобразованным как ковариантный тензор второго порядка, не изменяться при переходе в любую другую инерциальную систему координат, т.е. действительно является метрическим тензором. В этом параграфе мы непосредственно не используем это свойство $g_{\mu\nu}$.

2-2.2 Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта

Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта представляет из себя прямую линию, так что его координаты могут быть представлены в параметрическом виде:

$$x^\mu(\mathcal{S}) = p^\mu \mathcal{S} + x^{\mu,0}, \quad (2.5)$$

где p^μ и $x^{\mu,0}$ не зависят от параметра вдоль линии \mathcal{S} . Параметры $x^{\mu,0}$ задают начальное положение тела. Ниже под величиной p^μ будет пониматься 4-импульс частицы, однако здесь это пока что просто некоторый касательный вектор к мировой линии частицы.

Определим, чему равна скорость частицы, двигающейся по прямой (2.5). Для этого определим малое смещение частицы вдоль прямой:

$$dx^\mu = p^\mu ds. \quad (2.6)$$

Компоненты трёхмерной скорости тела \mathbf{v} равны

$$v^i = c \frac{dx^i}{dx^0} = c \frac{p^i}{p^0}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{p^0}, \quad (2.7)$$

где $\|p^\mu\| = \{p^0, \mathbf{p}\}$. Отсюда мы можем сделать вывод, что импульс p^μ хотя и имеет 4 координаты, однако в действительности в нём содержится только 3 независимых физически значимых параметра, определяющих направление и скорость движения частицы в 3-х мерном пространстве. Иными словами, для определения линии в 4-х мерном пространстве достаточно указать только её направление (и исходную точку, разумеется).

2-2.2.1 4-скорость тела

Для массивного тела, движущегося всегда со скоростью меньше световой, возможно так перемасштабировать параметр s в (2.5), чтобы его приращение имело смысл интервала s (2.4) между двумя событиями на мировой линии частицы. Величина интервала не зависит от массы тела, поэтому сейчас в (2.5) мы сменим обозначение $p^\mu \rightarrow u^\mu$,

$$x^\mu(s) = u^\mu s + x^{\mu,0}, \quad (2.8)$$

где 4-вектор u^μ называется вектором *4-скорости тела*. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} s^2 &= (s_2 - s_1)^2 = \\ &= g_{\mu\nu} (x^\mu(s_2) - x^\mu(s_1)) (x^\nu(s_2) - x^\nu(s_1)) = \\ &= g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu (s_2 - s_1)^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

вытекает, что 4-вектор скорости u^μ в (2.5) должен быть нормирован на единицу,

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (2.10)$$

При выборе 4-скорости в качестве касательного вектора к мировой линии естественно заменить обозначение $s \rightarrow s$.

Если скорость частицы равна скорости света, то ввести 4-скорость согласно нормировке (2.10) невозможно, поскольку в этом случае интервал между двумя любыми точками на траектории частицы (2.5) равен нулю. Иными словами,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = 0. \quad (2.11)$$

2-2.2.2 Связь 4-скорости с трёх-мерными обозначениями

Пусть частица массивна, так что её свободному движению можно поставить в соответствие 4-скорость u^μ . Введём безразмерную трёх-мерную скорость

$$\beta^i = \frac{v^i}{c} = \frac{u^i}{u^0}, \quad \beta^2 < 1$$

(последнее неравенство выражает то, что массивная частица движется со скоростью, меньшей скорости света), а также параметр

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1,$$

называемый γ -фактором. Тогда 4-скорость можно записать в виде

$$\|u^\mu\| = \left\{ \gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right\} \equiv \{ \gamma, \gamma \boldsymbol{\beta} \}. \quad (2.12)$$

Если частица движется с малой скоростью, так что $v \ll c$, то такая частица называется *нерелятивистской*. В противном случае, когда её скорость v сравнима со скоростью света c , частица называется *релятивистской*. Если γ -фактор велик, $\gamma \gg 1$, то такую частицу называют *ультрарелятивистской*.

2-2.2.3 4-импульс материальной точки

Вектор 3-х мерной скорости \mathbf{v} материальной точки направлен по касательной к траектории $\mathbf{r}(t)$. При этом 3-х мерный импульс этой материальной точки (тела) также является касательным вектором к траектории, будучи пропорционален скорости, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где коэффициент пропорциональности m — масса тела.

Обобщим эту картину на релятивистский случай. Вместо касательной к траектории $\mathbf{r}(t)$ теперь естественно рассмотреть касательную к её траектории в пространстве-времени (2.5), которая направлена вдоль 4-скорости u^μ (2.10). Если принять, что 4-импульс $\|p^\mu\| = \{p^0, \mathbf{p}\}$

$$p^\mu = mc u^\mu, \quad (2.13)$$

то согласно (2.12) пространственная часть 4-импульса будет равна $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$ для медленных (нерелятивистских) частиц, как и должно быть. В общем случае условие нормировки 4-скорости (2.10), выраженное в терминах импульса, есть

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2. \quad (2.14)$$

Если же частица безмассовая, то это условие переходит в уже выписанное (2.11).

§2-3. Преобразование Лоренца

Основы тензорного анализа, свойства трёхмерного евклидова пространства и 4-х мерного пространства Минковского даны в Главе 9. Здесь мы предполагаем, что читатель знаком с этим математическим аппаратом.

Пусть даны две инерциальные системы координат K и K' , а координаты некоторого тела в этих системах отсчёта равны x^μ и x'^μ . Эти координаты должны быть связаны между собой линейным соотношением

$$x'^\nu = \Lambda'^\nu_\mu x^\mu + x'^{\nu,0}. \quad (2.15)$$

в котором матрица Λ'^ν_μ характеризует относительные движение и ориентацию систем отсчёта K и K' , а вектор $x'^{\nu,0}$ — их относительное расположение. Действительно, свободное тело должно двигаться равномерно прямолинейно в обеих системах координат. Равномерное и прямолинейное движение задаётся видом (2.5), где импульс частицы p^μ может принимать произвольные физически осмысленные значения. Только линейное преобразование (2.15) обеспечивает преобразование любой прямой линии в прямую линию.

Из сформулированных постулатов классической теории относительности следует, что матрица перехода $\hat{\Lambda}$, описывающая в (2.15) переход из одной системы координат в другую, должна удовлетворять равенству

$$g_{\mu\nu} = g_{\sigma\tau} \Lambda'^\sigma_\mu \Lambda'^\tau_\nu, \quad \Rightarrow \quad \text{abs}(\det \|\Lambda'^\sigma_\mu\|) = 1, \quad (2.16)$$

т.е. сохранять метрический тензор. Матрица, удовлетворяющая уравнению (2.16), называется матрицей Лоренца, а преобразование координат, которое она осуществляет, называется преобразованием Лоренца.

Доказательство (2.16) основывается на постулате о независимости скорости распространения света от выбранной системы координат, см. (2.3). Таким образом, ограничение на матрицу преобразования Лоренца (2.16) является математическим выражением введённого постулата релятивистской механики.

Доказательство сохранения метрического тензора при переходе из одной инерциальной системы координат в другую

Установим ограничения, накладываемые на матрицу перехода $\hat{\Lambda}$ (2.15) постулатами теории относительности, т.е. докажем (2.16).

Для этого рассмотрим два события A и B , таких, что свет, испущенный из A , как раз приходит в B . Это означает, что интервал между этими двумя событиями равен нулю, см. (2.4). Пусть события A и B , в системах отсчёта K и K' имеют координаты

$$K: \quad A: x^\mu \quad \text{и} \quad B: x^\mu + dx^\mu$$

$$K': \quad A: x'^\mu \quad \text{и} \quad B: x'^\mu + dx'^\mu.$$

Переход из системы K в систему K' осуществляется при помощи матрицы $\hat{\Lambda}$ (2.15),

$$dx'^\mu = \Lambda'^\mu_\nu dx^\nu.$$

Запишем условие равенства нулю интервала между A и B в обеих системах отсчёта:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (2.17)$$

$$(ds')^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (2.18)$$

$$G_{\mu\nu} = \Lambda'^\sigma_\mu \Lambda'^\tau_\nu g_{\sigma\tau}.$$

Метрический тензор $\|G_{\mu\nu}\|$ есть метрический тензор системы K' , пересчитанный в системе K . Для каждого dx^μ , для которого выполняется (2.17), должно выполняться и равенство (2.18).

Покажем, что из этого требования следует пропорциональность

$$G_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$$

между матрицами. Заметим сразу, что матрица $G_{\mu\nu}$ симметрична в силу своего построения. Далее, поскольку равенство (2.17) сохраняется при заменах

$$\{dx^i \rightarrow -dx^i, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

$$\{dx^i \rightarrow \mathcal{O}^i_j dx^j, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

где $\hat{\mathcal{O}}$ — ортогональная матрица, то, во-первых, матричные элементы G_{0i} равны нулю, а во-вторых, сектор G_{ij} пропорционален единичной матрице. Из последнего вытекает, что метрический тензор в новой системе координат пропорционален метрическому тензору в старой системе координат,

$$G_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu},$$

Осталось показать, что коэффициент пропорциональности тождественно равен единице. Мы уже выполнили условие сохранения нулевого значения интервала, поэтому следует воспользоваться дополнительными соображениями.

Абсолютное значение детерминанта метрического тензора $\|G_{\mu\nu}\|$ равно квадрату детерминанта матрицы Лоренца $\|\Lambda'^\mu_\nu\|$. Поэтому нам надо показать, что абсолютное значение детерминанта матрицы Лоренца равно единице. Пусть

$$(\det \|\Lambda'^\mu_\nu\|)^2 = a.$$

Коэффициент a может зависеть только от абсолютного значения v взаимной скорости \mathbf{v} движения систем координат K' и K . В противном случае нарушится постулат об изотропности пространства. Рассмотрим теперь ещё одну систему координат K'' , которая движется относительно системы K' со скоростью \mathbf{v}' , по

модулю равной v , а относительно системы K — со скоростью v'' . Переходя сначала непосредственно из K в K'' , а потом через систему K' , получаем равенство:

$$a(v'') = a(v)a(v').$$

Зафиксируем теперь величину скоростей v, v' , и будем менять угол между скоростями v и v' , тем самым меняя абсолютное значение скорости v'' . При этом единственным способом сохранить верность выписанного равенства является тождественное равенство $a = 1$.

Таким образом, доказано равенство (2.16).

2-3.1 Количество параметров преобразования Лоренца

Пусть матрица преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ слабо отличается от тождественного преобразования,

$$\Lambda'_{\nu}{}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon \Omega_{\nu}^{\mu}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

После приравнивания нулю коэффициента при первой степени ϵ в уравнении (2.16) получаем, что матрица $\hat{\Omega}$ должна удовлетворять уравнению

$$\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0.$$

Таким образом, в матрице $\hat{\Omega}$ содержится 6 независимых параметров.

Совершая переход $1/\epsilon$ раз и устремляя $\epsilon \rightarrow 0$, получаем конечное преобразование Лоренца

$$\hat{\Lambda}' = \exp(\|\Omega_{\nu}^{\mu}\|). \quad (2.20)$$

Матрица Лоренца, которую можно представить в виде (2.20), соответствует переходу между системами координат, у которых время течёт в одну сторону, т.е. $\Lambda_0^0 > 0$, а пространственные оси в обеих системах отсчёта образуют однонаправленную тройку координат.

Число шесть непрерывных параметров в матрице Лоренца можно интерпретировать следующим образом: три параметра суть углы Эйлера, описывающие произвольный поворот пространственных осей одной системы относительно пространственных осей другой системы; остальные три параметра суть три компоненты скорости относительного движения систем координат.

Все остальные матрицы Лоренца, не представимые в виде (2.20), можно получить из (2.20) путём умножения её на матрицы, соответствующие обращению времени или пространственной инверсии. Таким образом, вся совокупность матриц Лоренца параметризуется 6-ю непрерывными параметрами и двумя дискретными.

2-3.2 Интервал в пространстве Минковского

Итак, из постоянства скорости света в любой инерциальной системе координат следует, что при преобразовании Лоренца сохраняется метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Из сохранения метрического тензора в свою очередь следует,

что при преобразовании Лоренца сохраняет своё значение интервал (2.4) между любыми двумя событиями. О таких величинах говорят как о *релятивистских инвариантах*. Для того, чтобы обозначить их причастность к системе тензорного исчисления, см. §§9-1,9-3, такие величины называют также *скалярами*.

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ не знакоопределённый, что отличает его от евклидовой метрики, которая определяет расстояние между двумя точками. Метрику (2.4) называют *метрикой Минковского*, а линейное пространство, в котором введена такая метрика — *пространством Минковского*. При ортогональном повороте в пространстве Евклида расстояние, вычисленное по единичной метрике, сохраняется. Поэтому можно сказать, что преобразование Лоренца совершает поворот в пространстве Минковского. Аналогия с метрикой Евклида не полная: метрика Минковского в силу своей знакоопределённости не обладает свойством нормы (т.е. неравенство треугольника в общем случае не выполняется), тогда как метрика Евклида свойством нормы обладает, см. (9.29).

2-3.2.1 Времене-подобные интервалы

Если интервал (2.4) между событиями (2.2) имеет положительное значение,

$$(ds)^2 > 0,$$

то такой интервал называется *времене-подобным*. Существует система координат, в которой у 4-вектора dx^{μ} ненулевой является только временная компонента,

$$dx^0 = \sqrt{ds^2}, \quad dx^i = 0,$$

то есть эти события A и B происходят в одной и той же точке пространства, но в разное время. Как найти хотя бы одну такую систему координат, станет понятно в § 2-4, где рассматривается лоренцевский буст.

2-3.2.2 Пространственно-подобные интервалы

Если интервал (2.4) между событиями (2.2) имеет отрицательное значение,

$$(ds)^2 < 0,$$

то такой интервал называется *пространственно-подобным*. Существуют системы координат, в которых у 4-вектора dx^{μ} временная компонента является нулевой, а пространственная часть имеет ненулевые компоненты

$$dx^0 = 0, \quad |r| = \sqrt{-(ds)^2},$$

то есть события A и B происходят одновременно, но в разных точках пространства.

Примеры 4-векторов, которым соответствуют времене- и пространственно-подобные интервалы, изображены ниже на Рисунке 2.3.

§2-4. Преобразование Лоренца: лоренцевский буст

Наиболее известным частным видом преобразования Лоренца является случай, когда системы отсчёта K и K' имеют попарно параллельные друг другу пространственные оси координат, и K' движется относительно K со скоростью V , направленной вдоль оси Ox , см. Рис. 2.1. Примем также для простоты, что начала систем координат совпадают, т.е. в (2.15) $x^{\nu,0} = 0$.

В выбранном случае координаты y, z не изменяются при смене системы координат, поэтому матрица преобразования Лоренца является блочно-диагональной,

$$\|\Lambda'^{\mu}_{\nu}\| = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

где в выражении для матрицы $\|\Lambda'^{\mu}_{\nu}\|$ в правой части все матричные элементы являются матрицами 2×2 . Условие сохранения метрического тензора (2.16), записанное на матрицу 2×2 $\hat{\lambda}$, налагает на её матричные элементы три независимых условия, поскольку транспонирование (перестановка индексов $\mu \leftrightarrow \nu$) приводит к тому же самому уравнению. Таким образом, четыре матричных элемента $\hat{\lambda}$ определяются всего одним параметром. Этим параметром является абсолютное значение скорости V относительного движения систем координат.

2-4.1 Скорость движения и быстрота

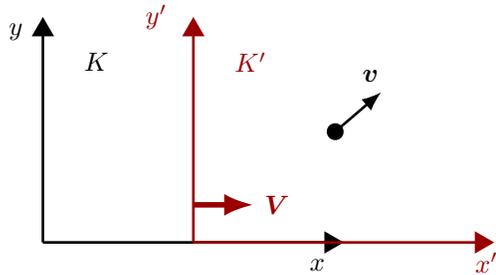


Рис. 2.1 Преобразование Лоренца – лоренцевский буст.

Система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси Ox . Оси двух систем параллельны друг другу. Частица движется со скоростью v в системе K .

2-4.1.1 Быстрота

Явный вид матрицы $\hat{\lambda}$ в (2.21) относительно просто получить используя её представление в виде матричной экспоненты (2.20). Для этого отбросим сейчас координаты y, z , которые не изменяются при преобразовании, после чего останутся матрицы 2×2 . Матрица-генератор

инфинитезимально малого ‘поворота’ $\hat{\Omega}$ (2.19) имеет вид

$$\|\Omega_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\Omega^{\mu}_{\nu}\| = \|g^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

то есть согласно (2.20) сама матрица преобразования Лоренца

$$\hat{\lambda} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & -\text{sh } \varphi \\ -\text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Параметр φ называется *быстротой* (rapidity).

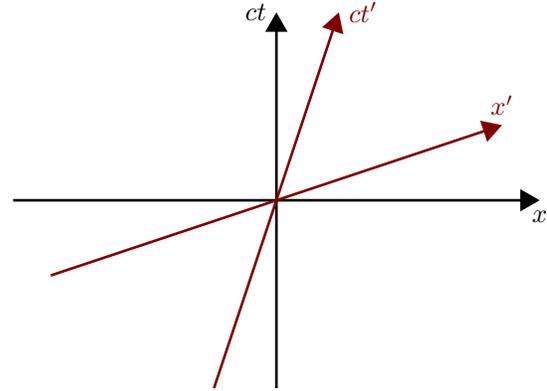


Рис. 2.2 Графическое изображение преобразования координат (2.23, 2.24) при лоренцевском бусте. Углы между осями t, t' и x, x' равны друг другу. Было выбрано $\beta = 1/3$.

2-4.1.2 Относительная скорость движения систем координат

Свяжем параметр φ с относительной скоростью движения систем координат V . Для этого представим матрицу перехода $\hat{\lambda}$ в виде

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{V}{c} = \text{th } \varphi, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.23)$$

где β называют безразмерной скоростью, а γ – γ -фактором. Проверим, что величина V здесь действительно имеет смысл относительного движения систем координат. Для этого выпишем непосредственно закон преобразования координат (2.15), вытекающий из

(2.23):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \hat{\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \Leftrightarrow \\ t' &= \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Положение начала пространственных координат системы K' задаётся уравнением $x' = 0$, которое согласно (2.24) эквивалентно $x = Vt$, т.е. система K' относительно системы K движется со скоростью V в направлении оси Ox .

Собственно говоря, Х.А. Лоренц изучал именно частный вид (2.23) преобразования координат. Хотя вместо 6 параметров для общего случая это преобразование содержит только 1 параметр, с физической стороны дела преобразование (2.23) содержит все специфические свойства преобразования Лоренца. В англоязычной литературе преобразование (2.23) называют лоренцевским бустом (*Lorentz boost*).

Матрица обратного перехода получается заменой $V \rightarrow -V$ (или $\varphi \rightarrow -\varphi$).

Быстрота как параметр удобна тем, что при двух последовательных преобразованиях для неё работает аддитивный закон сложения. Пусть система координат K_2 движется относительно системы K_1 со скоростью v_{21} вдоль оси Ox , а система K_3 движется относительно системы K_2 со скоростью V_{32} также вдоль оси Ox ; пространственные оси всех трёх координат параллельны друг другу. Скорости V_{21} соответствует быстрота φ_{21} , скорости V_{32} — быстрота φ_{32} . Тогда быстрота φ_{31} , соответствующая переходу из K_1 в K_3 , равна

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21}, \quad V_{31} = \frac{V_{32} + V_{21}}{1 + V_{21}V_{32}/c^2}. \quad (2.25)$$

что следует из представления матрицы Лоренца в виде (2.22). Отметим, что быстрота подчиняется аддитивному закону только в том случае, если движение происходит вдоль одной оси, т.е. одномерно. В противном случае такая простота теряется.

2-4.1.3 Сокращение размеров движущегося тела в направлении движения

Пусть стержень длиной L движется вдоль оси Ox в лабораторной системе K со скоростью V , будучи ориентированным вдоль этой же оси. В таком случае в системе K' , движущейся со скоростью V вдоль Ox , этот

стержень покоится и она называется сопровождающей системой координат.

Вопрос, который нас интересует: какова видимая длина стержня в лабораторной системе K ?

Обозначим концы стержня 'а' и 'b', так что в движущейся системе отсчёта разность координат его концов $x'_b - x'_a = L$. По смыслу измерения расстояния мы должны производить измерение длины стержня фиксируя время, так что в лабораторной системе $t_b = t_a$ для моментов изменения. Используя преобразования Лоренца (2.24) из K в K' , получаем соотношение

$$L = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a).$$

Таким образом, видимая длина стержня в системе K сократилась в γ раз,

$$L_K = x_b - x_a = \frac{L}{\gamma}. \quad (2.26)$$

Этот феномен называют *лоренцевским сокращением длины* (*Lorentz contraction*).

Другой релятивистский эффект, заключающийся в том, что часы, связанные с движущимся телом, идут в γ раз медленнее, чем в лабораторной системе координат, обсуждается в Пункте 2-5.2.

2-4.2 Поворот в пространстве

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота \hat{O} размерности 3×3 . Матрица Лоренца в этом случае имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$, соответственно, — строка из трёх нулей.

Любое преобразование Лоренца $\hat{\Lambda}$, не содержащее в себе операции инверсии в пространстве и обращения времени, может быть представлено в виде

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_{O1} \hat{\Lambda}_B \hat{\Lambda}_{O2}, \quad (2.28)$$

где $\hat{\Lambda}_{O1}$ и $\hat{\Lambda}_{O2}$ являются матрицами поворота типа (2.27), а $\hat{\Lambda}_B$ — матрица лоренцевского буста (2.23).

§2-5. Неравномерное движение материальной точки

В релятивистской механике в теорию не могут быть включены абсолютно твёрдые протяжённые тела. Действительно, рассмотрение движения абсолютно твёрдого тела приводит к парадоксам. Например, к первому парадоксу можно прийти, рассматривая вращение диска с постоянной угловой скоростью. Как было показано в Пункте 2-4.1.3, при поступательном движении размер тела в направлении этого движения сокращается. Мы можем разбить окружность диска на небольшие почти прямые участки. Каждый участок получит сокращение, то есть длина окружности диска станет меньше. С другой стороны, суммарно длина окружности должна остаться той же самой, поскольку направление радиуса не претерпевает релятивистского сокращения. Второй парадокс содержится в ускоренном движении абсолютно твёрдого тела под действием внешней силы. С одной стороны, поскольку тело абсолютно твёрдое, то сила, приложенная к его одной точке, должна тут же вызывать ускорение всех точек тела. Но это означает, что взаимодействие передаётся с бесконечно большой скоростью, поскольку тело является протяжённым в пространстве. Мгновенная передача взаимодействия, однако, запрещена постулатом релятивистской механики.

Поэтому в некантовой релятивистской теории массивные частицы могут рассматриваться только как материальные точки. Движение любого тела (материальной точки) задаётся линией в 4-х мерном пространстве времени. Действительно, в каждый момент времени тело находится в определённой точке пространства.

Любое взаимодействие в релятивистской механике распространяется со скоростью не превосходящей скорости света. Поэтому и любые частицы не могут распространяться быстрее скорости света, в противном случае они могли бы служить переносчиком сверх-светового взаимодействия. С каждой массивной частицей может быть связана система отсчёта. Поэтому массивные частицы могут распространяться только со скоростью, строго меньшей скорости света. В противном случае свет, испущенный в направлении движения частицы, в её системе координат оказался бы покоящимся.

2-5.1 Мировая линия частицы

Пусть движение частицы описывается параметрически

$$x^\mu = x^\mu(s), \quad (2.29)$$

через некоторый параметр s . Траектория (2.29), описывающая движение тела в 4-х мерном пространстве-времени, называется мировой линией. Частный вид такой параметризации нами уже использовался при рассмотрении равномерного и прямолинейного движения (2.5). В трёхмерных обозначениях 4-вектор $x^\mu = \{ct, \mathbf{r}\}$,

и трёх-мерная скорость тела \mathbf{v} имеет компоненты

$$v^i = \frac{dr^i}{dt} = c \frac{dx^i}{ds} / \frac{dx^0}{ds}. \quad (2.30)$$

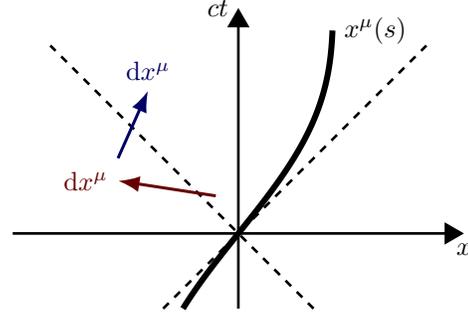


Рис. 2.3 Мировая линия массивной частицы. Образующая светового конуса обозначена пунктирной линией. Угол наклона касательной к мировой линии должен быть всегда меньше $\pi/4$ относительно временной оси. Коричневым цветом и синим цветом изображены некоторые 4-вектора (не связанные с мировой линией), которым соответствуют пространственно- и времени-подобный интервалы.

2-5.1.1 Световой конус

На Рисунке 2.3 изображена траектория частицы в плоскости координат $\{x, ct\}$. Поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то наклон касательной к мировой линии на этом рисунке должен быть всегда больше, чем $\pi/4$. Вообще, если частица находилась в начале координат, то в дальнейшем она может попасть только в область $r^2 < c^2 t^2$, $t > 0$. Повлиять на состояние в этой точке могут только события из области $r^2 \leq c^2 t^2$, $t < 0$. Область $r^2 \leq c^2 t^2$ называется световым конусом для точки $x^\mu = 0$.

2-5.2 Собственное время

Рассмотрим движение массивной материальной точки. Возможно выбрать определение параметра $s \equiv s$ в (2.29) “естественным образом”, т.е. так, что приращение ds есть интервал между событиями разделёнными вектором dx^μ :

$$\begin{aligned} x^\mu &= x^\mu(s), & dx^\mu &= x^\mu(s + ds) - x^\mu(s), \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, (2.31) есть обобщение (2.9) на случай неравномерного движения тела. При таком определении

параметра s мгновенная 4-скорость тела даётся равенством

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (2.32)$$

Легко проверить, что определяющее равенство (2.10) для 4-скорости выполнено. В дальнейшем под s мы всегда будем понимать параметр, выбранный естественным образом.

Предположим, что с телом связаны некоторые часы. Показания часов определяются параметром s : время τ , показываемое на этих часах, равно

$$\tau = \frac{s}{c}$$

с точностью до первоначального положения стрелок этих часов. Действительно, в инерциальной системе отсчёта, в данный момент движущейся с телом, приращение времени

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

вследствие того, что тело в этой системе координат в данный момент покоится и потому изменения его координат в ней равно нулю. Время τ называется *собственным временем* тела (*proper time*), и является атрибутом его мировой линии.

Приращения собственного времени и времени в лабораторной системе отсчёта связаны коэффициентом пропорциональности γ :

$$dt = \gamma d\tau,$$

т.е. собственное время движущейся частицы всегда течёт медленнее (или также, если она покоится), чем время в выбранной инерциальной системе координат.

Для безмассовой частицы понятие собственного времени не имеет смысла. Если о безмассовой частице думать как о массивно с массой $m \rightarrow 0$, то мы получим формально, что собственное время безмассовой частицы заморожено вдоль её траектории.

2-5.2.1 Ускорение

Если скорость частицы имеет только относительный смысл, то её ускорение частицей может быть измерено самостоятельно. Производную 4-скорости по собственному времени s ,

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}, \quad (2.33)$$

естественно называть 4-ускорением. Поскольку скорость нормирована на единицу, то

$$w^\mu u_\mu = 0. \quad (2.34)$$

Связь 4-ускорения с 3-х мерным ускорением \mathbf{a} однако уже не такая простая, как связь (2.12) для скорости:

$$\|w^\mu\| = \frac{1}{c^2} \{0, \gamma^2 \mathbf{a}\} + \frac{\gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \{1, \boldsymbol{\beta}\}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.35)$$

2-5.3 Сложение скоростей.

Пусть есть две инерциальные системы координат K и K' , переход между которыми (2.15) осуществляется матрицей Лоренца $\Lambda_\nu'^\mu$. Рассмотрим движение материальной точки, записанное в виде (2.5), в котором параметр s выбран естественным способом. В силу инвариантности значения интервала, этот параметр один и тот же для обеих систем отсчёта. Поэтому 4-скорость в системе K' есть

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{ds} = \frac{\Lambda_\nu'^\mu dx^\nu}{ds} = \Lambda_\nu'^\mu u^\nu. \quad (2.36)$$

Таким образом, 4-вектор скорости u^ν преобразуется по тому же закону (2.15), что вектор координат x^ν ; собственно поэтому совокупность четырёх чисел u^ν и следует называть 4-вектором.

Рассмотрим теперь частную ситуацию, когда система K' движется относительно системы K вдоль оси Ox со скоростью V_K , см. (2.23), а тело движется в системе K со скоростью \mathbf{v} , см. Рис 2.1. Расписывая (2.36) с учётом (2.12, 2.23) и получаем, что скорость \mathbf{v}' тела в системе K' имеет компоненты

$$v'^x = \frac{v^x - V_K}{1 - v^x V_K / c^2}, \quad v'^{y,z} = \frac{v^{y,z}}{\gamma_K (1 - V_K v^x / c^2)}, \quad (2.37)$$

где β_K и γ_K определяются через V_K как это сделано в (2.23). Таким образом, продольная компонента скорости частицы и её поперечные компоненты по отношению к направлению взаимного движения систем отсчёта преобразуются по-разному.

§2-6. Описание движения частиц в терминах непрерывной среды

Понятие непрерывной среды подразумевает, что все величины (масса, импульс, заряд и т.д.) распределены в пространстве с некоторой объёмной плотностью. Классическая релятивистская механика исходно имеет дело с точечными частицами. Для точечной частицы её масса сосредоточена в каждый момент в одной точке.

Математически, связь между описанием частиц как материальных точек и величинами непрерывной среды осуществляется через δ -функцию Дирака. Напомним, что δ -функция — это такая функция, которая равна нулю во всех точках кроме начала координат, а интеграл от неё по любой окрестности, содержащей начало координат равен единице.

Установим свойства интегралов и δ -функций в пространстве-времени по отношению к преобразованиям Лоренца. Из (2.16) следует, что детерминант матрицы преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ по модулю равен единице, то есть единице равен якобиан перехода между старыми и новыми координатами. Поэтому мера интегрирования по 4-х мерному пространству является инвариантом,

$$d\Omega \equiv d^4x = c dt d^3\mathbf{r} = c dt' d^3\mathbf{r}' \equiv d\Omega'. \quad (2.38)$$

Пусть y^μ — некоторое выделенное событие. Тогда, в силу релятивистской инвариантности меры интегрирования (2.38), инвариантна также 4-х мерная δ -функция

$$\delta^{(4)}(x - y) = \delta^{(4)}(x' - y'), \quad (2.39)$$

$$\delta^{(4)}(x - y) = \frac{1}{c} \delta(t_x - t_y) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_y),$$

поскольку только так достигается условие инвариантности результата интегрирования

$$1 = \int d\Omega \delta^{(4)}(x - y).$$

2-6.1 Четырёх-мерный ток

Рассмотрим движение частиц, которое мы хотим описать в терминах непрерывной среды. Каждая частица (пока не введена квантовая механика) описывается материальной точкой. Будем нумеровать частицы индексом a , тогда каждая частица описывает траекторию $\mathbf{r}_a(t)$, которой соответствует мировая линия $x_a^\mu(s)$. Кроме того, каждая частица обладает зарядом e_a и массой m_a .

Для описания движения заряда надо ввести объёмную зарядовую плотность ρ и объёмную плотностью электрического тока \mathbf{j} . Для описания движения частиц надо, соответственно, определить концентрацию частиц ρ_n и плотность потока частиц \mathbf{j}_n . Например, средние плотности электрических заряда и тока определяются

как

$$\rho = \frac{1}{\delta V} \sum_{\mathbf{r}_a \in \delta V} e_a, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\delta V} \sum_{\mathbf{r}_a \in \delta V} e_a \mathbf{v}_a. \quad (2.40a)$$

где суммирование происходит по всем частицам, попадающим в элемент объёма δV .

Ниже в Пункте 2-6.2 мы покажем, что объёмная плотность и плотность потока составляют компоненты 4-вектора плотности тока,

$$\|j^\mu\| = \{c\rho, \mathbf{j}\}, \quad \|j_n^\mu\| = \{c\rho_n, \mathbf{j}_n\}. \quad (2.40b)$$

2-6.1.1 Уравнение непрерывности

Экспериментальный факт состоит в том, что существует точный закон сохранения электрического заряда во времени. В дифференциальной форме этот закон сохранения записывается в виде *уравнения непрерывности* (*continuity equation*)

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.40c)$$

Уравнение непрерывности, записанное для электрического тока, говорит, что не существует локальных источников заряда. Поэтому изменение количества заряда со временем $\partial_t \rho dV$ в элементе объёма dV связано только с тем, что есть ненулевой поток заряда через границы этого объёма. Действительно, уравнение непрерывности (2.40c) можно переписать в интегральном виде

$$\partial_t \int_V d^3\mathbf{r} \rho = - \int_{\partial V} d^2 S^i j^i,$$

где второе интегрирование производится по границе ∂V объёма V (вектор $d^2 S^i$ направлен наружу объёма), и оба интегрирования производятся в один и тот же момент времени.

2-6.1.2 Сохраняющийся полный заряд

Равенство нулю 4-дивергенции 4-вектора плотности потока (2.40c) означает, что существует глобальная сохраняющаяся величина. В данном случае мы имеем дело с потоком заряда, поэтому сохраняющейся величиной является полный заряд системы

$$Q = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} j^0 = \int d^3\mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r}) = \operatorname{const}, \quad (2.40d)$$

где интегрирование производится при фиксированном времени. Действительно, посчитаем производную $\partial_t Q$ согласно уравнению непрерывности (2.40c):

$$\partial_t Q = \int d^3\mathbf{r} \partial_t \rho(t, \mathbf{r}) = - \int d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0.$$

Последний интеграл по теореме Остроградского-Гаусса приводится к поверхностному интегралу. Он обращается в нуль, поскольку мы предполагаем, что система конечна, так что далеко при $r \rightarrow \infty$ нет ни зарядов, ни токов.

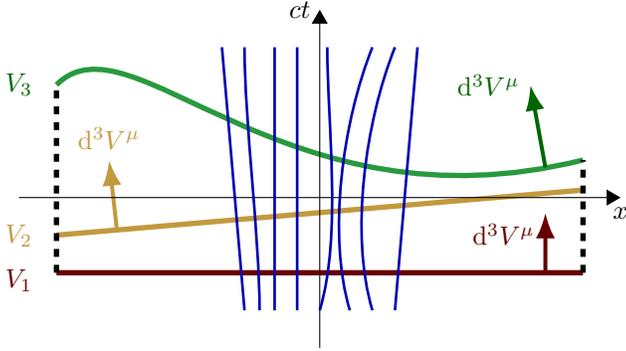


Рис. 2.4 Синими линиями изображены мировые линии зарядов. Красно-коричневая линия — интегрирование при постоянном времени по трёх-мерному пространству, см. (2.40d). Горчицная прямая — интегрирование при фиксированном времени в движущейся системе координат, см. Рисунок 2.2. Зелёная кривая — произвольная трёх-мерная гиперповерхность.

2-6.1.3 Полный заряд — релятивистский инвариант

Определённый в (2.40d) полный заряд является не только сохраняющейся величиной, но и релятивистским инвариантом. Это действительно должно быть так, поскольку результат подсчёта количества частиц и их суммарного заряда не должен зависеть от выбора системы отсчёта.

Интегрирование по пространству (2.40d) есть интегрирование по трёх-мерной гиперповерхности в 4-х мерном пространстве-времени, см. Рисунок 2.4. Элемент гипер-поверхности d^3S^μ есть псевдо 4-вектор

$$d^3S^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} dx^\nu dy^\lambda dz^\rho, \quad (2.40e)$$

где dx^ν , dy^λ , dz^ρ — три неколлинеарных вектора, на которые натянут данный элемент гипер-поверхности. Обратим внимание, что в выражении (2.40e) нет информации о сигнатуре метрики. Поэтому ортогональность 4-векторов d^3V^μ гиперповерхностям, которая ‘на глаз’ имеет на Рисунке 2.4, следует воспринимать в смысле условной метрики с евклидовой сигнатурой.

Рассмотрим сначала общий случай замкнутой гиперповерхности $\partial\Omega$, которая содержит в себе некоторую область Ω пространства-времени. Тогда справедлива теорема Остроградского-Гаусса

$$0 = \int_{\Omega} d^4\Omega \partial_\mu j^\mu = \oint_{\partial\Omega} d^3S^\mu j_\mu. \quad (2.40f)$$

Теперь пусть 4-ток j^μ убывает на далёких расстояниях, то есть рассматриваемая система ограничена в пространстве. А форма гиперповерхности такова, что она полностью вмещает в себя область, занимаемую системой в течении некоторого времени, см. Рисунок 2.4. Например, если гиперповерхность содержит в себе куски $V_{1,2}$, то правая часть уравнения (2.40f) есть

$$0 = \int_{V_1} d^3V^\mu j_\mu - \int_{V_2} d^3V^\mu j_\mu. \quad (2.40g)$$

Интеграл по V_1 есть полный заряд Q (2.40d). Мы получили, что полный заряд Q может быть также вычислен в некоторой движущейся системе координат интегрированием по V_2 , см. Рисунок 2.2. Таким образом, полный заряд, действительно, является релятивистским инвариантом. А также, полный заряд может быть вычислен и интегрированием по гиперповерхности произвольной формы V_3 , лишь бы она распространялась достаточной далеко по пространственным координатам.

2-6.1.4 Поток частиц. Связь скорости движения среды и тока. Релятивистский инвариант

Для произвольного типа частиц закона сохранения их количества не существует. Однако для некоторых сортов частиц закон сохранения выполняется. Тогда верно уравнение непрерывности и для потока частиц,

$$\partial_t \rho_n + \text{div } \mathbf{j}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j_n^\mu = 0.$$

Здесь ρ_n — концентрация частиц в пространстве.

Для 4-тока существует связанный с ним релятивистский инвариант

$$j_\mu j^\mu = (c\rho)^2 - \mathbf{j}^2,$$

который должен быть неотрицательным, поскольку концентрация частиц сама является неотрицательной величиной. Выясним смысл этого инварианта. Выберем сопровождающую систему отсчёта, в которой пространственные компоненты 4-тока равны нулю. Её скорость движения в лабораторной системе \mathbf{v} есть средняя скорость движения частиц в малом элементе объёма

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}_n}{\rho_n}, \quad \|U^\mu\| = (\gamma, \gamma\mathbf{v}). \quad (2.40h)$$

Мы обозначили через U^μ соответствующую \mathbf{v} 4-скорость. Релятивистским инвариантом является концентрация частиц n в сопровождающей системе отсчёта,

$$n = \frac{\rho_n}{\gamma}, \quad j_n^\mu = \frac{c\rho_n}{\gamma} U^\mu = cn U^\mu, \quad j_{n\mu} j_n^\mu = c^2 n^2. \quad (2.40i)$$

Для электрического 4-тока инвариант $j_\mu j^\mu$ может быть знакопеременным, поскольку существуют заряды разных знаков. Если он положителен, то $j_\mu j^\mu = c^2 \varrho^2$, где ϱ есть объёмная плотность заряда в системе отсчёта,

где электрический ток равен нулю, $\mathbf{j} = 0$. Если же инвариант отрицателен, то $j_\mu j^\mu = -j^2$, где j — амплитуда объёмной плотности тока в системе координат, где объёмная плотность зарядов нуль, $\rho = 0$. Такая ситуация может реализоваться, например, когда на фоне ионного положительно заряженного остова двигаются отрицательно заряженные электроны проводимости.

2-6.2 Связь потока с траекториями частиц

Усреднение по распределению частиц в малом объёме и переход к величинам непрерывной среды предполагает некоторую потерю информации. Мы сначала сделаем формально точный переход от траекторий точечных частиц к плотности и току. Затем мы покажем, как происходит усреднение, хотя часто более удобно проводить вычисления используя точные величины.

В трёх-мерных обозначениях объёмная плотность и плотность потока через траектории частиц выражаются следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (2.41)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — траектория частицы номер a . Непосредственной проверкой можно убедиться, что ρ и \mathbf{j} , определённые согласно (2.41), действительно удовлетворяют уравнению непрерывности (2.40с).

Четырёх-мерный ток можно также написать и в полностью ковариантной форме:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= c \sum_\alpha e_\alpha \int ds u_\alpha^\mu(s) \delta^{(4)}(x - x_\alpha(s)) = \\ &= c u^\mu(x) \sum_a e_a \int ds \delta^{(4)}(x - x_a), \end{aligned} \quad (2.42)$$

где интегрирование в каждом слагаемом производится вдоль мировой линии частицы $x_a(s)$, а четырёх-мерная δ -функция определена в (2.39). Эквивалентность (2.41) и (2.42) легко проверить, подставив в (2.42) выражение для 4-х мерной δ -функции в виде произведения (2.39), представив

$$\|dx_a^\mu\| = u_a^\mu ds = \{c, \mathbf{v}_a\} dt_a \quad (2.43)$$

и проинтегрировав по dt_a ; после этого придём к (2.41).

Когда мы написали второе равенство в (2.42), мы продолжили 4-скорость u^ν как функцию координат с мировых линий частиц на всё пространство. С одной стороны, эта операция виртуальна, поскольку всё равно 4-ток отличен от нуля только когда x попадает на мировую линию одной из частиц. С другой стороны, описание в терминах непрерывной среды интуитивно

предполагает, что все величины сглажены и не имеют дискретности; в этом есть физический смысл доопределения 4-скорости u^μ на всё пространство-время.

Поскольку в (2.42) справа стоит интеграл от произведения 4-вектора на 4-скаляр (см. (2.39)), то в целом справа стоит 4-вектор. А значит, так определённое в (2.42) j^μ также является 4-вектором.

В физических рассуждениях бывает удобней пользоваться усреднёнными величинами. Если за j_{exact}^μ обозначить выражения (2.41, 2.42), то усреднённые величины должны быть определены как результат усреднения по некоторому 4-объёму $\delta\Omega = c\delta t \delta V$, содержащему большое число частиц

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V \delta t} \int_{\mathbf{r}' \in \delta V} d^3 \mathbf{r}' \int_{t' \in \delta t} dt' j_{\text{exact}}^\mu(t + t', \mathbf{r} + \mathbf{r}'). \quad (2.44)$$

Если $\delta t \rightarrow 0$, то усреднение является усреднением по пространству (2.40а). Если элемент объёма $\delta V \rightarrow 0$, то усреднение является усреднением по времени.

Операция усреднения (2.44) может быть произведена над всем слагаемыми в левой части уравнения непрерывности (2.40с). Порядок проведения операций усреднения и дифференцирования в уравнении непрерывности может быть изменён без изменения результата. Поэтому уравнение непрерывности верно и для усреднённых величин.

2-6.3 Распределение частиц по скоростям

Пусть дан ансамбль одинаковых частиц, распределение скоростей которых описывается функцией распределения $f(\mathbf{u})$, где \mathbf{u} — три пространственные компоненты 4-скорости: для того, чтобы посчитать количество частиц обладающих скоростями принадлежащих интересующей области \mathcal{U} в 3-х мерном пространстве компонент u^i , надо взять интеграл по этой области

$$\int_{\mathcal{U}} f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u}.$$

При переходе в другую инерциальную систему координат функция распределения преобразуется по закону

$$\gamma f(\mathbf{u}) = \gamma' f'(\mathbf{u}'), \quad (2.45)$$

где γ -фактор берётся при соответствующем значении \mathbf{u} , а \mathbf{u}' связано с \mathbf{u} согласно закону преобразования (2.36).

Действительно, сохранение количества частиц при переходе из одной системы координат в другую требует, чтобы выполнялось равенство

$$f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u} = f'(\mathbf{u}') d^3 \mathbf{u}',$$

то есть, чтобы выражение $f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u}$ являлось инвариантом. С другой стороны, выражение

$$\delta(u^\mu u_\mu - 1) du^0 d^3 \mathbf{u}$$

(пока написано это выражение, полагаем, что условие $u^\mu u_\mu = 1$ ещё не выполнено) является также инвариантом: первый множитель является инвариантом вследствие того, что скалярное произведение является инвариантом, второе слагаемое инвариантно, поскольку модуль детерминанта матрицы Лоренца (якобиан перехода) равен единице. Интегрируя это выражение по du^0 ,

получаем, что выражение

$$\frac{d^3\mathbf{u}}{\gamma}$$

есть инвариант. Из сопоставления выписанных нами инвариантов получаем, что инвариантом является также величина (2.45).

Глава 3

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ

§3-1. Действие и уравнения движения для свободной частицы

Описание движения свободной частицы в соответствии с программой, изложенной в Пункте 2-1.3, начнём с построения действия. Действие должно быть интегралом вдоль мировой линии частицы. Для мировой линии инвариантом является только приращение вдоль неё собственного времени (интервала) $d\tau = ds/c$, см. (2.31) и Пункт 2-5.2. Поэтому действие должно иметь вид

$$S_m = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (3.1)$$

где m – коэффициент пропорциональности, который имеет физический смысл массы частицы. Общий знак определяется требованием, чтобы действие имело минимум (а не максимум) на истинной траектории. Таким образом, принцип минимума действия на истинной траектории для свободной частицы даёт максимизацию её собственного времени.

Мировую линию частицы всегда можно параметризовать также и через время t . После этого действие (3.1) переписывается в виде, более похожем на нерелятивистскую запись:

$$S_m = \int dt L, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3.2)$$

в котором координаты \mathbf{r} зависят от времени t , а скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Если теперь предположить, что частица движется с нерелятивистскими скоростями, так что $v \ll c$, то действие приближённо можно записать в виде

$$S_m = -mc^2 \int dt + \int L' dt, \quad L' = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.3)$$

Первый вклад не зависит от траектории частицы, поэтому её определяет только второй вклад, который является действием для нерелятивистской частицы в классической механике. Получив правильное выражение для нерелятивистского лагранжиана L' в (3.3), мы тем самым оправдали выбор общего коэффициента в (3.1).

3-1.1 Вариация мировой линии и действия

Для определения истинной траектории частицы следует найти вариацию действия по вариации мировой линии

частицы. Рассмотрим действие, соответствующее движению частицы от события 'a' до события 'b':

$$S_m = -mc \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Варьированную мировую линию можно представить в виде (2.31)

$$x^\mu(s) + \delta x^\mu(s), \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $\delta x^\mu(s)$ – величина вариации. Отметим, что для варьированной мировой линии параметризующий её s в общем случае уже не является естественным параметром в смысле (2.31). Вариация действия, линеаризованная по слабому изменению мировой линии движения частицы, равна

$$\begin{aligned} \delta S_m &= -mc \int_a^b \left(\sqrt{ds^2 + 2dx_\mu d\delta x^\mu} - ds \right) = \\ &= -mc \int_a^b \frac{dx_\mu}{ds} \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds = \\ &= mc \int_a^b ds \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu - mc u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В процессе выкладок мы воспользовались определением 4-скорости (2.32).

3-1.2 Энергия и импульс частицы

Второе слагаемое в (3.4) даёт возможность определить импульс и энергию (гамильтониан) системы согласно равенствам (1.10):

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -E, \quad \frac{\delta S}{\delta x_b^i} = p^i \quad \Leftrightarrow \quad \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\|.$$

В результате получаем, что энергия и импульс частицы составляют 4-вектор, называемый 4-импульсом, пропорциональный 4-скорости тела,

$$\|p_\mu\| = \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\| = mc \|u_\mu\|. \quad (3.5)$$

В частности, мы установили, что 4-импульс является касательным вектором к траектории частицы, что оправдывает выбор обозначений в (2.5).

Первое слагаемое в (3.4) определяет уравнения движения:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0, \quad (3.6)$$

то есть энергия и импульс свободного тела сохраняются по мере его движения. Сохранение энергии и импульса следовало ожидать сразу, поскольку лагранжиан не зависит явно от времени и координат, см. Пункт 1-3.1.2.

Про уравнение движения, записанное в виде (3.6) говорят, что оно записано в *ковариантной форме*. Это означает, что равенство (3.6) имеет вид тензорного равенства в пространстве Минковского, и потому имеет один и тот же вид в любой инерциальной системе отсчёта. Таким образом достигается требование о равноправии инерциальных систем отсчёта, см. Пункт 2-1.2.3.

Воспользуемся (2.12) и свяжем выражения для энергии и импульса частицы с трёх-мерными обозначениями:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} = c \frac{\mathbf{p}}{p^0}.$$

Последнее равенство следует только из того, что p^μ является вектором касательным к мировой линии частицы, см. (2.7). Из (2.10,3.5) следует, что квадрат 4-импульса пропорционален квадрату массы,

$$p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (3.8)$$

3-1.2.1 Формула Эйнштейна для массы покоя

Пусть частица покоится, $\mathbf{v} = 0$. Трёх-мерный импульс \mathbf{p} частицы в этом случае как и должно быть равен нулю, тогда как энергия равна

$$E_0 = mc^2. \quad (3.9)$$

Отсюда следует сделать вывод, что масса является одной из форм энергии. Этот факт впервые был осознан А. Эйнштейном, поэтому соотношение (3.9) для энергии покоя частицы массы m называется *формулой Эйнштейна для массы покоя*, см. историческую справку в Окунь, 2008.

Если частица движется, то её энергия превышает энергию покоя. Разницу между этими энергиями можно назвать кинетической энергией

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (3.10)$$

3-1.2.2 Нерелятивистский предел

В нерелятивистском пределе, когда $v \ll c$, можно разложить знаменатель в выражениях (3.7). В результате получим

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} \approx m\mathbf{v}. \quad (3.11)$$

Таким образом, выражение как для кинетической энергии, так и для импульса совпало с известными выражениями в ньютоновской механике.

3-1.2.3 Гамильтонова форма уравнений движения

Гамильтониан свободной частицы \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = E,$$

где мы воспользовались выражением для лагранжиана (3.2). В случае малых скоростей гамильтониан приближённо равен

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2 c^2}.$$

Второе слагаемое соответствует гамильтониану частицы в галилеевской механике. Третье слагаемое представляет из себя первую релятивистскую поправку к закону дисперсии массивной частицы.

3-1.3 Безмассовые частицы

Известно, что некоторые элементарные частицы имеют нулевую массу. Такими частицами являются, например, фотон и скорее всего нейтрино. В этом случае квадрат 4-импульса равен нулю,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 \quad (3.12)$$

согласно (3.8).

Для массивных частиц 4-импульс является касательным к мировой линии частицы, см. (3.5) и (2.32). Обобщая это условие на безмассовые частицы заключаем, что они могут двигаться только со скоростью света, поскольку квадрат касательного вектора к мировой линии равен нулю, сравни (3.12,2.11). Для безмассовых частиц невозможно ввести 4-скорость, тогда как их 4-импульс может быть любым, удовлетворяющим условию (3.12).

В Пункте 4-5.3 обсуждается закон преобразования 4-импульса безмассовых частиц при переходе из одной системы отсчёта в другую.

§3-2. Распад и столкновения частиц

Литература: Балдин, Гольданский и Розенталь, 1959

В этом параграфе мы рассмотрим аспекты взаимодействия частиц друг с другом. Детальными взаимодействиями мы здесь не интересуемся, поскольку построение теорий этих взаимодействий находится за рамками классической релятивистской электродинамики. Важным свойством этих взаимодействий является их короткодействие. Иными словами, когда частицы находятся далеко друг от друга, этими взаимодействиями можно пренебречь. Поэтому мы будем пользоваться приближением, в котором частицы не взаимодействуют, пока они находятся на далёком расстоянии, так что их можно считать свободными. Мы рассматриваем только начальную конфигурацию частиц (в “далёком прошлом”) и конечную конфигурацию (в “далёком будущем”).

Столкновения частиц, в результате которых частицы меняют своё внутреннее состояние или рождаются новые частицы, называются неупругими столкновениями. Важным утверждением классической релятивистской электродинамики является утверждение, что масса является формой энергии, см. Пункт 3-1.2. Сама же энергия является частью 4-импульса. Таким образом, хотя законы сохранения энергии и импульса были получены нами в случае отсутствия неупругих столкновений, пользуясь физическими соображениями, мы должны его распространить на случай также и неупругих столкновений.

3-2.1 Распад частицы

Рассмотрим сначала распад частицы массы M , за которым следит некоторый наблюдатель. Введём понятие лабораторной системы отчёта K_L ; наблюдатель в этой системе отчёта является неподвижным. В этой системе отчёта частица до распада двигалась со скоростью \mathbf{V} и имела 4-импульс p^μ . Введём также сопровождающую систему координат K'_M , которая движется со скоростью частицы, так частица в ней покоится.

Частица распадается на N частиц (продуктов распада), которые после совершения процесса распада уже не взаимодействуют друг с другом. Эти частицы мы будем нумеровать индексом a ; массы частиц равны m_a , их 4-импульсы равны p_a^μ .

Рассмотрим закон сохранения энергии и импульса, записанный в ковариантной форме

$$\sum_{a=1}^N p_a^\mu = p^\mu. \quad (3.13)$$

Если прочесть это равенство в обратную сторону, то можно сделать следующее заключение. 4-импульс p^μ есть суммарный импульс системы, состоящей из N частиц. Если известны только импульсы продуктов распада, то воспользовавшись формулами (3.13, 3.8, 3.7), мы

можем последовательно найти полные 4-импульс системы, её эффективную массу и скорость системы центра масс.

Теперь перейдём в сопровождающую систему отчёта K'_M . Уравнение (3.13) на нулевую компоненту 4-импульса тогда примет вид

$$M = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} \geq \sum_{a=1}^N m_a. \quad (3.14)$$

Таким образом, суммарная масса покоя продуктов распада не может быть больше чем масса покоя распавшейся частицы. В реальности она всегда меньше, поскольку часть энергии покоя распавшейся частицы переходит в кинетическую энергию продуктов распада.

Конечно, уравнение (3.13) не фиксирует полностью направления и скорости вылета продуктов распада. Эти параметры зависят от внутреннего состояния исходной частицы на момент её распада. Чаще всего это состояние определить возможно только вероятностным образом, и поэтому к описанию состояния продуктов распада должны также применяться статистические методы.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда частица распадается на две частицы, и перейдём в сопровождающую систему координат. В таком случае закон сохранения импульса приводит к

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1.$$

Естественней всего предположить, что все направления вылета частицы №1 равновероятны, тогда в нашем случае выписанное уравнение даёт условную вероятность для направления импульса частицы №2.

3-2.2 Столкновение частиц

При упругом столкновении частиц их количество и внутренние свойства не меняются, а изменяется только скорость движения. Пусть до столкновения частицы имели импульсы p_a^μ , а после столкновения они приобрели импульсы \tilde{p}_a^μ . По закону сохранения 4-импульса

$$\sum_{a=1}^N \tilde{p}_a^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu = P^\mu.$$

общий 4-импульс системы P^μ сохраняется.

В случае неупругого столкновения частиц основной интерес представляет случай, когда две относительно лёгкие частицы сталкиваются с ультрарелятивистскими скоростями. Эффективная масса M такой системы велика. Благодаря этому в результате столкновения могут быть рождены частицы с массой покоя, значительно превышающей массу покоя сталкивающихся частиц.

Рассмотрим простейший вариант, когда сталкиваются две одинаковых частицы массой m_s , движущиеся

друг навстречу другу с одинаковыми скоростями, по модулю равными v . В результате столкновения эти частицы отдают часть своей кинетической энергии на рождение ещё двух частиц массой m_g :

$$s + s \rightarrow s + s + g + g.$$

Минимальный γ -фактор, при котором ещё возможна эта реакция, называется порогом реакции. Для того что-

бы его найти, нужно предположить, что после столкновения все частицы оказались в состоянии покоя, так что вся энергия системы оказалась запасённой в энергии покоя:

$$\gamma m_s = m_s + m_g.$$

Если рождающиеся частицы намного тяжелее сталкивающихся, $m_g \gg m_s$, то условие порога можно приближённо записать в виде $\gamma \approx m_g/m_s$.

§3-3. Совокупность частиц как непрерывная среда, тензор энергии-импульса

Перепишем уравнения движения (3.6) в терминах непрерывной среды. Для этого в действии (3.4) введём фиктивное интегрирование по пространству-времени,

$$S = -mc \int d\Omega_x \int_a^b ds \delta^{(4)}(x - x_s).$$

сравни с выражением для 4-тока в (2.42). Вариацию действия, однако, технически удобнее производить в прежнем виде интеграла вдоль мировой линии, см. (3.4). Сейчас мы положим вариацию пути на концах равной нулю, так что в последней строчке (3.4) остаётся только первое слагаемое. Теперь обратно восстановим интегрирование по пространству-времени:

$$\delta S = -mc \int d\Omega_x \int_a^b ds \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x) \delta x_\mu, \quad (3.15)$$

где $x_s = x_s(s)$ – мировая линия частицы, а u^μ – её 4-скорость. Мы воспользовались тем, что если под интегралом стоит $\delta^{(4)}(x - x_s)$, то любой множитель f ($f = du_\mu/ds$ в данном случае), исходно зависящий от параметра s на мировой линии, можно вместо этого считать функцией 4-координаты x . Дифференцирование по параметру s переписывается через градиент в пространстве-времени следующим образом: смещение вдоль мировой линии на ds означает смещение в пространстве-времени на вектор $dx^\mu = u^\nu ds$, поэтому

$$\frac{df}{ds} ds = df = (dx^\nu \partial_\nu) f = u^\nu \partial_\nu f ds, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{ds} = u^\nu \partial_\nu. \quad (3.16)$$

Таким образом, при переходе от (3.4) к (3.15) мы произвели замену

$$\frac{du^\mu(x_s)}{ds} \rightarrow \int d\Omega_x \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x).$$

Далее, в подынтегральном выражении (3.15) можно в качестве отдельного множителя выделить поток массы

$$\|j_m^\nu\| = (c\rho_m, \mathbf{j}_m) = \frac{c\rho_m}{\gamma} \|u^\nu\|,$$

см. (2.42), где вместо зарядов надо выбрать массы частиц. Поэтому вариация (3.15) переписывается в виде

$$\delta S = \int d\Omega_x j_m^\nu \partial_\nu u^\mu \delta x_\mu = \frac{1}{c} \int d\Omega_x \partial_\nu T^{\nu\mu} \delta x_\mu, \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = c j_m^\nu u^\mu = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma} u^\mu u^\nu. \quad (3.17)$$

В том числе, мы воспользовались уравнением непрерывности (2.40с) для потока массы, $\partial_\nu j_m^\nu = 0$. В нашем случае он верен, поскольку в рассматриваемой модели при движении каждая частица по отдельности сохраняет свою массу.

Тензор $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса* (*stress-energy tensor*). Как следует из его последней записи (3.17), мы получили его в симметричном виде. Если принять, что траектории частиц истинные, т.е. вариация действия равна нулю, то уравнения движения в терминах непрерывной среды являются

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.18)$$

Уравнения (3.18) эквивалентны уравнению движения частиц (3.6), в чём можно убедиться, проделывая выкладки в обратном порядке, от (3.18) к (3.4).

Тензор энергии-импульса является важным понятием в физике, через него выражаются законы сохранения. Здесь мы ввели этот тензор только для массивных точечных частиц, сохраняющих при движении свою массу покоя. Для совокупной системы частиц и электромагнитного поля этот тензор будет обсуждаться в §4-3.

3-3.1 Законы сохранения

Рассмотри более подробно уравнения (3.18). Как обсуждалось в Пункте 2-6.1, равенство нулю 4-дивергенции векторного поля означает, что существует сохраняющаяся во времени величина, см. (2.40d). Условие равенства нулю тензора энергии-импульса (3.18) содержит в себе 4 скалярных уравнения (количество значений индекса ν), поэтому существует 4 сохраняющиеся величины. Понятно, что этими величинами должны быть полная энергия

системы и три компоненты пространственного импульса.

Для того, чтобы показать это, рассмотрим матричную структуру тензора энергии-импульса. В случае общего положения эту структуру для выделения физического смысла компонент имеет смысл представить в виде

$$\|T^{\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E} & c\vec{p}^T \\ \hline \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \\ \hline \frac{\mathbf{S}}{c} & \end{array} \right). \quad (3.19)$$

Мы ввели объёмные плотности энергии \mathcal{E} , потока импульса \vec{p} , вектора потока энергии \mathbf{S} , а также тензор напряжений σ^{ik} , являющийся симметричной матрицей 3x3:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= T^{00}, & \sigma^{ik} &= -T^{ik}, \\ p^i &= T^{0i}/c, & S^i &= cT^{i0}, & \mathbf{S} &= c^2\vec{p}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

Трёх-мерные вектора потока энергии и плотности импульса пропорциональны друг другу.

В (3.19) в верхней строчке стоят величины, интеграл от которых по пространству равен полному 4-импульсу системы

$$\|P^\mu\| = \{E/c, \mathbf{P}\}, \quad P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} T^{0\mu} \quad (3.21)$$

и являются сохраняющейся величиной, сравни с (2.40d). В трёх нижних строчках (3.19) стоит поток сохраняющихся величин P^μ .

Нижние три строчки в (3.19) представляют собой потоки соответствующих величин. Действительно, если в (3.18) положить, например, $\nu = 0$, то согласно введённым обозначениям мы получим уравнение сохранения энергии

$$\partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (3.22)$$

Видно прямое соответствие этого уравнения с уравнением непрерывности для плотности заряда, см. (2.40c).

Поток импульса \vec{p} представляет собой не вектор, а матрицу 3x3, поскольку сам импульс - векторная величина. Согласно введённым обозначениям, если в (3.18) положить $\nu = k$, то мы придём к уравнению

$$\partial_t p^k - \partial_i \sigma^{ik} = 0. \quad (3.23)$$

3-3.2 Тензор энергии-импульса пылевидной материи

Рассмотрим совокупность частиц, которые не испытывают столкновений друг с другом. Мы предполагаем, что пространственно близкие частицы имеют близкие скорости. Среду, образованную такими частицами, сравнивают с пылью и потому называют её пылевидной.

В (3.15) рассматривалась вариация действия для одной из таких частиц. Поэтому можно воспользоваться

(3.17) и записать компоненты тензора энергии-импульса пылевидной материи (здесь мы добавили в индекс символы (m) для подчеркивания того, что речь идёт о частицах) в виде

$$\|T^{(m)\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E} & p^x c & p^y c & p^z c \\ \hline \mathcal{E}v^x/c & p^x v^x & p^y v^x & p^z v^x \\ \mathcal{E}v^y/c & p^x v^y & p^y v^y & p^z v^y \\ \mathcal{E}v^z/c & p^x v^z & p^y v^z & p^z v^z \end{array} \right). \quad (3.24)$$

Как следует из (3.17), в (3.24) объёмные плотности энергии \mathcal{E} и импульса \vec{p}

$$\mathcal{E} = \gamma \rho_m c^2 = c \gamma j_m^0, \quad \vec{p} = \gamma \rho_m \mathbf{v} = \gamma \mathbf{j}_m \quad (3.25)$$

Полный 4-импульс системы (3.21) естественным образом может быть выражен в виде суммы по отдельным частицам,

$$E = \sum_\alpha \gamma_\alpha m_\alpha c^2, \quad P^i = \sum_\alpha \gamma_\alpha m_\alpha v_\alpha^i$$

что можно получить, воспользовавшись связью (2.42) непрерывных потоков с мировыми линиями отдельных частиц.

Поток каждой компоненты $\{\mathcal{E}, \vec{p}\}$ равен ей же, помноженной на локальную скорость. Для демонстрации этого, перепишем уравнение (3.23) на локальное изменение плотности импульса для свободных частиц:

$$\partial_t p^i + \partial_k (v^k p^i) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \vec{p} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{p} = 0. \quad (3.26)$$

Например, величина $\vec{p}v^x$ есть плотность потока вектора импульса в x -направлении. Отметим, что в отличие от плотности потока массы \mathbf{j}_m , плотность потока импульса \vec{p} (3.20) не является частью какого-либо 4-вектора. Уравнение на плотность энергии (3.22) выглядит как

$$\partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \mathcal{E}) = 0, \quad \mathbf{S} = \mathcal{E} \mathbf{v}.$$

Для пылевидной среды верно уравнение непрерывности для потока массы (2.40c), которое вместе с уравнением переноса энергии даёт возможность переписать уравнение на импульс (3.26) в виде

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (3.26a)$$

Из тензора энергии-импульса пылевидной материи можно составить релятивистский инвариант путём операции свёртки:

$$T^{(m)\mu}{}_\mu = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma} \equiv \mathcal{E}. \quad (3.27)$$

Мы уже получали этот инвариант другими рассуждениями, см. (2.40i). Для пылевидной материи возможно выбрать такую систему отсчёта, в которой скорость пыли в выделенных точке и момент времени равна нулю;

в этой системе отсчёта массовая плотность пыли ε/c^2 , где ε можно назвать плотностью энергии покоя пыли. В таком случае единственным ненулевым матричным элементом тензора энергии-импульса является

$$T^{(m)00} \equiv \varepsilon = T^{(m)\mu}_{\mu}. \quad (3.28)$$

3-3.3 Тензор энергии-импульса идеального газа

Литература: Вайнберг, 1975, Гл.2§10.

Предположим теперь, что мы имеем дело не с пылью а газом. Его отличие от пыли состоит в том, что в каждом элементе газа частицы газа имеют ненулевые скорости относительно друг друга. В результате у газа есть внутреннее давление и температура. Мы предполагаем сейчас, что число частиц и их масса сохраняются.

Обобщая (3.17,2.40a), можно написать выражение для усреднённого значения тензора энергии-импульса по некоторому элементу объёма δV , в котором находится большое количество частиц

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\delta V} \sum_{a \in \delta V} \frac{p_a^\mu p_a^\nu}{p_a^0} \equiv c \left\langle \frac{p_a^\mu p_a^\nu}{p_a^0} \right\rangle_a, \quad (3.29)$$

которое применимо также и для безмассовых частиц. Можно также сказать, что в правой части (3.29) производится усреднение по распределению скоростей частиц.

Выберем теперь для этого элемента объёма сопровождающую его систему отсчёта, в которой средний поток заключенных в нём частиц равен нулю. У этой системы координат 4-скорость равна U^μ , см. (2.40h).

Приближение идеального газа состоит в предположении, что в каждом элементе установлено локальное статистическое равновесие; если же статистика в соседнем элементе другая, то обмена теплом между с соседним элементом не происходит. В таком случае распределение скоростей частиц в покоящемся элементе объёма статистически изотропно, так что, в частности

$$\left\langle \frac{p^i p^k}{p^0} \right\rangle = \frac{1}{3} \delta^{ik} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{p^0} \right\rangle,$$

и тензор энергии-импульса примет вид

$$\|T^{\mu\nu}\| = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon &= c \langle p^0 \rangle, \\ P &= \frac{c}{3} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{p^0} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где усреднение происходит по частицам внутри выделенного элемента объёма δV . Согласно определениям *объёмной плотности собственной энергии* ε и *давления* P в (3.30) выполняется неравенство

$$T^\mu_{\mu} = \varepsilon - 3P > 0 \quad (= 0 \text{ for massless}) \quad (3.31)$$

для массивных частиц. Для безмассовых частиц этот инвариант как и прежде равен нулю. Для пыли, отдельно рассмотренной в Пункте 3-3.2, давление равно нулю, $P = 0$.

Перейдём теперь с лабораторную систему координат, в которой элемент газа движется со скоростью U^μ . Тогда тензор энергии-импульса и поток частиц приобретают вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon + P}{c} U^\mu U^\nu - \frac{P}{c} g^{\mu\nu}, \quad j_n^\mu = n U^\mu. \quad (3.32)$$

Перепишем уравнения сохранения 4-импульса и количества частиц

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu j_n^\mu = 0$$

в виде уравнений течения идеального релятивистского газа. Если в трёхмерное векторное уравнение $\partial_\mu T^{\mu i} = 0$ подставить скалярное уравнение $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$, то мы придём к релятивистскому уравнению Эйлера

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{c^2}{\gamma^2(\varepsilon + P)} \left(\nabla P + \frac{\partial_t P}{c^2} \mathbf{v} \right). \quad (3.33)$$

Проверим, что это уравнение действительно переходит в простое уравнение Эйлера в нерелятивистском пределе. В этом пределе плотность собственной энергии есть почти плотность энергии покоя $\varepsilon \approx n m c^2 = \rho_m c^2$, по сравнению с которой давление мало, $P \sim m v_T^2 \ll \varepsilon$, где v_T — тепловая скорость частиц. Кроме того, в круглой скобке в правой части (3.33) второе слагаемое относительно мало как v^2/c^2 . В результате действительно приходим к нерелятивистскому уравнению Эйлера

$$\rho_m (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla P.$$

В частности, этот результат оправдывает то, что мы назвали величину P давлением.

3-3.3.1 Безмассовые частицы

Посмотрим, во что перейдёт этот инвариант для безмассовых частиц. Для таких частиц вектор скорости $\mathbf{v} = \vec{c}$, где \vec{c} — 3-х мерный вектор, по модулю равный скорости света и задающий направление распространения частиц. Соотношением между плотностями энергии и импульса является $\mathbf{p} = \vec{c} \mathcal{E}/c^2$, см. (3.12). Из (3.24) тогда вытекает, что след тензора энергии-импульса равен нулю,

$$T^\mu_{\mu} = 0 \quad \text{for massless particles.} \quad (3.27a)$$

Если в (3.27) мы рассмотрим ультра-релятивистские частицы, устремив $\gamma \rightarrow \infty$, то мы получим, что след тензора энергии-импульса параметрически мал по сравнению с характерным значением его элемента,

$$T^{(m)0}_0 \gg T^{(m)\mu}_{\mu},$$

что в определённом смысле можно трактовать так, что след тензора энергии-импульса равен нулю.

§3-4. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Из уравнений Максвелла, являющихся обобщением эмпирических данных, известно, что электрические и магнитные явления определяются электромагнитным полем — совокупностью электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} трёх-мерных векторных полей. Хотя в сумме электромагнитное поле характеризуется шестью компонентами, три из них не являются независимыми вследствие второй пары уравнений Максвелла, см. ниже (4.9). Уже на этом этапе наиболее простым является предположение, что в ковариантных терминах электромагнитное поле должно задаваться некоторым 4-вектором A^μ . Действительно, такая параметризация электромагнитного поля возможна, см. (3.47), при этом вторая пара уравнений Максвелла оказывается автоматически удовлетворённой. Среди четырёх компонент A^μ одна компонента является лишней, поскольку в электромагнитном поле независимыми являются всего три компоненты. Эта избыточность приводит к неоднозначному соответствию поля A^μ физическому определённому электромагнитному полю, о чём говорят как о калибровочной инвариантности, см. (4.1).

Поле A^μ называется *4-потенциалом электромагнитного поля*. Удобно выделить в 4-потенциале нулевую и три пространственных компоненты, представив его в виде

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad (3.34)$$

Величина φ называется *скалярным потенциалом*, вектор \mathbf{A} называется *вектор-потенциалом*.

То, что электромагнитное поле задаётся 4-потенциалом A^μ , конечно, не является само разумеющимся. Справедливость этого будет подтверждена ниже, когда будут получены знакомые из общей физики сила Лоренца (3.48) и уравнения Максвелла (4.9,4.16).

3-4.1 Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан

Вклад в действие, ответственный за взаимодействие частицы и электромагнитного поля, должен иметь вид интеграла вдоль мировой линии частицы. Поскольку $|A^\mu|$ — векторная величина, то для получения скаляра она должна быть скалярно домножена на другую векторную величину, относящуюся к движению частицы. Единственной такой величиной является приращение 4-вектора положения частицы при перемещении вдоль мировой линии dx^μ . С учётом постоянных множителей, которые необходимо добавить для дальнейшего получения уравнений движения в привычной форме, искомый вклад в действие приобретает вид

$$S_{\text{int}} = - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a) dx_a^\mu = - \frac{1}{c^2} \int d\Omega A_\mu j^\mu. \quad (3.35)$$

Сумма производится по всем частицам в системе. При преобразовании действия от одного вида к другому мы воспользовались формулой (2.42) и выражением (2.38) для элемента 4-объёма. Здесь мы решаем задачу о нахождении траектория движения частицы в заданном электромагнитном поле. Поэтому нам более подходит первый вид, в котором интегрирование происходит вдоль мировых линий частиц.

Второй вид действия в (3.35) записан в терминах непрерывной среды. Он может быть более удобен для определения отклика поля на движение заряженных частиц. Разумеется, действие во второй форме (3.35) также релятивистски инвариантно, поскольку релятивистски инвариантны как элемент 4-объёма $d\Omega$, так и скалярное произведение двух векторов.

Для простоты будем в дальнейшем рассматривать одну частицу, траектория которой есть $\mathbf{r}(t)$.

3-4.1.1 Трёх-мерный вид лагранжиана и гамильтониана

Перепишем действие (3.35) в трёхмерных обозначениях. Приращения 4-координаты вдоль мировой линии $\|dx^\mu\| = \{c, \mathbf{v}\}dt$, поэтому первый (дискретный) вариант записи действия (3.35) представим виде

$$S_{\text{int}} = \int L_{\text{int}} dt, \quad L_{\text{int}} = \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi.$$

Для того, чтобы получить полный лагранжиан L массивной заряженной частицы в электромагнитном поле, этот вклад надо сложить с вкладом для свободной частицы (3.2):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (3.36)$$

Вектор-потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ должны браться в точке положения частицы \mathbf{r} .

Обобщённый импульс \mathbf{p}_{gen} , канонически сопряжённый с координатой частицы \mathbf{r} , находится по общей формуле (1.4a):

$$\mathbf{p}_{\text{gen}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (3.37)$$

где простой импульс частицы \mathbf{p} дан выражением (3.7). Гамильтониан \mathcal{H} заряженной массивной частицы во внешнем поле равен

$$\mathcal{H} = \gamma mc^2 + e\varphi,$$

то есть полная энергия равна сумме энергии покоя $E_0 = mc^2$, кинетической энергии $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$ и потенциальной энергии заряда во внешнем поле $e\varphi$. Перепишем гамильтониан в более естественном для него виде, как функцию координаты и обобщённого импульса:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2} c^2 + e\varphi, \quad (3.38)$$

сравни с (3.8). Если имеет место нерелятивистский предел, то второе слагаемое под корнем мало, так что гамильтониан

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (3.39)$$

Без первого слагаемого этот гамильтониан имеет вид *гамильтониана Паули* (без вклада от спина частицы), используемого в квантовой механике для описания движения заряженной нерелятивистской частицы в электромагнитном поле.

Из вида гамильтониана (3.38) получаем уравнение Гамильтона-Якоби (1.12), которое имеет смысл записать в ковариантном виде

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu S - A_\mu) (\partial_\nu S - A_\nu) = m^2 c^2. \quad (3.40)$$

3-4.2 Уравнения движения

Проведём варьирование действия

$$S = S_{\text{m}} + S_{\text{int}}$$

таким же образом, как это было сделано для действия для свободной частицы S_{m} (3.1). Для сокращения записи будем предполагать вариацию пути равной нулю на концах, поскольку мы уже нашли гамильтониан (3.38) и обобщённый импульс (3.37). Вариация действия равна

$$\delta S = \int \frac{dp^\mu}{ds} ds \delta x_\mu - \frac{e}{c} \int \left(A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{ds} + \delta A_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \right) ds. \quad (3.41)$$

Первое слагаемое в действии мы написали, воспользовавшись (3.4). Первое слагаемое в круглой скобке проинтегрируем по частям. Во втором слагаемом изменение 4-потенциала при вариации происходит потому, что он зависит от координаты, которая изменилась при вариации. В процессе преобразования пользуемся соотношениями

$$\frac{dA_\mu}{ds} = u^\nu \partial_\nu A_\mu, \quad \delta A_\nu = \delta x^\mu \partial_\mu A_\nu, \quad dx^\nu = u^\nu ds.$$

В результате приходим к тому, что

$$\delta S = \int ds \left(\frac{dp_\mu}{ds} - \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\nu \right) \delta x^\mu. \quad (3.42)$$

Таким образом, уравнение движения в ковариантной форме есть

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.43)$$

3-4.3 Тензор электромагнитного поля

Итак, уравнение движения (3.43) гласит, что импульс заряженной изменяется под действием электромагнитного поля, которое зашито в тензоре второго ранга $F^{\mu\nu}$. Этот тензор называется *тензором электромагнитного*

поля (*electromagnetic tensor*). Из его определения следует, что он антисимметричен по своим индексам,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (3.44)$$

Это означает, что он содержит всего 6 независимых компонент, а его диагональные элементы равны нулю, $F^{\mu\mu} = 0$. Выпишем явно матричную структуру тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \|F_{\mu\nu}\| &= \downarrow_{\mu} \begin{pmatrix} 0 & E^j \\ -E^i & -\epsilon_{ijk} B^k \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu \rightarrow i \\ \nu \rightarrow j \end{matrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E^x & E^y & E^z \\ \hline -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Величина \mathbf{E} ведёт себя как вектор, а \mathbf{B} — как псевдовектор (аксиальный вектор) в трёхмерном пространстве. Поле \mathbf{E} называется *электрическим полем*, а поле \mathbf{B} — *магнитным полем*. Эти названия будут оправданы ниже, когда мы запишем уравнение движения частицы (3.43) в трёхмерной форме, см. Пункт 3-4.4. Тензор электромагнитного поля можно кратко переписать в виде бивектора

$$\|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad (3.46)$$

см. определение (9.40).

Свяжем электрическое и магнитное поля непосредственно с 4-потенциалом. Для этого распишем определение тензора электромагнитного поля (3.43) для различных его компонент, см. (3.45):

$$F^{i0} = E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad (\mu = i, \nu = 0),$$

$$F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k = -\partial_i A^j + \partial_j A^i \quad (\mu = i, \nu = j).$$

Первое уравнение просто перепишем в векторном виде, воспользовавшись определением (3.34) для скалярного и векторного потенциалов, а во втором уравнении перед этим произведём свёртку с ϵ_{lij} . В результате получим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \varphi, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{B}^l = \epsilon_{lij} \partial_i A^j \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

3-4.4 Уравнения движения в трёхмерной форме

Рассмотрим пространственные компоненты уравнения движения частицы (3.43), положив $\mu = i$:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} (F^{i0} u^0 - F^{ik} u^k) = \frac{\gamma}{c} \left(eE^i + \frac{e}{c} \epsilon_{ikl} B^l v^k \right),$$

где мы воспользовались тем, что $ds = c dt/\gamma$. Таким образом, мы получили силу \mathbf{F} , действующую на частицу

со стороны электромагнитного поля, которая называется *силой Лоренца*:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3.48)$$

Выражение (3.48) отличается от нерелятивистского выражения тем, что в (3.48) производная по времени берётся от релятивистского импульса \mathbf{p} (3.7). Справа стоит уже известная из нерелятивистской электродинамики сумма сил со стороны электрического поля, $e\mathbf{E}$, и со стороны магнитного, $e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$.

Уравнение на временную компоненту (3.43) не яв-

ляется независимым, поскольку компоненты 4-импульса связаны ограничением (3.8). Тем не менее, оно обладает физическим смыслом: оно даёт мощность, передаваемую от поля к частице,

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.49)$$

где E_{kin} – кинетическая энергия (3.10). Энергию частице передаёт только электрическое поле, тогда как магнитное поле не совершает работы над зарядом. Полная энергия частицы (3.38) при этом сохраняется.

Глава 4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАРЯДАМИ

§4-1. Свойства электромагнитного поля

Итак, в §3-4 было получено, что взаимодействие электромагнитного поля с заряженной частицей определяется тензором электромагнитного поля (3.43)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля (3.34). Компоненты тензора электромагнитного поля приведены в (3.45), они представляют из себя совокупность компонент электрического и магнитного полей.

В этом параграфе мы установим основные свойства электромагнитного поля, следующие из его определения.

4-1.1 Калибровочная инвариантность

Теория электромагнитного поля отличается от моделей классической механики в том числе и тем, что формулировка уравнений движения поля происходит не в физически измеримых переменных – компонентах электромагнитного поля, – а в терминах 4-потенциала, непосредственно не измеряемого. Более того, каждому фиксированному распределению электромагнитного поля соответствует бесконечно много распределений 4-потенциала. Эти 4-потенциалы переходят друг в друга путём так называемого *калибровочного преобразования*.

Действительно, обратимся к исходному действию (3.35), в котором стоит скалярное произведение 4-потенциала на 4-ток. В силу уравнения непрерывности, т.е. закона сохранения заряда (2.40с), одна из компонент 4-тока является зависимой от 3-х остальных. Поэтому и одна из компонент 4-потенциала является с точки зрения информативности лишней.

Калибровочное преобразование 4-потенциала – это такое его изменение, в результате которого действие остаётся прежним при учёте уравнения непрерывности (2.40с). Калибровочное преобразование имеет вид

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad (4.1)$$

где f – произвольная функция координат и времени. В результате такой замены действие действительно не изменится, поскольку в результате интегрирования по частям его изменение δS_{int} приводится к виду

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \partial_\mu f = \frac{1}{c^2} \int d\Omega f \partial_\mu j^\mu = 0.$$

(Мы проинтегрировали по частям в предположении, что на бесконечности f убывает, что не ограничивает общности рассуждений). В том, что движение частицы не изменится при замене A^μ (4.1) можно убедиться и по-другому, посчитав при такой замене изменение тензора электромагнитного поля (3.43): это изменение равно нулю, поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Таким образом, и старое и новое A^μ соответствуют одним и тем же \mathbf{E} и \mathbf{B} . Про тот факт, что уравнения движения инвариантны по отношению к замене (4.1), говорят как о *калибровочной инвариантности*.

4-1.1.1 Калибровки частного вида

Не смотря на то, что в свете калибровочной инвариантности отдельные компоненты 4-потенциала не имеют самостоятельного физического смысла, по соображениям математического удобства часто работают в калибровках определённого вида.

Наиболее известной калибровкой является *калибровка Лоренца*, в которой

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.2)$$

Эта калибровка соответствует уравнению непрерывности для 4-тока (2.40с) и потому удобна для нахождения поля по заданному току. Условие калибровки Лоренца (4.2) имеет релятивистски инвариантный вид, поэтому если в какой-то системе координат оно выполнено, то оно выполнено во всех системах координат. Это условие калибровки не фиксирует единственным образом 4-потенциал: если функция f в (4.1) является гармонической функцией, то новый 4-потенциал также бездивергентен,

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{if } \square f = 0. \quad (4.3)$$

Используется также другая калибровка, называемая *кулоновой калибровкой* (*Coulomb gauge*), задаваемая условием

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (4.4)$$

Если используется эта калибровка, то уравнение на скалярный потенциал φ воспроизводит статическое уравнение Кулона на потенциал электрического поля. Кулонова калибровка релятивистски неинвариантна: если она

имеет место в одной системе координат, то в общем случае в другой системе координат условие (4.4) не будет выполнено.

4-1.2 Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля

Исследуем, как преобразуются компоненты электромагнитного поля при переходе из одной системы координат в другую. На этот вопрос относительно легко ответить в терминах 4-потенциала A^μ , потому что он как 4-вектор преобразуется по закону типа (2.36). Тем не менее, интересней ответить на вопрос о преобразовании непосредственно в терминах электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей, поскольку именно они определяют силу воздействия на частицу со стороны поля.

Поскольку электрическое и магнитное поля составляют вместе тензор электромагнитного поля, то надо исходить из закона преобразования тензора второго ранга:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda'^{\mu}_{\lambda} \Lambda'^{\nu}_{\sigma} F^{\lambda\sigma}. \quad (4.5)$$

В качестве преобразования выберем лоренцевский буст (2.21,2.23), что упростит вычисления, но не ограничит физической общности результата. В матричном виде уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$\|F'^{\mu\nu}\| = \hat{\Lambda}' \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{12}^T & \hat{f}_{22} \end{pmatrix} \hat{\Lambda}'^T,$$

где мы разбили матрицу тензора электромагнитного поля F на блоки 2x2 (их матричные элементы легко найти из (3.45)). Аналогичное разбиение матрицы преобразования $\hat{\Lambda}'$ приведено в (2.21,2.23), откуда в частности видно, что эта матрица симметричная, $\hat{\Lambda}'^T = \hat{\Lambda}'$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\hat{\lambda}\hat{f}_{11}\hat{\lambda} = \hat{f}_{11}$, поскольку $\hat{f}_{11}^T = -\hat{f}_{11}$. В результате получаем, что при преобразовании (4.5) матрицы тензора электромагнитного поля изменяется только недиагональный блочный элемент \hat{f}_{12} ,

$$\hat{f}'_{12} = \hat{\lambda}\hat{f}_{12}.$$

Воспользовавшись теперь явным видом тензора электромагнитного поля (3.45), заключаем, что продольные компоненты (по отношению к скорости взаимного движения систем отсчёта, т.е. в нашем случае x -компоненты) обоих полей не изменяются, а изменяются только поперечные компоненты (те y, z -компоненты). Для произвольного направления скорости относительного движения систем координат закон преобразования можно выписать в следующей форме:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}]), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}]).$$

где, напомним, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$ — вектор безразмерной скорости относительного движения систем координат, см. (2.23).

4-1.3 Первая пара уравнений Максвелла

Поскольку компоненты \mathbf{E} и \mathbf{B} являются производными от компонент 4-потенциала A^μ , то они не полностью независимы друг от друга и между ними есть связи.

Действительно, рассмотрим псевдо-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$, дуальный тензору электромагнитного поля $F^{\lambda\sigma}$, см. Пункт 9-3.1.1:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\lambda} A_{\sigma}. \quad (4.7)$$

Матричными компонентами $\tilde{F}^{\mu\nu}$ являются те же компоненты \mathbf{E} и \mathbf{B} , но поменянные местами с изменением знака у \mathbf{E} : в обозначениях (9.40)

$$\|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что 4-дивергенция тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}$ равна нулю,

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\sigma} = 0, & \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \partial_{\nu} F_{\mu\lambda} + \partial_{\lambda} F_{\nu\mu} + \partial_{\mu} F_{\lambda\nu} = 0, & (4.8) \end{aligned}$$

поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от его порядка. Уравнение (4.8) содержит в себе 4 скалярных уравнения, которые в трёхмерном виде могут быть переписаны как

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Эти уравнения составляют *первую пару уравнений Максвелла*.

Уравнения Максвелла (4.9) могут быть получены и непосредственно из трёхмерных определений (3.47).

4-1.4 Релятивистские инварианты электромагнитного поля

Из компонент электромагнитного поля можно составить комбинации, сохраняющие своё значение в любой системе координат. Эти комбинации называются *инвариантами электромагнитного поля*, этих инвариантов два:

$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2, \quad -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.10)$$

Обе этих величины являются скалярами с точки зрения тензорного исчисления, то есть являются релятивистскими инвариантами. Точнее, вторая величина является псевдо-скаляром, поскольку при операции пространственной инверсии она меняет знак.

Других инвариантов электромагнитного поля не существует; если пытаться составить релятивистски инвариантные величины более высокой степени по F , то будет получаться либо ноль (если степень нечётна), либо полиномиальная комбинация инвариантов (4.10).

§4-2. Уравнения движения электромагнитного поля

Для точечной частицы каноническими переменными (степенями свободы) при лагранжевом описании являются три пространственных координаты тела.

Поле описывается другим способом. К каждой точке пространства прикреплено некоторое фиксированное число степеней свободы, которые и являются в этом случае каноническими переменными в лагранжевом описании. Координаты же в этом случае служат для перечисления канонических переменных. В случае электромагнитного поля обобщёнными координатами являются компоненты 4-потенциала A^μ .

4-2.1 Действие свободного электромагнитного поля

Действие для свободного электромагнитного поля должно быть квадратично по производным 4-потенциала, обладать калибровочной инвариантностью (не изменяться при замене вида (4.1)) и быть инвариантным по отношению к любому преобразованию Лоренца, в том числе и к операции инверсии. Из Пункта 4-1.4 следует, что такой инвариант существует и единственен; таким образом, действие

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} F_{\nu\mu} = \frac{1}{c} \int d\Omega \mathcal{L}_f, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F^{\nu\mu} F_{\nu\mu}.$$

Коэффициент $1/c$ выбран из соотношения размерности, а численный коэффициент $1/(16\pi)$ добавлен для того, чтобы в итоге получились уравнения Максвелла с общепринятыми коэффициентами. Величину \mathcal{L}_f можно назвать объёмной плотностью лагранжиана. Используя (4.10) получаем, что лагранжиан свободного поля есть

$$L_f = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (4.12)$$

В этом параграфе мы изучаем движение поля при заданном движении электрических зарядов. Действие, которое описывает движения поля, складывается из двух частей – действия свободного электромагнитного поля (4.11) и части действия (3.35), отвечающего за взаимодействие поля и частиц:

$$S = S_f + S_{\text{int}} \quad (4.13)$$

Проведём вариацию действия S , положив $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ и предполагая вариацию поля δA_μ убывающей на бесконечности:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \left(\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu \right) \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Преобразуя первое слагаемое, мы сначала воспользовались тем, что выражения для действия представляется из себя квадратичную форму, потом антисимметричностью тензора электромагнитного поля (3.44), а затем произвели интегрирование по частям. В результате получаем, что уравнения движения поля являются

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.15)$$

4-2.2 Вторая пара уравнений Максвелла

Перепишем уравнения (4.15) в трёх-мерной форме. Для этого, как и при получении первой пары уравнений Максвелла, распишем определение тензора электромагнитного поля (3.43) для различных его компонент, см. (3.45):

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c} j^0, \quad (\mu = 0, \nu = i),$$

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= -\partial_0 E^i - \epsilon_{jik} \partial_j B^k = \frac{4\pi}{c} j^i, \\ &(\mu = i, \nu = 0, j). \end{aligned}$$

Остаётся перевести 4-ток в трёхмерные обозначения согласно (2.41). В результате в векторных обозначениях эти равенства переписываются в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.16) составляют *вторую пару уравнений Максвелла*. Напомним, что первая пара уравнений Максвелла выписана в (4.9).

4-2.3 Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы

Если движение зарядов полностью определено, то есть известен 4-ток $j^\mu(x)$, то вторая пара уравнений Максвелла (4.15) (или (4.16)) позволяет найти распределение поля. В этом пункте мы рассмотрим один из математически наиболее компактных способов нахождения поля по заданному движению зарядов.

Перепишем уравнение (4.15) в терминах 4-потенциала:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Результат решения поставленной нами задачи с точки зрения физических величин (то есть полей \mathbf{E} и \mathbf{B}) не зависит от того, какая именно калибровка будет выбрана. С другой стороны, выписанное уравнение приобретает более простой вид, если калибровка лоренцева, см. (4.2):

в таком случае второе слагаемое в левой части уравнения исчезает, и мы приходим к уравнению

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta, \quad (4.17)$$

где Δ – оператор Лапласа в трёх-мерном координатном пространстве. Оператор \square принято называть *оператором д'Аламбера*.

Таким образом, в результате использования калибровки Лоренца вторая пара уравнений Максвелла, записанная в терминах 4-потенциала, распадается на 4 независимых уравнения для каждой компоненты 4-потенциала. При каждом фиксированном μ уравнение (4.17) является *неоднородным волновым уравнением* (если соответствующая компонента тока равна нулю, то такое уравнение называется просто *волновым уравнением*).

4-2.3.1 Функция Грина

Решение неоднородного волнового уравнения удобно записывать через функцию Грина волнового уравнения,

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}, \quad (4.18)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\square G(t, \mathbf{r}) = 4\pi \delta(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 4\pi c \delta^{(4)}(x),$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Свойства функции Грина подробно обсуждаются в Пункте 5-1.1. Функция Грина связывает вклад в сигнал в точке \mathbf{r} в момент времени $t > 0$ от заряда, который находился в начале координат в нулевой момент времени. Отметим, что функций Грина, вообще говоря, существует бесконечно много. Мы выбрали вполне определённую – *запаздывающую функцию Грина*, руководствуясь принципом причинности: реакция поля на источник должна наступать не ранее появления этого источника.

Выражение (4.18) можно интерпретировать следующим образом: если в начале координат в нулевой момент времени находился покоящийся источник единичной амплитуды, то в результате от этого источника начнёт распространяться сигнал со световой скоростью в форме сферической волны, так что на расстоянии r от него он будет зафиксирован в момент времени $t = r/c$.

Функцию Грина можно записать также и в ковариантном виде:

$$G(x) = 2c \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu), \quad (4.19)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, а θ -функция равна единице при положительном аргументе и нулю при отрицательном его значении. Принцип причинности гарантируется как раз присутствием этой функции в качестве множителя.

4-2.3.2 Запаздывающие потенциалы

Используем результат Пункта 4-2.3.1: 4-потенциал в калибровке Лоренца равен

$$\begin{aligned} A^\mu(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{c^2} \int d\Omega_z G(x - z) j^\mu(z) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z dt_r G(t - t_r, \mathbf{r} - \mathbf{z}) j^\mu(t_r, \mathbf{z}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z \frac{j^\mu(t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c, \mathbf{z})}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где 4-вектора $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, $\|z^\mu\| = \{ct_r, \mathbf{z}\}$, а элемент 4-объёма $d\Omega_z = c dt_r d^3z$. Первое и второе выражения для 4-потенциала A^μ представляет из себя общее выражение, следующее из уравнения на 4-потенциал (4.17) и определения функции Грина G , см. Пункт 5-1.1.

Последнее выражение для 4-потенциала A^μ получено при использовании конкретного вида функции Грина (4.18). Решение волнового уравнения, записанное в этом виде, называется *запаздывающими потенциалами*. Смысл этого выражения следующий: сигнал в точку \mathbf{r} из точки \mathbf{z} приходит за время $|\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$, необходимое пройти сигналу со световой скоростью. Таким образом, чтобы понять, каково воздействие происходящего в точке \mathbf{z} на точку \mathbf{r} в момент времени t , надо узнать, что было в точке \mathbf{z} , но в более ранний момент времени $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$. Сила воздействия падает обратно пропорционально расстоянию между точками, как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{z}|$, что соответствует частному случаю – закону Кулона.

В Пункте 6-1.1 продемонстрировано, как из общего выражения для запаздывающих потенциалов (4.20) выводится закон Кулона для распределения электрического поля статических зарядов. В Пункте 6-2.1 получен закон Био-Савара-Лапласа для распределения магнитного поля, индуцированного постоянными токами.

§4-3. Тензор энергии-импульса

В §3-3 было показано, что законы сохранения энергии и импульса полной системы можно записать в виде локальных законов сохранения. Каждый локальный закон сохранения представляет из себя равенство нулю 4-дивергенции некоторого 4-столбца, нулевая компонента которого является объёмной плотностью сохраняющейся величины, а пространственные – плотностью потока этой величины. В случае энергии и импульса соответствующие столбцы образуют тензор второго ранга – тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$.

В этом параграфе мы обобщим результаты, полученные в §3-3, на случай взаимодействующей системы заряженных массивных частиц и электромагнитного поля.

4-3.1 Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса

Покажем, как в общем случае какой-либо полевой теории строить сохраняющиеся величины, вытекающие из симметрии теории.

Пусть у поля есть некоторое число степеней свободы N , которые являются каноническими переменными в лагранжевом описании. Мы предполагаем, что нулевой координатой (первой по счёту) является временная координата, а пространство-время является d -мерным пространством. Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi_a, \phi_{a,\mu}), \quad (4.21a)$$

где \mathcal{L} – d -мерная плотность лагранжиана, а индекс $a = 1, \dots, N$. Поиск экстремум действия приводит к уравнениям движения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0. \quad (4.21b)$$

Покажем, что из того факта, что лагранжиан \mathcal{L} в (4.21a) не зависит явно от координат (а только через поля ϕ_a) следует сохранение $4x$ величин, которые в специальной теории относительности следует назвать 4-импульсом. Мы будем действовать в рамках обобщения схемы Пункта 1-3.1.1 для системы с одной степенью свободы.

Произведём в выражении для действия (4.21a) слабо-нелинейную замену координат: пусть новая система координат x'^μ связана со старой x^μ преобразованием

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (4.22)$$

При такой замене линеаризованные по ξ вариации ин-

тересных для нас величин равны:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= (\delta_\mu^\lambda + \xi_{,\mu}^\lambda) \partial'_\mu, \\ d^d x &= (1 - \xi_{,\lambda}^\lambda) d^d x', \\ \phi_a(x) &= \phi_a(x') - \xi^\lambda \phi_{a,\lambda}, \\ \phi_{a,\mu}(x) &= \phi_{a,\mu}(x') - \xi^\lambda \phi_{a,\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Поскольку по вариации всегда будет производиться линеаризация, в последних, поправочных, слагаемых в (4.23) аргументом можно считать x а не x' . Эти поправочные слагаемые должны пониматься как вариации соответствующих величин. Действие (4.21a) не изменяется при любой замене координат, в том числе и при замене (4.22). Линеаризуем (нулевую) вариацию δS по ξ используя (4.23):

$$\delta S = - \int \left(\mathcal{L} \xi_{,\lambda}^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \phi_{a,\lambda} \xi^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \xi^\lambda \frac{\partial \phi_{a,\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.24)$$

Проинтегрируем последнее слагаемое по частям относительно производной ∂_μ . Затем положим, что конфигурация полей соответствует истинной траектории системы, так что возможно воспользоваться уравнениями движения (4.21b). В результате придём к тому, что

$$\delta S = \int \left(-\mathcal{L} \delta_\lambda^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \phi_{a,\lambda} \right) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}.$$

Теперь ещё раз проинтегрируем это уравнение по частям относительно ∂_ν ,

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d^d x \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \phi_{a,\nu} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \right) \xi^\mu = \\ &= - \int d^d x \partial_\nu T_\mu^\nu \xi^\mu = \int d^d x T_\mu^\nu \partial_\nu \xi^\mu = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

и приравняем коэффициент при ξ^λ нулю (поскольку $\delta S = 0$).

Итогом наших рассуждений являются уравнения

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (4.26a)$$

которые верны, если выполнены уравнения движения (4.21b). Величина

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (4.26b)$$

называется тензором энергии-импульса. Уравнения (4.26a) означают, что интегральные величины

$$P_\mu = \int dx^1 \dots dx^{d-1} T_\mu^0 \quad (4.26c)$$

сохраняются во времени.

Наши рассуждения останутся в силе, если вместо полей ϕ_a мы выберем какие-либо их нелинейные комбинации. Важно только, чтобы якобиан перехода от старых полей к новым был не равен нулю. Поэтому определение (4.26b) можно переписать через любые другие независимые комбинации полей. Пусть Φ_a , $a = 1, \dots, N$ — любые N независимых функций N величин ϕ_a . Тогда верно равенство

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\nu}} \Phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}. \quad (4.26d)$$

4-3.1.1 Неоднозначность задания тензора энергии-импульса

Законы сохранения энергии и импульса останутся в силе, если к тензору энергии-импульса добавить величину, не изменяющую нулевую 4-дивергенцию (4.30). Действительно, замена

$$T_\mu^\nu \rightarrow T_\mu^\nu + \partial_\lambda \psi_\mu^{\nu\lambda}, \quad \psi_\mu^{\nu\lambda} = -\psi_\mu^{\lambda\nu} \quad (4.27)$$

при произвольном $\psi_\mu^{\nu\lambda}$ не нарушает (4.26a) ввиду наложенной антисимметричности $\psi_\mu^{\nu\lambda}$ по верхним двум индексам. Полный интеграл от величин T_μ^ν по-прежнему представляет из себя полный 4-импульс P_ν системы:

$$\int d^3\mathbf{r} (T_\mu^0 + \partial_i \psi_\mu^{i0}) = \int d^3\mathbf{r} T_\mu^0 = cP_\mu.$$

Как будет показано ниже, симметричный тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} T_\lambda^\nu,$$

позволяет определить через него момент импульса. Покажем, что не существует нетривиального преобразования (4.27), переводящего симметричный тензор энергии-импульса снова в симметричный, но отличный от исходного. Иными словами, требование симметричности тензора энергии-импульса полностью фиксирует этот тензор. Доказательство этого утверждения следует из того, что тензор третьего ранга

$$\psi^{\mu\nu\lambda} = g^{\mu\sigma} \psi_\sigma^{\nu\lambda}.$$

не может быть одновременно симметричным по первой паре индексов $\{\mu, \nu\}$ и антисимметричен по последней паре $\{\nu, \lambda\}$. Действительно, если передвинуть индекс λ на первую позицию оставив ν на своём месте пользуясь заявленными симметриями, то получившийся тензор должен быть анти-симметричен по первой паре индексов, тогда как исходно он был по ним симметричен.

4-3.2 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим общую схему Пункта 4-3.1 к электромагнитному полю. Эта схема такова, что при проведении вариации следует считать, что любая векторная или тензорная каноническая переменная (например, 4-потенциал

A_μ) является совокупностью 4-х скалярных величин. Таким образом, эта схема вариации игнорирует тензорную структуру полей. Следствием является, в частности, несимметричность получаемого тензора энергии-импульса.

Начнём с части действия (4.11), описывающей электромагнитное поле само по себе. Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial A_{\lambda,\nu}} = -\frac{\partial (A_{\sigma,\tau} A^{\sigma,\tau} - A_{\sigma,\tau} A^{\tau,\sigma})}{8\pi c \partial A_{\lambda,\nu}} = -\frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda},$$

то, согласно процедуре (4.26b), вклад от этой части лагранжиана равен

$$\begin{aligned} \text{field: } T_\mu^\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial A_{\lambda,\nu}} A_{\lambda,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_f = \\ &= -\frac{F^{\nu\lambda} A_{\lambda,\mu}}{4\pi c} + \frac{F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}}{16\pi c} \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (4.28a)$$

Эта часть тензора энергии-импульса не симметрична. Для того, чтобы ниже полный тензор привести к симметричному виду, сделаем здесь следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \text{field: } T_\mu^\nu &= -\frac{F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda}}{4\pi c} + \frac{F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}}{16\pi c} \delta_\mu^\nu - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} j^\nu A_\mu + \frac{\partial_\lambda (F^{\lambda\nu} A_\mu)}{4\pi c}. \end{aligned} \quad (4.28b)$$

Предпоследнее слагаемое получено с учётом второй пары уравнений Максвелла (4.15). Последнее слагаемое вычеркнуто, поскольку оно имеет вид преобразования (4.27), которое мы и производим над T_μ^ν ради достижения его симметричности.

Рассмотрение вклада, зависящего от траекторий точечных заряженных частиц надо произвести отдельно, поскольку формализм Пункта 4-3.1 был развит для полевой задачи. Согласно (4.22), вариация траектории частиц δx_a^μ должна быть равной $-\xi^\mu(x_a)$. В этом случае

$$\begin{aligned} \text{as: } dx^\mu(x) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu(x') \\ dx^\mu(x) &= dx^\mu(x') - d\xi^\mu = \\ &= dx'^\mu - \partial_\nu \xi^\mu dx'^\nu - d\xi^\mu. \end{aligned} \quad (4.28c)$$

Таким образом, вариация δdx^μ есть последние два слагаемых в (4.28c). Отметим, что в рамках развиваемого метода варьирования оказывается необходимым учесть векторную структуру приращения координаты dx^μ при вычислении его вариации (в отличие от любого другого тензора, например, A_μ). Если учесть только последнее слагаемое $-d\xi^\mu$ в (4.28c), то при вариации действия мы получим (3.41), что есть ноль для истинных траекторий частиц. Поэтому остаётся

$$\begin{aligned} \delta S &= mc \int u^\nu u_\mu \partial_\nu \xi^\mu ds + \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\nu \partial_\nu \xi^\mu = \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \partial_\nu \left(j_m^\nu u_\mu + \frac{1}{c} j^\nu A_\mu \right) \xi^\mu. \end{aligned} \quad (4.28d)$$

Согласно определению (4.25),

$$\text{particles: } T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{c} j_{\text{m}}^{\nu} u_{\mu} + \frac{1}{c^2} j^{\nu} A_{\mu}. \quad (4.28e)$$

В результате сложение (4.28b) и (4.28e) получаем, что вариация полного действия всей системы равна

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \xi_{\mu} \partial_{\nu} T^{\nu\mu}, \quad T^{\mu\nu} = T^{(m)\mu\nu} + T^{(f)\mu\nu}, \quad (4.29)$$

что формально есть сумма отдельно тензора энергии-импульса массивных частиц и электромагнитного поля в пустоте. Тензор энергии-импульса массивных частиц $T^{(m)\mu\nu}$ был определён в §3-3, см. (3.17,3.24), и есть первое слагаемое в (4.28e). Согласно (4.28b), тензор энергии-импульса электромагнитного поля в пустоте равен

$$T^{(f)\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}}{16\pi} - \frac{F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda}}{4\pi}, \quad (4.30)$$

Это выражение симметрично по индексам μ, ν , поэтому и весь полученный тензор энергии-импульса симметричен,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (4.31)$$

Отметим, тогда как в действии присутствует член, ответственный за взаимодействие этих подсистем, $T^{\mu\nu}$ формально остался бы таким же, если бы эти две подсистемы стали невзаимодействующими. Это свойство является частным свойством классической релятивистской электродинамики, в квантовой теории оно исчезает.

4-3.3 Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Напомним, что общую структуру тензора энергии-импульса мы обсуждали в Пункте 3-3.1, а сама она приведена в (3.19). В §3-3 мы исследовали матричные элементы части тензора энергии-импульса $T^{(m)\mu\nu}$, связан-

ного с массивными частицами, см. (3.24). Поэтому сейчас нам остаётся исследовать часть $T^{(f)\mu\nu}$, связанную с электромагнитным полем.

Из (4.30) вытекает, что объёмная плотность электромагнитной энергии

$$T^{(f)00} = \mathcal{E} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (4.32a)$$

Плотность потока энергии \mathbf{S} равна

$$T^{(f)i0} = S^i/c, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (4.32b)$$

Выражение для потока энергии (4.32b) называют *вектором Умова-Пойнтинга (Poynting-vector)*. Из симметрии тензора энергии-импульса следует (см. рассуждения Пункта 3-3.1), что этому же вектору равна объёмная плотность импульса, $\vec{p} = \mathbf{S}/c^2$, связанного с электромагнитным полем.

Тензор напряжений равен

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^k + B^i B^k - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta^{ik} \right) \quad (4.32c)$$

Симметричный вид тензора энергии-импульса удобен тем, что он позволяет интерпретировать матричные элементы максвелловского тензора напряжений $\hat{\sigma}$ как силы, приложенные к сторонам бесконечно малого кубического элемента объёма пространства. Только в случае симметрии тензора энергии-импульса такой бесконечно малый объём не будет приобретать бесконечно большого углового ускорения. Математически это означает возможность определения тензора момента импульса через тензор энергии-импульса, что проделано в § 4-4.

След от электромагнитной части энергии-импульса оказывается равным нулю, см. (4.30),

$$T^{(f)\mu}_{\mu} = 0. \quad (4.32d)$$

Отметим, что это соответствует свойству тензора энергии-импульса безмассовых (или пределу ультра релятивистских) частиц (3.27a).

§4-4. Момент импульса

Момент импульса (*angular momentum*) в классической механике для одной точечной частицы определяется как векторное произведение, $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Его сохранение выражает тот факт, что законы движения изотропны.

Для того, чтобы расширить определение момента импульса на 4-х мерное пространство-время, сделаем несколько наблюдений. Во-первых, аксиальному вектору момента импульса \mathbf{L} соответствует тензор второго

ранга L^{ik} . Таким образом, моменту импульса должен соответствовать тензор второго ранга $L^{\mu\nu}$. Во-вторых, как мы установили в случае с полным зарядом Q и полным 4-импульсом P^{μ} , 4-токи этих величин являются тензорами рангов на один больше, то есть ранга 1 и 2 соответственно. Поэтому в случае с полным моментом импульса $L^{\mu\nu}$ его поток является тензором ранга 3. Наконец, в-третьих, тензор момента импульса должен быть антисимметричным, поскольку в трёхмерном пространстве

имеет место аналогичное свойство $L^{ik} = -L^{ki}$.

Покажем, что определением тензора момента импульса является

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} S^{0\mu\nu},$$

$$L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu}, \quad S^{\lambda\mu\nu} = (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}), \quad (4.33)$$

где $S^{\lambda\mu\nu}$ – поток момента импульса; ниже мы увидим, что для определения момента импульса важно, что тензор энергии-импульса симметричен. Связь между потоком момента импульса $S^{\lambda\mu\nu}$ и его интегральным значением $L^{\mu\nu}$ аналогична связи (3.21) между потоком импульса $T^{\mu\nu}$ и его полным значением P^μ . Поток момента импульса по своей природе определён неоднозначно, поскольку его определение зависит от выбора начала системы координат.

Используя равенство нулю 4-дивергенции тензора энергии-импульса (3.18) и его симметричность (3.17), можно убедиться, что 4-дивергенция потока момента импульса равна нулю,

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Как из (3.18) следует закон сохранения импульса (3.21), так из этого равенства следует закон сохранения момента импульса $L^{\mu\nu}$ (4.33). Отметим, что без свойства симметричности тензора энергии-импульса определение тензора момента импульса теряет свой смысл. Таким образом, хотя тензор энергии-импульса можно записать и в несимметричной форме, см. Пункт 4-3.1.1, но симметричная форма имеет то преимущество, что она даёт возможность определить момент импульса.

Поскольку тензор четырёх-мерного момента импульса антисимметричен (является би-вектором), то его компоненты образуют два трёхмерных вектора, один полярный, и один аксиальный,

$$\|L^{\mu\nu}\| = \left(\frac{E}{c} (\mathbf{V}t - \bar{\mathbf{R}}), \mathbf{L} \right) \quad (4.34)$$

см. определения Пункта 9-3.1 для антисимметричного тензора второго ранга. Вектор \mathbf{L} есть ранее введённый трёхмерный вектор момента импульса,

$$L^{ik} = \int d^3\mathbf{r} (x^i p^k - x^k p^i) = \epsilon_{ikm} L^m, \quad (4.35)$$

где \vec{p} – пространственная плотность 3-х мерного импульса. Пространственно-временными компонентами 4-тензора момента импульса являются

$$L^{i0} = t \int d^3\mathbf{r} p^i - \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} x^i \mathcal{E} \equiv \frac{E}{c} (V^i t - \bar{R}^i),$$

где \mathcal{E} – пространственная плотность энергии. Мы определили скорость \mathbf{V} движения центра масс и $\bar{\mathbf{R}}$ – текущее положение центра масс:

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{E}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{E} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \mathcal{E}, \quad (4.36)$$

где E и \mathbf{P} – полные энергия и импульс системы, определённые согласно (3.21). Определение скорости центра масс \mathbf{V} соответствует частному случаю одной частицы (3.7). Положение центра масс $\bar{\mathbf{R}}$ определяется через плотность энергии, что можно интерпретировать как следствие эквивалентности массы и энергии, см. например (3.7). Поскольку сохраняются во времени в том числе компоненты L^{i0} четырёх-мерного момента импульса, то центр масс движется со скоростью \mathbf{V} ,

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (4.37)$$

4-4.1 Внутренний орбитальный момент и собственный спин частиц

Компоненты момента импульса содержат неоднозначность, связанную с выбором начала координат: если начало координат сместить на вектор $-R'^\mu = -(ct', \mathbf{R}')$, то компоненты момента импульса изменятся согласно правилу

$$L^{\mu\nu} \rightarrow L^{\mu\nu} + R'^\mu P^\nu - R'^\nu P^\mu. \quad (4.38)$$

Возможно, однако, найти линейную комбинацию этих компонент, которая оставалась бы инвариантной при сдвиге начал координат. Такой линейной комбинацией является *псевдо-4-вектор Паули-Любанского (Pauli-Lubanski pseudovector)*

$$S_\mu = \epsilon_{\mu\rho\sigma\zeta} u^\rho L^{\sigma\zeta}, \quad u^\mu = \frac{P^\mu}{\sqrt{P^\sigma P_\sigma}}; \quad S_\mu u^\mu = 0. \quad (4.39)$$

Преобразование (4.38) не изменяет 4-вектор S_μ , поскольку добавка в (4.38) приводит к появлению вклада в $u^\rho L^{\sigma\zeta}$ в (4.39), квадратичного по импульсу P^μ , и потому дающего ноль при его свёртке с символом Леви-Чивиты. Таким образом, S^μ является полноценным релятивистским 4-вектором, в том числе обладая и инвариантностью по отношению к трансляциям. Поэтому этот вектор является характеристикой исключительно вращения системы. Вычислим его в системе координат, в которой центр тяжести системы покоится, т.е. $\mathbf{V} = 0$ в (4.36):

$$\mathbf{S} = \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times \vec{p}] = \mathbf{L}, \quad S^0 = 0, \quad \text{if} \quad \int d^3\mathbf{r} \vec{p} \equiv \mathbf{P} = 0. \quad (4.40)$$

Псевдо-вектор Паули-Любанского можно ввести только для массивных частиц, поскольку для безмассовых частиц невозможно определить 4-скорость.

4-4.1.1 Спин частиц

Элементарные частицы обладают внутренним моментом количества движения, называемом спином. В системе покоя частицы K' спин частицы $\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s}$, где \hbar – постоянная Планка. Из принципов квантовой механики

следует, что безразмерный вектор спина \mathbf{s} может принимать только полуцелые значения. Кроме того, с такой частицей связан также магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, который сонаправлен спину частицы,

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_0\mathbf{s}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad (4.41)$$

где m — масса частицы, e — её заряд, μ_0 — квантовая единица магнитного диполя для данного типа частиц. Безразмерная константа g называется *g-фактором*. Его значение зависит от типа частиц; отметим, что в рамках некантовой релятивистской механики g -фактор равен единице.

Спин частицы принято характеризовать псевдо-4-вектором a^μ , пропорциональным вектору Паули-Любанского (4.39): в сопровождающей системе отсчёта

$$K' : \quad \|a^\mu\| = (0, \boldsymbol{\mu}), \quad (4.42)$$

где u^μ — 4-скорость частицы. Напомним релятивистские равенства

$$a^\mu u_\mu = 0, \quad a^\mu a_\mu = -\boldsymbol{\mu}^2. \quad (4.43)$$

4-4.2 Уравнение движения спина в однородном поле

Обзорная работа по теме: Тернов и Бордовицын, 1980.

Рассмотрим тело, центр масс которого покоится, и которое может вращаться в пространстве и имеет магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, жёстко связанный с его пространственной ориентацией. Тогда уравнение движения тела может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad (4.44)$$

см. (11.2). Отметим, что 3-х мерный вектор механического момента не зависит от точки отсчёта системы координат, поскольку скорость центра масс равна нулю. Правая же часть этого уравнения по определению от выбора точки отсчёта не зависит.

Если магнитное поле неоднородно, то на тело действует сила, равная

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (4.45)$$

см. (11.1). Если тело имеет полный заряд, отличный от нуля, то полная сила, действующая на тело, равна сумме силы Лоренца (3.43) и силы (4.45). Напомним, что уравнения (4.44, 4.45) верны только в нерелятивистском пределе.

Рассмотрим движение заряженной релятивистской частицы, обладающей спином, в однородном электромагнитном поле. В однородном поле вклад в силу (4.45), действующую на частицу, равен нулю, и поэтому её пространственное движение определяется исключительно силой Лоренца (3.43). При описании движения спина

мы стартуем не с лагранжиана, как это было для пространственного движения частиц и уравнений движения электромагнитного поля. Здесь мы исходим из того, что соответствующий лагранжиан нам не известен. Поэтому нам остаётся другой путь: обобщить уравнение движения спина (4.44) на релятивистский случай.

Будем работать в терминах вектора a^μ (4.42). Из вида уравнения прецессии спина (4.44) в нерелятивистском пределе следует, что производная a^μ вдоль мировой линии линейна по этому вектору и по электрическому полю, и может зависеть ещё только от вектора 4-скорости частицы. Поэтому общим видом уравнения на спин является

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (C_1 F^{\mu\nu} a_\nu + C_2 u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu),$$

где $C_{1,2}$ — пока неизвестные безразмерные константы. Для определения первой константы перейдём в сопровождающую систему координат, где $\mathbf{v} = 0$ и потому вклад от C_2 в производную пространственных компонент a^i равен нулю. В силу (4.41)

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{g\mu_0}{\hbar} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] \quad \Rightarrow \quad C_1 = g.$$

Для определения константы C_2 продифференцируем первое равенство (4.43) вдоль мировой линии, воспользовавшись уравнением движения спина и уравнением движения самой заряженной бесспиновой частицы (3.43):

$$0 = \frac{d(a^\mu u_\mu)}{ds} = \frac{e}{2mc} (g - 2 + C_2) F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$$

В итоге получаем *уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди*

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (g F^{\mu\nu} a_\nu - (g - 2) u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu), \quad \frac{\mu_0}{\hbar c} = \frac{e}{2mc}. \quad (4.46)$$

Уравнение (4.46) непосредственно применимо для заряженных частиц, таких как электрон и протон. У нейтрона полный заряд равен нулю, но он обладает спином и ненулевым магнитным моментом. Уравнение движения его магнитного момента может быть получено из уравнения (4.46) предельным переходом $g\mu_0 = \mu_n = \text{const}$, $g \rightarrow \infty$:

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_n}{\hbar c} (F^{\mu\nu} a_\nu - u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu). \quad (4.47)$$

4-4.2.1 Магнитные моменты некоторых частиц

Приведём численные значения магнитных моментов элементарных и некоторых других частиц. Эти значения не могут быть теоретически обоснованы в рамках некантовой релятивистской электродинамики, поэтому здесь их следует воспринимать как справочные.

	спин, s	μ_0	магнитный момент, $sg\mu_0$
электрон	1/2	$-\mu_B$	$\mu_e = -1.00116 \cdot \mu_B$
нейтрон	1/2	—	$\mu_n = -1.91304 \cdot \mu_N$
протон	1/2	μ_N	$\mu_p = 2.79284 \cdot \mu_N$
дейтон	1	$\mu_N/2$	$\mu_d = 0.85735 \cdot \mu_N$

Дейтон есть ядро атома дейтерия, т.е. эта частица состоит из одного протона и одного нейтрона. Знак в правой колонке означает, сонаправлены или противоположны спин и магнитный момент частицы, а в третьей колонке μ_0 определено в (4.46). *Магнетон Бора* μ_B и *ядерный магнетон* μ_N определяются равенствами

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} = 9.274 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс},$$

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} = 5.050 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс},$$

m_e – масса электрона, m_p – масса протона, а e – элементарный заряд.

4-4.2.2 Аномальный магнитный момент

Для заряженных частиц со спином $s = 1/2$ выделяют нормальный и аномальный магнитный момент. Нормальный магнитный момент соответствует значению $g = 2$, разность $g - 2$ даёт вклад в аномальный магнитный момент. Например, для электрона аномальный магнитный момент μ'_e равен

$$\mu'_e \equiv \frac{\mu_B}{2}(g - 2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \mu_B \approx 0.00116 \mu_B, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (4.48)$$

§4-5. Электромагнитные волны

Рассмотрим динамику электромагнитного поля в пустоте, то есть в области пространства, где нет зарядов. В этой области динамика поля в терминах 4-потенциала удовлетворяющего условию калибровки Лоренца описывается однородным волновым уравнением, см. (4.17). Этому же уравнению подчиняется и само электромагнитное поле, поскольку поля \mathbf{E} и \mathbf{B} линейно связаны с 4-потенциалом A^μ , см. (3.47). Волновое уравнение можно получить также и из уравнений Максвелла (4.9,4.16), запишем его для электрического поля:

$$\square \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (4.50)$$

В силу бездивергентности электрического поля в пустоте, у него есть только две независимые компоненты. Волновое уравнение справедливо и для магнитного поля \mathbf{B} с тем же условием $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

где малая безразмерная константа $\alpha \approx 1/137$ называется *постоянной тонкой структуры*.

Протон, нейтрон и тем более дейтон являются составными частицами. В связи с этим их аномальный магнитный момент имеет относительную величину порядка единицы.

Если у частицы нет аномального магнитного момента (или он по крайней мере мал, как у электрона), то динамика её спина приобретает дополнительные особенности, поскольку влияние второго слагаемого в правой части уравнения (4.46) на динамику спина становится малым. А именно, пусть частица движется в постоянном магнитном поле. Тогда, если $g = 2$, то угол между вектором скорости \mathbf{v} в лабораторной системе координат и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ в сопровождающей системе координат K' остаётся постоянным по мере движения частицы.

Действительно, в случае $g = 2$ уравнения на 4-импульс p^μ (3.43) и на 4-вектор собственного момента a^μ (4.46) совпадают. Если есть только магнитное поле, то временная компонента этих 4-векторов не изменяется, а пространственные компоненты прецессируют вокруг направления магнитного поля с одной и той же угловой частотой,

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \frac{e}{mc} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \times \mathbf{B} \right], \quad (4.49)$$

причём $\gamma = \text{const}$ в процессе движения. Таким образом, амплитуды векторов \mathbf{v} и \mathbf{a} и угол между ними не изменяются во времени, а значит и $\boldsymbol{\mu}$ вращается вместе с этими векторами в силу связи (4.42).

4-5.1 Плоская электромагнитная волна

Предположим, что все компоненты поля зависят только от одной координаты, пусть это будет координата Oz . Тогда волновое уравнение упростится до вида

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_z^2 \right) \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_z \right) \mathbf{E} = 0,$$

$$\partial_z \mathbf{E}^z = 0. \quad (4.51)$$

Для того, чтобы волновое уравнение удовлетворялось, электрическое поле должно зависеть либо только от комбинации $z - ct$, либо только от комбинации $z + ct$. Таким образом, поле \mathbf{E} может быть представлено в виде суммы волн, бегущих со скоростью c в положительном и отрицательном направлении оси Oz ,

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E}_+(z - ct) + \mathbf{E}_-(z + ct). \quad (4.52)$$

Например, рассмотрим вариант, когда есть только вклад \mathbf{E}_+ от бегущей в положительном направлении волны (будем опускать индекс '+' для краткости). В силу линейности уравнений Максвелла, магнитное поле \mathbf{B} волны зависит от времени и координат через эту же комбинацию $z - ct$. Бездивергентность обоих полей означает, что их z -компоненты равны нулю. Таким образом, электромагнитная волна является полностью поперечной. Из уравнений Максвелла следует, что в каждой точке электрическое и магнитное поля плоской волны связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}], \quad (4.53)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, указывающий направление распространения волны (при нашем выборе системы координат z -направление).

Вычислим тензор энергии-импульса, связанный с бегущей волной. Из (4.32а, 4.32б), а также (4.53) следует, что вектор Пойнтинга имеет ненулевой только z -компоненту, которая оказывается равной $c\varepsilon$, где ε – объёмная плотность энергии. Тензор напряжений (4.32с) имеет ранг равный единице, имея ненулевым только σ^{zz} -элемент. Собирая всё вместе, имеем

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}, \quad \mathbf{S} = c\varepsilon\mathbf{n}, \quad \sigma^{ik} = -\varepsilon n^i n^k. \quad (4.54)$$

Полный тензор энергии-импульса плоской монохроматической волны может быть записан также в виде

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu, \quad \|\mathbf{n}^\mu\| = \{1, \mathbf{n}\}. \quad (4.55)$$

Подчеркнём, что n^μ не является 4-вектором.

4-5.2 Плоская монохроматическая электромагнитная волна

Плоская волна называется монохроматической, если она зависит от координаты и времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}), \quad (4.56)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-ik_\mu x^\mu),$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ – комплексное электрическое поле, \mathbf{E}_0 – комплексная амплитуда электрического поля волны, ω – циклическая (угловая) частота волны (*angular frequency*), \mathbf{k} – волновой вектор (*wavenumber*), Re – операция взятия действительной части, а $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Поскольку уравнения Максвелла линейны, то их возможно записывать в терминах комплексных полей, а уже после вычислений переходить к физическим действительным полям. Мы также ввели четырёх-мерный волновой вектор

$$\|k^\mu\| = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad k^\mu k_\mu = \omega^2 c^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (4.57)$$

Последние два равенства равносильны и следуют из волнового уравнения. Они означают, что электромагнитная волна распространяется со скоростью света. Для волн связь $\omega = \omega(\mathbf{k})$ в общем случае называют *законом дисперсии*, в нашем случае электромагнитных волн в пустоте закон дисперсии есть $\omega = c|\mathbf{k}|$.

Покажем, что k^μ действительно является 4-вектором. Преобразование Лоренца линейно и вещественно, поэтому преобразование Лоренца электромагнитного поля (4.6) можно проводить с комплексным полем $\tilde{\mathbf{E}}$, введённым в (4.56), а уже потом выделять действительную часть. При таком подходе ясно, что *фазовый множитель* $\exp(-ik^\mu x_\mu)$ в электрическом поле является релятивистским инвариантом (величину $-k^\mu x_\mu$ называют *фазой волны*). Поскольку x^μ является 4-вектором, то и совокупность 4-х параметров k^μ также должна являться 4-вектором.

Период колебаний монохроматической волны в пространстве λ называется *длиной волны*, период колебаний по времени равен $1/\nu$:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}, \quad (4.58)$$

где ν есть *частота волны*. Видимый свет является электромагнитной волной с определённым диапазоном длин волн, от 390 нм (фиолетовый) до 770 нм (красный). Таким образом, свет распространяется с ранее введённой скоростью c , которую потому и называют скоростью света.

Для плоской монохроматической электромагнитной волны тензор энергии-импульса (4.55), усреднённый по периоду колебаний волны, равен

$$T^{\mu\nu} = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\pi k^2} k^\mu k^\nu. \quad (4.59)$$

В (4.59) коэффициент пропорциональности между тензорами $k^\mu k^\nu$ и $T^{\mu\nu}$ является 4-скаляром. Таким образом, отношение амплитуды волны к её частоте $|\mathbf{E}_0|/\omega$ является релятивистским инвариантом.

4-5.2.1 Число поляризаций плоской монохроматической волны

Если в плоской электромагнитной волне электрическое поле имеет всюду одно и то же направление, то такая волна называется *линейно поляризованной*.

Посмотрим, сколько существует линейно независимых плоских электромагнитных волн с фиксированным волновым вектором \mathbf{k} . Из связи электрического и магнитного полей волны следует, что оба поля ортогональны направлению распространения волны $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. В результате остаётся только два линейно независимых направления для электрического поля \mathbf{E} . Таким образом, для электромагнитной волны существуют *две независимые поляризации*.

4-5.2.2 Круговые поляризации

Число поляризаций можно посчитать и рассуждая в терминах 4-потенциала A_μ , что может представлять некоторые преимущества. Если мы имеем дело с плоской волной, то вектор-потенциал имеет вид

$$A_\mu = 2 \operatorname{Re}(\alpha_\mu \exp(-ik_\nu x^\nu)), \quad \alpha_\mu k^\mu = 0.$$

Мы также записали условие того, что выбрана калибровка Лоренца (4.2): существование этого условия приводит к тому, что 4 компоненты 4-потенциала задаются не более чем тремя независимыми параметрами. Однако калибровка всё ещё не фиксирована полностью: существуют калибровочные преобразования (4.3) не изменяющее условие калибровки Лоренца. В нашем случае в качестве потенциала такого преобразования должна быть взята функция с той же пространственной зависимостью, что и у 4-потенциала: $f = \operatorname{Re}(-i\tilde{f} \exp(-ik_\nu x^\nu))$ с постоянным \tilde{f} . В терминах комплексного вектора α_μ это калибровочное преобразование выглядит как

$$\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu + \tilde{f} k_\mu.$$

Калибровочным преобразованием мы можем добиться того, что нулевая компонента 4-потенциала обратится в нуль, $\alpha_0 = 0$; для этого надо выбрать $\tilde{f} = -\alpha_0/k$. Вместе с этим обратится в нуль и скалярное произведение векторных частей волнового вектора и комплексной амплитуды 4-потенциала, $(\alpha \cdot \mathbf{n}) = 0$. Найденная калибровка называется *поперечной калибровкой*.

Пусть направлением распространения волны является Oz , так что $\|k^\mu\| = (k, 0, 0, k)$. Тогда ненулевыми остаются только 2 компоненты A_β , $\beta = \{x, y\}$, которые можно представить в виде суммы *двух круговых поляризаций*

$$\|\alpha_\beta\| = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

При повороте вокруг оси Oz на угол φ комплексные амплитуды двух возможных поляризаций α_\pm преобразуются по закону

$$\alpha_\pm \rightarrow \alpha_\pm \exp(\pm i\varphi). \quad (4.61)$$

Таким образом, электромагнитные волны имеют спиральность (проекция спина на направление распространения) ± 1 .

4-5.2.3 Эллиптическая поляризация

Опишем поляризацию электромагнитной плоской волны (4.56) в общем случае. Представим комплексную амплитуду волны в виде

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\phi_0} (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2), \quad (4.62)$$

где чисто действительные вектора $\mathbf{E}_{1,2}$ ортогональны друг другу, причём $|\mathbf{E}_1| \geq |\mathbf{E}_2|$. Фаза ϕ_0 равна

$$\phi_0 = \frac{\arg(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0)}{2}, \quad \text{if } (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \neq 0.$$

После этого по известному \mathbf{E} легко найти $\mathbf{E}_{1,2}$ выделением действительно и мнимой частей у $e^{-i\phi_0} \mathbf{E}_0$. Если окажется, что $\mathbf{E}_2 = 0$, то мы имеем дело с линейной поляризацией. Если $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) = 0$, волна имеет одну из круговых поляризаций (4.60); при этом фазу ϕ_0 можно выбрать произвольной, при её изменении пара векторов $\mathbf{E}_{1,2}$ будет поворачиваться вокруг \mathbf{n} .

В общем же случае $|\mathbf{E}_1| > |\mathbf{E}_2| > 0$ говорят, что волна имеет *эллиптическую поляризацию*. Например, при фиксированном времени конец вектора электрического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ будет описывать эллипс с полуосями $\mathbf{E}_{1,2}$, если сместиться вдоль направления распространения волны.

4-5.2.4 Разложение по монохроматическим волнам — соотношение Парсеваля

Рассмотрим ограниченную по времени плоскую волну $\mathbf{E}_+(t - z/c)$, поле которой убывает при $|t| \rightarrow \infty$ при фиксированном z . Про такую волну говорят как о *волновом пакете*. Покажем, что полная энергия (как и полный импульс), которая переносится волновым пакетом, можно представить как прямую сумму вкладов от монохроматических волн, составляющих этот волновой пакет.

Разложим волновой пакет по монохроматическим волнам. В общем случае преобразование Фурье по времени и координаты для электрического поля плоской волны имеет вид

$$\mathbf{E}(t, z) = \int (d\omega)(dk) e^{-i\omega t + ikz} \mathbf{E}_{\omega k}. \quad (4.63)$$

Однако в силу закона дисперсии (4.57)

$$\mathbf{E}_{\omega k} = 2\pi\delta(\omega - ck) \mathbf{E}_k, \quad (4.64)$$

что при подстановке в (4.63) возвращает нас, как и должно быть, к первому слагаемому в (4.52):

$$\mathbf{E}(t, z) = \int (dk) e^{i(z-ct)k} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}_+(z - ct).$$

Теперь непосредственной подстановкой мы можем переписать полную энергию E , содержащаяся в волновом пакете, в терминах комплексной амплитуды \mathbf{E}_k :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi} \int dz (\mathbf{E}_+(\zeta))^2 = \int \frac{d\zeta}{4\pi} \mathbf{E}_+(\zeta) \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\zeta} \mathbf{E}_k = \\ &= \int \frac{(dk) \mathbf{E}_k}{4\pi} \int d\zeta \mathbf{E}_+(\zeta) e^{ik\zeta} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (dk) |\mathbf{E}_k|^2, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $\zeta = z - ct$, и мы воспользовались выражением для плотности энергии в электромагнитной волне (4.54). Последнее равенство в (4.65) есть сумма по монохроматическим волнам. В математике соотношение типа (4.65)

между квадратичными нормами функции и её Фурье-образа называют *соотношением Парсевалля*. В (4.65) интегрирование происходит по всей числовой оси k , при этом $\mathbf{E}_{-k} = \mathbf{E}_k^*$ вследствие действительности физического поля \mathbf{E}_+ .

Перепишем (4.65) в виде суммы энергий от волн с частотами ω . При этом частоты $+\omega$ и $-\omega$ соответствуют физически одной и той же волне, поскольку электрическое поле действительно, см. (4.56). Математически это соответствует тому, что $|\mathbf{E}_{-k}|^2 = |\mathbf{E}_k|^2$. Поэтому мы можем ограничиться интегрированием по $\omega > 0$, умножив подинтегральное выражение на 2. Поскольку $dk/d\omega = 1/c$, то из (4.65)

$$E = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} E_\omega, \quad E_\omega = \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{2\pi c} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2, \quad (4.66)$$

где Фурье-образ электрического поля по времени

$$\mathbf{E}_\omega = \int dt \mathbf{E}_+(z - ct) e^{i\omega t} = \frac{1}{c} \mathbf{E}_k.$$

4-5.3 Эффект Доплера и абберация света

Определим, как изменяются направление распространения и частота плоской монохроматической электромагнитной волны при смене системы координат.

Пусть в системе K волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k} = \{k \cos \theta, k \sin \theta, 0\}$, а в системе K' , движущейся относительно системы K со скоростью v вдоль оси Ox , компоненты волнового вектора равны $\mathbf{k}' = \{k' \cos \theta', k' \sin \theta', 0\}$. Связь между введёнными параметрами задаётся через лоренцевский буст, см. Пункт 2-4:

в терминах 4-волнового вектора k^μ

$$\begin{pmatrix} k' \\ k' \cos \theta' \\ k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k (1 - \beta \cos \theta) \\ \gamma k (\cos \theta - \beta) \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.67)$$

Отметим, что поскольку $k^\mu k_\mu = 0$, 4-импульс безмассовой частицы (см. Пункт 3-1.3) преобразуется по тем же законам (4.67), что и волновой 4-вектор k^μ .

4-5.3.1 Абберация света

Из (4.67) следует, что в новой системе отсчёта K' направление распространения плоской монохроматической волны отличается от того, которое было в системе K . Поделив первую компоненту на нулевую, а потом вторую на нулевую, получим, что

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (4.68)$$

Обратный закон преобразования получается из (4.68) переменной местами штриха и заменой $v \rightarrow -v$.

Эффект изменения направления распространения электромагнитной волны при переходе в другую систему координат называется *абберацией* (*aberration of light*).

4-5.3.2 Эффект Доплера

Помимо направления, при переходе в другую систему координат изменяется также и частота волны. Нулевая компонента в уравнении (4.67) есть

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta). \quad (4.69)$$

Эффект изменения частоты волны (в данном случае электромагнитной) при смене системы координат называется *эффектом Доплера* (*Doppler effect*).

§4-6. Поле движущегося точечного заряда

Запаздывающие потенциалы (4.20) имеют дело с непрерывной средой. Часто бывает удобным оперировать в терминах точечных зарядов. Выражения для 4-потенциала при известных траекториях движения заряженных частиц в калибровке Лоренца называются *потенциалами Лиенара-Вихерта* (*Liénard-Wiechert potential*).

4-6.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Для простоты будем рассматривать одну частицу и обозначим её траекторию (мировую линию) $z(s)$. В трёхмерном виде траектория частицы задаётся законом $\mathbf{z}(t)$,

а её скорость равна $\mathbf{v}(t)$. Поскольку частица движется со скоростью, меньшей скорости света, то сигнал в момент и точку наблюдения $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$ доходит только от одного участка траектории частицы. Иными словами, уравнение

$$t = t_r + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r)|}{c}, \quad T = t - t_r. \quad (4.70)$$

имеет ровно одно решение относительно момента t_r . Мы ввели время распространения сигнала T . Пусть моменту испускания сигнала t_r соответствует положение на мировой линии $s = s_r$. Определим 4-вектор R^μ , соеди-

няющий точку испускания сигнала с точкой его приёма:

$$\|R^\mu(x)\| = \|x^\mu - z^\mu(s_r)\| = \{cT, \mathbf{R}\}, \quad R_\mu R^\mu = 0. \quad (4.71)$$

Последнее равенство выражает то, что сигнал распространяется со скоростью света.

4-6.1.1 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта через условие ковариантности

Потенциалы Лиенара-Вихерта быстрее всего получить из требования лоренцевской инвариантности всех математических формул, описывающих физические соотношения.

Перейдём в систему координат K' , в которой заряд в момент испускания s_r покоился. Выражение для запаздывающих потенциалов (4.20) показывает, 4-потенциал зависит только от скорости частиц и их положения, но не от их ускорения. Поэтому потенциал в событии x'^μ может быть вычислен как статический потенциал заряда (см. Пункт 6-1.1):

$$\|A'^\mu\| = \left\{ \frac{e}{R'}, \vec{0} \right\} \Leftrightarrow A^\mu = \frac{eu^\mu}{R^\nu u_\nu}. \quad (4.72)$$

Вторым равенством мы переписали результат в (единственно возможной) ковариантной форме. Дело в том, что поскольку A'^μ является контравариантным вектором, то и справа должен стоять также контравариантный вектор для того, чтобы это равенство было верно в любой системе координат. В рамках условия задачи в нашем распоряжении есть два 4-вектора – скорость заряда u^μ и вектор от источника до приёмника R^μ ; в специально выбранной системе координат K' 4-вектор скорости как раз равен $\|u'^\mu\| = \{1, \vec{0}\}$.

В трёх-мерном виде получаем следующие выражения для потенциалов:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{v}/c}{(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})}, \quad (4.73)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r)$, единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, и

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R, \quad (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = \frac{R^\nu u_\nu}{\gamma} = R \left(1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})}{c} \right).$$

4-6.1.2 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта непосредственно из выражений для запаздывающих потенциалов

Воспользуемся формулой (2.42), связывающей 4-ток с мировой линией заряда, а также ковариантными выражениями для функции Грина (4.19) и запаздывающих потенциалов (4.20). После интегрирования по пространству-времени и тем самым снятия 4-х мерной δ -функции, получим, что запаздывающие потенциалы

перепишутся в виде интеграла по мировой линии заряда

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \theta(X^0) \delta(X_\mu X^\mu) u^\mu(s), \quad (4.74)$$

$$X^\mu(s) = x^\mu - z^\mu(s), \quad X^\mu(s_r) \equiv R^\mu(x).$$

Чтобы интегрированием по ds снять δ -функцию в (4.74), воспользуемся тем, что

$$\theta(X^0) \left| \frac{d}{ds} X_\nu X^\nu \right| \delta(X_\mu X^\mu) = \delta(s - s_r),$$

$$\frac{d}{ds} X_\nu X^\nu = -2X^\nu u_\nu.$$

Таким образом, потенциалы Лиенара-Вихерта суть:

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \frac{\delta(s - s_r)}{|2X^\nu u_\nu|} u^\mu(s) = \frac{e u^\mu}{u_\nu R^\nu},$$

где в последнем равенстве 4-скорость заряда u также берётся при $s = s_r$. Полученное выражение совпадает с (4.72).

4-6.2 Электрическое и магнитное поля

По результату (4.73) вычислим интересные с физической точки зрения электрическое и магнитное поля. Для того, чтобы это сделать, нужно уметь вычислять производную от момента испускания сигнала s_r по положению приёмника x . Дифференцируя скалярное равенство в (4.71), получаем

$$0 = \frac{\partial(R_\nu R^\nu)}{\partial x^\mu} = 2R_\nu \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} \frac{dz^\nu}{ds_r} \right) \Rightarrow \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} = \frac{R_\mu}{R_\nu u^\nu}.$$

Также нам понадобятся соотношения

$$\frac{\partial(R_\sigma u^\sigma)}{\partial x^\mu} = u_\mu + \frac{R_\mu}{R_\sigma u^\sigma} \frac{\partial(R_\lambda u^\lambda)}{\partial s_r} = u_\mu + \frac{R_\mu (R_\lambda w^\lambda - 1)}{R_\sigma u^\sigma}$$

Теперь можно воспользоваться (3.43) для вычисления тензора электромагнитного поля по выражению (4.72) для 4-потенциала:

$$F_{\mu\nu} = \frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{(R_\sigma u^\sigma)^3} + \frac{R_\mu w_\nu - R_\nu w_\mu}{(R_\sigma u^\sigma)^2} - \frac{(R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu) R_\lambda w^\lambda}{(R_\sigma u^\sigma)^3}. \quad (4.75)$$

В трёх-мерных обозначениях с учётом выражения для 4-ускорения (2.35) равенство (4.75) переписывается в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e \mathbf{R}_v}{\gamma^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{e [\mathbf{R} \times [\mathbf{R}_v \times \mathbf{a}]]}{c^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}],$$

где \mathbf{a} – ускорение частицы в момент t_r . Отметим, что магнитное и электрические поля ортогональны друг другу.

В (4.76) первое слагаемое в выражении для \mathbf{E} соответствует статическому полю; это слагаемое остаётся единственным, если заряд движется равномерно и прямолинейно. В соответствии с законом Кулона, при удалении от источника оно убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Для движущегося заряда, однако, распределение поля уже становится не изотропным в пространстве.

Второе слагаемое в (4.76) появляется только тогда, когда заряд движется с ускорением. При удалении от источника интенсивность этой части поля убывает медленнее, обратно пропорционально расстоянию. Такое убывание соответствует сферической волне, уходящей от источника. Действительно, этот вклад в электрическое поле ортогонален направлению \mathbf{n} от источника, как и должно быть для плоских волн (4.53).

4-6.2.1 Излучение релятивистски движущегося заряда

Проанализируем структуру поля излучения (4.76) в ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$. В знаменателе множитель

$$(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = R \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \rightarrow \frac{R}{2\gamma^2} (\gamma^2 \theta^2 + 1),$$

где θ – угол между скоростью частицы \mathbf{v} и направлением наблюдения \mathbf{n} ; мы сделали разложение по малому параметру $1/\gamma$ при малых углах $\theta \ll 1$. Из этого разложения следует, что знаменатель в (4.76) мал, когда $\theta \lesssim 1/\gamma$. Таким образом, основное излучение от частиц уходит по направлению её движения в телесный угол с раствором $1/\gamma$.

Характерная частота излучения ... если действует только магнитное поле, то

$$\omega \sim \frac{\gamma^3 c}{\rho}, \quad (4.77)$$

где ρ – радиус кривизны траектории частицы.

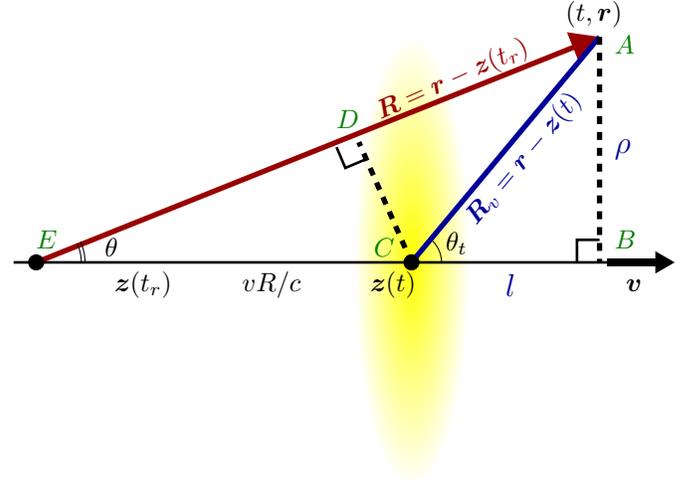


Рис. 4.1 Равномерное и прямолинейное движение заряда и его поле.

4-6.3 Поле равномерно движущегося заряда

Рассмотрим частный случай равномерно движущегося заряда, т.е. когда его ускорение равно нулю, $\mathbf{a} = 0$. В этом случае электрическое поле, создаваемое зарядом, даётся первым слагаемым в (4.76). Покажем, что в случае равномерного движения это слагаемое можно переписать в другом, геометрически более понятном виде.

На Рис.4.1 изображена прямолинейная траектория заряда $\mathbf{z}(t)$ (прямая EB) и точка наблюдения A . Поскольку поле заряда должно быть аксиально симметричным, введём для точки наблюдения радиальную координату $\rho \equiv AB$, равную расстоянию до траектории EB , и аппликату $l \equiv BC$, равную смещению текущего положения заряда $\mathbf{z}(t)$ до позиции максимального сближения с точкой наблюдения. Точка E соответствует моменту t_r испускания электромагнитного сигнала, который зафиксирован в точке A в настоящий момент времени t , т.е. в (4.73) расстояние $R \equiv EA = c(t - t_r)$. Единичный вектор \mathbf{n} из (4.73) направлен вдоль вектора \overrightarrow{EA} .

Сперва заметим, что фигурирующий в (4.73) вектор

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{r} - \left(\mathbf{z}(t_r) + \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) = \mathbf{r} - \mathbf{z}(t), \quad (4.78)$$

то есть он соединяет текущее положение заряда и точку наблюдения. Из Рис.4.1 следует, что отрезки

$$AB \equiv \rho = R_v \sin \theta_t, \quad EC = vR/c, \quad DA = (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}).$$

Далее, $DA = \sqrt{R_v^2 - DC^2}$, а из подобия прямоугольных треугольников EDC и EBA заключаем, что

$$DC = \frac{EC}{EA} \cdot AB = \frac{v}{c} \cdot R_v \sin \theta_t.$$

Откуда следует, что комбинация

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) &= \sqrt{R_v^2 - DC^2} = \\ &= R_v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta_t} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 l^2 + \rho^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, электрическое поле — первое слагаемое в (4.76) — есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{z}(t))}{\gamma^2 |\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|^3 (1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t)^{3/2}} = \\ &= \frac{\gamma e(\mathbf{r} - \mathbf{z}(t))}{(\gamma^2 l^2 + \rho^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Из (4.76) следует, что магнитное поле равно

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{c}. \quad (4.80)$$

На Рис.4.1 жёлтым схематично обозначена область, где электрическое поле превышает некоторую (наперёд

заданную) величину, было выбрано $\gamma = 2.5$. Выражения (4.79,4.80) говорят о том, что если заряд движется с ультрарелятивистской скоростью, $\gamma \gg 1$, то распределение электромагнитного поля вокруг заряда становится сильно анизотропным. При фиксированном расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|$ до текущего положения заряда, величина $1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t$ меняется от единицы при $\theta_t = 0, \pi$ до $1/\gamma^2$ при $\theta_t = \pm\pi/2$. Таким образом, поле впереди и позади движения заряда значительно меньше, чем по бокам: при фиксированном расстоянии отношение равно $1/\gamma^3$. Построим поверхность постоянного по амплитуде электрического поля, сечение которой плоскостью рисунка (4.1) есть кривая

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|^2 \cdot (1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t)^{3/2} = \text{const.}$$

Таким образом, расстояния до искомой поверхности от заряда поперёк и вдоль его движения соотносятся как $\gamma^{3/2} : 1$,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|_{\theta_t=\pi/2} = \gamma^{3/2} |\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|_{\theta_t=0}.$$

§4-7. Симметрии в классической электродинамике

При общем анализе свойств решения физических уравнений важную роль играют симметрии этих уравнений. При феноменологическом построении уравнений, описывающих поведение новых физических систем, ограничения, накладываемые со стороны симметрий, позволяют заранее отбросить невозможные комбинации в уравнениях движения. Изучим симметричные свойства уравнений классической электродинамики.

Пространственная инверсия Пространственная инверсия подразумевает, что мы произвели замену знака координат,

$$P : \quad \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}. \quad (4.81a)$$

Эта замена приведёт к изменению значений векторов и полей. При операции пространственной инверсии P не изменяют свой знак 0-компоненты 4-векторов, а пространственные части 4-векторов изменяются свои знаки.

Иными словами, пусть нам известен закон движения частиц и полей в системе. Если мы для всех частиц и полей произведём замену знаков в пространственных частях 4-координаты, 4-импульса частиц (3.7),

4-потенциале электромагнитного поля (3.34) и 4-тока,

$$\begin{aligned} P : \quad \{ct, \mathbf{r}\} &\rightarrow \{ct, -\mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} &\rightarrow \{E/c, -\mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} &\rightarrow \{\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} &\rightarrow \{c\rho, -\mathbf{j}\}, \end{aligned} \quad (4.81b)$$

то получившиеся траектории также будут описывать движение другой системы, которая является зеркальным отражением исходной системы. Отметим, что трёх-мерное электрическое поле \mathbf{E} и трёх-мерные вектора скорости \mathbf{v} и электро-дипольного момента \mathbf{d} также меняют знак:

$$P : \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}, \quad \mathbf{d} \rightarrow -\mathbf{d}. \quad (4.81c)$$

Как нетрудно убедиться, действие для частиц (3.1), для их взаимодействия с электромагнитным полем (3.35) и для электромагнитного поля самого по себе (4.11) не изменяются при преобразовании (4.81b).

Поскольку символ Леви-Чивиты, по определению, не изменяется при P -преобразовании, см. Пункт 9-2.2, то магнитное поле \mathbf{B} как аксиальный вектор не изменяет своего знака. Не изменяет своего знака и момент импульса \mathbf{L} (4.35), а также пропорциональный ему магнитный момент частиц $\boldsymbol{\mu}$ (4.41). У вектора Паули-Любанского S^μ (4.39) изменяет свой знак только нуле-

вая компонента. Итак:

$$P: \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\mu} \rightarrow \boldsymbol{\mu}, \\ \{S^0, \mathbf{S}\} \rightarrow \{-S^0, \mathbf{S}\}. \quad (4.81d)$$

Обращение времени. Обращение знака времени предполагает замену

$$T: \quad t \rightarrow -t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}. \quad (4.82a)$$

Координата \mathbf{r} при этом остаётся неизменной. Приращение интервала ds при движении массивной частицы изменяет знак, поскольку изменяется знак нулевая компонента соответствующего приращения 4-вектора положения частицы dx^μ . Таким образом, у 4-вектора скорости изменяет знак пространственная часть:

$$T: \quad ds \rightarrow -ds, \\ \{u^0, \mathbf{u}\} \rightarrow \{u^0, -\mathbf{u}\}. \quad (4.82b)$$

Но действие для свободной частицы (3.1) не должно изменить своего знака, что достигается перемены местами пределов интегрирования. Действие (3.35), описывающее взаимодействие частиц и поля, записанном в виде интеграла вдоль мировых линий частиц, также меняются местами пределы интегрирования. Поэтому помимо правила (4.82a), распространяющегося в том числе и на dx^μ , добавляется общий знак минус. В второй форме записи (3.35) меняет знак пространственный ток \mathbf{j} , поскольку меняет знак пространственная часть 4-скорости. Мера интегрирования по объёму $d^4\Omega$ знак не меняет. Итак, для того, чтобы действие (3.35) не изменило знака, надо изменить знак у вектор-потенциала \mathbf{A} . Собирая всё вместе, получаем правила для основных

четырёх-мерных величин:

$$T: \quad \{ct, \mathbf{r}\} \rightarrow \{-ct, \mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} \rightarrow \{E/c, -\mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} \rightarrow \{\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} \rightarrow \{c\rho, -\mathbf{j}\}, \quad (4.82c)$$

Электрическое поле \mathbf{E} и электро-дипольный момент \mathbf{d} не меняют своего знака, тогда как вектор скорости знак изменит,

$$T: \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}, \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}. \quad (4.82d)$$

Поскольку у радиус-вектора \mathbf{r} знак не менялся, а у всех остальных 4-векторов знак пространственной части оказался изменён, то магнитное поле \mathbf{B} (3.47) и механический момент \mathbf{L} знаки изменят, как и пространственная часть вектора Паули-Любанского S^μ :

$$T: \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}, \quad \mathbf{L} \rightarrow -\mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\mu} \rightarrow -\boldsymbol{\mu}, \\ \{S^0, \mathbf{S}\} \rightarrow \{S^0, -\mathbf{S}\}. \quad (4.82e)$$

Зарядовое сопряжение. Операция C предполагает изменение знака заряда у всех частиц. Должно изменить знак и электромагнитное поле для того, чтобы действие осталось неизменным:

$$C: \quad \{ct, \mathbf{r}\} \rightarrow \{ct, \mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} \rightarrow \{E/c, \mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} \rightarrow \{-\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} \rightarrow \{-c\rho, -\mathbf{j}\}. \quad (4.83)$$

Глава 5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§5-1. Функции Грина волнового уравнения

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение (4.17) — уравнение на 4-потенциал в калибровке Лоренца. Это уравнение описывает возбуждение электромагнитного поля зарядами. Вид всех компонент этого уравнения эквивалентен, поэтому возьмём, пример, его 0-ю компоненту:

$$\square\varphi \equiv \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\varphi = 4\pi\rho.$$

где $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ — некоторая функция координат и времени. Если мы знаем решение уравнения

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)G(t, \mathbf{r}) = 4\pi\delta(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\delta^{(4)}(x), \quad (5.1)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, то решением уравнения на потенциал φ в общем случае является

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int G(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') dt d^3\mathbf{r}' \rho(t', \mathbf{r}'). \quad (5.2)$$

Функция G называется *функцией Грина* (в данном случае — *функцией Грина волнового уравнения*).

Оператор д'Аламбера \square в (5.1) не зависит от координат. Поэтому имеет смысл совершить Фурье-преобразование над обеими частями (5.1), где этот оператор должен иметь диагональный вид. В результате приходим к уравнению

$$(k^2 - \omega^2/c^2)G(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi, \quad (5.3)$$

$$G(t, \mathbf{r}) = \int (d\omega)(d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}$$

где 4-х мерный волновой вектор $\|k^\mu\| = \{\omega/c, \mathbf{k}\}$. Проблема однако в том, что непосредственно написанного в (5.3) не хватает для того, чтобы найти функцию Грина $G(t, \mathbf{r})$, поскольку в подинтегральном выражении в обратном преобразовании Фурье (5.3) множитель $G(\omega, \mathbf{k})$ имеет полюса при $\omega = \pm ck$, обращаясь в нём в бесконечность. Это не удивительно, поскольку, как мы знаем, существует множество нетривиальных решений однородного волнового уравнения, описывающих распространение плоских волн, см. § 4-5.

Для того, чтобы обратное преобразование Фурье стало полностью определённым, с математической точки

зрения следует доопределить правило обхода полюсов у $G(\omega, \mathbf{k})$, т.е. сделать так, чтобы полюса сместились с действительной оси в комплексную плоскость переменной ω . Если выбран некоторый определённый способ обхода, то переход к другому способу означает изменение функции Грина вида

$$G_{\text{new}} = G_{\text{old}} + \frac{2}{c^2}F(\omega, \mathbf{k})\delta(k^2 - \omega^2/c^2), \quad (5.4)$$

где функция $F(\omega, \mathbf{k})$ не имеет сингулярности, когда $k^2 - \omega^2/c^2 = 0$. Действительно, второе слагаемое в правой части (5.4) не изменяет левую часть уравнения на функцию Грина (5.3), то есть произвол в выборе второго слагаемого в (5.4) обусловлен неоднозначностью процедуры обращения оператора д'Аламбера.

Переход (5.4) от одной функции Грина к другой может быть легко интерпретирован, будучи переписанным в координатном представлении:

$$G_{\text{new}}(t, \mathbf{r}) = G_{\text{old}}(t, \mathbf{r}) + \int (d^3\mathbf{k}) \frac{F(\omega, \mathbf{k})e^{-i\omega t} + F(-\omega, \mathbf{k})e^{i\omega t}}{\omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5.5)$$

где частота определяется дисперсионным соотношением $\omega = +c|\mathbf{k}|$. Таким образом, преобразование (5.5) сводится к добавлению к функции Грина набора плоских волн с коэффициентами $F(\omega, \mathbf{k})$; поскольку плоские волны удовлетворяют однородному волновому уравнению, то эта добавка не нарушает равенства (5.1), являющегося определением функции Грина.

5-1.1 Запаздывающая функция Грина

Правила обхода полюсов в (5.3) может быть выбрано исходя из физических соображений. Потребуем, чтобы 'отклик' $\varphi(t)$ в (5.2) мог бы быть отличен от нуля только в том случае, если 'источник' $\rho(t')$ имеет ненулевую амплитуду при $t' \leq t$. Удовлетворяющая этому требованию *причинности* функция Грина называется *запаздывающей функцией Грина* (*retarded Green function*). В Фурье-представлении запаздывающая Функция Грина равна

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} = -\frac{4\pi}{k_\mu k^\mu}. \quad (5.6)$$

Добавка $'i0'$ задаёт правила обхода полюсов, соответственно $\|k^\mu\| = \{\omega/c + i0, \mathbf{k}\}$.

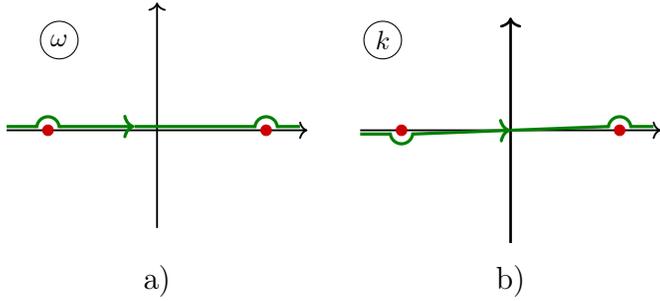


Рис. 5.1 Комплексная структура запаздывающей функции Грина (5.6). Красными жирными точками обозначены положения полюсов подинтегрального выражения, зелёной линией — контура, вдоль которых производится интегрирование. а) Расположение полюсов при интегрировании по частоте, (5.7); б) положение полюсов при интегрировании по абсолютному значению волнового вектора k , для примера взят случай $\omega < 0$.

Проверим, что именно правило полюсов (5.6) соответствует причинности, т.е. тому, что при $t < 0$ функция Грина G тождественно равна нулю. Для этого рассмотрим обратное Фурье-преобразование от частотно-волнового представления к временно-волновому представлению:

$$G(t, \mathbf{k}) = \int \frac{4\pi e^{-i\omega t} (d\omega)}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} \quad (5.7)$$

Контур интегрирования и положения полюсов подинтегрального выражения (5.7) показаны на Рис. 5.1а. Когда время отрицательно, $t < 0$, то контур интегрирования следует уводить вверх на комплексной плоскости ω , поскольку в этом случае экспонента в подинтегральном выражении становится малой. На пути такой деформации контур не встречает полюсов, поэтому полный интеграл равен нулю.

В обратном случае, когда $t > 0$, экспонента в подинтегральном выражении (5.7) стремится к нулю при большой отрицательной мнимой части частоты ω , поэтому контур интегрирования надо уводить в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости ω . На пути этой деформации встречаются два полюса подинтегрального выражения, в результате чего возникает ненулевой результат интегрирования:

$$G(t, \mathbf{k}) = \frac{4\pi \theta(t)}{k} \sin(ckt). \quad (5.8)$$

Найдём теперь функцию Грина в частотно-координатном представлении функция Грина. Для этого при проведении обратного Фурье-преобразования от волнового вектора \mathbf{k} к радиус-вектору \mathbf{r} в интегрировании по \mathbf{k} перейдём к сферическим координатам $\{k, \vartheta, \varphi\}$,

направив \mathbf{r} вдоль оси Oz :

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}) &= \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk / (2\pi)^3}{k^2 - (\omega + i0)^2} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta e^{ikr \cos \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\pi i} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (\omega + i0)^2} \end{aligned}$$

Сначала мы взяли интегралы по углам, воспользовавшись тем, что $\sin \vartheta d\vartheta = -d \cos \vartheta$. Исходный интеграл по k на луче $(0, +\infty)$ мы сначала распространили на всю прямую, воспользовавшись тем, что подинтегральное выражение чётно по k ; затем к подинтегральному выражению мы добавили нечётную функцию, пропорциональную $\cos(kr)$, не изменив значения интеграла, поскольку эта добавка не изменяет значения интеграла. Комплексная структура интеграла по k показана на Рис. 5.1б). После проведения интегрирования приходим к

$$G(\omega, \mathbf{r}) \equiv \int (d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{\exp(i(\omega/c)r)}{r}. \quad (5.9)$$

5-1.1.1 Функция Грина во временно-координатном представлении

Теперь найдём запаздывающую функцию Грина в временно-координатном представлении, воспользовавшись (5.9):

$$G(t, \mathbf{r}) = \int (d\omega) G(t, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \frac{\delta(t - r/c)}{r}. \quad (5.10)$$

Это выражение можно переписать также в ковариантном виде:

$$G(x) = 2c \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu) \quad (5.11)$$

Запаздывающую функцию Грина $G(t, \mathbf{r})$ легко найти и непосредственно решая волновое уравнение. Поскольку она имеет сферически-симметричную зависимость от координаты \mathbf{r} , то уравнение (5.1) при $r > 0$ упрощается до

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{r} \partial_r^2 r \right) G(t, r) = 0. \quad (5.12)$$

Если теперь мы скажем, что это уравнение на функцию $rG(t, r)$, то по форме оно совпадёт с уравнением распространения плоской волны (4.51). Таким образом, уходящая от центра волна, возбуждённая в момент времени $t = 0$ в начале координат согласно правой части (5.1), описывается решением

$$G(t, r) \propto \frac{\delta(r - ct)}{r}.$$

Коэффициент пропорциональности может быть найден из установления соответствия между волновой задачей и статической задачей Кулона. Для этого проинтегрируем (5.1) по времени. В результате получим уравнение на $\int dt G(t, \mathbf{r})$, совпадающее с (6.2): то есть,

$$\int dt G(t, \mathbf{r}) = G_c(\mathbf{r}).$$

В результате приходим к (5.10).

5-1.2 Опережающая и другие функции Грина

Для того, чтобы отличать разные функции Грина, обозначим запаздывающую функцию Грина, введённую в Пункте 5-1.1, через G_R .

Функция времени и координат

$$\begin{aligned} G_R - G_A &\equiv \frac{\delta(t - r/c) - \delta(t + r/c)}{r} = \\ &= 2c \operatorname{sign}(x^0) \delta(x_\mu x^\mu). \end{aligned}$$

удовлетворяет однородному волновому уравнению, сравни с (5.11). Поэтому определённая так функция

$$G_A(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t + r/c)}{r} \quad (5.13)$$

удовлетворяет уравнению (5.1). Она не равна нулю только при $t < 0$, поэтому называется *опережающей функцией Грина (advanced Green function)*.

В Фурье-представлении разность запаздывающей и опережающей функций Грина равна

$$G_R(\omega, \mathbf{k}) - G_A(\omega, \mathbf{k}) = 8\pi^2 i \operatorname{sign}(\omega) \delta(k_\mu k^\mu),$$

что согласуется с общими рассуждениями (5.4).

5-1.3 Тензорная функция Грина

Запишем функцию Грина для электрического поля. Волновое уравнение на электрическое поле в координатно-частном представлении имеет вид

$$\left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (5.14)$$

Решение для электрического поля можно получить не прямым путём, а пользуясь уже полученным решением для 4-потенциала в Лоренцевой калибровке (ответ для электрического поля, естественно, не должен зависеть от выбранной калибровки). В результате получаем для запаздывающей функции Грина:

$$E^i(\mathbf{r}) = \int G_\omega^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' j^j, \quad (5.15)$$

$$G_\omega^{ij}(\mathbf{r}) = i\omega \left(\delta^{ij} + \frac{c^2}{\omega^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(i\omega r/c)}{r}$$

В частотно-волновом представлении

$$G_{\omega, \mathbf{k}}^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\omega^2/c^2} \right) \frac{i\omega/c}{k^2 - (\omega/c + i0)^2}.$$

В англоязычной литературе функции Грина типа (5.15) называются *diadic Green's function*, в отличие от скалярной функции Грина (5.6).

5-1.4 Двумерное электрическое поле

Рассмотрим ситуацию, когда по оси z соблюдается полная однородность распределения зарядов, и, кроме того, электрический ток имеет только x, y -компоненты. В таком случае магнитное поле \mathbf{B} имеет только z -компоненту B , а электрическое поле \mathbf{E} имеет только x, y -компоненты.

Функцию Грина удобно искать в частотно-координатном пространстве. Уравнение на магнитное поле

$$(\Delta^\perp + \omega^2/c^2)H = -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{j},$$

где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\operatorname{rot} \mathbf{j} = \partial_y j^x - \partial_x j^y$, имеет решение

$$H(\mathbf{r}) = \int G^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' \operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Функция Грина $G^\perp(\mathbf{r})$ зависит только от абсолютного значения r и удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G^\perp(\mathbf{r}) = 4\pi \delta^\perp(\mathbf{r})$$

Это — модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка. Запаздывающим решением является функция Ганкеля первого рода нулевого порядка,

$$G^\perp(\mathbf{r}) = -\pi i H_0^{(1)}(\omega r/c) \quad (5.16)$$

Электрическое поле

$$E^\alpha = \frac{i}{\omega} (\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta B - 4\pi j^\alpha) = \quad (5.17)$$

$$= \int G^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' j^\beta(\mathbf{r}'),$$

$$G^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\pi\omega \left(\delta^{\alpha\beta} + \frac{c^2}{\omega^2} \partial_\alpha \partial_\beta \right) H_0^{(1)}(\omega r/c),$$

сравни с (5.15).

§5-2. Геометрическая оптика

Плоская волна (4.56) отличается тем, что амплитуда колебания поля в ней постоянна в пространстве-времени, а вся зависимость от времени и координаты содержится в фазе. Приближение геометрической оптики предполагает, что локально поле можно представить в виде плоской монохроматической волны. Однако на временах, больших по сравнению с периодом колебания волны, или на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны, амплитуда волны и её волновой вектор могут заметно меняться.

Таким образом, предполагается разделение масштабов. Малые масштабы — это быстрые осцилляции волны. Большие масштабы — это изменение периода этих осцилляций и амплитуды волны. В соответствии с этим предположением, представим комплексную амплитуду волны в виде

$$\varphi = \text{Re}(a e^{i\psi}). \quad (5.18)$$

Фаза ψ называется *эйконалом* (*eikonal*). В пределе, когда применимо приближение геометрической оптики, эта величина изменяется намного быстрее, чем абсолютное значение амплитуды a . Мысленно зафиксируем a и сравним (5.18) с выражением для фазы плоской волны (4.56). Справедливо определить локальное значение частоты и волнового вектора как

$$\omega(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k}(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad d\psi = -\omega dt + (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}). \quad (5.19)$$

Волновое уравнение, в терминах комплексной амплитуды имеющее вид

$$e^{-i\psi} (\partial_t^2 - c^2 \Delta) (a e^{i\psi}) = 0,$$

будучи разделённым на действительную и мнимую части, распадается на два действительных уравнения. Действительная часть уравнения может быть переписана в виде

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 = \frac{(\partial_t^2 - c^2 \Delta) a}{a} \rightarrow 0. \quad (5.20a)$$

В соответствии с нашим приближением, правую часть этого уравнения можно положить равной нулю, поскольку она мала по сравнению с квадратом первых производных фазы. Таким образом, в приближении геометрической оптики уравнение (5.20a) оказывается ничем иным как дисперсионным соотношением

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2. \quad (5.20b)$$

Записанное в первом виде, это уравнение называют *уравнением эйконала*.

Мнимая часть волнового уравнения

$$\partial_t(\omega a^2) + c^2 \text{div}(\mathbf{k} a^2) = 0 \quad (5.21)$$

имеет вид сохранения энергии: плотность энергии пропорциональна ωa^2 , а плотность потока энергии пропорциональна $c^2 \mathbf{k} a^2$.

5-2.1 Монохроматическая волна

Предположим, что характеристики волны (амплитуда a , частота ω и волновой вектор \mathbf{k}) не зависят явно от времени. Такую волну следует назвать монохроматической: во всём пространстве её комплексная амплитуда зависит от времени как $\exp(-i\omega t)$ с одной и той же частотой ω . Действительно, поскольку

$$0 = \partial_t \mathbf{k} = -\text{grad} \omega \quad (5.22)$$

в силу (5.20a), то это означает, что частота ω постоянная не только во времени, но и в пространстве. Волновой вектор таким образом может изменять только своё направление:

$$\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (5.23)$$

Здесь единичный вектор \mathbf{n} есть локальное направление распространения волны, или, как говорят — *луча*.

Найдём траекторию лучей. Для этого возьмём градиент от уравнения Эйконала (5.20b) и снова воспользуемся уравнением (5.20a):

$$0 = -\frac{\partial_k (g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi)}{2k^2} = \frac{\partial_i \psi \partial_{ik} \psi}{k^2} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = 0. \quad (5.24)$$

Это уравнение означает, что вдоль направления распространения луча \mathbf{n} оно само остаётся неизменным.

5-2.1.1 Волновой фронт

Волновым фронтом называется поверхность $S = S(\psi_0, t)$ с постоянным значением фазы волны (эйконала) $\psi = \psi_0$ при фиксированном времени t . Поскольку волновой вектор \mathbf{k} есть градиент эйконала, то в каждой точке поверхности S волновой вектор нормален ей. Важную роль для геометрической оптики играет средняя кривизна фронта (см. (10.29)):

$$K_m = -\text{div} \mathbf{n}.$$

Рассмотрим два волновых фронта $S_{1,2}$ в один и тот же момент времени, соответствующих двум различным фазам $\psi_1 < \psi_2$. Если провести нормаль к одной поверхности, скажем S_1 , то будучи продолженной она окажется нормалью и для поверхности S_2 . Расстояние между точками пересечения $\Delta l = \Delta \psi / k$ согласно (5.20a), где разность между фазами фронтов $\Delta \psi = \psi_2 - \psi_1$, т.е. не зависит от выбора точки на фронте S_1 .

Полученный принцип легко может быть изображён графически, см. Рис. 5.2.

5-2.1.2 Интенсивность лучей

Пространственная структура линий распространения лучей и амплитуды лучей связаны уравнением (5.21), выражающем собой условие бездивергентности потока энергии:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{n}a^2) &= (\mathbf{n} \cdot \nabla)a^2 + K_m a^2 = 0, \\ \text{or } (\mathbf{n} \cdot \nabla) \ln(a^2) &= -K_m. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Таким образом, скорость относительного изменения интенсивности $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \ln(a^2)$ вдоль луча определяется значением средней кривизны K_m фронта. Если средняя кривизна положительна, $K_m > 0$, т.е. соседние лучи расходятся, то интенсивность лучей по мере их распространения падает. Если же, наоборот, соседние лучи сходятся, $K_m < 0$, то интенсивность лучей возрастает.

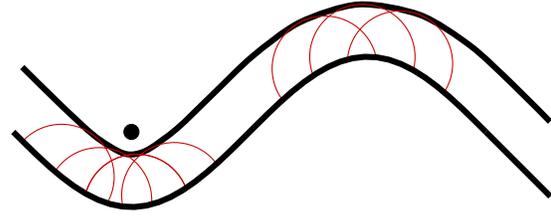


Рис. 5.2 Два волновых фронта. Чёрной точкой обозначен фокус (каустика).

§5-3. Параметризация поля в случае сферической геометрии

Предположим, что мы изучаем систему, локализованную в пространстве, и производящую возмущение поля в окружающем пространстве. Такой системой может быть, например, излучающая система движущихся с ускорением зарядов. Декартова система координат оказывается не вполне подходящей для математического писания подобных задач. Более подходящей является сферическая система координат с началом находящемся внутри рассматриваемой системы.

В этом параграфе мы разрабатываем математический аппарат, позволяющий описывать электромагнитное поле в сферической системе координат. Мы пользуемся обозначениями Пункта 10-1.3. В нашем случае 3-х мерной криволинейной системой координат является сферическая система координат $\{r, \theta, \phi\}$, а двумерной поверхностью является поверхность $r = \text{const}$ с углами в качестве координат на этой поверхности, $\alpha, \beta, \dots = \{\theta, \phi\}$. Оператор Лапласа Δ мы будем представлять в виде

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \Delta_a, \\ \Delta_a &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким образом, дифференциальный оператор Δ_a является оператором Бельтрами-Лапласа на сфере единичного радиуса (в терминах квантовой механики его можно назвать оператором квадрата углового момента, взятого с обратным знаком).

5-3.1 Свойства функций Бесселя

$$I_\nu(z) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(e^{\pi i/2} z)$$

5-3.1.1 Сферические функции Бесселя

Сферические функции Бесселя связаны с простыми функциями Бесселя универсальным соотношением типа

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Сферическая функция Ганкеля первого рода

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = -iz^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{e^{iz}}{z}$$

Явные выражения для первых целочисленных функций Ганкеля первого рода

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(z) &= -i \frac{e^{iz}}{z}, & h_1^{(1)}(z) &= -\frac{(z+i)e^{iz}}{z^2}, \\ h_2^{(1)}(z) &= i \frac{(z^2 + 3iz - 3)e^{iz}}{z^3} \end{aligned}$$

На близких и далёких расстояниях, когда $z \ll 1$ и $z \gg 1$ соответственно, асимптотиками функции Ганкеля первого рода являются

$$\sim -\frac{i(2l-1)!!}{z^{l+1}}, \quad \sim (-i)^{l+1} \frac{\exp(iz)}{z}, \quad (5.27)$$

см. справочник Olveg и др., 2010, Упр. (10.52.4) и (10.52.2).

Теорема суммирования

$$\begin{aligned} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \\ &= i(-1)^l \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(kr) j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \end{aligned} \quad (5.28)$$

см. там же, Упр. 10.60.1, 10.60.2.

5-3.2 Параметризация векторного поля

Пусть нам дано трёхмерное векторное поле \mathbf{E} , не возрастающее на бесконечности. Покажем, что это поле можно представить в виде (*Neumann–Debye decomposition*)

$$\mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{r}\chi) + \text{rot rot}(\mathbf{r}\eta) - \text{grad}\varphi, \quad (5.29)$$

где потенциал φ также ограничен на бесконечности. Конечно, представление векторного поля в виде (5.29) не единственно, но оно удобно, если задача имеет сферическую симметрию. Сперва возьмём дивергенцию от обеих частей (5.29), получим

$$\Delta\varphi = -\text{div}\mathbf{E}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3\mathbf{r}' \text{div}\mathbf{E}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.30)$$

Так определённый потенциал φ не возрастает на бесконечности. Не изменяя этого свойства, к нему можно добавить только константу, что не потребует изменения функций η, χ .

Вообще говоря, потенциал φ оказывается отличным от нуля по всём пространству, что может оказаться неудобным. Поэтому с практической точки зрения бывает удобным заменить выделение потенциальной части поля на выделение другой части поля, назовём её $-4\pi\mathbf{P}$, которая обращается строго в нуль при больших расстояниях r , и удовлетворяет условию

$$\text{div}\mathbf{E} = -4\pi \text{div}\mathbf{P},$$

но в общем случае $\text{rot}\mathbf{P} \neq 0$. Определение \mathbf{P} при известном поле \mathbf{E} неоднозначно, оно должно фиксироваться из дополнительных соображений.

Рассмотрим теперь бездивергентное поле $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, обозначив его для лаконичности той же буквой \mathbf{E} . Расписывая (5.29) покомпонентно, получаем:

$$E_\alpha = r\nabla_\alpha^*\chi + \partial_\alpha\partial_r(r\eta), \quad E^r = -\frac{1}{r}\Delta_a\eta.$$

где E_α — компоненты ковариантного вектора, а косой поверхностный градиент ∇_α^* определён в (10.25). Сферически симметричная часть в функций χ и η дают нулевой вклад в поле \mathbf{E} . Условие бездивергентности в сферических координатах имеет вид

$$\partial_r(r^2E^r) + r^2\nabla_\alpha E^\alpha = 0.$$

где E^α — компоненты контравариантного вектора.

Найдём функции χ, η по заданному полю \mathbf{E} . Проектируя уравнение (5.29) и его ротор на радиус-вектор \mathbf{r} , получаем:

$$\Delta_a\chi = -r[\text{rot}\mathbf{E}]^r, \quad \Delta_a\eta = -rE^r. \quad (5.31)$$

5-3.3 Электромагнитное поле

Согласно шаблону (5.29), представим электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \text{rot}(\mathbf{r}\partial_t\chi) + \text{rot rot}(\mathbf{r}\eta) + \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \text{rot}(\mathbf{r}\partial_t\eta) + \text{rot rot}(\mathbf{r}\chi).$$

Мы сделали так, чтобы функции η, χ входили симметрично в выражения для полей \mathbf{E}, \mathbf{H} . Для того, чтобы выполнялись все уравнения Максвелла, требуется, чтобы функции η, χ удовлетворяли волновому уравнению Гельмгольца (4.50)

$$\partial_\mu\partial^\mu\eta = 0, \quad \partial_\mu\partial^\mu\chi = 0.$$

Потенциальный вклад в электрическое поле \mathbf{E} постоянен во времени в силу закона сохранения полного заряда. В дальнейшем его мы будем опускать, поэтому

$$\Delta_a\eta = -rE^r, \quad \Delta_a\chi = -rH^r. \quad (5.33)$$

Поток энергии через сферу радиуса r равен

$$I = -\frac{r}{4\pi} \int d\omega \left(\partial_t\chi \partial_r(r\Delta_a\chi) + \partial_t\eta \partial_r(r\Delta_a\eta) \right) \quad (5.34)$$

Перекрёстные вклады η - χ не вошли в ответ в силу разной угловой симметрии вкладов от этих функций в электромагнитные поля.

5-3.3.1 Разложение плоской волны по сферическим волнам

Пусть в декартовых координатах мы имеем плоскую волну с круговой поляризацией, у которой поля \mathbf{E}_{ext} и \mathbf{H}_{ext} имеют вид

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi+ikz}, \quad \mathbf{H}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi+ikz}.$$

где фаза $\varphi = -i\omega t + \varphi_0$, и волновой вектор $k = \omega/c$. Наша цель — найти функции χ и η , которые бы соответствовали этой волне. Для этого найдём сначала r -компоненты полей с тем, чтобы затем воспользоваться соотношениями (5.33) для нахождения исходных η и χ :

$$rE_{\text{ext}}^r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) = r \sin\theta e^{i\varphi+i\varphi+ikz} = -irH_{\text{ext}}^r. \quad (5.35)$$

Заметим здесь, что функции rE^r и rH^r также удовлетворяют волновому уравнению Гельмгольца. Из (5.33) следует, что функции η, χ равны

$$\eta = -i\chi = \frac{1}{2} r \sin\theta e^{i\varphi+i\varphi+ikz}.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы разложить функции η, χ по сферическим гармоникам. Для этого выпишем некоторые формулы, воспользовавшись Флюгге (1974, сс. 298, 300)

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,0}(\theta), \quad (5.36)$$

$$\sin \theta e^{i\phi} \mathcal{Y}_{l,0}(\theta) = C_{l,+} \mathcal{Y}_{l+1,1}(\theta, \phi) + C_{l,-} \mathcal{Y}_{l-1,1}(\theta, \phi), \quad (5.37)$$

где \mathcal{Y} – сферические гармоники, а коэффициенты разложения

$$C_{l,+} = -\sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (5.38)$$

$$C_{l,-} = \sqrt{\frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l+1)}},$$

§5-4. Распространение электромагнитных волн

5-4.1 Расходящаяся сферическая волна

Если (4.52) с \mathbf{E}_- мы назвали плоской электромагнитной волной, распространяющейся в направлении оси Oz , то элементарное решение (4.18) следует назвать *расходящейся сферической волной*. Характерными признаками расходящейся сферической волны являются ...

- Убывание на больших расстояниях как $1/r$,
- Зависимость от времени через комбинацию $t-r/c$.

Решение (4.18) написано для скалярной величины, назовём её η . Здесь мы обсуждаем принципиальные моменты, связанные со сферическими волнами. Как в полной мере распространить теорию на векторное электромагнитное поле, детально осуждается в §§ 6-3.

Из сферически-симметричного решения (4.18) могут быть получены решения, зависящие от углов:

$$\eta = \nabla_i \nabla_k \dots \frac{f(t-r/c)}{r}.$$

Так построенная функция η также удовлетворяет волновому однородному уравнению (4.17). На больших расстояниях до начала координат следует удерживать только производные от f , так что

$$\eta \rightarrow (-1)^l n^i n^k \dots \frac{f^{(l)}(t-r/c)}{r}$$

Таким образом, мы получили расходящуюся сферическую волну, амплитуда которой зависит от направления распространения. Угловая зависимость не меняется по мере распространения от источника.

По аналогии со скалярным полем, мы можем написать решение для расходящейся электромагнитной волны

$$\mathbf{E} \approx \frac{a}{r} \mathbf{E}_0(\mathbf{n}, t-r/c), \quad \mathbf{H} \approx \frac{a}{r} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (5.41)$$

В результате получаем, что

$$r \mathbf{E}_{\text{ext}}^r = \frac{\sqrt{4\pi} e^{i\varphi}}{k} \times \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(l+1)(2l+1)} i^{l-1} j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,1}(\theta, \phi), \quad (5.39)$$

Таким образом, используя соотношение (5.33), приходим к ответу

$$\eta = \frac{\sqrt{4\pi} e^{i\varphi}}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2l+1}}{\sqrt{l(l+1)}} i^{l-1} j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,1}(\theta, \phi). \quad (5.40)$$

Наконец, для выбранной круговой поляризации r -компонент полей имеем соотношение (5.35), поэтому в силу (5.33) $\chi = i\eta$.

Поле (5.41) удовлетворяет уравнениям Максвелла только приближённо, в главном порядке по малому параметру a/r . Реальное электромагнитное поле по сравнению с (5.41) имеет поправки, малые по параметру a/r . Длину a следует воспринимать как размер системы зарядов, производящих эту сферическую волну. Плотность потока энергии (4.32b) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому полный поток энергии, протекающий через сферу, окружающую источник, не зависит от её радиуса.

5-4.1.1 Монохроматическая сферическая расходящаяся волна

Перейдём в Фурье-представление по времени. предполагать, что движение зарядов является периодическим по времени с частотой ω (4.56). Тогда, по аналогии с (4.56), запишем

$$\mathbf{E} = 2 \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}), \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad (5.42)$$

Ниже мы будем работать в терминах комплексной амплитуды $\tilde{\mathbf{E}}$ и для удобства чтения опускать знак \sim .

На исследуемую систему не падают волны из бесконечности, поэтому вдалеке у нас есть только уходящее от системы излучение. Таким образом, например, функция χ представима в виде

$$\chi = \sum_{l=1}^{\infty} h_l^{(1)}(kr) \left(\sum_{m=-l}^{m=l} \chi_{l,m} \mathcal{Y}^{l,m}(\theta, \phi) = \chi_l(\theta, \phi) \right), \quad (5.43)$$

где $h_l^{(1)}(z)$ – сферическая функция Ганкеля 1-го рода порядка l , сравни с разложением (6.6). Аналогичный ряд может быть записан для функции η .

§5-5. Рассеяние электромагнитных волн на частицах

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, рассеивающуюся на некотором центре рассеяния. Для определённости будем полагать, что падающая волна распространяется в вакууме. Перейдём к комплексным амплитудам, введя огибающую $\tilde{\mathbf{E}}$ поля \mathbf{E} , см. (4.56). В дальнейшем знак ‘ \sim ’ для краткости мы будем опускать. В этом случае усреднённые по периоду колебаний значения потока и плотности энергии даны в (4.59). Падающее поле представим в виде $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_{\text{in},0} \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{r}]$. Тогда абсолютное значение плотности потока в падающей волне равно

$$J = \frac{c|\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2}{2\pi}. \quad (5.44)$$

Полное сечение рассеяния σ (*сечение взаимодействия*) определяется как отношение суммы мощности I_s , рассеивающейся на центре рассеяния, и мощности I_a , поглощающейся им, к плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{I_s}{J}, \quad \sigma_a = \frac{I_a}{J}. \quad (5.45)$$

Таким образом, мощность I есть мощность, отбираемая из падающей волны; σ_s называется *сечением рассеяния*, σ_a – *сечением поглощения*.

Рассмотрим сначала трёхмерный случай. Вдалеке от рассеивающего центра электромагнитное поле представляет из себя совокупность плоской и сферической расходящейся волн,

$$\begin{aligned} E^i &= E_{\text{in}}^i + E_s^i \rightarrow \\ &\rightarrow E_{\text{in},0}^i \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{r}] + \frac{f^{ij} E_{\text{in},0}^j}{r} \exp[ikr], \end{aligned} \quad (5.46)$$

где $|\mathbf{k}_{\text{in}}| = k$, а f^{ij} – амплитуда рассеяния; среди 9-ти пространственных матричных элементов амплитуды рассеяния есть только 4 независимых, поскольку у электромагнитных волн есть только две поляризации. Рассеянная центром рассеяния мощность I_s равна

$$I_s = \int d\mathbf{o} \frac{d\sigma_s}{d\mathbf{o}}, \quad d\sigma_s = r^2 (\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{o}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*],$$

где интегрирование производится по сфере радиуса r , единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Мы ввели *дифференциальное сечение рассеяния* $d\sigma_s$, которое есть отношение мощности рассеянной волны, уходящей от рассеивателя в телесный угол $d\mathbf{o}$, к плотности потока энергии падающей волны. Поглощаемая рассеивателем мощность равна

$$I_a = - \int r^2 d\mathbf{o} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]. \quad (5.48)$$

5-5.1 Оптическая теорема

Оптическая теорема связывает амплитуду рассеяния вперёд с полным сечением рассеяния, что может быть использовано для упрощения вычисления сечения рассеяния.

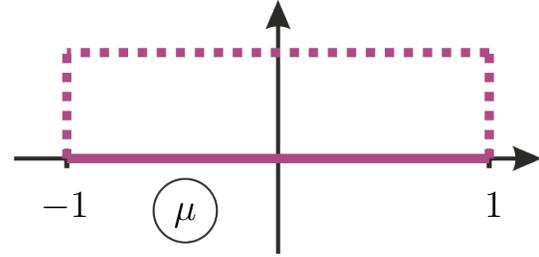


Рис. 5.3 Контур интегрирования по переменной $\mu = \cos \theta$. Сплошной линией обозначен исходный контур, пунктирной – изменённый.

Полный поток через поверхность большого радиуса r , нормированный на плотность падающего потока, по определению равен сечению поглощения, см. (5.48, 5.45). Преобразуем это выражение, используя разложение поля (5.46):

$$\sigma_a = -\sigma_s - \frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r^2 d\mathbf{o} ([\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{\text{in}}^*]) \mathbf{n},$$

где квадратичный вклад по полю падающей волны опущен, поскольку даёт нуль. Первое слагаемое в правой части соответствует излучению, производимому рассеивателем; второе слагаемое есть результат интерференции рассеянной волны с падающей. Теперь, используя равенства

$$\mathbf{H}_s = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_s], \quad \mathbf{H}_{\text{in}} = [\mathbf{n}_{\text{in}}, \mathbf{E}_{\text{in}}], \quad (5.49)$$

верные для плоских волн, см. (4.53), где $\mathbf{n}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{in}}/k$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \sigma_a = \\ &= -\frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r d\mathbf{o} f^{*ij} \exp(i(\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{n} - k)r) \\ &\quad \left\{ E_{\text{in},0}^i E_{\text{in},0}^{*j} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}})) - (\mathbf{E}_{\text{in},0} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E}_{\text{in},0}^* \cdot \mathbf{n}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

В процессе выкладок мы раскрыли двойное векторное произведение и использовали то, что $\mathbf{E}_{\text{in},0} \perp \mathbf{n}_{\text{in}}$.

Для того, чтобы взять интеграл по телесному углу в (5.50), перейдём к сферическим координатам $\{r, \theta, \varphi\}$, направив ось Oz по волновому вектору \mathbf{k}_{in} падающей волны, и введём переменную $\mu = \cos \theta$; тогда $\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{n} =$

$kr\mu$. Интеграл в правой части (5.50) имеет вид и при $r \rightarrow \infty$ оценивается как

$$r \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr(\mu-1)} g(\mu) = \frac{1}{ik} (g(1) - g(-1) \exp^{-2ikr}), \quad (5.51)$$

где $g(\mu)$ – функция, независящая от r . Действительно, поскольку $g(\mu)$ предполагается аналитической функцией, не имеющей особенностей на отрезке $[-1, 1]$, то мы можем деформировать контур интегрирования так, как показано на Рис. 5.3. При этом, в силу великости r , вклад в интеграл будут давать только боковые участки контура; в пределе большого r длина вертикальных участков контура может быть сколь угодно малой. Таким образом, приходим к правой части (5.51).

Вклад в (5.51), соответствующий отражению назад,

т.е. когда $\mu = -1$, равен нулю, поскольку $g(-1) = 0$. Действительно, первое слагаемое в фигурной скобке (5.50) равно нулю, поскольку $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}}) = \mu$, а второе слагаемое равно нулю, поскольку $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}_{\text{in},0}$ при $\mu = \pm 1$. Для оставшегося вклада интегрирование по углу φ даёт множитель 2π , поскольку интеграл определяется окрестностью направления $\theta = 0$. Поэтому (5.50) с учётом выражения для плотности падающего потока (5.44) сводится к

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f^{ij}(0) e^{*i} e^j], \quad e^i = \frac{E_{\text{in},0}^i}{|\mathbf{E}_{\text{in},0}|}. \quad (5.52)$$

Равенство (5.52) составляет содержание *оптической теоремы*: полное сечение рассеяния определяется мнимой частью амплитуды рассеяния вперёд.

СЛАБО РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

§6-1. Поле неподвижных зарядов и их взаимодействие с внешним постоянным электрическим полем

6-1.1 Закон Кулона

Продemonстрируем сперва, как вытекает закон Кулона из выражения (4.20) для запаздывающих потенциалов. Для этого предположим статическое распределение зарядов, так что в 4-токе (2.41) ненулевой является только ρ -компонента (и она не зависит от времени), тогда как ток $\mathbf{j} = 0$. Тогда единственным нетривиальным уравнением в (4.17) является уравнение Пуассона на скалярный потенциал

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (6.1)$$

Мы предполагаем, что эта задача решается в неограниченном пространстве, и вдалеке от рассматриваемой системы зарядов потенциал стремится к нулю. Тогда элементарной задачей, используя решение которой можно найти $\varphi(\mathbf{r})$, является уравнение на функцию Грина G_C

$$\Delta G_C(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int G_C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' \rho(\mathbf{r}').$$

Функцией Грина, удовлетворяющей указанным уравнению и граничным условиям на бесконечности, является

$$G_C(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \quad (6.2)$$

Решение для потенциала в явном виде есть

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (6.3)$$

Можно убедиться, что к этим же уравнениям приводит уравнение на запаздывающие потенциалы (4.20), записанное отдельно для временной и пространственных компонент. Согласно (3.47), электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) называют *законом Кулона*, а φ в данном случае — *электростатическим потенциалом*.

Пусть есть только два точечных заряда e_1 и e_2 , расположенных в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Тогда потенциал φ_1 и электрическое поле \mathbf{E}_1 , создаваемые первым зарядом, равны

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}, \quad \mathbf{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1 = \frac{e_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Сила \mathbf{F}_{21} (3.48), действующая со стороны первого заряда на второй, равна

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{e_1 e_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (6.5)$$

Собственно, это равенство принято называть *законом Кулона (Coulomb's law)*.

6-1.2 Поле системы статических зарядов

Рассмотрим систему статических зарядов, ограниченную в пространстве. Пусть характерный диаметр системы равен a , начало координат поместим внутрь этой системы. Мы будем интересоваться полем, создающимся этими зарядами на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a , $r \gg a$. Заряды будем нумеровать индексом α , положение заряда \mathbf{r}_α , величину заряда — e_α .

Потенциал поля рассматриваемой системы зарядов определяется формулой (6.3). В нашем случае интегрирование по \mathbf{r}' в (6.3) ограничивается областью $r' < a$, где только и находятся заряды. Если мы рассматриваем область $r > a$, то в этой области зарядовая плотность ρ равна нулю и согласно (6.1) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Кроме того, потенциал убывает при удалении от системы. Поэтому φ может быть разложен по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{r} + \frac{d^i n^i}{r^2} + \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{D^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} \mathcal{Y}_{lm} = \varphi_l \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi)$ — сферические гармоники (см., например, Olver и др., 2010, §14.30), а единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Первое и второе равенство в (6.6) представляют из себя разные, наиболее часто используемые формы записи членов разложения потенциала φ по обратным степеням r .

Поясним происхождение и устройство рядов (6.6).

Каждый тензор D симметричен по любой паре индексов. Кроме того, след по паре индексов может быть положен равным нулю,

$$D^{kk\dots} = 0. \quad (6.7)$$

Действительно, все члены ряда (6.6) могут быть получены l -кратным дифференцированием сферически-симметричного потенциала $1/r$ (поскольку результат дифференцирования также удовлетворяет уравнению Лапласа, но убывает как $1/r^{l+1}$):

$$\frac{(-1)^l}{l!} D^{ik\dots} \nabla_i \nabla_k \dots \frac{1}{r} = \frac{D^{ik\dots} n^i n^k \dots}{r^{l+1}}. \quad (6.8)$$

Любое ненулевое значение следа тензора D не изменяет левой части этого выражения, поскольку в области, не содержащей начало координат, $\Delta(1/r) = 0$. Для того, чтобы равенство (6.8) было верно, должно выполняться (6.7; в этом случае угловая зависимость правой части (6.8), как и должно быть, не имеет вклада от сферической гармоники порядка меньшего чем l . Коэффициент в левой части (6.8) можно установить следующим образом: пусть мы ищем значение всего выражения на оси Oz , где $x = y = 0$, и у нас ненулевым является только элемент со всеми индексами равными z . Тогда слева стоит выражение пропорциональное $(d/dz)^l(1/z)$, а справа должно быть $D^{zz\dots}/z^{l+1}$.

Зная все симметрии тензора D порядка l , мы можем комбинаторным подсчётом найти количество линейно независимых элементов в этом тензоре. Симметричность тензора по любой паре индексов сокращает количество линейно независимых с 3^l до $(l+2)(l+1)/2$. Будем менять теперь первые два индекса, зафиксировав все остальные. Мы обнаружим $6 = (2+2)(2+1)/2$ пока считающиеся независимыми варианты. Но если мы сложим три из них с одинаковыми значениями индексов, то получим нуль; и таких линейных связей $l(l-1)/2$ по числу вариантов в оставшихся $l-2$ индексах. Это означает, что во всём тензоре линейно независимых вариантов $2l+1 = (l+2)(l+1)/2 - l(l-1)/2$.

Тензора $D^{ik\dots}$ называются (электрическими) 2^l -польными моментами системы зарядов. В частности, \mathbf{d} — дипольным, D^{ik} — квадрупольным, а D^{ikl} — октупольными моментами.

Разумеется, между коэффициентами C_{lm} с фиксированным l и коэффициентами $D^{i\dots}$ с количеством индексов равным l существует невырожденная линейная связь. Поэтому число $2l+1$ есть и количество линейно независимых сферических гармоник $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi)$ этого порядка. Стандартом является $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi) \propto \exp(im\varphi)$, где целое число $-l \leq m \leq l$.

Ряды (6.6) соответствуют разложению в (6.3) по малому параметру a/r . Действительно, произведём разложение в подынтегральном выражении (6.3), полагая,

что $|\mathbf{r}'| \leq a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \left(1 - 2 \left(\frac{\mathbf{r}'}{r} \cdot \mathbf{n} \right) + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \quad (6.9) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} + \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2r^3} + \dots, \end{aligned}$$

Чем больше l , тем быстрее убывает соответствующий вклад в потенциал. Поэтому на далёких расстояниях от системы достаточно знать только первые коэффициенты в разложении (6.6) для приближённого описания распределения электрического поля в пространстве. Таким образом, тогда как система может содержать большое количество хаотически распределённых в пространстве зарядов, достаточно знать не более десятка интегральных параметров этого распределения, чтобы описать электрическое поле вдали от системы.

Обратимся к интерпретации членов разложения ряда (6.6), начав с нулевого члена разложения. Он соответствует сферически симметричному потенциалу, убывающему как $1/r$. Величина Q в (6.6) является полным зарядом системы,

$$Q = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}').$$

6-1.2.1 Дипольный момент

Величины d^i составляют вектор, который называется *дипольным моментом* системы. Сравнивая первый член разложения (6.3) по параметру $r'/r \ll 1$, см. (6.9), и определение (6.6) φ_l получаем, что дипольный момент системы зарядов равен

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{r^2} &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2} \Rightarrow \quad (6.10) \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{d} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}, \end{aligned}$$

согласно виду разложения (6.6).

Дипольный момент определён однозначно только в том случае, если полный заряд системы равен нулю, $Q = 0$. В противном случае значение дипольного момента зависит от выбора начала системы координат; в частности, существует система координат, в которой дипольный момент заряженной системы равен нулю.

Точечным электрическим диполем \mathbf{d} , расположенным в начале координат, по определению называют распределение зарядов

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}(\mathbf{d} \delta(\mathbf{r})). \quad (6.11)$$

Такое распределение зарядов обладает только дипольным моментом, так что в разложении (6.6) является ненулевым только вклад с $l = 1$. Электрическое поле точечного диполя

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})}{r^2} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3}. \quad (6.12)$$

Рисунок поля диполя ...

Предположим, что полный заряд системы равен нулю, то есть система электронейтральна. Однако по тем или иным причинам в ней произошло пространственное смещение положительных и отрицательных зарядов относительно друг друга. В таком случае возможно представить распределение заряда через *плотность электрической поляризации* $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Локальная плотность заряда в системе

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (6.13)$$

В частности, для точечного диполя (6.12) естественно поставить в соответствие

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r}).$$

При известной объёмной плотности зарядов ρ выбор вектора \mathbf{P} неоднозначен; его выбор должен соответствовать физическому смыслу, согласно которому $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ есть плотность дипольного момента. В частности, вне системы он должен обращаться в ноль. Из (6.10) вытекает, что дипольный момент системы

$$\mathbf{d} = \int d^3r \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (6.14)$$

6-1.2.2 Квадрупольный момент

Если и полный заряд системы и её дипольный момент относительно малы, то имеет смысл интересоваться также и *квадрупольным моментом* системы, задаваемым матрицей D^{ik} . Второй порядок разложения по малому параметру a/r в (6.3) равен (см. (6.9))

$$\frac{\varphi_2}{r^3} = \frac{1}{2} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})^2 - |\mathbf{r}'|^2)}{r^3} \Rightarrow \quad (6.15)$$

$$D^{ik} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3r^i r^k - |\mathbf{r}|^2 \delta^{ik})$$

в силу определения (6.6). Легко проверить, что необходимые свойства матрицы квадрупольного момента $D^{ki} = D^{ik}$ и $D^{ii} = 0$ выполняются. Всего существует 5 независимых параметров, определяющих квадрупольный момент системы.

Значение квадрупольного момента не зависит от выбора начала системы координат только в том случае, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

Если распределение зарядов в системе осесимметрично, то соответствующей симметрией обладает тензор квадрупольного момента. Направим ось Oz по оси симметрии, тогда тензор дипольного момента будет иметь вид

$$\|D^{ik}\| = \begin{pmatrix} -D/2 & 0 & 0 \\ 0 & -D/2 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Величину D в этом случае называют просто квадрупольным моментом.

6-1.3 Электростатическая энергия

Рассмотрим систему неподвижных зарядов, которую можно считать бесконечно удалённой от других зарядов. Тогда полная энергия системы равна

$$E_{\text{tot}} = \int d^3r T^{00} = Mc^2 + E,$$

см. (4.29), где M — суммарная масса покоя всей системы, а E — энергия электрического поля \mathbf{E} всей системы, также называемая *электростатической энергией*. Пусть распределение зарядов в пространстве описывается зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Тогда электростатическая энергия E может быть записана в следующих видах:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3r \rho \varphi = \quad (6.17) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \end{aligned}$$

Первое выражение соответствует выражению для T^{00} -компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (4.32а) и тому, что полный тензор энергии-импульса является прямой суммой вкладов от частиц и электромагнитного поля, см. (4.29).

Второе выражение в (6.17) получено из первого путём использования уравнения Пуассона (6.1) и интегрирования по частям. Этот вид записи электростатической энергии соответствует выражению для гамильтониана точечной частицы в электромагнитном поле (3.38). Множитель $1/2$ в (6.17) компенсируется тем, что энергия взаимодействия каждой пары зарядов учитывается 2 раза. Двойной учёт энергии взаимодействия более явно демонстрирует третья форма записи в (6.17), которая может быть получена путём подстановки φ в виде решения (6.3).

6-1.3.1 Классический радиус электрона

Если формально посчитать электростатическую энергию точечного заряда, то мы получим расходящийся на малых масштабах интеграл в первом варианте записи (6.17). Реально в физике такой проблемы не существует, поскольку в силу квантовых эффектов все частицы на малых расстояниях описываются локализованной в конечном объёме волновой функцией. А если зарядовая плотность остаётся конечной во всём пространстве, то из третьей формы записи в (6.17) следует, что электростатическая энергия также является конечной. Тем не менее, формально в классической релятивистской электродинамике рассматриваются только точечные частицы, что делает эту теорию неприменимой на малых масштабах и, вообще говоря, содержащей внутренние противоречия.

Отойдём от строгости классической электродинамики и представим электрон как полую сферу радиуса r_0 , по которой равномерно распределён его заряд. Скажем,

что энергия покоя электрона $m_e c^2$ есть чисто электростатическая энергия, тогда

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (6.18)$$

Построенная таким образом величина r_0 называется “классическим радиусом электрона”, или *радиусом Лоренца*, а также *длиной томсоновского рассеяния* (*the classical electron radius, the Lorentz radius, or the Thomson scattering length*). Подчеркнём, однако, что самостоятельного физического смысла длина r_0 не имеет.

6-1.4 Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле

Теперь зададимся вопросом — какова энергия E_E локализованной в пространстве системы неподвижных зарядов во внешнем стационарном электрическом поле? Как мы увидим, в выражение для приближённого значения этой энергии входят уже введённые мультипольные моменты.

Пусть все заряды разделены на две части,

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_{\text{ext}}, \quad (6.19)$$

где ρ_{tot} — полная плотность зарядов, ρ — плотность зарядов в интересующей нас системе, а ρ_{ext} — плотность тех ‘внешних’ зарядов, которые создают электрическое поле \mathbf{E} , действующее на интересующую нас систему. Мы будем предполагать, что положение ‘внешних’ зарядов фиксировано и разделено в пространстве с зарядами системы.

Нас интересует энергия взаимодействия E_E ‘внешних’ зарядов и зарядов системы. Из (6.17) следует, что эта энергия равна

$$\begin{aligned} E_E &= \int \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') \frac{d^3 r' d^3 r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) = \int d^3 r \varphi_{\text{ext}} \rho = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где мы обозначили через φ_{ext} электростатический потенциал, создаваемый ‘внешними’ зарядами, \mathbf{E}_{ext} — электрическое поле внешних зарядов, а \mathbf{E}_s — поле, создаваемое исследуемой системой зарядов, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\text{grad } \varphi_{\text{ext}}, \quad \text{div } \mathbf{E}_s = 4\pi\rho.$$

Выражение (6.20) может быть также получено из выражения для потенциальной энергии точечного заряда (3.38).

6-1.4.1 Энергия поляризованного тела во внешнем поле

Пусть полный заряд системы равен нулю, так что объёмная плотности заряда представима через поляриза-

цию \mathbf{P} , см. (6.13). В таком случае энергия тела во внешнем поле может быть записана в виде

$$E_E = - \int d^3 r (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \quad (6.21)$$

который продолжает цепочку равенств (6.20).

6-1.4.2 Мультипольное разложение энергии системы зарядов во внешнем поле

Сейчас мы предполагаем, что ‘внешние’ заряды находятся на расстоянии от системы, большом по сравнению с её характерным диаметром a . Поэтому потенциал φ_{ext} медленно меняется внутри системы. Выберем какую-либо точку \mathbf{R} , находящуюся внутри системы зарядов, и пусть вектор \mathbf{r} — отклонение от этой точки. Тогда потенциал φ_{ext} можно разложить в ряд

$$\varphi_{\text{ext}} = \varphi + \varphi_i r^i + \frac{1}{2} \varphi_{ik} r^i r^k + \frac{1}{6} \varphi_{ikl} r^i r^k r^l + \dots \quad (6.22)$$

где, например, φ_{ik} означает 2-х кратную производную от потенциала φ_{ext} по направлениям ‘ i ’ и ‘ k ’, взятую в точке \mathbf{R} . Симметричные свойства тензоров φ совпадают с симметричными свойствами тензоров мультипольных моментов D (6.6). Действительно, во-первых φ симметричны по перестановкам индексов, поскольку результат не зависит от порядка дифференцирования. Во-вторых, свёртка по любой паре индексов в любом коэффициенте разложения даёт нуль, поскольку в области расположения системы зарядов потенциал ‘внешних’ зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi_{\text{ext}} = 0$. Вообще, разложение (6.22) аналогично разложению (6.6), но только в текущем случае разложение потенциала регулярно в нуле.

Теперь в последнем равенстве (6.20) остаётся проинтегрировать по \mathbf{r} каждый член разложения (6.22). При этом получаются как раз мультипольные моменты, так что в итоге энергия взаимодействия записывается в виде ряда

$$E_E = \varphi Q - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) + \frac{1}{6} D_{ik} \varphi_{ik} + \frac{1}{90} D_{ikl} \varphi_{ikl} + \dots \quad (6.23)$$

6-1.5 Сила и момент сил, действующих на диполь

Найдём силу и момент сил, действующие на систему зарядов как целое со стороны внешнего электрического поля. Будем считать систему электро нейтральной, и рассмотрим самую простую ситуацию, когда распределение зарядов в системе достаточно характеризовать её дипольным моментом \mathbf{d} . Для лаконичности записи внешнее по отношению к системе электрическое поле лишим индекса, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} \rightarrow \mathbf{E}.$$

Положение системы как целого определяется вектором \mathbf{R} . Система может не только двигаться поступательно, но и вращаться в пространстве. Последнее приводит к вращению её дипольного момента \mathbf{d} . Внутреннюю структуру системы мы считаем неизменной.

Лагранжиан системы как целого во внешнем поле может быть выделен из полного лагранжиана:

$$L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{d}) = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} - E_{\mathbf{E}} + \text{“}\rho^2\text{”} + \text{“}\rho_{\text{ext}}^2\text{”} \quad (6.24)$$

где M — полная масса системы, а потенциальная энергия диполя во внешнем поле

$$E_{\mathbf{E}} = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

Мы использовали нерелятивистское выражение для кинетической энергии, поскольку речь идёт о статическом распределении зарядов. Два последних вклада, записанные символически и соответствующие электростатической энергии отдельных подсистем, остаются постоянными, поскольку внутренняя конфигурация зарядов системы, как и ‘внешних’ зарядов, остаётся неизменной.

Сила \mathbf{F} , действующая на диполь как целое со стороны внешнего поля \mathbf{E} , равна (магнитное поле отсутствует, поэтому обобщённый импульс \mathbf{P}_{gen} совпадает с

просто импульсом \mathbf{P})

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\text{grad } E_{\mathbf{E}} = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Последнее равенство было написано, поскольку

$$0 = [\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}] = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E},$$

и подразумевается, что дипольный момент \mathbf{d} не зависит от координаты.

Для того, чтобы получить момент сил, действующий на диполь, представим вариацию координаты \mathbf{r} каждого заряда, составляющего диполь, в виде $\delta \mathbf{r} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, где вектор углового поворота $\delta \boldsymbol{\omega}$ зависит только от времени. В таком случае вариация дипольного момента всей системы равна $\delta \mathbf{d} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}]$. Момент сил \mathbf{M} , действующий на диполь, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \\ &= \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d})}{\delta \boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

где, напомним, \mathbf{L} — момент импульса системы.

§6-2. Поле постоянных токов и их взаимодействие с внешним постоянным магнитным полем

Рассмотрим систему постоянных во времени токов, описывающуюся распределением тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. В таком случае токи являются бездивергентными, $\text{div } \mathbf{j} = 0$, поскольку объёмная плотность зарядов в системе по нашему предположению не изменяется со временем. Мы будем считать, что статические объёмные заряды в системе отсутствуют.

Будем исследовать электромагнитное поле, индуцированное этой системой. Электрическое поле равно нулю, что можно увидеть, записав 4-потенциал в калибровке Лоренца: в ней скалярный потенциал равен нулю, $\varphi = 0$, а вектор-потенциал не зависит от времени, см. (3.47). Таким образом, система стационарных токов создаёт вне себя только статическое магнитное поле \mathbf{B} , удовлетворяющее уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (6.27)$$

Соотношение, позволяющее определить магнитное поле по распределению токов в пространстве, называется *законом Биб-Савара-Лапласа* и получено в Пункте 6-2.1.

Также как это было сделано в Пункте 6-1.2 для системы неподвижных зарядов, магнитное поле вокруг си-

стемы токов возможно аппроксимировать на далёких от неё расстояниях, используя только несколько интегральных параметров пространственного распределения токов внутри системы. Действительно, вне системы токов пустота, поэтому там магнитное поле потенциально, поскольку удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Поскольку оно и бездивергентно, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, то потенциал магнитного поля φ_B удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_B, \quad \Delta \varphi_B = 0. \quad (6.28)$$

Потенциал φ_B убывает на далёких расстояниях от системы токов. Поэтому он представим в виде ряда, аналогичного ряду для потенциала статического электрического поля (6.6):

$$\varphi_B = \frac{\mu^i n^i}{r^2} + \frac{\mathbf{m}^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{\mathbf{m}^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{Bl}}{r^{l+1}}. \quad (6.29)$$

Нулевой член разложения ($l = 0$) в этом ряду отсутствует, поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$ во всём пространстве (иными словами, у системы отсутствует магнитный заряд). Вектор $\boldsymbol{\mu}$ называется вектором магнито-дипольного момента системы.

Аналогия между электростатикой и магнитостатикой распространяется и на поведение системы токов во внешнем магнитном поле, см. Пункт 6-1.4.

В рассуждениях мы предполагаем, что система токов обладает пространственной конфигурацией, не зависящей от времени. Тем не менее, все результаты можно обобщить на случай, когда система токов (движущихся зарядов) хотя формально не стационарна, но возможно произвести усреднение по времени, получив в среднем стационарную систему токов. В таком случае под плотностью тока \mathbf{j} следует понимать усреднённую по времени плотность тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \langle \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \rangle, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (6.30)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени, а индекс a нумерует заряды в системе. Поскольку ток \mathbf{j} стационарен и ограничен в пространстве, его дивергенция равна нулю.

6-2.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Получим закон Био-Савара-Лапласа (*Biot-Savart law*). Для этого предположим, что в пространстве нет нескомпенсированных зарядов, $\rho = 0$, а токи постоянны $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Уравнение (6.27) удобнее решать через вектор-потенциал в калибровке Лоренца:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.31)$$

см. общее выражение (4.20) для запаздывающих потенциалов и сравни с (6.1,6.3). Для того, чтобы найти магнитное поле, надо воспользоваться $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, см. (3.47). В индексном виде получаем

$$\begin{aligned} B^i(\mathbf{r}) &= \epsilon_{ikl} \frac{\partial A^l}{\partial r^k} = \frac{\epsilon_{ikl}}{c} \int j^l(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r^k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\epsilon_{ikl} j^l(\mathbf{r}') (r'^k - r^k) d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Это же самое, записанное в векторных обозначениях, принимает вид закона Био-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.32)$$

6-2.2 Магнито-дипольный момент

В этом Пункте мы покажем, что магнитное поле \mathbf{B} , создающееся системой стационарных токов на далёком от себя расстоянии, может быть представлено как поле магнитного диполя $\boldsymbol{\mu}$. Свойства этого диполя аналогичны свойствам электрического диполя, но создаёт и взаимодействует магнитный диполь с магнитным полем.

Исследуем формулу (6.31) на далёких расстояниях, при $r \rightarrow \infty$. Сперва заметим, что постоянным и замкнутым токам соответствует неподвижный полный заряд

системы: действительно, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, то изменение во времени дипольного момента системы

$$\left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha}^k \right\rangle = \int d^3 \mathbf{r}' j^k(\mathbf{r}') = \int d^3 \mathbf{r}' \partial_i (r'^k j'^i) = 0,$$

где $j'^i = j^i(\mathbf{r}')$. Поэтому при разложении (6.31) в ряд по малому параметру r'/r нулевой член разложения даёт нуль, а главный не исчезающий вклад производит первый член разложения:

$$A^i(\mathbf{r}) = \frac{n^k}{r^2} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{j'^i r'^k}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.33)$$

Стоящий здесь интеграл есть *магнито-дипольный момент* $\boldsymbol{\mu}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ikl} \mu^l &= \mu^{ik} = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r}' r^i j^k, \quad \mu^{ik} = -\mu^{ki}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c} \int d^3 \mathbf{r}' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \langle [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] \rangle, \end{aligned} \quad (6.34)$$

см. определения (9.30). В антисимметричности исходного интеграла в (6.33) можно убедиться, снова воспользовавшись условием бездивергентности тока $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$:

$$\int d^3 \mathbf{r}' (r^i j^k + r^k j^i) = \int d^3 \mathbf{r}' \partial_m (r^i r^k j^m) = 0.$$

В итоге получаем, что вектор-потенциал в калибровке Лоренца, магнитное поле и скалярный потенциал (6.29) системы токов на далёком от неё расстоянии задаются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]}{r^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad \varphi_{B1} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}). \quad (6.35)$$

Выражение для магнитного поля совпадает с полем электрического диполя (6.12) с точностью до замен $\boldsymbol{\mu} \leftrightarrow \mathbf{d}$, $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $\varphi_B \leftrightarrow \varphi$.

Если систему имеет смысл представить в виде точечного объекта, то распределение токов в ней следует моделировать *точечным магнитным диполем*. Будучи расположен в начале координат, он имеет распределение токов

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -[\boldsymbol{\mu} \times \nabla] \delta(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} (c \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{r})). \quad (6.36)$$

Легко убедиться, что магнитный момент (6.34) такой системы токов равен $\boldsymbol{\mu}$. Для точечного диполя выражения (6.35) формально применимы во всём пространстве.

6-2.3 Потенциальная энергия системы токов в магнитном поле

Рассмотрим систему постоянных токов, образующую из себя магнитный диполь. Эта система помещена во внешнее слабо неоднородное магнитное поле \mathbf{B} , создающееся токами расположенными вдали от исследуемой системы

(на расстоянии R) и потому слабо меняющееся на масштабе порядка размера системы $\xi \ll R$. Наша цель – посчитать силу и момент сил, действующую на эту систему токов со стороны поля \mathbf{V} . Мы будем также предполагать, что характерное период движения зарядов внутри системы τ мало по сравнению с характерным временем T , $\tau \ll T$, описывающем движение системы как целого.

Из (3.36) следует, что полный лагранжиан рассматриваемой системы представим в виде

$$L = L_0 + L_B, \quad L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a),$$

где L_0 – лагранжиан системы в отсутствии магнитного поля. Вклад L_B после усреднения по времени может быть переписан в виде потенциальной энергии системы токов во внешнем магнитном поле,

$$L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a \langle (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a) \rangle = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \quad (6.37)$$

где \mathbf{j} – ток в исследуемой системе. Вектор-потенциал \mathbf{A} можно в главном приближении считать линейной функцией координат в области расположения рассматриваемой системы токов, представив его в виде $A^i = A^i(0) + r^k \partial_k A^i$ (мы поместили начало координат внутрь системы). В результате придём к тому, что

$$L_B = \frac{\partial_k A^i}{c} \int d^3\mathbf{r} r^k j^i = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad (6.38)$$

см. (6.34).

Следует, однако, ещё убедиться, что эффективный вклад $-L_B$ (6.37) в лагранжиан действительно можно понимать как потенциальную энергию системы токов в магнитном поле. Дело в том, что в левой части уравнения Лагранжа также возникает необходимость произвести усреднение по быстрому движению частиц внутри системы. Выпишем усреднённое уравнение движение системы по времени

$$\frac{d}{dt} \sum_a \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\rangle = \sum_a \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \right\rangle \Rightarrow \quad (6.39)$$

$$\sum_a \frac{\langle d\mathbf{p}_a \rangle}{dt} + \sum_a \frac{\langle e_a d\mathbf{A}(\mathbf{r}_a) \rangle}{c dt} = \sum_a \left\langle \frac{e_a}{c} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a) + e_a \mathbf{E} \right\rangle.$$

Вопрос вызывает второе слагаемое в левой части уравнения движения, именно усреднённый по времени вклад в него от быстрого движения заряда внутри системы. Этот вклад, однако, параметрически мал. Он оценивается как $(\tau/T)\mu B/R$, т.е. содержит дополнительную малость τ/T по сравнению с первым вкладом в правой части, оцениваемым как $\mu B/R$, см. (6.38). Поэтому уравнение после проведения суммирования по частицам и усреднения по времени приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \text{grad } L_B + \dots \quad (6.40)$$

где мы воспользовались (6.38); \mathbf{P} есть полный импульс системы, а многоточием обозначена сила Лоренца (3.48), действующая на систему со стороны электромагнитного поля как на единый заряд. Итак, вклад L_B в лагранжиан действительно можно трактовать как потенциальную энергию системы токов в магнитном поле.

Теперь мы можем провести те же рассуждения, которые были проделаны для электрического диполя, см. Пункт 6-1.5. Сила \mathbf{F} и момент сил \mathbf{M} , действующие на систему токов малого размера со стороны внешнего магнитного поля, равны

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad (6.41)$$

по аналогии с (6.25) и (6.26).

Операцию усреднения по времени можно производить на любом этапе решения задачи. В Пункте 11-6.0.1 усреднение произведено над силой Лоренца (3.48), в результате чего, как и должно быть, получаются те же выражения (6.41).

6-2.4 Теорема Лармора

Рассмотрим систему зарядов, в которой все заряды имеют одинаковое отношение заряда к массе e_α/m_α . Скорость зарядов в системе предполагаются нерелятивистскими. Для такой системы вектор магнитодипольного момента (6.34) пропорционален вектору механического момента \mathbf{L} (4.35): поскольку электрический ток $\mathbf{j} = (e/m)\vec{p}$, то

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}. \quad (6.42)$$

Коэффициент пропорциональности $e/(2mc)$ называется *гиромагнитным отношением*.

Пусть теперь эта система зарядов помещена в однородное магнитное поле \mathbf{B} . Тогда на неё действует момент сил \mathbf{M} согласно (6.41), так что движение системы как целого описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{eB}{2mc} [\mathbf{L} \times \mathbf{b}], \quad (6.43)$$

где единичный вектор $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ направлен вдоль магнитного поля. Уравнение (6.43) описывает прецессию момента с угловой частотой

$$\boldsymbol{\omega}_B = -\frac{eB}{2mc} \mathbf{b}. \quad (6.44)$$

В заключении (6.44) состоит *теорема Лармора*: если все заряды в системе имеют одинаковое отношение заряда к массе e_α/m_α , то при наложении на систему однородного магнитного поля \mathbf{B} , она прецессирует с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_B$. Иными словами, система зарядов будучи помещённой в магнитное поле \mathbf{B} , движется так, как если бы она находилась во системе координат, вращающейся с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}_B$. Теорема Лармора является приближённым равенством, условием её

применимости является медленность прецессии: частота прецессии должна быть малой по сравнению с частотой нерелятивистского квази-периодического движения зарядов в системе.

Полезно доказать теорему Лармора без перехода к уравнениям движения, используя непосредственно только выражения для функций Лагранжа. Пусть в инерциальной системе координат K скорость частицы № α равна \mathbf{v}_α . Тогда в (неинерциальной) системе координат K^Ω , вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ относительно начала координат, скорость частицы оказывается равной

$$\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_\alpha - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha].$$

Лагранжиан системы зарядов во вращающейся системе координат

$$L_\Omega = \sum_\alpha \frac{m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha])^2}{2} - U,$$

где U — потенциальная энергия частиц. Если действие

сил инерции относительно слабо, $|[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]| \ll v_\alpha$, то этот лагранжиан можно разложить до первого порядка по скорости вращения,

$$L_\Omega \approx \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha]) - U. \quad (6.45)$$

С другой стороны, вернёмся в инерциальную систему координат и включим однородное магнитное поле \mathbf{B} . При записи лагранжиана (3.36) в нерелятивистском пределе выберем калибровку $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$:

$$L_B = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_\alpha e_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]) - U \quad (6.46)$$

Сравнивая (6.45,6.46) приходим к выводу, что если отношение заряда к массе e_α/m_α у всех частиц одинаково, то движение в магнитном поле становится идентичным с движением без него, но во вращающейся системе координат, если выполняется пропорция (6.44).

§6-3. Дипольное и квадрупольное излучение

В § 6-1 была построена аппроксимация электрического поля, создаваемого локализованной системой статических зарядов на далёком от неё расстоянии. Затем в § 6-2 была рассмотрена система стационарных токов; исследовалось магнитное поле, которое она создаёт на далёких расстояниях.

Рассмотрим теперь систему движущихся нерелятивистских зарядов и выясним, какое электромагнитное поле эта система создаёт вокруг себя. Пусть характерный размер системы равен a , а характерная скорость зарядов в ней равна v . Мы интересуемся полем, которое создают эти заряды на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a .

На близких расстояниях до системы распределение электрического поля может быть приближено через мультипольное разложение, описанное в § 6-1. Это описание годится, пока время распространения сигнала от системы до точки наблюдения r/c (где r — расстояние от системы до наблюдателя) мало по сравнению с временем существенного изменения распределения зарядов внутри системы, которое может быть оценено как a/v . Эта область расстояний называется *ближней зоной* (*near-field region*). На этих же расстояниях магнитное поле возможно вычислить через уравнения магнито-статики, как это было проделано в § 6-2. Однако на больших расстояниях, когда $r \gg ca/v$, статические выражения для электромагнитного поля становятся неприменимыми. Действительно, распределение зарядов и токов успеет заметно измениться, пока сигнал дойдёт от системы до точки наблюдения. Эта область называется *волновой или дальней зоной* (*far field region*).

Итак,

$$\text{ближняя зона : } r \ll \frac{c}{v} a, \quad (r \gg a),$$

$$\text{волновая (дальняя) зона : } r \gg \frac{c}{v} a \quad (6.47)$$

В волновой зоне электромагнитное поле сильно отличается от того, которое предсказывает статическая теория. Оно определяется уходящими электромагнитными волнами, которые излучает система неравномерно движущихся зарядов.

Как и в §§ 6-1,6-2, построение теории производится путём разложения электромагнитного поля по малому отношению a/r . Ниже мы увидим, что этот параметр работает в ближней зоне, тогда как в волновой зоне это разложение переходит в разложение по малому параметру $v/c \ll 1$. Таким образом, для возможности построения теории заряды должны двигаться с нерелятивистскими скоростями, $v/c \ll 1$. Целью этого параграфа является исследование радиационных эффектов в наименьших порядках по отношению v/c . Будут проанализированы электро-дипольный, магнито-дипольный и квадрупольный вклады в излучение.

Процедуру разложения по малому размеру системы (или по малой скорости внутри системы, которая также пропорциональна размеру системы) надо применять к общему выражению (4.20) для запаздывающих потенциалов

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{j^\mu(t_r, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}.$$

Уже выписано разложение (6.9) для обратного расстояния $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, для дальнейших вычислений будет полезным выписать также разложение и для значения 4-тока j^μ в прошлом:

$$j^\mu(t_r, \mathbf{r}') = \left(1 + \left(\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2cr} \right) \partial_t + \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2c^2} \partial_t^2 + \dots \right) j^\mu(t_R, \mathbf{r}'),$$

где $t_R = t - r/c$ — время распространения сигнала от центра системы до наблюдателя, а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор направленный от системы (источника) к точке наблюдения.

6-3.1 Поле электрического диполя

Выделим теперь в (4.20) слагаемые, пропорциональные дипольному моменту (6.10), используя выписанные разложения по координате смещения внутри системы зарядов. Вектор-потенциал в калибровке Лоренца имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(t_R), \quad (6.48)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{r}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \partial_t \mathbf{d} = \int d^3 r' \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}')$$

Определение дипольного момента \mathbf{d} совпадает с данным статическим выражением (6.10). Здесь первый вклад в скалярный потенциал φ соответствует потенциалу статического диполя (6.6,6.10); остальные вклады в 4-потенциал возникают, если диполь изменяется во времени. В действительности в разложении (4.20) мы удержали члены первого порядка малости по малым безразмерным параметрам

$$\frac{a}{r} \ll 1, \quad \text{и} \quad \frac{a \partial_t}{c} \sim \frac{v}{c} \ll 1. \quad (6.49)$$

Отсюда видно, что для возможности проведения разложения требуется в том числе условие медленности движения зарядов, $v \ll c$.

Используем теперь (6.48) для получения выражения для электромагнитного поля. Электрическое поле (напомним, что при дифференцировании по координате надо дифференцировать в том числе и $\mathbf{d}(t_R)$ как сложную функцию)

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\mathbf{d}}}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r}. \quad (6.50)$$

Первое слагаемое в этой сумме есть поле статического диполя, см. (6.12). Именно этот вклад оказывается ведущим в ближней зоне. В выражении для магнитного поля (поскольку диполь в нашем рассмотрении уже

точный объект, то можно пользоваться выражением $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ (4.76), связывающим магнитное с электрическим полем)

$$\mathbf{B} = -\frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]}{cr^2} - \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} \quad (6.51)$$

первое слагаемое — поле (элемента) постоянного тока, и, соответственно, совпадает выражением Био-Савара-Лапласа (6.32). В ближней зоне этот вклад является доминирующим.

6-3.1.1 Излучение

В волновой зоне ведущими в выражениях для электромагнитного поля (6.50,6.51) оказываются последние слагаемые в правых частях. Соотношение между электрическим и магнитными полями соответствует плоской волне (4.53), распространяющейся в направлении от источника. Амплитуда этих вкладов убывает обратно пропорционально расстоянию до источника, а временная зависимость входит через $t_R = t - r/c$. Таким образом, в волновой зоне электромагнитное поле представляет из себя расходящуюся волну (5.41). Угловая симметрия волны определяется типом излучения, в данном случае электро-дипольным.

Проведём вычисления. Плотность потока энергии, связанного с уходящими от источника волнами (вектор Пойтинга (4.32b)) в волновой зоне

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]^2}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n}, \quad (6.52)$$

$$\frac{dI_d}{do} = r^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{(\dot{\mathbf{d}}(t_R))^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta,$$

где dI_d — интенсивность излучения, уходящая в элемент телесного угла do , а θ — угол между вектором \mathbf{d} и направлением наблюдения \mathbf{n} . Таким образом, диполь не изучает в направлении своего ускорения. Вычисляя интеграл по всем сферическим углам находим, что полная интенсивность излучения, проходящая через сферу радиуса r окружающую источник, равна

$$I_d(t) = r^2 \int do (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{2(\ddot{\mathbf{d}}(t_R))^2}{3c^3}. \quad (6.53)$$

Отметим два общих момента на примере электро-дипольного излучения. Для выделения частей поля, соответствующих уходящему излучению, в разложении (4.20) надо удерживать только нулевой порядок по малому параметру a/r (6.49). Соответственно, поле уходящих волн зависит от второй временной производной дипольного момента. Поэтому, во-первых, здесь нет неопределённости, зависящей от выбора начала системы координат, которая имела место быть при вычислении статического дипольного момента при ненулевом полном заряде, поскольку эта неопределённость добавляет в дипольный момент константу, не зависящую от времени.

Во-вторых, излучение возникает только в том случае, если заряды движутся с ускорением. Эти рассуждения обобщаются на любой тип излучения.

Рассмотрим частный случай, когда заряды в системе совершают периодическое движение с частотой ω , так что

$$\mathbf{d} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{d}_0 \exp(-i\omega t)), \quad (6.54)$$

где \mathbf{d}_0 — комплексная амплитуда колебаний диполя. В таком случае комплексные амплитуды полей

$$\mathbf{B} = k^2 \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]}{r}, \quad (6.55)$$

$$\mathbf{E} = (1 - ikr) \frac{3(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}_0}{r^3} - \frac{k^2[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]]}{r},$$

где волновой вектор $k = \omega/c$. Средняя по периоду колебаний интенсивность излучения в единицу телесного угла и полная интенсивность излучения равны

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*]), \quad I_d = \frac{4\omega^4 |\mathbf{d}_0|^2}{3c^3}. \quad (6.56)$$

Если же диполь излучал конечное время, то полную излученную энергию E можно представить как арифметическую сумму от вкладов отдельных монохроматических волн, см. аналогичное рассуждение (4.65). Разложим закон изменения дипольного момента во времени по Фурье-гармоникам,

$$\mathbf{d}_\omega = \int dt e^{i\omega t} \mathbf{d}(t).$$

Ввиду линейности зависимости поля излучения от тока в источнике, каждая Фурье-компонента \mathbf{d}_ω возбуждает Фурье-компоненту электромагнитного поля в соответствии с законом (6.55). Поэтому сумма по Фурье-гармоникам поля эквивалентна сумме по Фурье-гармоникам \mathbf{d}_ω . Полная излученная энергия

$$E \equiv \int dt I_d = \frac{2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\ddot{\mathbf{d}}|^2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} E_\omega, \quad (6.57)$$

где величина E_ω называется спектральной плотностью излученной энергии и равна

$$E_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2, \quad (6.58)$$

сравни со спектральным разложением энергии в плоской волне (4.66).

6-3.2 Магнито-дипольный и квадрупольный вклады

Как и электро-дипольный момент, изменяющиеся во времени магнито-дипольный и/или квадрупольный моменты системы также проводят к излучению системой

электромагнитных волн. Оба этих вклада в электромагнитное поле имеют один и тот же порядок — второй — по малым параметрам (6.49). Поэтому отдельной задачей является разделение этих вкладов для установления их соответствия с магнито-дипольным и квадрупольными моментами системы.

6-3.2.1 Магнито-дипольное излучение

Для того, чтобы выделить вклад от магнито-дипольного момента, рассмотрим вклад второго порядка по малым параметрам (6.49) в вектор-потенциал \mathbf{A} :

$$A^k = n^i \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{1}{r} \int d^3 r' \frac{r'^i j'^k}{c}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}'). \quad (6.59)$$

В отличие от § 6-2, сейчас мы рассматриваем нестационарную ситуацию. Поэтому в общем случае $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$, и мы не можем непосредственно воспользоваться определением магнитного момента (6.34). Для того, чтобы выделить мгновенное значение магнитного момента, разделим тензор второго порядка, стоящий под знаком интеграла, на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{r'^i j'^k}{c} = \frac{r'^i j'^k + r'^k j'^i}{2c} + \frac{r'^i j'^k - r'^k j'^i}{2c}.$$

При интегрировании по $d^3 r'$ второго слагаемого в правой части мы получим мгновенное значение магнито-дипольного момента μ^{ik} . Интеграл по $d^3 r'$ от первого слагаемого можно представить как полную производную по времени. В результате вектор-потенциал оказывается представим в виде

$$A^k = \frac{n^i}{2cr} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \partial_t \int d^3 r' r'^i r'^k \rho' + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]^k}{r}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t_R). \quad (6.60)$$

Выражение (6.60) переходит в выражение для вектор-потенциала статического магнитного диполя (6.35) в ближней зоне.

Удержим пока что в (6.60) только второй, магнито-дипольный, вклад. Используя (3.47) получаем, что электромагнитное поле

$$\mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3(\dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\mu}}}{c^2 r^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r},$$

$$\mathbf{E} = \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r^2} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r}. \quad (6.61)$$

Видна зеркальная симметрия между полями электрического диполя (6.50,6.51) и полями магнитного диполя (6.61).

6-3.2.2 Квадрупольное излучение

Нам осталось учесть вклад всего второго порядка разложения в скалярный потенциал

$$\varphi = \frac{n^i n^k}{2r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) D^{ik} + \frac{n^i n^k}{2c^2 r} \partial_t^2 \int d^3 r' r'^i r'^k \rho', \quad (6.62)$$

где D^{ik} есть квадрупольный момент системы (6.15) в данный момент времени, и часть вклада этого порядка в вектор-потенциал, выписанную в первой строчке (6.60). Результат в действительности зависит только от квадрупольного момента системы D^{ik} . Чтобы показать это формально, совершим калибровочное преобразование (4.1) с

$$f = -\frac{\partial_t}{6cr} \int d^3 r' r'^2 \rho(t_R, \mathbf{r}'), \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \quad \text{at } r > a,$$

которое, отметим, не нарушает условие калибровки Лоренца вне излучающей системы (внутри системы это калибровочное преобразование вносит в 4-потенциал нефизическую особенность в нуле). Теперь, используя определение квадрупольного момента (6.15) получаем, что исследуемая часть 4-потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\partial_t}{cr} + \frac{\partial_t^2}{3c^2} \right) \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r}, \\ A^i &= \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{n^k \partial_t D^{ik}}{6cr}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Первое слагаемое в выражении для скалярного потенциала φ соответствует полю статического квадрупольного момента, см. (6.6). На далёких расстояниях электрическое поле представляет из себя расходящуюся сферическую волну

$$E^l = \left(-\frac{\partial_t}{c} \right) \frac{\delta_\perp^{li} n^k \partial_t^2 D^{ik}}{6c^2 r}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (6.64)$$

где $\delta_\perp^{li} = \delta^{li} - n^l n^i$. Интенсивность излучения в единицу телесного угла

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{144\pi c^5} \left(n^i n^k \ddot{D}^{il} \ddot{D}^{kl} - (n^i n^k \ddot{D}^{ik})^2 \right). \quad (6.65)$$

Дипольный, квадрупольный и магнито-дипольный вклады в излучение интерферируют между собой. Для того, чтобы найти интенсивность излучения в элемент телесного угла, надо произвести сложение полей, а после вычислить вектор Пойнтинга. Однако полная интенсивность излучения I является арифметической суммой интенсивностей каждого вида излучения по отдельности,

$$I = I_d + I_\mu + I_D,$$

поскольку электромагнитное поле для каждого вида излучения имеет свою отличную от других вкладов угловую симметрию, в результате чего перекрёстные

вклады в интенсивность излучения при интегрировании по углам обращаются в нуль. Полные интенсивности магнито-дипольного и квадрупольного излучений равны

$$I_\mu = \frac{2(\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2}{3c^3}, \quad I_D = \frac{\ddot{D}^{ik} \ddot{D}^{ik}}{180c^5}. \quad (6.66)$$

В частности, если квадрупольный момент всегда остаётся аксиально симметричным с постоянной осью симметрии, см. (6.16), то интенсивность излучения квадрупольного типа равна

$$I_D = \frac{\ddot{D}^2}{120c^5}. \quad (6.67)$$

6-3.3 Поле излучения как асимптотика на больших расстояниях

Если мы интересуемся только излучением, производимым системой зарядов, то нам нужно удержать в 4-потенциале только вклады, пропорциональные $1/r$. Для этого надо в выражении для запаздывающего вектор-потенциала (4.20) представить запаздывающее время в виде

$$t_r \approx t_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c,$$

а также произвести замену в знаменателе $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В результате придём к выражению

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int d^3 r' \mathbf{j}(t_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c, \mathbf{r}') \quad (6.68)$$

Далее, далеко от источника электромагнитное поле представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении единичного вектора \mathbf{n} . Поэтому нам важен только поперечный вклад в 4-потенциал, см. (4.60). В поперечной калибровке $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}/c$, а для локально плоской волны магнитное поле $\mathbf{B} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}]$, см. (4.53).

Таким образом, нахождение электромагнитного поля излучения оказывается заметно проще нахождения всего поля. В частности, во втором порядке по v/c выражение (6.68) есть

$$A^k \approx \frac{\partial_t}{cr} \int d^3 r' j^{tk} + \frac{n^i \partial_t}{cr} \int d^3 r' r'^i j^{tk}.$$

Первое слагаемое есть радиационное поле электрического диполя. Разделим второе слагаемое (сравни с (6.59)) на симметричный и антисимметричный вклады, как это было сделано в (6.60). Получим:

$$A^k \approx \frac{\partial_t d^l}{cr} + \frac{n^i \partial_t^2}{6c^2 r} \int d^3 r' 3\rho r'^i r'^k + \frac{n^i \partial_t \mu^{ik}}{cr}.$$

Далее домножим левую и правую части (6.60) на δ_\perp^{lk} , что не изменит поперечных компонент A^k . После этого к подынтегральному выражению второго слагаемого мы можем прибавить $\delta^{ik} r'^2 \rho'/3$, поскольку с учётом имеющегося n^i это не изменит всего выражения. В результате придём к

$$A^l = \frac{\dot{d}^l}{rc} + \frac{\delta_\perp^{lk} n^i}{6c^2 r} \ddot{D}^{ik} + \frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}]^l}{cr}$$

Второе слагаемое есть квадрупольное излучение (6.64), третье — магнитодипольное (6.61). Во третьем слагаемом проектор δ_{\perp}^{lk} был опущен, поскольку он не изменяется вектора $[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]$, который уже ортогонален \mathbf{n} .

Отметим, что домножению на проектор δ_{\perp}^{lk} соответ-

ствует некоторое калибровочное преобразование. При этом преобразовании, возможно, появляются вклады в вектор-потенциал пропорциональные $1/r^2$, которые не должны приниматься во внимание, поскольку мы интересуемся только излучением.

§6-4. Мультипольное излучение

Обзор по мультипольным электрическим, магнитными и тороидальным моментам Dubovik и Tugushev (1990), также для технических вещей имеет смысл посмотреть Radescu Jr и Vaman (2012).

В § 6-3 были рассмотрены поля системы зарядов и токов, характеризующейся переменными во времени электро-дипольным, электро-квадрупольным и магнито-дипольным моментами. Обычно эти вклады в поле являются доминирующими, поэтому ими ограничиваются при исследовании формально бесконечного ряда в разложении поля по малым параметрам (6.49) — малости размера системы и медленности движения внутри ней зарядов. В этом параграфе мы развиваем общую схему разложения в ряд по этим малым параметрам.

6-4.1 Магнито-мультипольное разложение в статике

Рассмотрим ограниченную в пространстве систему стационарных токов, $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Представим плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = c \text{rot } \mathfrak{M} \quad (6.69)$$

что возможно согласно (5.29,5.31). Мы требуем, чтобы вектор \mathfrak{M} был ограничен по амплитуде и обращался в нуль вне системы. Однако это требование не фиксирует его однозначно; к \mathfrak{M} всегда можно прибавить $\text{grad } f$, где f — функция, обращающаяся в нуль вне системы. При рассмотрении электродинамики сплошных сред вектор \mathfrak{M} называется *вектором плотности намагниченности* системы токов. Из уравнений (5.31) следует, что действительно можно выбрать \mathfrak{M} таким образом, что область ненулевых значений плотности намагниченности \mathfrak{M} действительно ограничена в пространстве. Размер этой области по порядку величины совпадает с размером системы токов.

Поле \mathbf{H} , определяемое равенством

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathfrak{M}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = -4\pi \text{div } \mathfrak{M} \quad (6.70)$$

в электродинамике сплошных сред называется магнитным полем, тогда как ‘бывшее’ магнитное поле \mathbf{B} становится *магнитной индукцией*. Этот выбор наименований имеет под собой исторические причины, эта традиция сохраняется до настоящего времени. В результате этого

выбора достигается формальная аналогия между парами полей $\{\mathbf{E}, \mathbf{P}\}$ (6.13) и $\{\mathbf{H}, \mathfrak{M}\}$.

В пустоте поле \mathbf{H} совпадает с полем \mathbf{B} . Поэтому если исследуется поле ограниченной в пространстве системы токов, то поле \mathbf{H} также является потенциальным вне системы токов и разложение в ряд (6.29) для него то же самое. Таким образом, потенциал магнитного поля φ_B удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_B = 4\pi \text{div } \mathfrak{M}, \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_B \text{ for all } \mathbf{r}, \quad (6.71)$$

сравни формально аналогичные уравнения (6.1,6.13) для электрического поля.

Для дальнейшего исследования нестационарных полей удобно представить статическое магнитное поле также в виде

$$\mathbf{B} = \text{rot rot } (\mathbf{r}\chi) - \frac{4\pi}{c} \text{rot}(\mathbf{r} \partial_t \eta_{\mathfrak{M}}),$$

Уравнения на скалярные функции $\chi, \eta_{\mathfrak{M}}$ суть

$$\Delta\Delta_a\chi = \frac{4\pi}{c} \text{div}[\mathbf{r} \times \mathbf{j}], \quad \Delta_a\partial_t\eta_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \quad (6.72)$$

т.е. функция $\eta_{\mathfrak{M}}$ обращается в нуль вне системы, где магнитное поле полностью описывается скалярной функцией χ , а оператор Δ_a определён в (5.26). Таким образом, потенциалы χ и φ_B заменяют друг друга, и должны быть однозначно связаны между собой:

$$\varphi_B = - \int \frac{d^3r' \text{div } \mathfrak{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.73)$$

$$\Delta_a\chi = -\frac{1}{c} \int \frac{d^3r' \text{div}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = r\partial_r\varphi_B + 4\pi(\mathbf{r} \cdot \mathfrak{M}),$$

где выражение для потенциала χ следует из (5.31).

Можно проверить, что дипольный вклад в потенциалы действительно совпадает с уже найденным (6.35) и определяется магнито-дипольным моментом $\boldsymbol{\mu}$ (6.34). Проводя процедуру разложения (6.73) до следующего порядка, можно получить выражение для магнито-квадрупольного момента

$$\mathfrak{m}^{ik} = \frac{1}{2} \int d^3r r^i r^k \text{div} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{j}]}{2c}. \quad (6.74)$$

6-4.2 Поле системы нестационарных токов

Выражение (4.20) для запаздывающих потенциалов связывает 4-потенциал в калибровке Лоренца с пространственно-временным распределением зарядов и токов в системе. По найденному 4-потенциалу возможно найти электромагнитное поле. Однако даже при наложении условия калибровки Лоренца, в 4-потенциале остаётся три независимых функции времени и координат. Электромагнитное поле в пустоте определяется всего двумя функциями времени и координат, поскольку для плоской волны существуют всего две поляризации. Поэтому одна из трёх функций, параметризующих 4-потенциал в калибровке Лоренца, является избыточной и лишней с точки зрения нашей цели — нахождения электромагнитного поля вне системы.

Удобнее выбрать две независимые функции, соответствующие сферической геометрии задачи. Воспользуемся математическим аппаратом, развитым в § 5-3, где описан метод разложения бездивергентного поля по сферическим гармоникам. Вне системы мы параметризуем электромагнитное поле функциями η , χ , удовлетворяющими волновому уравнению (4.50)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t \chi) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \eta) - \quad (6.75)$$

$$-4\pi \left(\mathbf{P} + \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{r} \partial_t \chi_P}{c} - \operatorname{rot}(\mathbf{r} \eta_P) \right) \right) - \operatorname{grad} \frac{Q}{r} = \\ = \mathbf{E}_{\text{rad}} + \mathbf{E}_P,$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t \eta) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \chi) - \\ - \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t (\eta_{\text{эл}} + \eta_P)) = \mathbf{B}_{\text{rad}} + \mathbf{B}_P,$$

см. (5.32). Функция η является скаляром в трёх-мерном пространстве, тогда как χ является псевдо-скаляром. Эти функции параметризуют поле \mathbf{E}_{rad} , \mathbf{B}_{rad} вне системы. Внутри тела добавляется электромагнитное поле \mathbf{E}_P , \mathbf{B}_P , исчезающее вне тела. Оно параметризуется дополнительными скалярными полями χ_P , $\eta_{\text{эл}}$, η_P . Плотность поляризации \mathbf{P} удовлетворяет уравнению

$$\rho = Q \delta(\mathbf{r}) - \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} - \partial_t \mathbf{P} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M}. \quad (6.76)$$

где Q — полный заряд системы. В дальнейшем мы полагаем, что полный заряд системы $Q = 0$. Мы также определили плотность намагниченности \mathfrak{M} . Как и раньше, определения плотностей поляризации \mathbf{P} и \mathfrak{M} не являются однозначными процедурами.

6-4.2.1 Поле вне тела

Уравнения Максвелла, записанные в терминах введённых параметризующих электромагнитное поле функ-

ций, выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \square \chi) = 4\pi \operatorname{rot} \left(\left(\mathfrak{M} + \frac{\operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t \eta_{\text{эл}})}{c} \right) - \mathbf{r} \frac{\partial_t^2 \chi_P}{c^2} \right),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \square (\eta + \eta_P)) = 4\pi \operatorname{rot} \left(\left(\mathbf{P} + \frac{\operatorname{rot}(\mathbf{r} \chi_P)}{c} \right) + \mathbf{r} \frac{\partial_t^2 \eta_{\text{эл}}}{c^2} \right).$$

Проектируем сначала эти уравнения на \mathbf{r} , в результате чего найдём решения для вспомогательных функций χ_P , $\eta_{\text{эл}}$

$$\Delta_a \partial_t \eta_{\text{эл}} = c \operatorname{div}[\mathfrak{M} \times \mathbf{r}] = c(\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{M}),$$

$$\Delta_a \partial_t \chi_P = c \operatorname{div}[\mathbf{P} \times \mathbf{r}].$$

сравни с (6.72), где оператор Δ_a , напомним, определён в (5.26). После этого выписываем решения для поля вне системы. Уравнение на функцию χ

$$\square \Delta_a \chi = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(c \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \partial_t \mathbf{P})) = \\ = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}[\mathbf{r} \times \mathbf{j}], \quad (6.77)$$

отличается от уравнения (6.72) на эту функцию в статике только тем, что оператор Лапласа оказывается заменённым на оператор д'Аламбера. Уравнение на функцию η имеет более сложную структуру:

$$\square \Delta_a (\eta + \eta_P) = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot}(c \operatorname{rot} \mathbf{P} - \partial_t \mathfrak{M})) = (6.78) \\ = 4\pi(2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla))\rho + \frac{4\pi(\mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{j})}{c^2} - 4\pi \square(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P})$$

Справа последнее слагаемое не даёт вклада в поле на далёких расстояниях от системы, соответственно полагаем

$$\eta_P = -\frac{4\pi}{\Delta_a} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P})$$

а поле на далёких расстояниях определяется волновым уравнением

$$\square \Delta_a \eta = 4\pi(2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla))\rho + \frac{4\pi \partial_t(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})}{c^2}. \quad (6.79)$$

Таким образом, часть поля, задаваемая η , определяется распределением зарядов в системе. Однако вклад того же рода дают особые конфигурации переменных во времени токов.

Предположим, что поле создаёт некоторый точечный источник; тогда мы всегда остаёмся вне создающей электромагнитное поле системы. При $r \rightarrow 0$ электрическое поле \mathbf{E} должно стремиться к статическому выражению (6.4). Пренебрегая временными производными, получаем

$$\mathbf{E} \approx \operatorname{grad} \partial_r(r\eta), \quad \mathbf{B} \approx \operatorname{grad} \partial_r(r\chi), \quad (6.80)$$

т.е. вблизи точечного источника

$$\partial_r(r\eta) \approx -\varphi, \quad \partial_r(r\chi) \approx -\varphi_B,$$

где φ и φ_B — электростатический и магнито-статический потенциалы системы; для магнитного потенциала равенство эквивалентно соотношению (6.73), взятому вне системы.

6-4.2.2 Поле внутри тела

Тогда как функции η, χ нам удалось выразить через компоненты 4-тока, часть поля, появляющаяся внутри системы и формально не имеющая запаздывания, оказалась выражена через плотности магнитного и магнитного момента, которые являются неоднозначно определёнными величинами. Однако само поле внутри системы является, разумеется, определённым однозначно. Для того, чтобы выразить его непосредственно через компоненты 4-тока, произведём переопределение полей \mathbf{P} и \mathfrak{M} согласно равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \partial_t \mathbf{P} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M} = \\ &= \partial_t (\mathbf{P} + \operatorname{rot}(r\chi_P) - c \operatorname{rot} \operatorname{rot}(r\eta_{\mathfrak{M}})) \\ &\quad + c \operatorname{rot} (\mathfrak{M} + \operatorname{rot}(r\partial_t \eta_{\mathfrak{M}}) - r\chi_P) \equiv \\ &\equiv \partial_t \mathbf{P}_{\text{new}} + c \operatorname{rot} \mathfrak{M}_{\text{new}}. \end{aligned}$$

При таком переопределении плотностей электрического и магнитного моментов вновь посчитанные функции $\chi_{P,\text{new}} = \eta_{\mathfrak{M},\text{new}} = 0$. Кроме того,

$$(\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{M}_{\text{new}}) = 0, \quad (\mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{P}_{\text{new}}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}).$$

Считаем дополнительный вклад в электрическое поле, возникающий внутри тела:

$$\mathbf{E}_P = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (r\eta_{P,\text{new}}) - 4\pi \mathbf{P}_{\text{new}}, \quad \partial_t \eta_{P,\text{new}} = -\frac{4\pi}{\Delta_a} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})$$

покомпонентно

$$\begin{aligned} E_P^r &= 0, \quad (\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_P) = r \nabla_\alpha^* E_P^\alpha = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_P &= \nabla_\alpha E_P^\alpha = 4\pi\rho \end{aligned}$$

Теперь магнитное

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{c} \operatorname{rot} (r \partial_t \eta_{P,\text{new}})$$

Ниже ради более компактной записи мы будем работать в частотном представлении. Таким образом, j^μ есть комплексная амплитуда 4-тока на частоте ω .

6-4.3 Излучение магнитного типа

Посмотрим теперь, какие вклады лагут потенциалы η, χ дают в изученные в § 6-3 типы излучений. Начнём с излучения магнитного типа, которое определяется потенциалом χ . Действительно, χ является псевдо-скаляром

в 3-х мерном пространстве. Поэтому этот потенциал может содержать в себе в качестве параметров компоненты псевдо-тензора магнито-мультипольного момента (см., например, ниже частный случай (6.83)).

Решением уравнения (6.77) является

$$\Delta_a \chi(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \operatorname{div}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}'], \quad (6.81)$$

где \mathbf{j}' берётся в точке \mathbf{r}' . Теорема суммирования (5.28) позволяет разложить расходящуюся сферическую волну χ (6.81) по сферическим гармоникам

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{l=1}^{\infty} h_1^{(1)}(kr) \chi_l, \quad (6.82) \\ \chi_l &= \frac{(-1)^{l+1} (2l+1) ik}{l(l+1)c} \int d^3 r' j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \operatorname{div}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}'] \end{aligned}$$

причём положение наблюдателя должно быть вне системы, $r > a$, а единичные вектора $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ и $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

6-4.3.1 Магнито-дипольное излучение

Выделим в (6.82) первое слагаемое с $l=1$, соответствующее магнито-дипольному излучению. Подставляя явное выражение для полинома Лежандра $P_l(\mu)$ и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\chi_1 = -ik^2 (\boldsymbol{\mu}_k \cdot \mathbf{n}), \quad \chi = -(\boldsymbol{\mu}_k \cdot \nabla) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.83)$$

$$\boldsymbol{\mu}_k^i = \int d^3 r' \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}']^i}{2c} \frac{3 \cdot \mathbf{j}_1(kr')}{kr'}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что восстановленное по (6.83) согласно (6.75) электромагнитное поле $\mathbf{E}_{\text{grad}}, \mathbf{B}_{\text{grad}}$ совпадает с полем гармонически колеблющегося магнитного диполя (6.61)

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \operatorname{Re} (\boldsymbol{\mu}_0 \exp(-i\omega t)),$$

если совершить замену $\boldsymbol{\mu}_0 \rightarrow \boldsymbol{\mu}_k$. Таким образом, полное магнито-дипольное излучение определяется обобщённым магнито-дипольным моментом $\boldsymbol{\mu}_k$ (6.83), который определяется не только распределением токов в системе, но и частотой колебаний тока. Когда длина волны становится велика (а частота соответственно мала), так что $ka \ll 1$, где a — размер системы, последний множитель под интегралом в (6.83) стремится к единице. В результате обобщённый магнито-дипольный момент $\boldsymbol{\mu}_k$ стремится к квази-статическому магнито-дипольному моменту $\boldsymbol{\mu}_0$ (6.34).

6-4.4 Излучение электрического типа

Поле излучения электро-мультипольного типа описывается потенциалом η , поскольку он является скаляром, как и электро-мультипольные моменты, являющиеся тензорами.

Аналогично разложению (6.82), решение волнового уравнения (6.79) на часть поля, соответствующую излучению электрического типа, можно представить в виде суммы расходящихся волн различной угловой симметрии:

$$\eta = \sum_{l=1}^{\infty} h_1^{(1)}(kr) \eta_l, \quad (6.84)$$

где

$$\eta_l = \frac{(-1)^{l+1}(2l+1)ik}{l(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \times \left((2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' + \frac{\partial_t(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}')}{c^2} \right). \quad (6.85)$$

Выражение (6.84) сложнее выражения (6.82) тем, что тогда как в (6.82) вносит вклад только одна комбинация компонент вектора тока \mathbf{j} , в выражение (6.84) вносят вклад две линейно независимые комбинации компонент тока — ρ и $(\mathbf{n}\mathbf{j})$. Поэтому если 2^l -польное излучение магнитного типа определяется полностью значением обобщённого 2^l -польного магнитного момента (см. Пункт 6-4.3.1 для $l = 1$), то 2^l -польное излучение электрического типа в общем случае определяется двумя 2^l -польными линейно независимыми моментами.

Мы начнём с электро-дипольного излучения. Нам не известен способ физически осмысленного разделения выражения (6.84) на две линейно-независимые составляющие в общем виде. Поэтому мы ограничимся разложением выражения (6.84) в ряд по параметру ka , считая его малым, $ka \ll 1$, для того чтобы произвести указанное разделение для первых членов разложения.

6-4.4.1 Электро-дипольный момент

В слагаемом $l = 1$ правой части (6.84), соответствующем электро-дипольному излучению, учтём первый неисчисляющий порядок по малому параметру $ka \ll 1$. В результате получаем, что в круглой скобке подинтегрального выражения правой части (6.84) надо удерживать только первое слагаемое, и положить $j_l(kr') \rightarrow kr'/3$:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \nabla_m \frac{e^{ikr}}{r} \int r'^m (2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' d^3r' = \\ &= -(\mathbf{d}_0 \cdot \nabla) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \eta_1 = -ik^2(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (6.86)$$

где комплексная амплитуда колебаний дипольного момента \mathbf{d}_0 определяется квази-статическим выражением (3.47, 6.54). Восстановленное согласно (6.75) электромагнитное поле $\mathbf{E}_{\text{rad}}, \mathbf{B}_{\text{rad}}$ совпадает с полем гармонически колеблющегося электрического диполя (6.55).

6-4.4.2 Тороидальный дипольный момент

Поправка по малому параметру $ka \ll 1$ к выражению (6.86) возникает только во втором порядке. Полное выражения, включающее основной вклад и поправку, равно

$$\eta_1 = -ik^2((\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n}) + ik(\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{n})), \quad (6.87)$$

где *тороидальный дипольный момент*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \int d^3r' \left(\frac{ik}{5} r'^2 \rho' + \frac{1}{2c} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}') \right) \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{10c} \int d^3r ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r} - 2r^2 \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Тороидальный момент обращается в нуль, если ток является потенциальным, $\mathbf{j} = -\text{grad } \varphi_J$. Это можно интерпретировать так, что тороидальный момент определяется только вихревыми токами. Заметим, что в этом порядке поправка к дипольному моменту оказалась равной нулю — такая поправка должна была бы зависеть только от объёмной плотности зарядов ρ . В более высоких порядках по малому параметру ka эту поправку следует ожидать (как она существует в выражении (6.83) для обобщённого магнито-дипольного момента μ_k по сравнению с выражением для дипольного момента μ_0).

Рисунок — пространственное распределение бездивергентных токов, создающих тороидальный дипольный момент и не создающих магнитных дипольного и квадрупольного моментов.

Итак, мы определили те два независимых вектора — электро-дипольный момент \mathbf{d}_0 и тороидальный дипольный момент \mathbf{t}_0 , — которые определяют электро-дипольное излучение. Эти интегральные характеристики распределения токов в системе определяются разными (линейно независимыми) комбинациями компонент тока в системе.

Полная мгновенная интенсивность излучения системы как электро-диполь, так и тороидальный диполь, равна

$$I = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{t}}/c \right|^2, \quad (6.89)$$

см. (6.53).

6-4.4.3 Анаполь

Точечным тороидальным дипольным моментом или анаполем, расположенным в начале координат, называют распределение токов в пространстве

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = c \text{rot rot} (\mathbf{t} \delta(\mathbf{r})). \quad (6.90)$$

Тороидальный дипольный момент (6.88) такой системы равен \mathbf{t} , тогда как все магнитные моменты равны нулю.

Сила и момент сил, действующих на анаполь со стороны э.м.-поля...

6-4.4.4 Квадрупольный момент

Сравним ближне-польную асимптотику (6.80) с асимптотическим поведением функции Ганкеля (5.27). В результате заключаем, что

$$\eta_2 = -\frac{k^3}{12} D_0^{ik} n^i n^k, \quad \eta = \frac{D_0^{ik} \nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{12 r}. \quad (6.91)$$

Второй порядок по малым параметрам (6.49) в решении уравнения (6.79) равен

$$\begin{aligned} \Delta_a \eta &= \frac{\nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{2 r} \int r'^i r'^k (2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' d^3 r' + \\ &- \frac{ik e^{ikr}}{2cr} \int d^3 r' (\mathbf{j}' \cdot \text{grad}' r'^2) = \\ &= -\frac{\nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{2 r} \int (3r'^i r'^k - \delta^{ik} r'^2) \rho' d^3 r' \end{aligned}$$

что совпадает с (6.91).

§6-5. Торможение излучением

Изложение ведётся в обозначениях § 4-6.

6-5.1 Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн

Поле, произведённое движущейся с ускорением частицей, уносит энергию и импульс. Пусть за время движения частицы dt_r (иногда время t_r называют также “ретардированное”) была рождена группа волн с 4-импульсом

$$\|dP_r^\mu\| = \{dE_r/c, d\mathbf{P}_r\}.$$

Вообще говоря, из соображений закона сохранения энергии-импульса эти энергия и импульс должны быть равны изменению $dp^\mu = \{dE/c, d\mathbf{p}\}$ энергии и импульса частицы, взятым с обратным знаком. Тем не менее, в классической (неквантовой) электродинамике как в теории есть встроенное противоречие, которое как раз в данном вопросе даёт о себе знать. А именно, электромагнитная энергия точечного заряда равна бесконечности. В результате в обоих частях равенства, выражающего сохранение энергии-импульса, присутствует бесконечный вклад, и его сокращение в общем случае некорректно.

Пусть частица влетает, а затем вылетает из области, где электромагнитное поле отлично от нуля. Тогда для 4-импульса имеет место только интегральное условие сохранения

$$\int dP_r^\mu + \int \left(dp^\mu - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} dx_\nu \right) = 0, \quad (6.92)$$

где интеграл берётся вдоль мировой линии; на концах участка интегрирования сокращение бесконечной электромагнитной энергии точечной частицы корректно, поскольку она движется равномерно и прямолинейно. В (6.92) $F^{\mu\nu}$ — внешнее электромагнитное поле, из которого исключено поле излучения рассматриваемой частицы. Равенство (6.92) выражает полный баланс энергии-импульса, см. в том числе уравнение Лоренца (3.43). Без

знаков интеграла это равенство в рамках классической электродинамики в общем случае неверно.

Пусть траектория частицы известна. Покажем здесь, что скорость производства энергии $W = dE_r/dt_t$ уходящих электромагнитной волн движущегося с ускорением заряда, рассчитанная по шкале времени испускания им волн, является релятивистским инвариантом. (Здесь t_r — время, одновременно параметризующее и движение частицы, и процесс испускания зарядом волн.) А именно, изменение энергии-импульса волн

$$dP_r^\mu = \frac{W}{c^2} dz^\mu, \quad W = \frac{dE_r}{dt_r} = -\frac{2c e^2}{3} w^\nu w_\nu, \quad (6.93)$$

где w^μ — 4-ускорение частицы, а z — траектория частицы.

Для доказательства перейдём в систему координат K' , в которой в момент t'_r заряд покоится. Рассмотрим ту часть уходящего излучения, которая была произведена окрестностью этого момента. Зафиксируем момент наблюдения $t' > t'_r$. Согласно (4.76), электрическое поле этой части излучения на сфере $|\mathbf{r}' - \mathbf{z}'(t'_t)| = c(t' - t'_t)$ описывается выражениями

$$\mathbf{E}'_{\text{rad}}(\mathbf{r}') = \frac{e [\mathbf{n}' \times [\mathbf{n}' \times \mathbf{a}']]}{c^2 R'}, \quad \mathbf{B}'_{\text{rad}} = \frac{e [\mathbf{a}' \times \mathbf{n}']}{c^2 R'}, \quad (6.94)$$

соответствующими радиационным вкладом в (6.50,6.51), поскольку в нашем случае $\mathbf{R}'_t = \mathbf{R}'$. Интенсивность уходящего излучения определяется соответственно (6.53),

$$W = \frac{dE'_r}{dt'_t} = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3}, \quad dP_r'^0 = \frac{dE'_r}{c dt'_t} dt'_t = \frac{W}{c} dt'_t.$$

Пространственные компоненты $dP_r'^i$ полного импульса рассматриваемой порции электромагнитных волн равны нулю, в силу симметрии интенсивности излучения: сколько импульса уходит в направлении \mathbf{n}' , столько и в обратном направлении $-\mathbf{n}'$. Таким образом, порция

волн, испущенная за промежуток времени dt'_r , обладает 4-импульсом

$$dP_r'^{\mu} = \{dE'_r/c, \vec{0}\} = \frac{W}{c^2} dz'^{\mu}.$$

Вторым равенством мы переписали правую часть в релятивистско-инвариантном виде через единственный имеющийся в нашем распоряжении 4-вектор с нулевой пространственной частью — приращение 4-координаты dz'^{μ} . Коэффициент пропорциональности между двумя 4-векторами является релятивистским инвариантом, т.е. релятивистским инвариантом является скорость производства энергии уходящего излучения:

$$W = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3} = -\frac{2ce^2}{3} w^{\nu} w_{\nu}. \quad (6.95)$$

Таким образом, мы пришли к формуле (6.93).

6-5.2 Торможение излучением

В работе Клепиков, 1985 подробно разобрана история вопроса.

Найдем теперь силу, действующую на ускоренно движущуюся частицу со стороны излучённого ею поля. Эту силу называют *силой торможения излучением* или *лоренцевской силой трения* (*Abraham–Lorentz force* (also *Lorentz–Abraham force*), or *the radiation reaction force*, or *the self force*). Как мы упоминали в Пункте 6-5.1, мгновенная мощность генерации уходящих волн не совпадает с мгновенной мощностью, отбираемой от частицы.

Мы рассматриваем часть мировой линии движения частицы, на котором в начале и в конце частица двигалась без ускорения, т.е. была вне действия внешнего электромагнитного поля. Либо, мы рассматриваем один период периодического движения частицы, так что вначале и в конце движения скорость частицы и все её производные равны друг другу.

Сначала рассмотрим нерелятивистскую частицу, и обозначим искомую силу \mathbf{F}_{Lf} . Полный баланс энергии должен сохраняться, так что

$$\int (\mathbf{F}_{\text{Lf}} \cdot \mathbf{v}) dt = - \int W dt = - \frac{2e^2}{3c^3} \int \dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) dt, \quad (6.96)$$

где скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн W определяется (6.93). В последнем равенстве мы провели интегрирование по частям, пользуясь тем, что граничный вклад равен нулю, поскольку на концах мы предполагаем равномерное и прямолинейное движение (либо граничные члены сократились, если движение периодически). Из последнего равенства можно сделать вывод, что в уравнение движения следует добавить силу торможения излучением \mathbf{F}_{Lf} ,

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{\text{Lf}}, \quad \mathbf{F}_{\text{Lf}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (6.97)$$

Вообще говоря, в данном выводе мы могли упустить вклад в силу, нормальный к направлению скорости частицы. Однако такого вклада существовать не может.

Покажем это. Перейдём в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью \mathbf{V} (предполагаем, что скорость мала, так что преобразование Лоренца есть преобразование Галилея) такую, чтобы интеграл от неучтённой части силы имел ненулевую проекцию на \mathbf{V} . В этом случае баланс энергии (6.96), записанный в новой системе отсчёта, уже не будет выполняться. Вклад же, который представлял бы из себя полную производную, и от которого кроме того интеграл был бы равен нулю, составить из скорости и её производных невозможно.

6-5.2.1 Применимость концепции силы торможения излучением

В уравнении движения (6.97) сила торможения \mathbf{F}_{Lf} должна быть мала по сравнению с первыми двумя вкладками, возникающими из-за действия внешнего электромагнитного поля. Действительно, в противном случае мы получили бы уравнение типа

$$\dot{\mathbf{v}} = \alpha \ddot{\mathbf{v}}, \quad \alpha > 0,$$

которое даёт “самоускорение” частицы.

Получим условия применимости уравнения движения нерелятивистского заряда со включённой силой лоренцевского трения. Будем исходить из требования, чтобы изменение энергии ΔE_{rad} частицы в силу действия лоренцевской силы трения за время Δt было мало по сравнению с изменением ΔE_{kin} кинетической энергии частицы под действием внешнего электромагнитного поля. Время Δt может быть характерным временем изменения либо направления движения частицы, либо её ускорения — т.е. в этом случае временем изменения электромагнитного поля, действующего на частицу. Имеем:

$$\Delta E_{\text{rad}} \sim \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \Delta t}{3c^3} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}}{3c^3}, \quad \Delta E_{\text{kin}} \sim m \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}.$$

Наше требование приводит нас к неравенству

$$\frac{\Delta E_{\text{rad}}}{\Delta E_{\text{kin}}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \sim \frac{v}{|\dot{\mathbf{v}}|} \gg \frac{r_0}{c},$$

где r_0 — классический радиус электрона (6.18). Выразим это условие в терминах электромагнитного поля. Условие на магнитное поле \mathbf{B} можно получить, если в (6.97) положить электрическое поле равным нулю и потребовать условия $|\dot{\mathbf{v}}|/v \ll c/r_0$. Второе условие заключается в том, чтобы само поле менялось не слишком быстро, на временах $\Delta t \gg r_0/c$. Эти условия можно записать в виде

$$r_0 e B \ll mc^2, \quad \lambda \gg r_0, \quad (6.98)$$

где $\lambda \sim c/\Delta t$ — характерная длина волны падающего на частицу электромагнитного поля. Таким образом, поле не должно быстро меняться и не должно быть слишком большим по амплитуде.

Часть III

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Глава 7

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

§7-1. Свободные тела в гравитационном поле.

Литература: Wald, 2010; Берков и Кобзарев, 1989, 1990; Вайнберг, 1975; Ландау и Лифшиц, 1988; Хриплович, 2009

Дополнительная литература: Blau, 2016.

Космология: Долгов, Зельдович и Сажин, 1988

История Lehmkuhl, 2011, построение тензора энергии-импульса Leclerc, 2006

Электродинамика дала постулат, согласно которому максимальная скорость любого взаимодействия не может превосходить скорости света c . Теория гравитационного взаимодействия И.Ньютона предполагает мгновенное взаимодействие находящихся на удалении двух тел. Поэтому теория Ньютона теперь должна пониматься как статический предел более общей теории, в которой скорость распространения взаимодействия является конечной.

Идея А.Эйнштейна состояла в том, что гравитационное поле связано с изменением метрических свойств пространства. Наличие гравитационного поля означает, что пространство не является плоским, и потому не может быть описано в рамках декартовой системы координат.

Какими свойствами должно обладать это криволинейное пространство? Во-первых, в каждой точке пространства должна быть возможность определения векторов и тензоров более высокого ранга, поскольку величины описывающие состояния частиц и поле относятся к этому классу объектов. Во-вторых, должна быть возможность определять квадрат векторов в каждой точке: например, квадрат 4-импульса частицы должен определяться её массой. Таким образом, пространство должно обладать метрикой. В-третьих, должна быть возможность переносить вектора из одной точки в другую: например, при движении точечной частицы переносятся вектора её момента и момента импульса. Поэтому на пространстве должна быть введена связность. Эта связность должна быть согласована с метрикой для, например, выполнения условия сохранения квадрата импульса частицы. Наконец, более детальные рассуждения, приведённые ниже, показывают, что пространство

должно быть Римановым, т.е. тензор кручения у него отсутствует.

В итоге получаем, что конфигурация гравитационного поля (или же, структура пространства) полностью определяется конфигурацией метрического тензора.

7-1.1 Постулаты общей теории относительности

Сформулируем теперь постулаты общей теории относительности.

- *Принцип эквивалентности*: инертная масса совпадает с гравитационной массой. Инертная масса присутствует как параметр, в частности, в уравнении движения заряда в электромагнитном поле. Гравитационная масса описывает взаимодействие тела с гравитационным полем.
- *Пространство-время является римановым пространством*. Метрика этого пространства имеет сигнатуру метрики Минковского, что является наследием специальной теории относительности. Ненулевая кривизна пространства-времени обусловлена присутствием гравитационного поля.
- Также как и в специальной теории относительности, *математическая формулировка законов движения должна быть ковариантной*.

Раскроем физический смысл этих постулатов.

Из принципа эквивалентности следует, что можно выбрать систему координат — свободно падающий ящик небольшого размера в гравитационном поле — внутри которого все свободные тела будут двигаться равномерно и прямолинейно. Действительно, в исходной системе координат на все тела будет действовать сила, пропорциональная их гравитационной массе, и потому каждое тело будет испытывать ускорение, пропорциональное отношению его гравитационной и инертной масс. По принципу эквивалентности, это отношение одно и то же для всех тел. Потому в системе отсчёта ящика действие гравитации на поступательное движение тел

будет исключено, и движение каждой частицы описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0,$$

где s — параметр вдоль мировой линии частицы. В другой произвольной системе координат уравнение движения уже не имеет такой простой формы. Чтобы написать его в произвольной системе координат, воспользуемся тем, что все динамические уравнения должны иметь ковариантную форму. Единственным возможным обобщением этого уравнения является уравнение на геодезическую

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} = 0, \quad \text{free box: } \Gamma^\mu_{\sigma\tau} + \Gamma^\mu_{\tau\sigma} = 0,$$

если принять, что свойством свободно падающей системы координат является обнуление симметричной части связности.

Однако мы бы хотели расширить принцип эквивалентности на полную возможность локального исключения гравитационного поля. А именно, мы бы хотели, чтобы момент количества движения протяжённых тел (или спин частиц) оставался неизменным в свободно падающей системе координат в отсутствие электромагнитного поля. Таким образом, для произвольного 4-вектора спина a^μ (4.42) должно выполняться динамическое уравнение

$$\frac{da^\mu}{ds} = 0.$$

при любом направлении движения частицы. Единственной возможностью обобщить это уравнение на произвольную систему координат — сказать, что это есть уравнение параллельного переноса вектора a^μ вдоль мировой линии частицы. Поскольку в общем случае взаимное направление касательного вектора к мировой линии частицы dx^μ/ds и 4-вектора спина a^μ является произвольным (за исключением требования $g_{\mu\nu} a^\mu dx^\nu/ds = 0$), то для возможности обобщения надо потребовать, чтобы в свободно падающей системе антисимметричная часть связности также оказалась равной нулю:

$$\frac{da^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \frac{dx^\sigma}{ds} a^\tau = 0, \quad \text{free box: } \Gamma^\mu_{\sigma\tau} = 0. \quad (7.1)$$

В итоге мы получили возможность построения системы координат, в которой связность равна нулю в наперёд заданной точке. Это означает, что тензор кручения равен нулю и пространство является Римановым. Второй постулат как раз закрепляет этот вывод.

7-1.2 Движение свободной частицы в гравитационном поле

Для массивных частиц существуют системы координат, в которых частица покоится. В таких системах

приращение нулевой координаты dx^0 пропорционально приращению параметра s . Поэтому, как и в специальной теории относительности, возможно фиксировать аффинный параметр s вдоль геодезической, придав ему смысл интервала:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} u^\sigma u^\rho = 0, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}, \quad (7.2)$$

где u^μ — 4-скорость частицы.

7-1.2.1 Вариационный принцип для движения частицы

Уравнение движения частицы можно получить из принципа наименьшего действия. По-прежнему, действие для массивной частицы есть (3.1):

$$S_m = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (3.1a)$$

где $g_{\mu\nu}$ зависит от координат в присутствии гравитационного поля. Варьируя траекторию частицы, теперь получаем

$$\begin{aligned} \delta S_m &= -mc \int_a^b \left(\frac{g_{\mu\nu,\sigma} u^\mu u^\nu \delta x^\sigma}{2} + g_{\nu\sigma} u^\nu \frac{d\delta x^\sigma}{ds} \right) ds = \\ &= mc \int_a^b \left(\frac{du_\sigma}{ds} - \frac{g_{\mu\nu,\sigma} u^\nu u^\mu}{2} \right) \delta x^\sigma ds - mc u_\sigma \delta x^\sigma \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Откуда вытекает уравнение движения частицы

$$\frac{du_\sigma}{ds} = \frac{d(g_{\sigma\tau} u^\tau)}{ds} = \frac{g_{\mu\nu,\sigma} u^\nu u^\mu}{2}, \quad (7.4)$$

которое переписывается и в виде (7.2) с учётом (10.62). Если метрика не зависит от координаты x^σ , то соответствующая компонента 4-скорости u_σ сохраняется по мере движения частицы.

Согласно граничному члену в вариации действия (7.3) 4-импульс частицы, канонически сопряжённый координате частицы, по-прежнему определяется (3.5),

$$p_\mu = mc u_\mu, \quad p_\mu p^\mu = m^2 c^2. \quad (3.5a)$$

В силу (3.8) уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 c^2, \quad (7.5)$$

см. Пункт 1-2.5.

7-1.2.2 Безмассовые частицы

Если мы имеем дело с безмассовой частицей, то в качестве параметра вдоль геодезической невозможно взять приращение интервала. Такую геодезическую называют *изотропной*, *light-like geodesic*. Выберем аффинный параметр s вдоль такой геодезической, который равен

набегу фазы у эйконала (т.е. s безразмерен), описывающий распространение волны соответствующей частице. Тогда уравнением движения безмассовой частицы будет

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dk_\sigma}{ds} = \frac{g_{\mu\nu,\sigma}}{2} k^\nu k^\mu, \quad (7.6)$$

где касательный вектор к геодезической $k^\mu = dx^\mu/ds$ при указанном выборе параметра s является также волновым вектором частицы, $k_\mu = p_\mu/\hbar$.

Выражения (3.5а,7.5) верны и для безмассовых частиц. **Сказать про эйконал: изменяем единицы измерения функции Гамильтона-Якоби, перемасштабируя её в эйконал ...**

7-1.3 Промежутки времени и расстояния

Для того, чтобы определить собственное время частицы, перейдём в сопровождающую систему координат, у которой метрика локально равна метрике Минковского. Для такого локально плоского мира мы знаем, что согласно специальной теории относительности приращение $d\tau$ собственного времени связано соотношением

$$d\tau = ds/c; \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad \text{at} \quad dx^i = 0. \quad (7.7)$$

с приращением интервала ds ; это соотношение, конечно, остаётся верным и в любой системе координат. Поэтому вторым равенством в (7.7) мы выписали выражение для приращения собственного времени частицы в системе, в которой изменяется только нулевая координата частицы, т.е. где частица покоится.

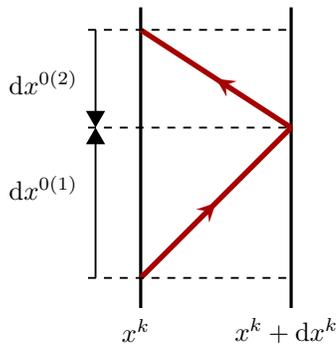


Рис. 7.1 Измерение расстояния между двумя близкими в пространстве точками; выбран случай $g_{0i} dx^i > 0$.

Под расстоянием dl между двумя близкими в пространстве точками будем понимать следующее. Пространственные координаты точек фиксированы, т.е. не зависят от координаты x^0 , пусть они будут равны x^k и $x^k + dx^k$. Расстояние между этими двумя точками есть

$$dl = \frac{cd\tau}{2},$$

где $d\tau$ есть (собственное) время, прошедшее в одной из точек, пока свет из этой точки распространялся до другой и обратно; поскольку мы не можем сравнивать времена в разных точках, то определить расстояние через проход света в одну сторону невозможно.

Свяжем искомое расстояние dl с разницей координат dx^k посредством метрического тензора. Пока свет доходит от одной точки до другой, преодолевая dx^k , 0-координата испытывает приращение dx^0 , так что интервал оказывается равным нулю,

$$0 = ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0k}dx^0 dx^k + g_{ik}dx^i dx^k.$$

Решая это квадратное уравнение относительно dx^0 , получаем

$$dx^{0(1,2)} = g_k dx^k \pm \sqrt{\frac{\gamma_{ik} dx^i dx^k}{g_{00}}}.$$

где введены чисто трёх-мерные вектор g_k и метрический тензор γ_{ik}

$$g_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \quad \gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}. \quad (7.8)$$

Таким образом, при прохождении света в одну и обратную стороны приращение координаты x^0 оказывается разным если $g_k dx^k$ не равно нулю; геометрический смысл времён $dx^{0(1,2)}$ показан на Рис. 7.1. В результате получаем, что приращение собственного времени согласно (7.7) и искомое расстояние равны:

$$cd\tau = \sqrt{g_{00}}(dx^{0(1)} - dx^{0(2)}), \quad dl^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k. \quad (7.9)$$

Отметим свойства трёх-мерного метрического тензора

$$-g^{il}\gamma_{lk} = \delta^i_k, \quad -g = g_{00}\gamma, \quad (7.10)$$

которые могут быть непосредственно проверены используя введённые определения.

7-1.4 Ньютоновский предел

Рассмотрим предел слабых гравитационных полей и малых скоростей, который реализуется, например, в земных условиях. Если гравитационное поле слабо, то существует система координат, в которой метрика слабо отличается от метрики Минковского,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1. \quad (7.11)$$

Достаточно исследовать задачу в первом порядке по отклонению от метрики Минковского; мы ожидаем, что все матричные элементы h одного порядка (на самом деле одного порядка диагональные элементы, а недиагональные имеют дополнительную малость), хотя сейчас фигурировать будет только один элемент.

В классической механике закон Ньютона гласит, что на любое массивное тело массы m действует гравитационная потенциальная сила $\mathbf{F} = -m \text{grad } \phi$, где потенциал гравитационного поля ϕ подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho_m, \quad (7.12)$$

где ρ_m — массовая плотность материи. Совокупность современных экспериментальных данных позволяет установить следующее значение *гравитационной постоянной*:

$$G = 6,67408(31) \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{с}^2 \cdot \Gamma}. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.12) хорошо описывает движение массивных тел во всём пространстве за исключением областей, близких к чёрным дырам. Это уравнение написано в системе координат, которая в каждой точке пространства-времени слабо отличается от нормальных координат Римана.

Выразим потенциал гравитационного поля через метрику. В уравнении движения (7.2) следует оставить только слагаемые с $\sigma = \rho = 0$, поскольку скорость частицы нерелятивистская и потому её пространственные компоненты малы. Таким образом, уравнение движения есть

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = c^2 \Gamma_{i00} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i} = -\partial_i \phi. \quad (7.14)$$

§7-2. Электромагнитное поле. Тензор энергии-импульса материи.

7-2.1 Действие для электромагнитного поля

В §2-6 отмечалось, что релятивистским инвариантом является 4-х мерный объём $d\Omega$ и δ -функция. Теперь эти инварианты имеют вид

$$d\Omega = \sqrt{-g} d^4 x, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x - y). \quad (7.17)$$

Учтя это, мы можем обобщить выражение (2.42) для 4-тока:

$$j^\mu(x) = c \sum_a e_a \int ds \frac{\delta^{(4)}(x - x_a(s))}{\sqrt{-g}} u_a^\mu(s). \quad (7.18)$$

Уравнение непрерывности по-прежнему имеет вид (2.40с), который в силу связи дивергенции вектора с полной производной (10.17) приводит к сохранению полного заряда

$$Q = \int d^3 r \sqrt{-g} j^0. \quad (7.19)$$

Взаимодействие зарядов и электромагнитного поля описывается тем же действием (3.35):

$$S_{\text{int}} = - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a) dx_a^\mu = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega A_\mu j^\mu. \quad (3.35a)$$

Варьирование по мировой линии полного действия для точечной частицы естественным образом обобщает

Мы расписали матричный элемент символа Кристоффеля через производную метрики (10.62), и пренебрегли производными по времени, поскольку они содержат малый множитель $1/c$. Наконец, мы сказали, что уравнение движения частицы происходит в гравитационном потенциале ϕ согласно механике Ньютона. Таким образом, временная компонента метрики равна

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (7.15)$$

Пусть пробная частица движется в гравитационном поле тела массы m_g , неподвижного в выбранной системе координат и находящегося в её начале. Тогда потенциал и, соответственно, 00-компонента метрики равны

$$\phi = -\frac{Gm_g}{r}, \quad g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad r_g = \frac{2Gm_g}{c^2}, \quad (7.16)$$

где r_g называется гравитационным радиусом тела; конечно, полученная формула применима только на расстояниях $r \gg r_g$, если тяготеющая масса m_g является точечным объектом.

уравнение движения (3.43) до

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} u^\sigma u^\rho = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (7.20)$$

В этом уравнении определение тензора электромагнитного поля с нижними индексами остаётся тем же самым:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.21)$$

см. (10.22). Первая пара уравнений Максвелла, записанная в виде (4.8)

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\nu \partial_\lambda A_\sigma = 0$$

по-прежнему имеет место.

Из выражения для тензора электромагнитного поля (7.21) можно вывести следующую идею: каноническими лагранжевыми координатами, описывающими электромагнитное поле, является ковариантный 4-вектор A_μ . В таком случае вычисленное по нему электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ не зависит от метрики, которая является каноническими координатами для гравитационного поля. Поэтому действие электромагнитного поля определяется тем же выражением (4.11), но мы его запишем в виде

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega g^{\mu\nu} g^{\sigma\varsigma} F_{\mu\sigma} F_{\nu\varsigma} \quad (7.22)$$

Вариация по каноническим переменным электромагнитного поля A_μ даёт вторую пару уравнений Максвелла (4.15), в которой теперь простая производная должна быть заменена на ковариантную:

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (7.23)$$

Теперь, однако, невозможно в общем случае найти калибровку, в котором 4 уравнения в (7.23) оказываются независимыми, как это было для калибровки Лоренца в плоском пространстве, см. уравнение (4.17). Например, выберем снова калибровку Лоренца согласно условию $\nabla_\mu A^\mu = 0$. Тогда вторая пара уравнений Максвелла (7.23) запишется в виде

$$\square A_\nu - R_{\nu\mu} A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\nu.$$

Мы воспользовались равенством (10.77) для коммутатора ковариантных производных вектора.

7-2.2 Тензор энергии-импульса материи

Если в выражении для действия материи S_{mat} (всего кроме гравитационного поля) мы поменяем координаты, то оно не должно измениться, поскольку по сути не изменятся пространственно-временные конфигурации полей и мировых линий частиц. Рассмотрим инфинитезимально малое преобразование координат

$$y^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (7.24)$$

При преобразовании координат формально изменится как метрический тензор, так и поля с траекториями частиц. Соответственно, нулевое изменение действия можно разделить на два вклада:

$$0 = \delta S_{\text{mat}} = \delta_g S_{\text{mat}} + \delta_q S_{\text{mat}}. \quad (7.25)$$

Если теперь положить, что эволюция частиц и полей подчиняется уравнениям движения, так что $\delta_q S_{\text{mat}} = 0$, то и $\delta_g S_{\text{mat}} = 0$.

Для определения вариации метрики предположим, что в текущей точке, в которой проводятся вычисления, координаты x являются нормальными. Если это не так, то сделаем преобразование, так, чтобы координаты x стали нормальными; y -координаты, вообще говоря, уже не являются нормальными. Поскольку первая производная от метрики теперь равна нулю, то аналогично (13.9) получаем

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu \rightarrow -\nabla_\mu \delta x_\nu - \nabla_\nu \delta x_\mu \quad (7.26)$$

сравни с результатом преобразования в обратную сторону (10.14), для которого декартовы координаты в нашем случае надо воспринимать локально как нормальные координаты Римана. Последним действием в (7.26) мы обобщили ответ на произвольные координаты.

Дадим общий способ нахождения симметричного тензора энергии импульса $T^{\mu\nu}$:

$$\delta_g S_{\text{mat}} = -\frac{1}{2c} \int d\Omega T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad (7.27)$$

где вариация метрики $\delta g_{\mu\nu}$ может быть уже произвольной. Так определённый тензор энергии-импульса оказывается автоматически симметричным. Кроме того, вариацию по метрике часто выполнять технически проще.

Теперь примем частный вид вариации метрики (7.26) и положим, что для всех полей выполнены уравнения движения (т.е. $\delta_q S_{\text{mat}} = 0$ в (7.25)). Тогда вариация действия материи по метрике (7.27) окажется равной:

$$0 = \delta_g S_{\text{mat}} = \frac{1}{c} \int d\Omega T^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta x_\nu = -\frac{1}{c} \int d\Omega \delta x_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \quad (7.28)$$

сравни с нётеровским определением тензора энергии-импульса (4.25). В (7.28) интегрирование по частям возможно, поскольку интеграл берётся от скалярной величины, см. (10.21). Из (7.28) следует, что

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (7.29)$$

В пространстве с ненулевой кривизной это уравнение не приводит к закону сохранения какой-либо величины, поскольку дивергенцию от симметричного тензора второго ранга невозможно представить в виде полной производной (делённой на корень из метрики), как это происходит для дивергенции 4-вектора (10.17), см. (10.19).

Проверим, что определение (7.27) соответствует введённому ранее определению тензора энергии-импульса в пределе плоского пространства. Вариация действия для частицы (3.1a) есть

$$\delta_g S_m = -\frac{mc}{2} \int \delta g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu ds,$$

в результате чего заключаем, что связанный с частицами тензор энергии-импульса равен

$$T^{(m)\mu\nu} = c^2 \sum_\alpha m_\alpha \int ds \frac{\delta^{(4)}(x - x_\alpha(s))}{\sqrt{-g}} u_\alpha^\mu u_\alpha^\nu, \quad (7.30)$$

что соответствует выражению (3.17). Вариация действия (3.35a), отвечающего за взаимодействие электромагнитного поля и зарядов, равна нулю, поскольку это действие не зависит от метрики. Наконец, при вариации действия электромагнитного поля надо в том числе вспомнить, что $d\Omega = \sqrt{-g} d^4x$,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma} g^{\nu\varsigma} \delta g_{\sigma\varsigma},$$

см. (10.15), в результате чего получаем формально прежнее выражение (4.30).

• **Задача 1:** Непосредственной проверкой убедиться, что тензор энергии-импульса, найденный через вариацию $\delta_q S$ действия по каноническим координатам материи при вариации координат δq (7.27) вытекающей из замены координат (7.24), даёт тот же тензор энергии-импульса. Решение см. в Пункте 13-1.4.

§7-3. Уравнение Эйнштейна

Уравнение Эйнштейна на гравитационное поле можно получить путём обобщения закона Ньютона (7.12) на релятивистский случай. В (7.12) слева стоит лапласиан от 00-компоненты метрики. Согласно же выражению (3.17) справа стоит 00-компонента тензора энергии-импульса массивных частиц, поскольку движение частиц нерелятивистское. Таким образом,

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (7.12a)$$

Теперь вспомним, что уравнения движения должны иметь ковариантную запись. Поэтому уравнение, связывающее гравитационное поле с распределением и движением материи, должно иметь вид

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Это уравнение называется *уравнением Эйнштейна*. Свойства *тензора Эйнштейна* $G_{\mu\nu}$ должны быть следующими:

а) Вслед за тензором энергии-импульса, тензор Эйнштейна должен быть симметричным, $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$.

б) Согласно экспериментальным данным, выраженным в уравнении (7.12a), уравнения гравитационного поля масштабируемы. Это означает, что если существует система с распределением гравитационного потенциала $\phi(\mathbf{r})$, то может существовать и система с распределением потенциала $\phi(\alpha\mathbf{r})$, где α — произвольный числовой множитель. Отметим также, что уравнение Эйнштейна должно быть применимо и для физически того же предела слабых гравитационных полей, но описываемого в криволинейной системе координат. В таком случае первые производные метрики также войдут в это уравнение. Отсюда видно, что для соблюдения свойства масштабируемости тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu}$ должен быть линеен по вторым производным метрики (такой вклад мы уже явно получили в нерелятивистском пределе) и квадратичен по первым производным метрики. Такому требованию соответствует тензор кривизны Римана (10.64). Поскольку тензор Эйнштейна является тензором второго ранга, то он должен быть линейной комбинацией тензора Риччи и скалярной кривизны:

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 R g_{\mu\nu}$$

Заметим, что мы пришли к тому, что уравнения Эйнштейна нелинейны относительно метрики $g_{\mu\nu}$, и потому для них принцип суперпозиции имеет место только в пределе слабых гравитационных полей.

в) Вслед за тензором энергии-импульса, тензор Эйнштейна должен быть бесследовым, $G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$. Отсюда можно найти соотношение между константами $C_{1,2}$:

$$0 = G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2 R_{,\nu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{,\nu},$$

где мы воспользовались равенством (10.76), основанном на дифференциальном тождестве Бианки (10.73). Таким образом, тензор и уравнение Эйнштейна суть

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (7.31)$$

Следующем пункте г) наших рассуждений мы покажем, что общий коэффициент выбран действительно правильно. Скалярную кривизну можно выразить через след тензора энергии-импульса, взяв след от уравнения Эйнштейна. Используя это, уравнение Эйнштейна (7.31) можно переписать во второй форме:

$$R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T^\sigma{}_\sigma \right), \quad R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\mu. \quad (7.32)$$

г) Убедимся в правильности выбранного общего коэффициента в уравнении Эйнштейна. В нерелятивистском пределе уравнение Эйнштейна в качестве своей 00-компоненты должно являться уравнением Ньютона (7.12a). Ньютоновская динамика предполагает гравитационное поле слабым и медленно меняющимся во времени. В этом пределе возможно выбрать координаты, в которых отличие метрики от метрики Минковского мало, $h_{\mu\nu} \ll 1$ в (7.11). Такой же малостью обладает связность. Это означает, что в тензоре Римана (10.64) нужно удерживать только линейные вклады по связности, так что 00-компонента тензора Риччи

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu{}_{\mu 0} = \partial_k \Gamma^k{}_{00} = -\partial_k \Gamma_{k00} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_k (2g_{0k,0} - g_{00,k}) = \frac{1}{2} \Delta g_{00}. \end{aligned}$$

Мы произвели опускание индекса с помощью невозмущённой метрики $\eta_{\mu\nu}$ и последовательно отбросили все производные по времени, поскольку для нерелятивистских скоростей они обладают дополнительной малостью по $1/c$. Далее, в тензоре энергии импульса преобладающей компонентой является 00-компонента, см. (7.30). Поэтому правая часть уравнения Эйнштейна (7.32) равна

$$\frac{4\pi G}{c^2} \rho_m.$$

В результате убеждаемся, что 00-компонента (7.32) эквивалентна уравнению Ньютона (7.12, 7.15).

7-3.0.1 Нарушение масштабной инвариантности гравитации: Λ -член.

Если отказаться от масштабной инвариантности (то есть пункта б) в списке требований к виду уравнения Эйнштейна), то оказывается возможным добавить в уравнение ещё один, так называемый Λ -член:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (7.33)$$

Классическая теория гравитации полагает, что Λ -член равен нулю.

Тёмная энергия McGaugh, Lelli и Schombert, 2016

7-3.1 Действие Гильберта

Уравнение Эйнштейна на гравитационное поле может быть получено также и из принципа наименьшего действия. Определим максимально простой вид действия, который бы удовлетворял условиям теории.

Во-первых, действие является глобальной скалярной величиной. Во-вторых, согласно общему методу построения действия, оно должно быть квадратично по первым производным от канонических переменных, которыми в нашем случае являются компоненты метрики $g_{\mu\nu}$. Локальной скалярной величиной, удовлетворяющей второму условию, является скалярная кривизна R ; то, что она линейно зависит также и от вторых производных метрики, как будет показано ниже, по сути не нарушает требования. Глобальной скалярной величиной тогда является

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega R = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (7.34)$$

где 4-объём $d\Omega$ определён в (7.17). Действие (7.34) называется *действием Гильберта*. Общий коэффициент подобран так, чтобы при вариации действия (7.34) по метрическому тензору получалось уравнение Эйнштейна (7.31) с правильным коэффициентом. Отметим, что вариация остальной части действия, описывающей материю, нам уже известна — это тензор энергии-импульса (7.27), который является правой частью уравнения Эйнштейна (7.31).

Проверим, что действие Гильберта можно переписать в виде, когда оно действительно зависит от первых производных канонических координат не более чем во второй степени и не зависит от вторых производных канонических координат. Тензор Риччи (10.74) линеен по вторым производным метрики с коэффициентами, зависящими только от метрического тензора (а не от его производных). Это означает, что возможно произвести интегрирование по частям во вкладе, происходящем из слагаемых с производными символов Кристоффеля в выражении для тензора Риччи (10.74). В результате действие Гильберта обретает требуемое свойство явно:

$$S_g = \int d^4x \mathcal{L}_g, \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}) &= \mathcal{L}_{g\Gamma}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{c^3}{16\pi G} (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\lambda} + \Delta \mathcal{L}_g. \end{aligned}$$

Мы представили лагранжиан в виде $\mathcal{L}_{g\Gamma}$, в котором разделена зависимость от первых производных на непо-

средственную зависимость, и на зависимость через связности $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. Часть лагранжиана $\Delta \mathcal{L}_g$ зависит только от канонических переменных и связности, но не непосредственно от производных метрики:

$$\Delta \mathcal{L}_g = \frac{c^3}{16\pi G} g^{\mu\nu} (\Gamma^\sigma_{\sigma\tau} \Gamma^\tau_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\mu\sigma}), \quad (7.36)$$

Эта часть происходит из первой пары слагаемых в выражении для тензора Риччи (10.74). Отметим также, что при интегрировании по частям возникает граничный вклад, который как всегда не влияет на уравнения движения.

7-3.1.1 Вариация действия Гильберта

Вычисление вариации действия Гильберта по метрическому тензору может быть значительно упрощено, если разделить результат варьирования на варьирование по непосредственно метрическому тензору и варьирование по связности $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$, которая варьируется вследствие вариации метрики. Из второго представления действия Гильберта (7.34) следует, что вариация по связности касается только тензора Риччи $R_{\mu\nu}$, см. (10.74). Вариация по непосредственно метрике касается только множителя $\sqrt{-g} g^{\mu\nu}$.

Покажем, что свёртку вариации тензора Риччи с метрикой можно представить в виде 4-дивергенции от некоторого вектора. Во-первых, непосредственной проверкой можно убедиться, что вариация связности $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ является тензором, см. Пункт 10-3.3.1. В этом же пункте вычислена вариация тензора Риччи (10.79)

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu},$$

а, значит, вариация действия по связности

$$\Delta_\Gamma S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu})_{;\lambda}.$$

Круглая скобка представляет из себя 4-дивергенцию от некоторого вектора. Поскольку дивергенция вектора представима в виде (10.17), то выражение под знаком интеграла приводится в виду полной производной. Таким образом, вариация действия по связности не вносит вклад в уравнение движения гравитационного поля. Отметим, что эта самая производная уже как раз перекинута в выражении (7.35), поэтому полученный результат можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial \Gamma^\mu_{\nu\lambda}} = 0. \quad (7.37)$$

Это равенство можно было бы получить и непосредственным варьированием $\mathcal{L}_{g\Gamma}$ (7.35) по связности (после проведения варьирования надо ещё выразить производные метрики через связность), но вычисления были бы гораздо более громоздкими.

Перейдём к варьированию по метрике. В силу того, что

$$\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\sigma\varsigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varsigma} \right) \delta g_{\sigma\varsigma},$$

полная вариация гравитационного действия

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \int d^4x \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial g_{\mu\nu, \sigma}} \right)_{, \sigma} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \right) \delta g_{\mu\nu} = \\ &= \frac{c^3}{16\pi G} \int d\Omega \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (7.38)\end{aligned}$$

Во втором равенстве в круглой скобке стоит левая часть уравнения Эйнштейна, см. (7.31). Вариация полного действия – сумм действий для гравитационного поля и материи – должна быть равна нулю. Вариация по метрике от действия для материи даёт тензор энергии-импульса, см. (7.27). Таким образом, окончательно приходим к уравнению Эйнштейна (7.31).

7-3.2 Закон сохранения энергии-импульса

Предположим, что рассматриваемая система, включая все виды полей и частиц, замкнутая. Найдём тензор энергии-импульса и сохраняющиеся интегральные величины согласно схеме, изложенной в Пункте 4-3.1.

Сначала выделим в полном лагранжиане системы часть, описывающую гравитационное поле. Тензор энергии-импульса в общей схеме строится согласно (4.26b). В случае гравитационного поля он называется *псевдо-тензором энергии-импульса*, поскольку он, также как и связность, не обладает свойством тензора при нелинейных преобразованиях координат (т.е. здесь термин ‘псевдо-тензор’ не имеет общего с псевдо-тензорами, см. Пункт 9-1.3, построенными через антисимметричный псевдо-тензор (9.21)).

Для упрощения вычисления псевдо-тензора энергии-импульса гравитационного поля в качестве 10 новых переменных Φ_a в (4.26d) выберем величины $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$. Результат обозначим как $\sqrt{-g}t_\mu^\nu$:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}t_\mu^\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial \Phi_{a, \nu}} \Phi_{a, \mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_g = \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \left(\Gamma_{\lambda\sigma}^\nu - \delta_\sigma^\nu \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right) (\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma})_{, \mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_g.\end{aligned} \quad (7.39)$$

Из этого выражения следует, что t_μ^ν действительно не является тензором, поскольку для любой точки связность может быть обращена в ноль, а вместе с ней и псевдо-тензор t_μ^ν . Определённый так тензор энергии-импульса не является симметричным и был впервые введён А. Эйнштейном Einstein, 1916.

7-3.2.1 Законы сохранения

Теперь вычислим тензор энергии-импульса — обозначим его θ_μ^ν — для совокупности всех полей и частиц.

Можно было бы непосредственно вычислить поток сохраняющихся величин. Однако поскольку уравнения движения в виде уравнения Эйнштейна и движения материи в заданном гравитационном поле уже получены, легче воспользоваться уже имеющимися результатами. Для этого вычислим производную

$$(\sqrt{-g}t_\mu^\nu)_{, \nu} = \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial g_{\lambda\sigma, \nu}} \right)_{, \nu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{g\Gamma}}{\partial g_{\lambda\sigma}} \right) \right] g_{\lambda\sigma, \mu}. \quad (7.40)$$

(если бы $(\sqrt{-g}t_\mu^\nu)_{, \nu}$ совпадал с θ_μ^ν , то согласно (4.26b) мы должны были бы получить ноль). Здесь выражение в квадратной скобке есть вариация действия S_g относительно вариации тензора $g_{\lambda\sigma}$, умноженная на $(-c)$, см. (7.38). Поэтому используя уравнение Эйнштейна (7.31) приходим к равенству

$$(\sqrt{-g}t_\mu^\nu)_{, \nu} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma, \mu} = 0. \quad (7.41)$$

Теперь воспользуемся выражением для дивергенции симметричного тензора второго ранга (10.19) и равенством нулю дивергенции тензора энергии-импульса (7.29). В результате получим

$$\partial_\nu \theta_\mu^\nu = (\sqrt{-g}(t_\mu^\nu + T_\mu^\nu))_{, \nu} = 0. \quad (7.42)$$

Таким образом, сохраняются величины

$$P_\mu = \int dS_\nu \sqrt{-g} (t_\mu^\nu + T_\mu^\nu). \quad (7.43)$$

Используя уравнение Эйнштейна, можно показать, что

$$\theta_\mu^\nu = h_{\mu, \lambda}^{\nu\lambda}, \quad (7.44)$$

$$h_{\mu}^{\nu\lambda} = -h_{\mu}^{\lambda\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\sigma} \left(-g(g^{\nu\sigma} g^{\lambda\varsigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\varsigma}) \right)_{, \varsigma}$$

Поэтому сохраняющийся 4-импульс равен

$$P_\mu = \int dS_\nu h_{\mu, \lambda}^{\nu\lambda} \quad (7.45)$$

Radinschi и др., 2015

§7-4. Слабое гравитационное поле

Гравитационное поле может считаться слабым в смысле (7.11) для большинства небесных тел за исключением чёрных дыр.

7-4.1 Линейное приближение для гравитационного поля

Хриплович, 2009, § 4.2

Предположим, что гравитационное поле слабо, так что отличие метрики от метрики Минковского мало, $h_{\mu\nu} \ll 1$ в (7.11). Из (10.66) следует, что линеаризованный по $h_{\mu\nu}$ тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h^\rho{}_\mu + \partial_\mu \partial_\rho h^\rho{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h^\rho{}_\rho) - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}, \quad (7.46)$$

где поднятие и опускание индекса производится посредством невозмущённой метрики $\eta_{\mu\nu}$. Однако остаётся ещё слишком большой произвол в выборе системы координат. Галилеевской механике наиболее близок выбор гармонических координат, которые определены в Пункте 10-2.6.3. Для таких координат вклад в круглых скобках (7.46) обращается в нуль. Действительно, условие гармоничности координат (10.56) в линеаризованном виде есть

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h^\mu{}_\mu = 0. \quad (7.47)$$

В итоге получаем, что в гармонических координатах уравнение Эйнштейна во второй форме для слабого гравитационного поля записывается в виде волнового уравнения с правой частью,

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^\rho{}_\rho \eta_{\mu\nu} \right). \quad (7.48)$$

В первой форме записи (7.31) уравнение Эйнштейна для этого же предела принимает вид:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}^\sigma{}_\sigma. \quad (7.49)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\sigma{}_\sigma, \quad \partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0.$$

Мы выписали в взаимную связь между $h_{\mu\nu}$ и $\bar{h}_{\mu\nu}$, а также условие гармоничности в терминах $\bar{h}_{\mu\nu}$. Решением уравнения (7.49) является

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \quad (7.50)$$

сравни с (4.20).

Условие гармоничности (7.47) координат не означает однозначный их выбор. Калибровочным преобразованием, не нарушающим условие гармоничности (7.47),

является

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \quad \square \xi_\mu = 0, \quad (7.51)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma.$$

Это калибровочное преобразование параметризуется 4 независимыми скалярными гармоническими функциями ξ_μ . Вид калибровочного преобразования (7.51), не нарушающий условие гармоничности координат, аналогичен виду калибровочного преобразования для 4-потенциала (4.3) электромагнитного поля, не нарушающему условию калибровки Лоренца.

Плотность лагранжиана гравитационного поля (7.35) в квадратичном приближении по $h_{\mu\nu}$ в гармонических координатах

$$\mathcal{L}_g = \frac{c^4}{64\pi G} \left(h^{\mu\nu, \lambda} h_{\mu\nu, \lambda} + h^\sigma{}_{, \nu} h^\sigma{}_{, \nu} - 2h^\mu{}_{, \sigma} h^{\sigma, \mu} \right). \quad (7.52)$$

Псевдо-тензор энергии-импульса в Эйнштейновской записи (7.39) в гармонических координатах в квадратичном по возмущению метрики приближении имеет вид

$$t^\nu{}_\mu = \frac{c^4}{64\pi G} \left(h^\sigma{}_{, \nu} h^{\sigma, \mu} - \frac{1}{2} h^\sigma{}_{, \nu} h^\sigma{}_{, \mu} + h^\sigma{}_{, \sigma} h^{\nu, \mu} - 2h^\nu{}_{, \sigma} h^{\sigma, \mu} \right) - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}_g. \quad (7.53)$$

7-4.2 Стационарное гравитационное поле

Для объектов, создающих слабое гравитационное поле, характерно движение с нерелятивистскими скоростями. В этом случае T^{00} -компонента тензора энергии-импульса имеет нулевой порядок по $1/c$, T^{0i} -компоненты имеют малость $1/c$, а T^{ik} -компоненты малы как $1/c^2$. Мы выпишем поэтому только первые 4 компоненты:

$$T^{00} = c^2 \rho_m, \quad T^{0i} = c \rho_m v^i = c j_m^i, \quad (7.54)$$

где v^i — локальная скорость материи как целого, см. (3.17). Пространственные компоненты тензора энергии-импульса T^{ki} самые маленькие и играют роль при излучении гравитационных волн, здесь пока мы ими не интересуемся. Мы также предполагаем, что электромагнитное поле мало, так что оно не вносит сравнимый вклад в тензор энергии-импульса (7.54).

Выберем соответствующую этой ситуации систему координат, в которой метрика $g_{\mu\nu}$ не зависит от временной координаты x^0 , а вдалеке от гравитирующих тел метрика стремится к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$.

7-4.2.1 Статическое гравитационное поле

Рассмотрим предел, когда расположение гравитирующих тел можно считать постоянным, и более того, когда у этих тел отсутствует вращение. Такое гравитационное поле будем называть *статическим гравитационным полем*. Оно производится независимым от времени распределением плотности массы в пространстве, $\rho_m = \text{const}$, при отсутствии потока массы, $\mathbf{j}_m = 0$.

Отличными от нуля матричными элементами метрики являются только диагональные. В пределе слабых гравитационных полей

$$\Delta h_{\mu\mu} = \frac{8\pi G \rho_m}{c^2}, \quad h_{\mu\mu}(\mathbf{r}) = -\frac{2G}{c^2} \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (7.55)$$

где по повторяющемуся индексу μ суммирование не предполагается. Недиagonальные матричные элементы $h_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, равны нулю.

Если вернуться к потенциалу Ньютона ϕ (7.12), то метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) d\mathbf{r}^2. \quad (7.56)$$

7-4.2.2 Стационарное гравитационное поле

Стационарным гравитационным полем назовём поле, создаваемое не зависящим от времени распределением

в пространстве плотности массы и её потока. В этом случае у тензора энергии-импульса появляются недиагональные временно-пространственные компоненты, см. (7.54). Поскольку движением материи предполагается стационарным, то поток массы бездивергентен,

$$\text{div } \mathbf{j}_m = 0.$$

В соответствии с (7.48), помимо диагональных элементов у метрики появляются недиагональные элементы,

$$\Delta g_{0i} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}, \quad g_{0i}(\mathbf{r}) = \frac{4G}{c^3} \int \frac{j_m^i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (7.57)$$

Это выражение математически совпадает с выражением для вектор-потенциала в калибровке Лоренца при статическом распределении электрических токов (6.31). Вдалеке от системы, создающей гравитационное поле, это выражение можно представить в виде

$$g_{0i} = \frac{2G}{c^3} \frac{n_k L_{ki}}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{g} = \frac{2G}{c^3} \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{L}]}{r^2}, \quad (7.58)$$

где угловой момент движения \mathbf{L} определён в (4.35), как всегда единичный вектор в направлении наблюдения от источника $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а компоненты вектора \mathbf{g} определены в общем виде в (7.8), в текущем пределе слабого поля $g_i = g^{0i} = -g_{0i}$.

§7-5. Центральнo-симметричное гравитационное поле

Пусть тело, создающее гравитационное поле, имеет сферически симметричное распределение массы, и масса внутри него может двигаться только от или к его центру. В частности, его угловой момент равен нулю.

Произведём выбор подходящего вида метрики для описания гравитационного поля. Эта метрика должна переходить в пределе слабого гравитационного поля в метрику сферической системы координат, $\{x^0, r, \vartheta, \varphi\}$. В пределе сильного гравитационного поля метрика по-прежнему не должна приобрести дополнительной зависимости от углов, так что общий её вид может быть записан так:

$$ds^2 = e^{2\nu} (dx^0)^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - e^{2\lambda} dr^2 + \cancel{a(r,t) dr dx^0}. \quad (7.59)$$

Сферическая симметрия не фиксирует полностью радиальную координату r и время x^0 , поскольку выписанная метрика сохраняет свой вид при преобразовании $\tilde{r} = \tilde{r}(x^0, t)$, $x'^0 = x'^0(x^0, r)$. Благодаря этому мы можем добиться заменой координаты r сначала того, чтобы длина окружности с постоянным r была равна $2\pi r$, чему соответствует метрика (7.59). Следующим шагом мы можем провести такую замену времени, которая об-

ратит в нуль недиагональный элемент (пропорциональный a) в квадратичной форме (7.59). Параметры ν и λ в общем случае являются функциями времени и радиальной координаты; вдалеке от тела метрика должна стремиться к плоской, так что $\nu, \lambda \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Выпишем ненулевые компоненты уравнения Эйнштейна. Для этого сначала нам требуется найти коэффициенты связности, среди которых ненулевыми являются

$$\begin{aligned} \Gamma_{000} &= \dot{\nu} e^{2\nu}, & \Gamma_{\vartheta r \vartheta} &= -\Gamma_{r \vartheta \vartheta} = r, \\ \Gamma_{0 r 0} &= -\Gamma_{r 0 0} = \nu' e^{2\nu}, & \Gamma_{r 0 r} &= -\Gamma_{0 r r} = \dot{\lambda} e^{2\lambda}, \\ \Gamma_{\varphi r \varphi} &= -\Gamma_{r \varphi \varphi} = r \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{r r r} &= \lambda' e^{2\lambda}, \\ \Gamma_{\varphi \vartheta \varphi} &= -\Gamma_{\vartheta \varphi \varphi} = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (7.60)$$

где вычисления проводились на основе (10.13). Точка означает производную по 0-координате, штрих — производную по r . Затем прямолинейные вычисления с подстановкой в (10.64) позволяют получить ненулевые компоненты тензора Римана. В результате ненулевые ком-

поненты уравнения Эйнштейна (7.31) суть

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r - r e^{-2\lambda}), \quad (7.61)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_r^0 = -e^{-2\lambda} \frac{2\dot{\lambda}}{r}. \quad (7.62)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_r^r = -e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} T_\vartheta^\vartheta = \frac{8\pi G}{c^4} T_\varphi^\varphi = e^{-2\nu} \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda} \dot{\nu} \right) - \\ - e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \nu' \lambda' \right), \end{aligned} \quad (7.64)$$

Отсутствие всех недиагональных ϑ - и φ -компонент соответствует исключительно радиальному движению материи.

7-5.1 Решение уравнений Эйнштейна вне тела. Метрика Шварцшильда.

Пусть рассматриваемое тело имеет ограниченные размеры. Будем исследовать гравитационное поле вне него. Гравитационное поле в этом случае является статическим, вне зависимости от того, испытывает ли тело сферически-симметричное движение материи или нет. Физически это связано с тем, что низший порядок излучения гравитационных волн — квадрупольный. В случае же сферически-симметричной задачи квадрупольный момент тождественно равен нулю.

Для того, чтобы показать статичность поля и найти явно метрику, приступим к вычислениям, положив левые части (7.61-7.64) равными нулю. Из уравнения на $0r$ -компоненту (7.62) получаем, что $\lambda = \lambda(r)$. Вычитая друг из друга уравнения на 00 - и rr -компоненты (7.61, 7.63), получаем, что $\lambda' + \nu' = 0$, т.е.

$$\lambda + \nu = 2 \ln f(t) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = \nu(r) = -\lambda(r).$$

Мы можем положить правую часть равной нулю, поскольку если это не так, то преобразованием временной координаты $t' = f(t)$ мы снова добиваемся этого равенства (при таком преобразовании установленный вид (7.59) метрики не меняется). Таким образом, мы действительно получили, что наша метрика не зависит от времени, т.е. гравитационное поле статическое.

Интегрирование (7.61) даёт

$$e^{-2\lambda} \equiv \frac{1}{g_{rr}} = e^{2\nu} \equiv g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (7.65)$$

Константу интегрирования мы отождествили с гравитационным радиусом тела r_g (7.16), сравнив поведение метрического коэффициента g_{00} на далёких расстояниях

с полученным в пределе слабого гравитационного поля (7.16). В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^0)^2 - \\ & - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (7.66)$$

Полученную метрику называют метрикой Шварцшильда.

Вдалеке от тела, при $r \gg r_g$, метрика Шварцшильда близка к плоской. Однако пространственная её часть не соответствует гармонической калибровке для слабого поля (7.55), поскольку $r^2 g_{rr} \neq g_{\vartheta\vartheta}$. Равенства элементов g_{ii} можно добиться с помощью нелинейного растяжения радиальной координаты $r \rightarrow r'$,

$$r = r' \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^2, \quad r'|_{r=r_g} = \frac{r_g}{4}, \quad (7.67)$$

в результате которого метрика (7.66) приводится к виду

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{1 - r_g/4r'}{1 + r_g/4r'} \right)^2 (cdt)^2 - \\ & - \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \end{aligned} \quad (7.68)$$

Такая метрика может быть названа *конформно-евклидовой*, поскольку пространственная часть метрики g_{ik} пропорциональна метрике евклидова пространства. В пределе $r \gg r_g$ метрика (7.68) переходит в (7.56) с гравитационным потенциалом $\phi = -2c^2 r_g/r$. В Вайнберг, 1975, Гл.8§2 можно найти, как построить гармонические координаты.

В Хриплович, 2009, § 6.2 приведён другой метод получения метрики Шварцшильда, основанный на непосредственной вариации гравитационного действия в простоте для сферически симметричной задачи.

7-5.1.1 Движение частицы в центрально-симметричном поле

Метрика для центрально-симметричного поля не зависит от времени и угловых координат. Поэтому при движении частицы сохраняются компоненты её импульса: энергия $cp_0 \equiv E$, а также момент импульса $p_\varphi \equiv L$, если выбрать систему координат так, чтобы движение частицы происходило в плоскости $\theta = \pi/2$, см. (7.4).

Рассмотрим для простоты падение частицы массой m вдоль радиуса, когда её момент импульса относительно центра притяжения равен нулю, $L = 0$: это позволит нам выявить основные аспекты движения тела вблизи радиуса Шварцшильда, при $r \rightarrow r_g + 0$. Свяжем между собой приращение мирового времени dt , собственного времени $d\tau$ и радиальной координаты dr , воспользовавшись сохранением энергии E (см. уравнение движения

в форме (7.4)) и выражением для метрики (7.66):

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

$$\frac{E}{c} = mcg_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (7.69)$$

Из второго равенства следует, что в первом равенстве при $r \rightarrow r_g$ левая часть оказывается малой по сравнению с первым членом в правой части, поэтому его можно опустить. Это означает, что частицы при приближении к радиусу Шварцшильда становятся ультра релятивистской. Итак, в главном приближении

$$c dt = \frac{dr}{r/r_g - 1} \Rightarrow r - r_g \sim r_g \exp\left(-\frac{ct}{r_g}\right). \quad (7.70)$$

Выходит, падение на сферу Шварцшильда происходит бесконечно долго по часам внешнего наблюдателя. По часам же самого падающего тела падение происходит за конечное время, поскольку вблизи сферы Шварцшильда приращение собственного времени

$$\frac{dr^2}{c^2 d\tau^2} = \left(\frac{E^2}{(mc^2)^2} - 1\right) + \frac{r_g}{r},$$

$$d\tau \approx \frac{mc^2}{E} \frac{dr}{c} \quad \text{at } r \rightarrow r_g \quad (7.71)$$

не содержит сингулярностей.

Исследование влияния релятивистских поправок на параметры финитного движения в центрально-симметричном гравитационном поле см. в § 13-2.1.

7-5.1.2 Излучение, принятое наблюдателем от падающей частицы

(7.118)

7-5.1.3 Гравитационный дефект массы

Пусть гравитирующее тело имеет конечный радиус a . Вне тела при $r \geq a$ метрика задаётся выражением (7.66). Интегрирование же 00-компоненты уравнения Эйнштейна (7.61) по внутренности тела даёт

$$\frac{8\pi G}{c^4} \int_0^a dr r^2 T_0^0 = r(1 - e^{-2\lambda}) \Big|_0^a = r_g = \frac{2GM_{\text{eff}}}{c^2}. \quad (7.72)$$

Мы определили эффективную массу M_{eff} гравитирующего тела так, чтобы она давала ту же асимптотику гравитационного потенциала на далёких расстояниях (7.16), которую мы получали в теории Ньютона. Именно эффективная масса M_{eff} является параметром, определяющим силу гравитационного взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами.

Так определённая эффективная масса M_{eff} , однако, оказывается не равной сумме масс составляющих её

частиц. Предположим для примера самый простой вариант: тензор энергии-импульса материи определяется покоящимися барионами, число которых сохраняется. Массу каждого бариона, когда он находится отдельно на далёком расстоянии от тел, примем равной m . В соответствии с (7.19), барионный заряд (их число) равен

$$N_{\text{bar}} = \int d^3x \sqrt{-g} \rho_{\text{bar}},$$

где пространственная концентрация барионов в согласии с (7.18)

$$\rho_{\text{bar}} = \sum_a \int ds \frac{\delta^{(4)}(x - x_a(s))}{\sqrt{-g}} u_a^0(s).$$

Поскольку барионы покоятся, то у всех них $u_a^0 = 1/\sqrt{g_{00}}$, а $ds = \sqrt{g_{00}} c dt$. После интегрирования по ds приходим к

$$N_{\text{bar}} = \int d^3x \sum_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a) = 4\pi \int n_m(r) r^2 dr, \quad (7.73)$$

где \vec{x} должно пониматься как просто столбец из трёх пространственных координат, который однако не является вектором (в нашем случае $\vec{x} = (r, \vartheta, \varphi)$). Величина n должна пониматься как концентрация частиц, см. с (2.40i).

Теперь распишем выражение для эффективной массы (7.72) через вклады отдельных барионов, воспользовавшись (7.30) и затем упростив выражение согласно (7.10):

$$T_0^0 = mc^2 \sum_a \frac{\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)}{\sqrt{-g/g_{00}} = \sqrt{\gamma}},$$

$$\gamma = g_{rr} g_{\vartheta\vartheta} g_{\varphi\varphi} = e^{2\lambda} r^4 \sin^2 \vartheta.$$

В результате эффективная масса (7.72)

$$\frac{M_{\text{eff}}}{mc^2} = \int d^3x \left(\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} = e^{-\lambda}\right) \sum_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)). \quad (7.74)$$

Как и должно быть, матричные элементы метрики $g_{\vartheta\vartheta}$ и $g_{\varphi\varphi}$ сократились, поскольку они соответствуют плоской метрике; остался только нетривиальный элемент g_{rr} . Иными словами, сравнивая (7.73) с (7.74) получаем, что плотность энергии покоя ε меньше концентрации барионов,

$$T_0^0 \equiv \varepsilon = \frac{mc^2 \rho_{\text{bar}}}{\sqrt{g_{rr}}} = e^{-\lambda} mc^2 \rho_{\text{bar}} < mc^2 \rho_{\text{bar}},$$

или, в интегральном виде

$$mc^2 N_{\text{bar}} > M_{\text{eff}},$$

т.е. эффективная масса тела меньше арифметической суммы масс составляющей её частей. Об этом факте принято говорить как о *гравитационном дефекте массы*.

7-5.2 Координаты Крускала

Компоненты тензора кривизны остаются конечными на сфере Шварцшильда

$$R_{01}^{01} = R_{23}^{23} = -\frac{r_g}{r^3}, \quad R_{02}^{02} = R_{12}^{12} = \frac{r_g}{2r^3}, \quad (7.75)$$

Это не удобно делать в исходных координатах (7.66), поскольку метрика сингулярна на радиусе Шварцшильда. От этого недостатка избавлены координаты Крускала (7.77).

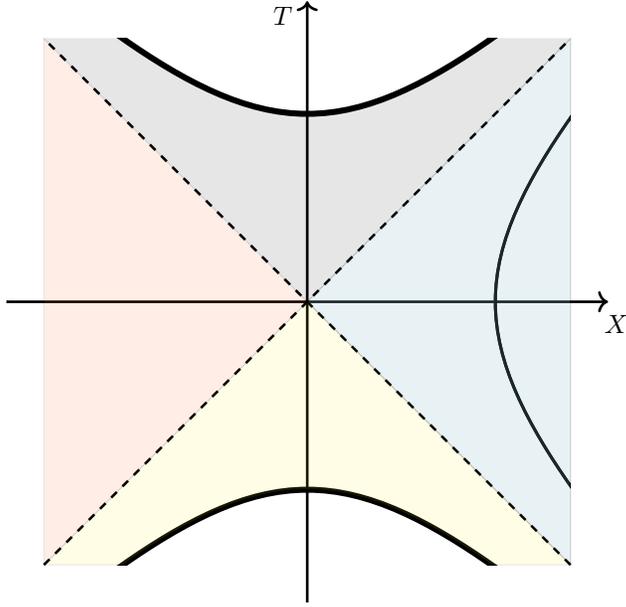


Рис. 7.2 Координаты Крускала.

Координаты Крускала (*Kruskal-Szekeres coordinates*) определяются согласно уравнениям

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp(r/r_g) = X^2 - T^2, \quad (7.76)$$

$$\frac{x^0}{r_g} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(T+X)^2}{(X-T)^2} \right).$$

На плоскости X - T поверхности постоянного мирового времени x^0 представляют из себя прямые линии, проходящие через начало координат, см. Рис 7.2. Поверхности постоянного радиуса r представляют из себя гиперболы. Поскольку радиальная координата $r > 0$, то из (7.76) следует, что $T^2 - X^2 \leq 1$, причём равенство соответствует началу координат $r = 0$. В координатах Крускала приращение интервала равно

$$ds^2 = g_{TT}(dT^2 - dX^2) - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (7.77)$$

$$g_{TT} = \frac{4r^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right)$$

Течению времени (увеличению координаты x^0) соответствует увеличение координаты T — это так в об-

ласти $X > 0$, $|T| < X$. Эту область следует отождествить с пространством $r > r_g$ вне чёрной дыры. Рассмотрим строго радиальное движение фотона. Из выражения для метрики следует, что мировые линии фотонов, двигающихся по радиусу, суть в координатах Крускала прямые

$$dX = \pm dT, \quad \vartheta, \varphi = \text{const}. \quad (7.78)$$

Фотон движется от чёрной дыры, если выбран знак плюс, и, наоборот, в чёрную дыру, если выбран знак минус. Продолжая линию движения фотона, мы сначала пересекаем радиус Шварцшильда находящийся на линии $T = X$, а после попадаем в чёрную дыру, которой соответствует область $T > 0$, $|X| < T$.

7-5.2.1 Движение массивного тела

Вергелес, 2017, § 4.2.2

Наша цель сейчас — найти и проанализировать движение свободно падающего тела. Поэтому мы будем искать уравнение на мировую линию частицы в терминах “радиальной скорости” dX/dT .

Будем пользоваться вариационным принципом в форме (13.4). Лагранжиан запишем как в исходных координатах (7.66), так и в координатах Крускала (7.77):

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\eta} \left(g_{00}(\dot{x}^0)^2 - \frac{\dot{r}^2}{g_{00}} - r^2\dot{\varphi}^2 \right) - \frac{\eta mc^2}{2} = \\ &= -\frac{1}{2\eta} (g_{TT}(\dot{T}^2 - \dot{X}^2) - r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\eta mc^2}{2}, \end{aligned}$$

где точка, напомним, означает производную по некоторому параметру s вдоль мировой линии частицы. Лагранжиан не зависит явно от мирового времени x^0 и от угла φ . Поэтому сохраняются энергия E и момент L :

$$\frac{E}{c} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{x}^0 = \frac{g_{TT}}{2\eta r_g} (X\dot{T} - T\dot{X}),$$

$$L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{\eta}.$$

В процессе преобразования выражения для энергии мы воспользовались связью координат (7.76). Теперь, вариация по вспомогательной переменной η приводит к уравнению

$$\dot{T}^2 - \dot{X}^2 = \frac{y^2(mc)^2}{g_{TT}} \left(1 + \frac{L^2}{(mcr)^2}\right).$$

Комбинируя это уравнение с выражением для сохраняющейся энергии E , получаем соотношение

$$1 - \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 = a^2 \left(X - T\frac{dX}{dT}\right)^2, \quad (7.79)$$

$$a^2 = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \frac{g_{TT}}{4r_g^2} \left(1 + \frac{L^2}{(mcr)^2}\right)$$

Это уравнение можно разрешить относительно “радиальной скорости” dX/dT :

$$\frac{dX}{dT} = \frac{a^2 T X \pm \sqrt{1 - a^2(X^2 - T^2)}}{1 + a^2 T^2}. \quad (7.80)$$

Проанализируем полученные уравнения. Для частицы с нулевой массой и нулевым угловым моментом уравнение (7.80) воспроизводит мировые линии света (7.78). Для массивной частицы из (7.79) следует, что мировая линия в координатах Крускала на Рис. 7.2 всегда имеет наклон больше $\pi/4$,

$$\left| \frac{dX}{dT} \right| < 1. \quad (7.81)$$

Теперь рассмотрим движение массивной частицы по радиусу вблизи радиуса сферы Шварцшильда: пусть $X = T + \delta X$. Удержим в правой части уравнения (7.80) главный вклад по малому δX :

$$\frac{dX}{dT} = \frac{a_0^2 T^2 - 1}{a_0^2 T^2 + 1}, \quad a_0^2 = \frac{1}{e T^2} \left(\frac{m c^2}{E} \right)^2, \quad (7.82)$$

где e – основание натуральной экспоненты. Мы выбрали знак минус в (7.80), соответствующий движению частицы к чёрной дыре. Уравнение показывает, что мировая линия пересекает прямую $T = X$ под конечным углом, входя в область чёрной дыры. При этом приращение собственного времени всегда остаётся конечным.

Частица, преодолев поверхность сферы Шварцшильда за конечное собственное время, в области чёрной дыры продолжает двигаться к центру, к значению радиальной координаты $r = 0$. Сделаем грубую оценку того, что происходит с собственным временем при $r \rightarrow 0$. Наивные оценки дают $dT^2 - dX^2 \sim dr^2/r_g^2$ (важно, что в правой части этого соотношения нет множителя типа $1/r$), после чего из (7.77) получаем, что $ds \sim dr/\sqrt{r}$. Таким образом, приращение собственного времени

$$\int_{r_0}^{r=0} ds \quad (7.83)$$

для частицы, упавшей в центр чёрной дыры из области пространства, является конечной величиной.

§7-6. Коллапс пылевидной сферы

7-6.1 Синхронная система отсчёта

Синхронной системой отсчёта называется система координат, у которой метрический тензор не имеет временно-пространственных компонент, а $g_{00} = 1$, так что

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ik} = -g_{ik}, \quad g_{0k} = 0, \quad (7.84)$$

где пространственный метрический тензор γ_{ik} в общем случае определён в (7.8). В синхронной системе отсчёта мировые линии $x^k = \text{const}$ являются геодезическими. Действительно, 4-вектор скорости для такой траектории есть $u^0 = 1, u^k = 0$, поэтому в уравнении движения (7.2) участвует только Γ^{μ}_{00} , что есть нуль:

$$\Gamma^0_{00} = 0, \quad \Gamma^m_{ik} = -g^{mn} \Gamma_{n00} = -g^{mn} \partial_0 g_{0n} = 0.$$

Пусть среда состоит из одного типа частиц, и среду можно считать идеальной жидкостью. Сопровождающей системой координат называют систему координат, в которой пространственные компоненты 4-потока плотности частиц (2.40i) во всём пространстве равны нулю, $j_n^k = 0$. В этом случае и плотность импульса частиц, т.е. $0k$ -компоненты тензора энергии-импульса (3.32), равны нулю, $T^{0k} = 0$.

Для пылевидной материи возможно выбрать систему координат, которая была бы одновременно и синхронной и сопровождающей, поскольку частицы пылевидной материи движутся только под действием гравитационного поля. Мы будем рассматривать сферически-симметричное распределение материи, поэтому метрика

в сопровождающей системе координат $\{\tau, R, \vartheta, \varphi\}$ имеет вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda} dR^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (7.85)$$

При движении каждой частицы её радиальная координата R является фиксированной (равно как и углы ϑ, φ) — это свойство сопровождающей системы координат. Величину $r = r(\tau, R)$ возможно интерпретировать как текущее расстояние частицы до центра, поскольку радиус окружности при фиксированных координатах τ, R равен $2\pi r$. Параметр λ также является функцией двух координат, $\lambda = \lambda(\tau, R)$.

Поскольку система координат сопровождающая, тензор энергии-импульса пылевидной материи имеет единственную ненулевую компоненту

$$T^{00} = \varepsilon \quad (7.86)$$

Интерпретация r как расстояния до центра является ограниченной в том смысле, что плотность энергии изменяется не как r^{-3} . Поскольку ковариантная дивергенция тензора импульса равна нулю (7.29), то

$$c e^{\lambda/2} r^2 \nabla_{\mu} T^{\mu 0} = \partial_{\tau} (e^{\lambda/2} r^2 \varepsilon) = 0 \quad (7.87)$$

в силу равенств (10.19) для дивергенции симметричного тензора и $g_{0,\mu} = 0$. Это уравнение есть первый закон термодинамики: элемент пространственного объёма есть $e^{\lambda/2} r^2 dR d\vartheta \sin \vartheta d\varphi$, его произведение с плотностью

энергии есть постоянная величина в случае пыли. Поскольку плотность энергии $\varepsilon = T^{00}$ (7.30) пропорциональна плотности покоящихся частиц $\rho = j^0$ (7.18) в синхронной системе отсчёта (7.84) имеющей $g_{00} = 1$, то (7.87) равносильно условию сохранения количества частиц.

Запишем 00-компоненту уравнения Эйнштейна (7.31),

$$\frac{r\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} (2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') = 8\pi G\varepsilon, \quad (7.88)$$

где точка означает дифференцирование по τ , а штрих — по R . Теперь запишем 0r-, rr-компоненты уравнения Эйнштейна, которые имеют нулевые правые части:

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0 \quad (7.89)$$

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 - e^{-\lambda}r'^2 = 0. \quad (7.90)$$

Уравнение на 0r-компоненту может быть проинтегрировано по времени с константой интегрирования $f(R)$,

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1+f}, \quad (7.91)$$

выбор которой ограничен условием положительности правой части, $f > -1$. Как мы увидим ниже, логично интерпретировать f как функцию полной энергии частицы на единицу массы покоя. Это уравнение (7.91), будучи подставлено в rr-компоненту уравнения Эйнштейна (7.90), приводит к уравнению,

$$\dot{r}(2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f) = 0, \quad (7.92)$$

которое в свою очередь может быть проинтегрировано по времени с константой интегрирования $F(R) = 2GM_{\text{eff}}(R)$,

$$\dot{r}^2 = f + \frac{2GM_{\text{eff}}}{r}. \quad (7.93)$$

Если теперь в (7.88) выразить $\dot{\lambda}$ исходя из (7.89), затем продифференцировав (7.91) по R и подставить λ' в (7.88), то мы придём к уравнению

$$4\pi\varepsilon = \frac{M'_{\text{eff}}}{r'r^2} \Leftrightarrow 4\pi e^{\lambda/2}r^2\varepsilon = \frac{M'_{\text{eff}}(R)}{\sqrt{1+f(R)}}, \quad (7.94)$$

где второе равенство находится в согласии с (7.87), поскольку его правая часть не зависит от времени τ . Первое же равенство позволяет интерпретировать функцию M_{eff} как радиальное распределение эффективной массы:

$$M_{\text{eff}}(R_*) = \int_0^{R_*} \varepsilon \cdot 4\pi r^2 r' dR = \int_0^{r(\tau, R_*)} \varepsilon \cdot 4\pi r^2 dr, \quad (7.95)$$

что совпадает с эффективной массой для метрики Шварцшильда (7.72). Эффективная масса вещества в

области $r < r(\tau, R_*)$ не изменяется в процессе движения, и только она определяет динамику сферического слоя $r(\tau, R_*)$. Всё вещество, находящееся вне этой сферы, наоборот, никак не влияет на динамику вещества, находящегося внутри сферы.

Отметим, что построенное решение может потерять свою применимость, если более далёкий слой начнёт наезжать на более близкий, т.е. произойдёт так называемое опрокидывание. Формально опрокидывание имеет место в момент τ_1 , если в некоторой точке R_1 производная текущего радиуса слоя $r'(\tau_1, R_1)$ обращается в ноль. Согласно (7.91) в этой точке $e^\lambda \rightarrow 0$, то есть плотность энергии ε (плотность частиц ρ) обратится в бесконечность в силу (7.87). Чтобы продолжить решение дальше по времени на $\tau > \tau_1$, надо учитывать конечную сжимаемость пыли и/или немонотонность функции $r(R)$.

Используем построенную картину для выяснения физического смысла величины f . Величина f есть то, что сохраняется при движении частицы вдоль её мировой линии; эта линия задаётся координатой R . Частица движется в гравитационном поле, которое является результатом действия неизменной массы $M_{\text{eff}}(R)$. Таким образом, вдоль траектории должна сохраняться энергия (7.69). Сравнивая между собой (7.71) и (7.93), приходим к

$$f = \frac{E^2}{m^2 c^4} - 1 > -1.$$

В частности, если $f > 0$ и $\dot{r} > 0$, то такой слой на больших временах будет неограниченно удаляться от центра. Если же $f < 0$ и/или $\dot{r} < 0$, то такой слой за конечное время достигнет начала координат.

Продемонстрируем это ...

7-6.1.1 Сшивка с метрикой Шварцшильда вне сферы

Естественно предположить, что вне некоторой сферы, при $R > R_0$, вещество отсутствует. Иными словами, $M_{\text{eff}}(R) = M_{\text{eff}}(R_0)$ при $R > R_0$. Это означает, что в этой области метрика (7.84), будучи формально нестационарной, может быть путём некоторого преобразования системы координат преобразована в метрику Шварцшильда (7.65), которая от времени не зависит.

Перейдём от синхронной системы координат $\{\tau, R\}$ (7.85) к координатам Шварцшильда $\{t, r\}$ (7.66). Сначала сделаем промежуточный переход к координатам $\{\tau, r\}$. Для приращения dR имеем

$$dR = -\frac{\dot{r}}{r'} d\tau + \frac{dr}{r'},$$

так что матричные элементы метрики

$$g'_{\tau\tau} = 1 - \frac{\dot{r}^2}{1+f}, \quad g'_{\tau r} = \frac{\dot{r}}{1+f}, \quad g'_{rr} = -\frac{1}{1+f}.$$

Метрика в координатах $\{t, r\}$ потому принимает вид

$$ds^2 = g'_{\tau\tau}(\partial_t\tau)^2 dt^2 + 2(g'_{\tau r}\partial_r\tau + g'_{r\tau})\partial_t\tau dt dr + (g'_{rr} + g'_{r\tau}(\partial_r\tau)^2 + 2g'_{\tau r}\partial_r\tau) dr^2.$$

Функция $\tau(t, r)$ должна быть найдена из того требования, что в метрике Шварцшильда коэффициент при $dt dr$ равен нулю. В частности легко найти $\partial_r\tau|_r$, после чего получаем, что в координатах $\{t, r\}$ матричный элемент метрики

$$g_{rr} = g'_{rr} - \frac{(g'_{\tau r})^2}{g'_{\tau\tau}} = -\frac{1}{1 - 2GM_{\text{eff}}(R)/c^2 r}, \quad (7.96)$$

где масса внутри сферы M_{eff} определена в (7.95). При преобразованиях мы воспользовались уравнением динамики (7.91, 7.93). Таким образом, для внешнего наблюдателя полная масса равна $M_{\text{eff}}(R_0)$.

7-6.2 Однородное распределение плотности

Предположим, что в начальный момент времени распределение массы $\varepsilon(R)$ было однородным внутри сферы $R < R_0$, вне же этой сферы была пустота. Кроме того, в начальный момент материя покоилась. Начальными условиями таким образом являются

$$r(\tau = 0, R) = R, \quad \dot{r}(\tau = 0, R) = 0. \quad (7.97)$$

В таком случае исследование процесса коллапса пылевидной сферы несколько упрощается.

Решаем задачу при $R < R_0$. Используя начальные условия заключаем, что из (7.95), а затем из (7.93) следует, что

$$M_{\text{eff}}(R) = \frac{4\pi}{3}\varepsilon R^3, \quad f = -\frac{R^2}{a^2}, \quad \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G\varepsilon}{3}. \quad (7.98)$$

Кроме того, замечаем, что правая часть (7.93) квадратична по R , поэтому для функции $r(\tau, R)$ переменные разделяются,

$$r = x(\tau) R. \quad (7.99)$$

В результате метрику (7.85) можно переписать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - x^2 \left(\frac{dR^2}{1 - R^2/a^2} + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right),$$

$$g_{RR} = -\frac{x^2}{1 - R^2/a^2}. \quad (7.100)$$

Снова обращаясь к уравнению (7.93), получаем уравнение на $x(\tau)$:

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{c d\tau}{a}. \quad (7.101)$$

Решением этого уравнения в параметрическом виде является

$$\tau = \frac{a}{c} \frac{\eta + \sin \eta}{2}, \quad x = \frac{1 + \cos \eta}{2}, \quad (7.102)$$

с начальным значением $\eta_0 = \pi/2$. Все частицы независимо от своего начального расстояния до центра окажутся в начале координат, когда их собственное время изменится на

$$\tau_{\text{fin}} = \frac{\pi a}{2c} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\varepsilon}}. \quad (7.103)$$

7-6.2.1 Прохождение частицей горизонта событий

Для частицы по её собственным часам существует момент, когда метрика в координатах (t, r) становится сингулярной. Согласно (7.96), этот момент определяется уравнением

$$x = \frac{R^2}{a^2} = \frac{8\pi G\varepsilon R^2}{3}.$$

При этом с точки зрения динамики частицы в синхронной системе координат с ней в этот момент ничего особенного не происходит, т.е. падающая частица не может определить этот момент по своей собственной динамике.

§7-7. Гравитационные волны

7-7.1 Плоская гравитационная волна

В области, где пространство пустое, $T_{\mu\nu} = 0$, слабое гравитационное поле в гармонической калибровке удовлетворяет уравнению

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (7.104)$$

В Пункте 7-4 мы рассмотрели стационарное гравитационное поле, которое не зависит от времени. В этом параграфе мы рассматриваем принципиально нестационарные решения волнового уравнения (7.104), которые представляют из себя гравитационные волны.

Рассмотрим плоскую монохроматическую гравитационную волну,

$$h_{\mu\nu} = 2 \operatorname{Re} (u_{\mu\nu} \exp(-ik_\mu x^\mu)), \quad k_\mu k^\mu = 0, \quad (7.105)$$

$$u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}, \quad k_\mu u^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} k_\nu u^\mu{}_\mu = 0.$$

ср. с плоской монохроматической электромагнитной волной (4.56). Мы выписали условие гармоничности ко-

ординат в терминах тензора поляризации $\|u_{\mu\nu}\|$, см. (7.47).

Найдём количество физически различных поляризаций и симметричные свойства гравитационных волн. Условие симметричности оставляет независимыми 10 компонент тензора $u_{\mu\nu}$. Дополнительное условие гармоничности представляет из себя 4 уравнения, поэтому оставляет независимыми 6 компонент. Далее, условия симметричности и гармоничности $u_{\mu\nu}$ не нарушаются при калибровочном преобразовании вида (7.51), которое в нашем случае выглядит как

$$u_{\mu\nu} \rightarrow u_{\mu\nu} + q_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu \quad (7.106)$$

где q^ν – произвольный 4-вектор размерности см^{-1} . Таким образом, остаётся только две независимые поляризации для гравитационных волн.

Пусть для определённости гравитационная волна распространяется вдоль оси Oz , т.е. в x^3 -направлении. Тогда волновой вектор равен

$$\|k_\mu\| = (k, 0, 0, -k),$$

а калибровочное преобразование (7.106) сводится к

$$u_{\alpha z} \rightarrow u_{\alpha z} - q_\alpha k, \quad u_{zz} \rightarrow u_{zz} - 2q_z k, \quad u_{00} \rightarrow u_{00} + 2q_0 k.$$

Соответствующим выбором вектора q^μ мы можем обратить в ноль указанные компоненты тензора $u_{\mu\nu}$. Из условия гармоничности теперь следует, что в ноль обращаются все компоненты, кроме $u_{\alpha\beta}$, которые остаются неизменными при калибровочном преобразовании. Из условия гармоничности следует, что $u_{xx} = -u_{yy}$. Таким образом, ненулевые компоненты тензора поляризации имеют вид

$$\|u_{\alpha\beta}\| = u_+ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} + u_- \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad (7.107)$$

Построенная калибровка называется *поперечной калибровкой*, поскольку выполняются равенства

$$k_\mu u^\mu{}_\nu = k_i u^i{}_\nu = 0,$$

сравни с поперечной калибровкой для электромагнитных волн (4.60).

При повороте вокруг оси Oz на угол φ комплексные амплитуды двух возможных поляризаций u_\pm преобразуются по закону

$$u_\pm \rightarrow u_\pm \exp(\pm 2i\varphi). \quad (7.108)$$

Таким образом, гравитационные волны имеют спиральность (проекция спина на направление распространения) ± 2 и, соответственно, спин равный 2.

7-7.1.1 Энергия гравитационной волны

Вергелес, 2017, § 4.1.2.

Используем общее выражение (7.53) для псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля в квадратичном пределе по отклонению метрики от плоской в гармонических координатах. Для плоской гравитационной волны, распространяющейся вдоль направления, градиент сонаправлен её направлению распространения:

$$\partial_\mu h^{\sigma\sigma} = \frac{1}{c} n_\mu \dot{h}^{\sigma\sigma}, \quad \|n_\mu\| = \{1, -\mathbf{n}\},$$

где точка означает производную по времени (набор компонент n_μ не обладает свойством 4-вектора при переходе из одной системы координат в другую). Поэтому

$$\begin{aligned} t^{\nu\mu} &= \frac{c^2}{32\pi G} \left(\dot{h}_{\lambda\sigma} \dot{h}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} (\dot{h}_\sigma^\sigma)^2 \right) n^\nu n^\mu = \quad (7.109) \\ &= \frac{c^2}{32\pi G} \left(\dot{\bar{h}}_{\lambda\sigma} \dot{\bar{h}}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} (\dot{\bar{h}}_\sigma^\sigma)^2 \right) n^\nu n^\mu \end{aligned}$$

где $\sqrt{-g} \rightarrow 1$ согласно квадратичному приближению. Можно проверить, что это выражение, как и должно быть, не изменяется при калибровочном преобразовании (7.51). Если теперь снова выбрать поперечную калибровку, то

$$\begin{aligned} t^{\nu\mu} &= \frac{c^2}{32\pi G} \dot{h}_{\lambda\sigma} \dot{h}^{\lambda\sigma} n^\mu n^\nu \rightarrow \quad (7.110) \\ &\rightarrow \frac{c^4}{4\pi G} (|u_+|^2 + |u_-|^2) k^\mu k^\nu. \end{aligned}$$

Во втором выражении мы приняли, что волна является монохроматической с волновым 4-вектором k^μ и провели усреднение по периоду колебания волны.

7-7.2 Излучение гравитационных волн

Хриплович, 2009, § 8.2

Для выделения поля гравитационного излучения удержим в (7.50) главный порядок по $1/r$

$$\bar{h}'_{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = -\frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (7.111)$$

Штрих в левой части равенства добавлен для того, чтобы ниже нештрихованными величинами обозначить результат после калибровочного преобразования, которым по нашему плану будет поле $h_{\mu\nu}$ в поперечной калибровке. Запись в поперечной калибровке позволит использовать уже имеющиеся выражения для (псевдо)-тензора энергии-импульса типа (7.110).

На далёких расстояниях от системы поле является расходящейся волной, с волновым вектором \mathbf{k} направленным вдоль направления наблюдения $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Главные члены по $1/r$ удерживаются, если посчитать, что поле зависит от координат только через комбинацию $t - r/c$; в этом пределе условие на гармоничность координат (7.47, 7.49) приобретает вид

$$n_\mu \partial_t \bar{h}^\mu{}_\nu = n_\mu \partial_t h^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} n_\nu \partial_t h^\mu{}_\mu = 0, \quad \|n_\mu\| = \{1, -\mathbf{n}\},$$

сравни с условием гармоничности для одной плоской волны (7.105). Для поперечной калибровки это уравнение с $\nu = 0$, а потом с $\nu = k$ даёт

$$h^\mu{}_\mu = \bar{h}^\mu{}_\mu = \bar{h}^k{}_k = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad n^k h_{ki} = 0. \quad (7.112)$$

Перейдём к вычислению пространственных компонент метрики. До калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{mn}(t, \mathbf{r}) &= -\frac{4G}{c^4 r} \int T^{mn} d^3 \mathbf{r}' = \\ &= -\frac{2G}{c^5 r} \partial_t \int (T^{0n} r'^m + T^{0m} r'^n) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= -\frac{2G}{c^5 r} \partial_t \int T^{0k} \partial_k (r'^m r'^n) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= -\frac{2G}{c^6 r} \partial_t^2 \int T^{00} r'^m r'^n d^3 \mathbf{r}' = \\ &= -\frac{2G}{c^4 r} \partial_t^2 \int \rho_m(t_r, \mathbf{r}') r'^m r'^n d^3 \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (7.113)$$

где ρ_m – массовая плотность, а $t_r = t - r/c$. Прделанные выкладки легче всего проверить в обратном порядке, воспользовавшись равенством нулю 4-дивергенции тензора энергии-импульса материи (7.29).

Технически проще не вычислять непосредственно пространственные компоненты h_{ik} в поперечной калибровке, а установить их вид из свойств поперечной калибровки и любого калибровочного преобразования, как это было продемонстрировано для электро-квадрупольного излучения, см. последние два абзаца Пункта 6-3.2.2. Согласно (7.107), нам достаточно следить только за двумя поперечными матричными элементами, которые не изменяются при калибровочном преобразовании. Ответ следующий:

$$\begin{aligned} h_{mn} &= -\left(\delta_{ni}^{\perp} \delta_{mk}^{\perp} + \frac{1}{2} \delta_{nm}^{\perp} n^i n^k \right) \left(\bar{h}'_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \bar{h}'_{ll} \right) = \\ &= -\frac{2G}{3c^4 r} \left(\delta_{ni}^{\perp} \ddot{D}_{ik} \delta_{km}^{\perp} + \frac{1}{2} \delta_{nm}^{\perp} \ddot{D}_{ik} n^i n^k \right), \end{aligned} \quad (7.114)$$

$$\delta_{ni}^{\perp} = \delta_{ni} - n_n n_i, \quad D_{ik} = \int d^3 \mathbf{r} (3r^i r^k - |\mathbf{r}^2| \delta^{ik}) \rho_m,$$

где D_{ik} – квадрупольный момент распределения массы, сравни с электро-квадрупольным моментом (6.15).

Обоснуем написанное выражение. Далеко от источника гравитационное излучение можно представить как плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления наблюдения \mathbf{n} . Будем производить калибровочные преобразования типа (7.106), предполагая для простоты изложения, что ось Oz направлена вдоль единичного вектора \mathbf{n} . Согласно рассмотрению Пункта 7-7.1, при калибровочном преобразовании не изменяются h_{xy} и комбинация $h_{yy} - h_{xx}$, которые у h_{nm} и \bar{h}_{nm} совпадают согласно (7.49). Поэтому в первой строчке (7.114) во второй круглой скобке должно стоять первым слагаемым \bar{h}'_{ik} без какого-либо коэффициента. Теперь, мы не изменим указанные матричные элементы, при этом обнуллив все остальные, если домножим \bar{h}'_{ik} на первую круглую скобку в первой строчке (7.114), в которой должно быть дописано ещё одно слагаемое $-\delta_{nm}^{\perp} \delta^{ik}/2$: вся скобка представляет собой комбинацию

$$\delta_{ni}^{\perp} \delta_{mk}^{\perp} - \frac{1}{2} \delta_{nm}^{\perp} \delta_{ik}^{\perp} = \left(\delta_{ni}^{\perp} \delta_{mk}^{\perp} + \frac{1}{2} \delta_{nm}^{\perp} n^i n^k - \frac{1}{2} \delta_{nm}^{\perp} \delta^{ik} \right)$$

Таким образом, мы уже установили поперечную калибровку. Наконец, во второй круглой скобке мы можем добавить второе слагаемое (7.114), а после этого убрать ненаписанное слагаемое в первой круглой скобке в (7.114), не изменив ответа. В результате придём к выражения написанному во второй строчке (7.114).

Подстановка выражения для амплитуды гравитационной волны (7.114) в выражение для потока энергии (7.110) даёт выражение для интенсивности излучения в телесный угол

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= r^2 c t^{0k} n^k = \frac{c^5 r^2}{32\pi G \omega^2} \dot{h}_{ik} \dot{h}^{ik} = \\ &= \frac{G}{36\pi c^5} \left(\frac{(\ddot{D}^{ik} n^i n^k)^2}{4} - \ddot{D}^{im} \ddot{D}^{km} n^i n^k + \frac{\ddot{D}^{ik} \ddot{D}^{ik}}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.115)$$

Угловое распределение (7.114) интенсивности гравитационного излучения можно сравнить с таковым для излучения электромагнитных волн квадрупольного типа (6.65); по крайней мере, они не совпадают. Полная интенсивность излучения равна

$$I = \frac{G}{45 c^5} \ddot{D}^{ik} \ddot{D}^{ik}. \quad (7.116)$$

§7-8. Движение частиц в гравитационном поле

7-8.1 Неоднородное течение времени в статическом гравитационном поле

Координату x^0 можно считать мировым временем: это есть время вдалеке от тел. Из (7.7) следует, что время течёт с разной скоростью в разных точках пространства. Если по мировым часам время изменилось на $\Delta x^0/c$, то на конечном расстоянии до тел изменение равно

$$\Delta\tau = (\sqrt{g_{00}} - 1) \frac{\Delta x^0}{c} \approx \frac{\phi}{c^2} \frac{\Delta x^0}{c}, \quad (7.117)$$

то есть собственное время течёт тем медленнее, чем больше абсолютная величина потенциала гравитационного поля.

Другим проявлением неодинакового течения времени является изменение частоты света, когда потенциал гравитационного поля непостоянен вдоль траектории светового луча. При распространении света в статическом гравитационном поле сохраняется нулевая компонента k_0 его волнового вектора, что можно увидеть из уравнения (7.6).

Чтобы понять физический смысл этой компоненты, обратимся к уравнению Гамильтона-Якоби для фотона — уравнению на эйконал ψ . В нашем случае коэффициенты в уравнении Гамильтона-Якоби не зависят явно от времени. Поэтому, чтобы сохранить это свойство во всём уравнении с учётом присутствия эйконала ψ в уравнении, мы снова приходим к постоянству k_0 вдоль траектории фотона. Наблюдаемая частота света ω равна

$$\omega = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial x^0}{\partial\tau} \frac{\partial\psi}{\partial x^0} = \frac{ck_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) ck_0, \quad (7.118)$$

где ck_0 — частота света вдалеке от гравитирующих тел, а τ — локальное время наблюдателя, который неподвижен в рассматриваемой точке. Согласно уравнению движения (7.6), именно k_0 является сохраняющейся величиной в статическом гравитационном поле. Таким образом, частота света увеличивается при переходе в область гравитационного потенциала большей амплитуды.

Красное смещение — эффект, который заключается в следующем. Рассмотрим излучение фотона в результате квантового перехода в атоме с последующим его распространением. Законы квантовой механики одинаковы во всех локальных системах отсчёта, поэтому частота ω излучённого фотона фиксирована (является ‘мировой константой’). Однако согласно (7.118) частота не является инвариантом при распространении фотона. Если фотон был испущен в точке x , а принят в точке y , то частота $\omega_{\text{рег}}$ зарегистрированного фотона равна

$$\omega_{\text{рег}} = \sqrt{\frac{g_{00}(x)}{g_{00}(y)}} \omega \approx \left(1 + \frac{\phi(x) - \phi(y)}{c^2}\right) \omega \quad (7.119)$$

Обычно речь идёт о регистрации фотона вдалеке от гравитирующих тел, в то время как сам фотон был испущен вблизи массивного тела. Тогда разница потенциалов отрицательна, $\phi(x) - \phi(y) < 0$. Таким образом, зарегистрированный фотон имеет более низкую частоту по сравнению с испущенным, т.е. *частоту, сдвинутую в красную сторону*.

7-8.2 Отклонение и задержка луча в слабом гравитационном поле

Для исследования отклонения светового луча в гравитационном поле используем уравнение (7.6), записанное во втором варианте. Мы будем предполагать, что итоговое отклонение луча малое. В нулевом приближении по гравитационному полю, таким образом, луч распространяется по прямой. Выберем это направление в качестве 3-й пространственной оси Oz , тогда в нулевом приближении траектория фотона описывается уравнением

$$x = ct = \xi/k,$$

где k — абсолютное значение волнового вектора фотона. Для учёта первой поправки воспользуемся выражением (7.55) для возмущения метрики:

$$-\frac{dk_\alpha}{d\xi} = k \frac{dk^\alpha}{dz} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} ((k^0)^2 + (k^z)^2) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} k^2, \quad (7.120)$$

где $\alpha = \{x, y\}$ — два остальных пространственных направления.

Для центрально симметричного гравитационного поля и прицельного параметра $\rho \gg r_g$ получаем, что угол отклонения равен

$$\theta = \frac{2r_g}{\rho} \quad (7.121)$$

Непосредственно в сферических координатах задача об отклонении светового луча гравитационным полем решена в Хриплович, 2009, § 5.2.

7-8.2.1 Задержка луча

Посчитаем задержку δt луча по мировым часам. Поскольку приращение интервала вдоль мировой линии фотона равно нулю, то приращение мирового времени dt и пространственных координат dx^i связаны между собой соотношением

$$cdt = -g_i dx^i + \frac{\sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Для слабого гравитационного поля поправкой в dx от искривления пути светового пучка можно пренебречь, поскольку она пропорциональна $(h_{00})^2$, таким образом

являясь малой более высокого порядка. Если принять, что свет распространялся вдоль оси Ox , то

$$\delta t = \int \left(dt - \frac{dx}{c} \right) \approx - \int \frac{2\phi}{c^2} \frac{dx}{c}. \quad (7.122)$$

7-8.3 Динамика углового момента вращающихся тел (спинов)

Напомним, что динамика точечного спина (момента количества движения) точечной частицы, находящейся в состоянии свободного падения (двигающейся по геодезической) описывается уравнением параллельного переноса (7.1) вектора Паули-Любанского.

Посмотрим, как это уравнение выглядит в слабо-релятивистском пределе. При малой скорости движения спина заключаем, что его 4-вектор

$$\|a^\mu\| = ((\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\mu})/2)$$

согласно (4.42). Отметим, что трёхмерный вектор $\boldsymbol{\mu}$ изменяет свою ‘длину’ $\sqrt{\mu^i \mu^i}$, поскольку метрика слабо отличается от единичной: в главном приближении

$$(\mu_0)^2 = -g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu \approx (1 - 2\phi/c^2) \mu^k \mu^k,$$

где μ_0 есть уже релятивистский инвариант. Поэтому напишем

$$\boldsymbol{\mu} = (1 + \phi/c^2) \mu_0 \mathbf{n}, \quad a^i = (1 + \phi/c^2) \mu_0 n^i + \frac{\mu_0 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \beta^i}{2},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор. С учётом сделанных замечаний находим, что в слабо релятивистском пределе уравнение параллельного переноса спина вдоль геодезической (7.1) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{da^k}{c dt} &= \frac{\mu dn^k}{c dt} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \phi) \mu^k}{c^2} + \frac{\dot{\beta}^k (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \beta^k (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\mu})}{2} = \\ &= -\Gamma_{0i}^k \mu^i - \Gamma_{00}^k a^0 - \Gamma_{li}^k \beta^l \mu^i = \\ &= \frac{g_{i,k} - g_{k,i}}{2} \mu^i + \\ &+ \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla \phi) \beta^k - 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\mu}) \phi_{,k} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \phi) \mu^k}{c^2}. \end{aligned}$$

В процессе выкладок мы воспользовались выражением для символов Кристоффеля (10.13). Ускорение частицы определяется действием гравитационного потенциала,

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\nabla \phi,$$

в результате чего находим прецессию спина

$$\frac{dn}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}], \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{c \operatorname{rot} \mathbf{g}}{2} - \frac{3[\mathbf{v} \times \operatorname{grad} \phi]}{2c^2}. \quad (7.123)$$

Первое слагаемое в выражении для угловой частоты прецессии $\boldsymbol{\omega}$ (7.123) связывается с эффектом Лэнзе — Тёрринга (*Lense-Thirring precession or the Lense-Thirring effect*). Качественное понимание эффекта состоит в том, что вращающееся тело создаёт вокруг себя метрику, как если бы была выбрана вращающаяся система координат. Эта метрика увлекает за собой тела, находящиеся вокруг вращающегося тела, создавая силы Кориолиса. Согласно (7.58), обсуждаемый вклад в частоту прецессии (7.123) равен

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{G}{c^2} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{n} - \mathbf{n}}{r^3}.$$

В частности, на оси вращения $\boldsymbol{\omega} = 2G\mathbf{L}/(c^2 r^3)$.

Второй вклад в угловую частоту прецессии (7.123), возникающий при движении спина как целого, называется *геодезической прецессией*.

К полученным результатам можно прийти и другим способом — предположив, что рассматриваемый спин является не точечным объектом, а ‘гироскопом’, т.е. вращающимся твёрдым телом, обладающим моментом количества движения \mathbf{L} . Эта программа проделана в Пункте 13-1.1.

ЭЛЕМЕНТЫ КОСМОЛОГИИ

§8-1. Модели Фридмана расширяющейся Вселенной.

8-1.1 Метрика Фридмана

Метрика Фридмана — вид зависимости метрики в пространстве-времени, который полагает распределение материи во Вселенной однородным и изотропным. Это означает, что такая метрика годится для описания Вселенной на самых больших масштабах, где эта однородность действительно имеет место.

В соответствии с предположением о пространственной однородности, тензор Римана в ортонормированном базисе может зависеть только от времени. Его тензорная структура определяется из условия изотропности — инвариантности по отношению ко вращениям в пространстве. Это соображение симметрии говорит, что его ненулевыми матричными элементами являются

$$R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \propto (\delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta}), \quad R^{\alpha}_{0\beta 0} \propto \delta_{\beta}^{\alpha}.$$

Коэффициенты пропорциональности в этих равенствах определяются динамикой метрики Фридмана во времени и глобальной топологией Вселенной, которая в рамках модели Фридмана может быть замкнутой, открытой или плоской.

8-1.1.1 Замкнутая изотропная модель

Замкнутой изотропной модели соответствует метрика

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (8.1)$$

Пространственная часть метрики соответствует сфере S^3 . Радиус Вселенной $a = a(t)$ зависит от времени. Мы также будем обозначать временную координату $x^0 = ct$. Переменные χ, θ, ϕ соответствуют углам на сфере S^3 , для единственности их определения можно, например, положить ограничения $0 \leq \chi, \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Элемент пространственного объёма и полный текущий объём Вселенной

$$dV = a^3 \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi, \quad V_U = 2\pi^2 a^3. \quad (8.2)$$

Отметим, что несмотря на конкретный вид записи метрики (8.1), геометрия пространства-времени как таковая является однородной в пространстве. Это означает, что если мы бы поменяли начало сферической системы координат, вид метрики (8.1) остался бы неизменным.

Определим локальные геометрические характеристики пространства. Введённая система координат является ортогональной; таким образом, с этой системой координат возможно связать ОНБ-базис. Пространственные компоненты мы будем обозначать индексами

$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$ — первыми буквами греческого алфавита. Дальнейшие вычисления производятся по схеме Пункта 10-6.1, где исследована система координат на сфере S^3 . В нашем случае надо также включить в рассмотрение и временную координату. Поэтому к пространственным формам смещения (10.121) надо добавить нулевую форму:

$$\omega^0 = c dt, \\ \omega^{\chi} = a d\chi, \quad \omega^{\theta} = a \sin \chi d\theta, \quad \omega^{\phi} = a \sin \chi \sin \theta d\phi.$$

Формы связности находим из структурного уравнения Картана на (нулевой) тензор кручения (10.113): уравнение на α -компоненту может быть переписано в виде

$$0 = d\omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}_b \wedge \omega^b = \\ = \left(\frac{\dot{a}}{a} \omega^0 \wedge \omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}_0 \wedge \omega^0 \right) + (d\omega^{\alpha}|_{a=\text{const}} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}).$$

Две скобки в правой части линейно независимы и потому должны быть равны нулю по отдельности. Вторая скобка соответствует рассмотрению сферы S^3 с радиусом a , формы связности ω^{α}_{β} найдены в Пункте 10-6.1 и задаются выражениями (10.122). Первая скобка определяет формы связности, в которых принимает участие временная координата

$$\omega^{\alpha}_0 = \frac{\dot{a}}{a} \omega^{\alpha} \Leftrightarrow \omega_{0\alpha\beta} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.3)$$

Точка обозначает производную по $x^0 = ct$. Воспользовавшись вторым структурным уравнением Картана на тензор кривизны (10.113), находим ненулевые компоненты тензора Римана

$$R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = -\frac{\dot{a}^2 + \kappa}{a^2} (\delta_{\gamma}^{\alpha}\delta_{\delta}^{\beta} - \delta_{\delta}^{\alpha}\delta_{\gamma}^{\beta}), \quad R^{\alpha}_{0\beta 0} = -\frac{\ddot{a}}{a} \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (8.4)$$

где в случае метрики замкнутой Вселенной (8.1) $\kappa = 1$. Как и должно быть, полученный тензор кривизны однороден в пространстве. Далее, ненулевые компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна равны

$$R^0_0 = -\frac{3\ddot{a}}{a} \quad R^{\alpha}_{\beta} = -\frac{2\kappa + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} \delta_{\beta}^{\alpha}, \\ R = -\frac{6(\kappa + \dot{a}^2 + a\ddot{a})}{a^2}.$$

Отметим, что в статическом случае, когда $\dot{a} = 0$, второе структурное уравнение Картана естественным образом совпадает со случаем сферы S^3 (10.124). При этом, поскольку пространственная часть метрики Минковского имеет отрицательную сигнатуру, статический вклад в скалярную кривизну отрицателен и равен $-6\kappa/a^2$, сравни с (10.123).

8-1.1.2 Открытая изотропная модель

Открытая изотропная модель отличается от замкнутой заменами $a \rightarrow ia$, $\chi \rightarrow -i\chi$ в выражении для метрики (8.1). В результате таких замен метрика приобретает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (8.5)$$

Переменная χ теперь может принимать значения на всей числовой оси, и объём Вселенной потому оказывается неограниченным.

Формы смещения отличаются от (10.121) заменой тригонометрических функций χ на гиперболические. Этим же ограничивается изменение форм связности (10.122) в секторе $\alpha\beta$. Формы связности в секторе 0α (8.3) остаются теми же самыми.

В результате получаем, что тензор кривизны задаётся выражениями (8.4) с $\kappa = -1$. Этот результат можно было бы получить и непосредственно, произведя в (8.4) замену $a \rightarrow ia$.

8-1.1.3 Плоская модель

Плоская модель предполагает, что если “радиус Вселенной” a не изменяется во времени, то пространство-время не имеет кривизны. Метрика такого пространства содержит a только в качестве масштабного фактора при евклидовой метрике в пространстве,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \sum_{\alpha} (dx^{\alpha})^2. \quad (8.6)$$

Однако если “радиус Вселенной” a становится зависящим от времени, то у пространства-времени появляется ненулевой тензор кривизны.

Формы смещения

$$\omega^0 = c dt, \quad \omega^{\alpha} = a dx^{\alpha},$$

ненулевыми формами связности являются только (8.3). Тензор кривизны задаётся выражениями (8.4) с $\kappa = 0$.

Возможно одной формулой объединить выражения для метрик в замкнутой (8.1), открытой (8.5) и плоской (8.1) моделях. Перейдём в пространстве в сферическую систему координат, а в качестве радиальной координаты выберем величину r так, чтобы длина окружности с радиусом r была равна $2\pi r$. Для плоской модели пространственная часть метрики является евклидовой, поэтому такое определение совпадает с определением обычных

сферических координат. Для замкнутой и открытой моделей получаем

$$\begin{aligned} \text{closed:} \quad r^2 &= a^2 \sin^2 \chi, & a^2 d\chi^2 &= dr^2 / (1 - r^2/a^2) \\ \text{open:} \quad r^2 &= a^2 \text{sh}^2 \chi, & a^2 d\chi^2 &= dr^2 / (1 + r^2/a^2) \end{aligned}$$

Общей формулой для метрики при всех типах Вселенной поэтому является

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2/a^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (8.7)$$

В частности, для замкнутой модели радиус окружности r не может быть больше чем a , что не удивительно.

8-1.1.4 Красное смещение и постоянная Хаббла

В научной литературе приняты следующие обозначения. Величины, относящиеся к текущему моменту времени, снабжаются нижним индексом ‘0’. Например, текущее значение “радиуса” Вселенной равно a_0 , текущее значение времени равно t_0 (отсчитанное от Большого взрыва, см. ниже). Согласно наблюдениям и существующей теории, “радиус” Вселенной $a(t)$ является монотонно возрастающей функцией времени, а начальный момент времени соответствует нулевому радиусу Вселенной. Для описания степени расширения используется безразмерная величина z

$$1 + z(t) = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (8.8)$$

называемая *красным смещением* (redshift). Динамику расширения в данный момент описывает *постоянная Хаббла* (Hubble constant)

$$H = c \frac{\dot{a}}{a}, \quad (8.9)$$

которая является постоянной только в пространстве, имея нетривиальную зависимость от времени. В настоящий момент постоянная Хаббла имеет значение около

$$H_0 \approx (67 \div 74) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \approx (2.2 \div 2.4) \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}.$$

Разные методы измерения дают значения, отличающиеся на величину около 4σ . Таким образом, более точное измерение постоянной Хаббла есть задача будущих исследований. Если бы постоянную Хаббла можно было считать независимой от времени, то расстояние, на котором точки удаляются друг от друга со скоростью света, было бы равно

$$r_{HR} = \frac{c}{H_0} \approx 1.3 \cdot 10^{26} \text{ см} \approx 1.4 \cdot 10^{10} \text{ св.лет}$$

Это расстояние называется радиусом Хаббла.

8-1.2 Движение частиц в метрике Фридмана

Рассмотрим свободное движения частицы массы m во Вселенной с изменяющимся радиусом кривизны: в ортогональном базисе

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2, \quad \mathbf{p}^2 = \sum_{\alpha} (p^{\alpha})^2.$$

Выберем аффинный параметр s траектории частицы так, что касательная к траектории есть импульс,

$$\frac{dx^{\mu}}{ds} = p^{\mu}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} = p^0 \frac{d}{dx^0},$$

где компонента импульса p^0 имеет одно и то же значение в координатном и ортонормированном базисах. Тогда первый вариант уравнения движения по геодезической (7.6) на 0-компоненту записывается в виде

$$|\mathbf{p}| \frac{d|\mathbf{p}|}{dx^0} = p^0 \frac{dp^0}{dx^0} = \frac{dp^0}{ds} = - \sum_{\alpha} \omega^0_{\alpha\alpha} (p^{\alpha})^2 = - \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{p}^2,$$

где мы воспользовались выражением (8.3) для формы связности. Сравнивая первое и последнее выражения в цепочке равенств приходим к выводу, что при движении сохраняется инвариант

$$|\mathbf{p}|a = \text{const}, \quad (8.10)$$

где $|\mathbf{p}|$ — абсолютное значение трёх-мерного импульса. Легко также показать, что направление движения частицы не изменяется, если выбрать систему пространственных координат так, что исходно $\theta = \phi = 0$ и ненулевой является только p^x -компонента импульса \mathbf{p} . Эти условия не будут нарушаться и в будущем, что как раз и говорит о сохранении частицей направления своего движения.

8-1.2.1 Красное смещение

Рассмотрим фотон, который был испущен в момент времени t и имел частоту ω_{in} , и принят в настоящий момент t_0 . Согласно (8.10) величина

$$\omega a = \text{const} \quad (8.11)$$

остаётся неизменной, т.е. его частота в момент приёма ω_0 определяется равенством

$$\omega_0 = \frac{a(t)}{a_0} \omega_{\text{in}}, \quad \frac{\omega_0 - \omega_{\text{in}}}{\omega_{\text{in}}} \approx - \frac{H_0 l}{c^2}. \quad (8.12)$$

Второе, приближённое равенство (8.12) верно, пока t не слишком сильно отличается от t_0 . В нём l — расстояние, пройденное фотоном. Это расстояние определяется из требования, чтобы приращение интервала при движении безмассовой частицы было нулевым,

$$dl = c dt, \quad l = c(t_0 - t).$$

8-1.2.2 Реликтовое излучение

Реликтовое излучение (cosmic microwave background) — электромагнитные волны, статистически (почти) равномерно и изотропно присутствующие во Вселенной. Распределение волн в реликтовом излучении по волновым векторам $\mathcal{P}(\mathbf{k})$ подчиняется распределению Планка

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\exp(-\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{T}) - 1} \quad (8.13)$$

с учётом двух поляризаций фотона. В настоящий момент температура реликтового излучения $T_0 = 2.73\text{K}$.

Поскольку красное смещение (8.12) действует на каждую частоту пропорционально, то распределение Планка остаётся таковым и в прошлые времена. Температура реликтового излучения в прошлом $T(t) = T_0(1 + z(t))$.

8-1.3 Динамические уравнения на расширение Вселенной

Запишем уравнение Эйнштейна с Λ -членом (7.33) в метрике Фридмана. Мы полагаем, что наша система координат естественно оказывается (приближённо) сопровождающей системой координат. Тензор энергии-импульса мы полагаем изотропным и потому имеющим вид (3.30). В уравнении Эйнштейна есть два независимых скалярных уравнения. В качестве первого уравнения выберем 00-компоненту уравнения Эйнштейна

$$\frac{\dot{a}^2 + \kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon + \frac{\Lambda}{3}. \quad (8.14)$$

Вторым уравнением можно выбрать любую из $\alpha\alpha$ -компонент уравнения Эйнштейна (7.33); мы возьмём его след. С учётом уже выписанного уравнения (8.14) получаем

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{c^4} (\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (8.15)$$

Однако может быть более удобным в качестве второго уравнения выбрать условие того, что 4-дивергенция обеих частей уравнения Эйнштейна равна нулю,

$$0 = \nabla_a T^{a0} = \dot{\varepsilon} + \sum_{\alpha=1}^3 \omega^0_{\alpha\alpha} (\varepsilon + P) = \dot{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a} (\varepsilon + P), \quad (8.16)$$

где мы воспользовались выражением для форм связности (8.3). Это уравнение есть первый закон термодинамики

$$d(\varepsilon V) + PdV = 0, \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon + \frac{dV}{V} (\varepsilon + P) = 0,$$

где V — объём некоторого элемента Вселенной, заданный фиксированной во времени областью в пространстве координат χ, θ, ϕ (можно сравнить с уравнением для пыли (7.87), у которой давление равно нулю). Этот элемент объёма расширяется вместе с Вселенной, $V \propto a^3$, поэтому его логарифмическая производная $dV/V = 3da/a$.

8-1.3.1 Открытая или замкнутая Вселенная?

Уравнение (8.14) может быть переписано в виде

$$\frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon + \frac{\Lambda}{3} - \frac{H^2}{c^2} \equiv \frac{H^2}{c^2} (\Omega - 1), \quad (8.17)$$

который указывает, что по экспериментальным измерениям плотности материи, характеризуемой безразмерным параметром Ω , можно определить знак κ , то есть сделать заключение о том, какова Вселенная — открытая, плоская или замкнутая. Обычно эти оценки производят в настоящий момент, так что в (8.17) стоит постоянная Хаббла H_0 .

Плотность материи Ω является арифметической суммой вкладов от разных её сортов. Первый вклад Ω_m рассмотрим от барионной материи — атомов. На данный момент движение барионной материи можно считать нерелятивистским, поэтому для неё выполняется соотношение $\varepsilon_m = \rho_m c^2$, где ρ_m — массовая плотность. Иными словами, мы пренебрегаем вкладом кинетической энергии движения материи и считаем, что её свойства потому описываются моделью пыли характеризующейся нулевым давлением $P = 0$, см. Пункт 3-3.2 (это следует рассматривать как уравнение состояния барионной материи). Тогда из уравнения (8.16) вытекает, что

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_m = \varepsilon_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3,$$

что означает просто сохранение полной массы при нерелятивистском движении. Разность $\Omega - 1$ в (8.17) меняет знак, когда плотность барионной материи становится равной

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 9 \cdot 10^{-30} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \Omega_m = \frac{\varepsilon_m}{\rho_{\text{crit}} c^2}. \quad (8.18)$$

Следующим учтём электромагнитное излучение в совокупности с другими безмассовыми частицами, такими как нейтрино:

$$\Omega_f = \frac{8\pi G \varepsilon_f}{3c^2 H_0^2}. \quad (8.19)$$

Уравнением состояния газа безмассовых частиц является $P_f = \varepsilon_f/3$, поэтому плотность энергии из (8.16)

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{f0} (a_0/a)^4.$$

Этот закон можно также объяснить и следующим образом. Частота каждого кванта падает с расширением Вселенной обратно пропорционально её “радиусу”, см. (8.11), а плотность квантов обратно пропорциональна a^3 , поскольку процесс расширения Вселенной не изменяет полное количество квантов.

Наконец, вклад от тёмной энергии равен

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G \rho_{\text{crit}}} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (8.20)$$

Уравнением состояния Λ -субстанции (называемой *тёмной энергией*), порождающей Λ -вклад в уравнении Эйнштейна через общий тензор энергии-импульса, является $P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda$. Свойством тёмной энергии является, таким образом, отрицательное давление и, более того, отрицательное значение комбинации $\varepsilon + 3P$, которая фигурирует в (8.15) и определяет знак второй производной по времени \ddot{a} от масштабного фактора. Условие равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса (8.16) (вытекающее теперь из равенства нулю дивергенции левой части уравнения Эйнштейна (7.33)) означает

$$\nabla_\mu (g^{\mu\nu} \Lambda) = \dot{\Lambda}/c = 0, \quad (8.21)$$

поскольку $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$. Таким образом, Λ является неизменным во времени.

Природа тёмной энергии на настоящее время не известна. Поэтому допустимо рассматривать и более общую модель её уравнения состояния, полагая

$$P = w\varepsilon, \quad d\varepsilon + \frac{dV}{V}(1+w)\varepsilon = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}. \quad (8.22)$$

Для Λ -субстанции безразмерный параметр $w = -1$ (для пыли $w = 0$, для ультра-релятивистского газа $w = 1/3$). Этот параметр устанавливает модельную линейную связь между давлением и энергией, $p = w\varepsilon$. В последнем, проинтегрированном уравнении (8.22) параметр w полагается константой, хотя в более сложных моделях w может зависеть от времени.

Из экспериментальных данных может быть установлена ...

8-1.3.2 Скорость расширения Вселенной

Уравнение на скорость расширения Вселенной (8.14) может быть переписано в виде

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{c} \sqrt{\Omega_f \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\kappa \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (8.23)$$

где введено обозначение

$$\Omega_\kappa = \frac{c^2 \kappa}{H_0^2 a_0^2}$$

в предположении, что топология Вселенной (замкнутая, открытая или плоская) не изменяется с течением времени. Достоинство (8.23) состоит в том, что в правой части уравнения вся зависимость от a выписана явно. Поэтому это уравнение удобно решать численно для нахождения зависимости $a(t)$.

Вклад от кривизны Ω_κ при малых радиусах Вселенной оказывается малым по сравнению с вкладом от материи, тогда как при больших радиусах он оказывается мал по сравнению с вкладом от тёмной энергии. Поэтому вклад Ω_κ может быть существенным только на промежуточной асимптотике. Однако и этого согласно экспериментальным данным не имеет места быть.

Если в (8.23) доминирует вклад от одного слагаемого, то оно может быть проинтегрировано явно. Пусть

уравнение состояния для этого слагаемого описывается константой w определённо к (8.22). Тогда

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{2}{3(1+w)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega} (t - t_*)}{c} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Можно заметить, что чем больше показатель w (т.е. давление), тем быстрее Вселенная расширяется на малых временах и тем медленнее на больших. В частности, для ультрарелятивистской материи (или поля) и для пылевидной материи получаем

$$\frac{a}{a_0} = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) \frac{H_0 \sqrt{\Omega_{f,m}} (t - t_*)}{c} \right)^{1/2, 2/3}, \quad (8.24)$$

где t_* — константа интегрирования. Отметим, что если существенными оказываются только вклады от пылевидной материи и излучения, то уравнение динамики Вселенной (8.23) может быть решено аналитически целиком. Для Λ -субстанции, имеющей предельное уравнение состояния, вместо степенного закона расширения приходим к экспоненциальному закону

$$\frac{a}{a_0} = \exp \left(\frac{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} (t - t_*)}{c} \right). \quad (8.25)$$

Frieman, Turner и Huterer, 2008

Часть IV APPENDIX

Глава 9

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

§9-1. Тензорное исчисление

Рекомендуемая дополнительная литература: Корнев, 2000.

Рассмотрим линейное d -мерное пространство \mathcal{L} над полем действительных чисел. Каждый вектор \mathbf{x} этого линейного пространства может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 x^1 + \dots + \mathbf{e}_d x^d \equiv \mathbf{e}_\mu x^\mu, \quad (9.1)$$

где индекс μ пробегает значения $\{1, \dots, d\}$, \mathbf{e}_μ — базисные вектора некоторого базиса в этом линейном пространстве, x^μ — набор вещественных чисел, которые мы будем называть координатами вектора \mathbf{x} . Равенство (9.1) переписано второй раз с использованием соглашения Эйнштейна (*Einstein notation or Einstein summation convention*). Это соглашение заключается в том, что если в выражении дважды повторяется индекс, записанный вверху и внизу, то подразумевается суммирование по всем допустимым значениям этого индекса, если не оговорено противного. Эта операция суммирования называется также *свёрткой*.

Предположим, что мы производим линейное преобразование базиса. Это означает, что мы переходим от старого базиса \mathbf{e}_μ к новому \mathbf{e}'_ν согласно правилу, задающемуся некоторой матрицей \mathcal{D} , размерности dx^d :

$$\mathbf{e}'_\nu = \mathcal{D}'^\mu_{\nu} \mathbf{e}_\mu. \quad (9.2)$$

где по повторяющемуся индексу μ согласно соглашению Эйнштейна производится суммирование от 1 до d . Набор векторов \mathbf{e}'_μ является базисом в том случае, если детерминант \mathcal{D} , не ноль, то есть матрица не вырождена. Мы всегда будем это предполагать.

В новом базисе вектор \mathbf{x} имеет координаты x'^μ , которые связаны с координатами в старом базисе через обратную матрицу \mathcal{D}' :

$$x'^\mu = \mathcal{D}'^\mu_{\nu} x^\nu, \quad \mathcal{D}'^\mu_{\nu} \mathcal{D}^\lambda_{\mu} = \delta^\lambda_{\nu}. \quad (9.3)$$

Здесь δ^λ_{ν} — символ Кронекера (*Kronecker symbol*), равный единице, если значения его индексов совпадают (в данном случае если $\lambda = \nu$), и нулю в противном случае. Матрица перехода есть матрица Якоби линейного

преобразования координат,

$$\mathcal{D}'^\mu_{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mathcal{D}'^\mu_{\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\lambda}. \quad (9.4)$$

Вектор \mathbf{x} становится осязаемым только в случае, если заданы его координаты x^μ . Поэтому более практичным определением вектора является следующее: совокупность d чисел x^μ называют вектором, если при переходе от одного базиса к другому (мы будем говорить о том же самом как о переходе от одной системы координат к другой) этот набор преобразуется по закону (9.3).

9-1.1 Контравариантные и ковариантные вектора

Вектора, преобразующиеся по закону (9.3), называют *контравариантными векторами*. Более общо, вектор x^μ называют тензором первого ранга типа (0,1).

По определению, тензора второго ранга типа (0,2) являются элементами линейного пространства размерности d^2 , мы будем их обозначать как $F^{\mu\nu}$, $M^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$: каждый индекс пробегает по-прежнему d значений, поэтому всего матричных элементов у тензора второго ранга оказывается как раз d^2 штук. Пример тензора $F^{\mu\nu}$ можно построить из двух векторов (т.е. тензоров первого ранга типа (0,1)) путём их прямого произведения,

$$F^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu; \quad \text{пусть например} \quad T^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}. \quad (9.5)$$

В общем случае произвольный тензор второго ранга $T^{\mu\nu}$ невозможно представить в виде произведения двух векторов (9.5), как это сделано для $F^{\mu\nu}$, поскольку в $T^{\mu\nu}$ содержится d^2 независимых параметров, тогда как в двух векторах независимых параметров всего $2d$. Тем не менее, построение (9.5) показывает, что для тензора второго ранга при смене базиса должно иметь место правило преобразования

$$F'^{\mu\nu} = \mathcal{D}'^\mu_{\rho} \mathcal{D}'^\nu_{\lambda} F^{\rho\lambda}. \quad (9.6)$$

9-1.1.1 Ковариантные тензора

Рассмотрим линейные функции на векторах: каждому вектору такая функция ставит в соответствие число. Такие функции образуют линейное пространство \mathcal{L}^* размерности d , его элементы называют ковариантными векторами. Если в пространстве \mathcal{L} выбран базис, так что любой контравариантный вектор \mathbf{x} определяется набором d чисел x^μ , то ковариантный вектор $\alpha \in \mathcal{L}^*$ определяется набором d чисел α_μ , так что его действие на векторе \mathbf{x} равно

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_\mu x^\mu. \quad (9.7)$$

Это число не должно зависеть от выбранного базиса. Из (9.3) вытекает, что при преобразовании базиса этот набор преобразуется по правилу

$$\alpha'_\mu = D^\nu_{\mu} \alpha_\nu. \quad (9.8)$$

совпадающему с правилом (9.2) для величины также с нижним индексом.

Набор d величин, преобразующихся по закону (9.7), называют *ковариантными векторами* (или, тензорами первого ранга типа (1,0)), в отличие от контравариантных векторов.

По аналогии с тем, как был построен тензор второго ранга типа (0,2), можно построить тензор второго ранга типа (2,0) по правилу

$$H_{\sigma\zeta} = \alpha_\sigma \beta_\zeta, \quad H'_{\sigma\zeta} = D^\nu_{\sigma} D^\mu_{\zeta} H_{\mu\nu}. \quad (9.9)$$

Далее, можно построить и тензор второго ранга смешанного типа (1,1), согласно правилу

$$J^\sigma_\zeta = x^\sigma \beta_\zeta, \quad J'^\sigma_\zeta = D^\nu_{\sigma} D^\mu_{\zeta} J^\nu_\mu. \quad (9.10)$$

Как $H_{\sigma\zeta}$, так и J^σ_ζ являются элементами (разных) линейных пространств размерности d^2 .

Вообще, величины, имеющие более одного индекса, и преобразующиеся по законам типа (9.6,9.9,9.10), называются тензорами ранга, равного сумме количеств верхних (контравариантных) и нижних (ковариантных) индексов. Распирение описанных правил на тензора более высокого ранга прямолинейно.

9-1.1.2 Скаляры

Скаляром называют величину, значение которой не зависит от выбранного базиса. Таким образом, действие ковариантного вектора на контравариантном векторе есть скаляр. Другим примером построения скаляра является след тензора второго ранга типа (1,1):

$$\varphi = F^\mu_\mu.$$

Формально, скаляр является тензором нулевого ранга.

9-1.2 Метрика

Определим невырожденную квадратичную форму g , называемую *метрикой*, которая каждой паре векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} ставит в соответствие число, называемое *скалярным произведением*,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (9.11)$$

где $g_{\mu\nu}$ — совокупность $d(d-1)/2$ чисел, определяющих квадратичную форму g в данном базисе. Скалярное произведение $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ по нашей задумке должно зависеть только от выбранных метрики и векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} , но не должно зависеть от выбранной системы координат (выбранного базиса). Таким образом, метрика является тензором типа (2,0), и потому преобразуется согласно правилу

$$g'_{\mu\nu} = D^\rho_{\mu} D^\lambda_{\nu} g_{\rho\lambda}, \quad (9.12)$$

сравни с (9.9).

Метрика является выделенным невырожденным симметричным ковариантным тензором второго ранга (типа (2,0)). Если введена метрика, то устанавливается взаимно-однозначное соответствие между контравариантными и ковариантными тензорами. Пусть \mathbf{x}, \mathbf{y} — вектора линейного пространства \mathcal{L} . Каждому контравариантному вектору x^μ можно поставить во взаимно однозначное соответствие ковариантный вектор x_μ , являющийся линейной функцией на \mathcal{L} , см. определение (9.7), по правилам

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (9.13)$$

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu, \quad \|g^{\mu\nu}\| = \|g_{\mu\nu}\|^{-1}.$$

Мы ввели матрицу, обратную матрице метрического тензора. Обратный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ преобразуется по закону (9.6). Операции первой строчки (9.13) называют *операциями опускания и поднятия индекса*.

Процедуры поднятия и опускания индекса распространяются на тензора всех рангов. Например, тензору F^μ_ν можно поставить в соответствие тензора $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, проведя операции поднятия и опускания индекса согласно (9.13):

$$F^{\mu\nu} = g^{\nu\lambda} F^\mu_\lambda, \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} F^\lambda_\nu.$$

Построенные величины будут преобразовываться по правилам (9.6) и (9.9) соответственно. Поскольку взаимное соответствие всех трёх тензоров однозначно, о них всех вместе взятых говорят просто как о тензоре F .

9-1.2.1 Пример метрики: евклидово пространство

В качестве первого примера метрики рассмотрим евклидово пространство. *Евклидово пространство (Euclidean space)* — это линейное пространство с введённой на нём

метрикой такой, что существует базис \mathbf{e} , в котором метрика в матричном представлении является единичной матрицей,

$$\|g_{ik}\| = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (9.14)$$

Вместо индексов из букв греческого алфавита $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\}$ мы используем индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, l, \dots\}$, если речь идёт о евклидовом пространстве с введённым базисом, где метрика имеет канонический вид (9.14).

В евклидовом пространстве действие метрики как квадратичной формы для двух векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} представляет из себя известное в физике скалярное произведение:

$$g_{ik} x^i x^k \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d x^i y^i. \quad (9.15)$$

В евклидовом пространстве существует целое множество базисов, в которых метрика является единичной матрицей. Все такие базисы называются (*прямоугольными*) *Декартовыми системами координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход от одного базиса к другому производится с помощью ортогональной матрицы,

$$x'^i = \mathcal{O}^i_k x^k, \quad \mathcal{O}^i_k \mathcal{O}^l_k = \mathcal{O}^k_i \mathcal{O}^k_l = \delta^{il}. \quad (9.16)$$

Для того, чтобы отличать ортогональную матрицу от произвольной матрицы перехода, мы обозначили её \mathcal{O} , так что $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{O}$. Для ортогональной матрицы равенство (9.8) сохраняет метрику (9.14).

Для евклидова пространства допускается нарушение соглашения Эйнштейна в том смысле, что повторяющиеся индексы, по которым происходит суммирование, могут одновременно быть нижними или верхними. Причина состоит в том, что тензора с верхними и нижними индексами не отличаются друг от друга, см. Пункт 9-1.1.

9-1.2.2 Пример метрики: пространство Минковского

Пространство Минковского (*Minkowski space or Minkowski spacetime*) — это 4-х мерное линейное пространство с введённой на нём метрикой, такой, что существует базис \mathbf{e} , в котором метрика в матричном представлении имеет вид

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1), \quad (9.17)$$

то есть метрика диагональна, первый элемент равен 1, а все остальные -1 . Все такие базисы мы будем также называть (*прямоугольными*) *Декартовыми системами координат*.

Если рассматривается пространство Минковского, то для индексов принято производить счёт начиная с нуля, так что $\{\mu, \nu, \dots\} = \{0, 1, \dots, d-1\}$. В соответствии с физическим смыслом, нулевая компонента называется

также временной компонентой, а остальные компоненты — пространственными. Если есть желание выделить пространственные компоненты, то используют индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, \dots\}$.

В пространстве Минковского действие метрики как квадратичной формы имеет вид

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i=0}^{d-1} x^i y^i \equiv x^0 y^0 - x^i y^i. \quad (9.18)$$

Матрицу преобразования \mathcal{D}' , которая сохраняет метрику (9.17), мы будем обозначать символом Λ' и называть матрицей преобразования Лоренца, а само преобразование — преобразованием Лоренца. Таким образом, если Λ' — матрица преобразования Лоренца и метрика g есть метрика Минковского (9.17), то

$$g_{\mu\nu} = \Lambda'^\lambda_\mu \Lambda'^\rho_\nu g_{\lambda\rho}. \quad (9.19)$$

9-1.3 Полностью антисимметричный псевдотензор

Символ Леви-Чивиты ϵ (*Levi-Civita symbol*) для d -мерного пространства имеет d индексов. Не имеет значения, называть их верхними или нижними, поскольку символ Леви-Чивиты не является тензором. По определению, его матричный элемент

$$\epsilon_{12\dots d} = 1. \quad (9.20)$$

в любой системе отсчёта. При перестановке любых двух индексов значение символа меняет знак. Таким образом, в частности, если значение хоть одной пары его индексов совпадает, то соответствующий матричный элемент символа равен нулю.

Покажем, что величина \mathfrak{E} , определённая согласно равенству

$$\mathfrak{E}_{\mu\dots\nu} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu\dots\nu}, \quad g = \det \|g_{\lambda\rho}\| \quad (9.21)$$

является *псевдотензором*. Псевдотензором в общем случае мы называем объект, который ведёт себя как тензор какого-либо ранга и в дополнение к этому меняет знак, если детерминант матрицы перехода \mathcal{D}' отрицателен. Величину (9.21) мы будем называть полностью антисимметричным псевдотензором.

Действительно, посмотрим как совокупность величин (9.21) преобразуется при переходе из одной системы координат в другую, если считать её тензором ранга $(0, d)$:

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow \mathcal{D}'^\rho_\mu \dots \mathcal{D}'^\lambda_\nu \mathfrak{E}_{\rho\dots\lambda} = \sqrt{|g|} \mathcal{D}'^\rho_\mu \dots \mathcal{D}'^\lambda_\nu \epsilon_{\rho\dots\lambda}.$$

Свертка символа Леви-Чивиты с d матрицами \mathcal{D}_i есть детерминант этой матрицы помноженный на символ Леви-Чивиты (для доказательства следует сопоставить определения детерминанта и символа Леви-Чивиты). С другой стороны, поскольку преобразованная метрика — см. правую часть (9.12) — представляет из себя произведение трёх матриц \mathcal{D}_i , $\|g_{\mu\nu}\|$ и снова \mathcal{D}_i , то

$$\det \|g'_{\mu\nu}\| = (\det \mathcal{D}_i)^2 \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

В итоге получаем, что

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow \sqrt{|g|} \det D_i \epsilon_{\mu\dots\nu} = \text{sign}(\det D_i) \sqrt{|g'|} \epsilon_{\mu\dots\nu}. \quad (9.22)$$

Таким образом, если детерминант матрицы перехода $\det D_i$ положителен, то преобразование \mathfrak{E} как тензора типа $(d, 0)$ согласуется с его определением (9.21). Если же детерминант матрицы перехода отрицателен, результат преобразования по правилу тензора отличается от определения (9.21) знаком. В соответствии с определением (9.21), в этом случае при переходе в новую систему координат \mathfrak{E} меняет знак в добавок к преобразованию по типу тензора $(d, 0)$.

Действуя аналогично можно показать, что полностью антисимметричный псевдотензор с верхними индексами равен

$$\mathfrak{E}^{\mu\dots\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon_{\mu\dots\nu}. \quad (9.23)$$

Любое произведение полностью антисимметричного псевдотензора на просто тензор (по схеме (9.5)) есть псевдотензор. Произведение двух псевдотензоров есть просто тензор.

§9-2. Евклидово пространство

Рассмотрим евклидово пространство и базис в нём такой, что в этом базисе метрика является единичной матрицей, см. Пункт 9-1.2.1:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (9.26)$$

В этом случае базис называется *Декартовой системой координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход во все другие Декартовы системы координат осуществляется с помощью ортогональных преобразований. Если в системе K у вектора \mathbf{x} были координаты x^k , то в системе K' координаты этого вектора

$$x'^i = \mathcal{O}^i_k x^k, \quad \mathcal{O}^k_i \mathcal{O}^k_l = \delta_{il}. \quad (9.27)$$

Здесь матрица \mathcal{O} — матрица ортогонального поворота; второе равенство в (9.27) представляет из себя условие на то, чтобы матрица $\hat{\mathcal{O}}$ была ортогональной. В дальнейшем мы в этом параграфе будем рассматривать только ортогональные переходы от одного базиса к другому.

В евклидовом пространстве компоненты ковариантного вектора совпадают с компонентами контравариантного вектора, см. (9.13), поэтому нет смысла различать нижние и верхние индексы. Соглашение Эйнштейна, таким образом, не требует, чтобы два повторяющихся индекса, по которым производится суммирование, были один сверху, а другой сверху. Они могут быть на любых позициях. Обозначая вектора в евклидовом пространстве, мы, тем не менее, будем по возможности писать их индексы сверху.

9-1.4 Тензорные поля

Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — некоторое скалярное поле, определённое на линейном пространстве \mathcal{L} (9.1). Совокупность d величин

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi \quad (9.24)$$

является ковариантным векторным полем. Это означает, что при переходе в новую систему координат совокупность $\|\partial_\mu \varphi\|$ по всех точках пространства \mathcal{L} преобразуется согласно (9.8):

$$\partial_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \varphi = D^\lambda_\mu \partial_\lambda \varphi, \quad (9.25)$$

смотри (9.4).

Можно определить тензорное поле любого ранга. Дифференцирование такого тензорного поля по координатам производит новое тензорное поле на один ранг выше, с добавлением одного нижнего индекса.

9-2.1 Скалярное произведение векторов

Здесь мы частично повторяем то, что было сказано в Пункте 9-1.2.1.

Скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ в евклидовом пространстве двух векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} в декартовой системе координат определяется как

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^i b^i. \quad (9.28)$$

Наоборот, если скалярное произведение в евклидовом пространстве (которое не зависит от системы отсчёта) в некоторой системе координат определяется согласно (9.28), то эта система отсчёта называется декартовой.

Модуль вектора, определённый согласно равенству

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})} \quad (9.29)$$

в евклидовом пространстве обладает свойством нормы, то есть выполняются неравенство треугольника и линейное свойство:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\varphi \mathbf{a}| = |\varphi| |\mathbf{a}|, \quad |a| \geq 0,$$

где φ — действительное число.

9-2.2 Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве

В этом Пункте мы рассматриваем трёхмерное пространство, то есть $d = 3$.

Сперва отметим, что поскольку метрика у нас является единичной матрицей, и мы рассматривает только ортогональные преобразования, то антисимметричный псевдотензор совпадает с символом Леви-Чивиты,

$$\mathfrak{E}_{ikl} = \epsilon_{ikl},$$

см. Пункт 9-1.3.

Рассмотрим антисимметричный тензор второго ранга V^{ik} :

$$V^{ik} = -V^{ki}.$$

Поскольку мы рассматривает 3-х мерное пространство, то у такого тензора имеется всего три независимые компоненты. Поставим этому тензору в соответствие псевдо-вектор

$$V^n = \frac{1}{2} \epsilon_{nik} V^{ik}, \quad V^{ik} = \epsilon_{ikn} V^n. \quad (9.30)$$

Псевдо-вектора также называют *аксиальными векторами* (*pseudovector or axial vector*), в отличие от обычных векторов, которые называют *истинными или полярными векторами* (*true or polar vector*). Аксиальные вектора преобразуются также, как и радиальные, если ортогональное преобразование содержит в себе только ортогональный поворот. Если же ортогональное преобразование содержит в себе также операцию пространственной инверсии, то аксиальный вектор вдобавок меняет знак.

В матричном виде связь компонент тензора V^{ik} и аксиального вектора V^n выглядит следующим образом:

$$\|V^{ik}\| = \downarrow_i \begin{pmatrix} 0 & V^z & -V^y \\ -V^z & 0 & V^x \\ V^y & -V^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.31)$$

Ещё раз подчеркнём, что если в составе ортогонального преобразования нет операции инверсии, то закон преобразования (9.12), применённый для тензора V^{ik} эквивалентен преобразованию (9.3) для аксиального вектора V^i .

9-2.2.1 Векторное произведение

Пусть нам даны два радиальных вектора a^i и b^i . Поставим им в соответствие аксиальный вектор d^i

$$d^i = \epsilon_{ikl} a^k b^l, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (9.32)$$

Вектор \mathbf{d} называется *векторным произведением* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (*cross product of \mathbf{a} and \mathbf{b}*). Если среди векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} один радиальный, а другой аксиальный, то их векторное произведение будет радиальным вектором. В силу свойств символа Леви-Чивиты, получаем следующие свойства векторного произведения

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}], \quad d^x = a^y b^z - a^z b^y. \quad (9.33)$$

Выражения для остальных компонент вектора \mathbf{d} можно получить путём циклической перестановки индексов.

Вектор \mathbf{d} направлен ортогонально плоскости, образуемой векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Действительно, скалярные произведения

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) = \epsilon_{ikl} a^i a^k b^l = 0, \quad (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad (9.34)$$

в силу антисимметричности символа Леви-Чивиты. Модуль вектора \mathbf{d} равен произведению модулей векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} помноженного на модуль синуса угла между ними — это есть площадь параллелограмма, натянутого на вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Рассмотрим симметричные свойства векторного произведения, продемонстрировав редукцию общих правил обращения с псевдо-тензорами на трёх-мерный случай. Совершим операцию инверсии осей координат P , в результате которой координаты истинных векторов изменят свой знак:

$$P: \quad \mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}.$$

Тензор $c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$, составленный по правилу (9.30), при операции инверсии не изменяет своего знака. По определению, векторное произведение (9.32) всегда использует символ Леви-Чивиты с фиксированными знаками матричных элементов. В результате компоненты аксиального вектора \mathbf{c} не изменят свой знак,

$$P: \quad \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}.$$

Полученное правило можно прокомментировать следующим образом. Ортогональная матрица \hat{O}_P , соответствующая операции инверсии P , имеет матричные элементы $O_P^{ik} = -\delta^{ik}$. Детерминант такой матрицы отрицателен, $\det \hat{O}_P = -1$. Согласно Пункту 9-1.3 (в частности, см. равенство (9.22)), применение к символу Леви-Чивиты ϵ^{ikl} правила преобразования для тензора 3го порядка привело бы к замене $\epsilon_{ikl} \rightarrow -\epsilon_{ikl}$. Однако, поскольку мы этой замены не делаем, то аксиальный вектор \mathbf{c} знака не меняет.

9-2.2.2 Смешанное произведение

Смешанное произведение ϕ трёх векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} (*scalar triple product*) по определению есть

$$\phi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \equiv \epsilon_{ikl} a^i b^k c^l = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]). \quad (9.35)$$

В силу свойств символа Леви-Чивиты, смешанное произведение обладает симметриями перестановок

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}), \quad (9.36)$$

то есть, вслед за символом Леви-Чивиты, смешанное произведение меняет знак при перестановке любых двух векторов. Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

§9-3. Пространство Минковского

Рассмотрим более подробно свойства 4-х мерного пространства Минковского, см. Пункт 9-1.2.2. В качестве преобразований базиса мы здесь рассматриваем только преобразования Лоренца.

9-3.0.1 Обозначения этого параграфа

Пусть нам дан 4-вектор A^μ , нулевая компонента которого равна φ , а пространственные компоненты составляет трёхмерный вектор \mathbf{A} . Коротко мы это будем записывать как

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}.$$

В физике тензор электромагнитного поля и момент импульса представляют из себя антисимметричные тензора второго ранга. Мы будем рассматривать тензор $F^{\mu\nu}$,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

У такого тензора имеется всего 6 независимых матричных элементов.

Наконец, физический интерес представляют также симметричные тензора второго ранга, примером которого является тензор энергии импульса $T^{\mu\nu}$:

$$\|T^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} T^{00} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

где \mathbf{S} — 3-х мерный вектор-столбец, а $\hat{\sigma}$ — матрица 3х3.

9-3.0.2 Ортогональный поворот

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота \hat{O} размерности 3х3. Матрица Лоренца в этом случае имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$ — соответственно, строка из трёх нулей.

9-3.1 Антисимметричный тензор второго ранга

Исследуем математические свойства антисимметричного тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$. Представим его в виде

$$\|F^{\mu\nu}\| = \downarrow_{\mu} \begin{pmatrix} 0 & -E^j \\ E^i & -\epsilon_{ijk} B^k \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu = i \\ \nu = j \end{matrix} \quad (9.39)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ \hline E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right).$$

Покажем, что величины \mathbf{E} и \mathbf{B} ведут себя как полярный и аксиальный вектора в трёхмерном пространстве. Для этого произведём преобразование Лоренца (9.38), по сути сводящееся к ортогональному преобразованию в пространстве. Получаем следующий закон преобразования набора величин E^k :

$$E'^i = F'^{i0} = \Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^0 F^{\mu\nu} = \Lambda_{\nu}^i F^{\nu 0} = \mathcal{O}_{\nu}^i E^{\nu}$$

Мы учли то, что и у самого тензора F , и у матрицы преобразования Лоренца Λ есть нулевые элементы и отбросили соответствующие нулевые слагаемые. Таким образом, действительно, величины E^k при ортогональном повороте ведут себя как компоненты 3-х мерного вектора. Закон преобразования величин B^k описан в Пункте 9-2.2. В терминах этого пункта $B^{ik} = -F^{ik}$, для которого закон преобразования определяется ортогональной матрицей \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} B'^{ik} &= -\Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^k F^{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu}^i \Lambda_{\mu}^k F^{\nu\mu} = \\ &= \mathcal{O}_{\nu}^i \mathcal{O}_{\mu}^k B^{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Из выводов Пункта 9-2.2 следует, что величины B^k , действительно, образуют трёхмерный аксиальный вектор.

Антисимметричный тензор называют *би-вектором* и равенство (9.39) кратко записывают как

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}). \quad (9.40)$$

9-3.1.1 Дуальный антисимметричный тензор

Если дан антисимметричный тензор второго ранга $F^{\mu\nu}$ (9.40), то можно построить дуальный ему антисимметричный псевдо-тензор второго ранга $\tilde{F}^{\mu\nu}$ по правилу

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad \|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}). \quad (9.41)$$

Величина $\tilde{F}^{\mu\nu}$ называется псевдо-тензором, поскольку меняет знак при операции пространственной инверсии, см. Пункт 9-1.3.

9-3.2 Операции поднятия и опускания индексов

Используя явный вид метрики пространства Минковского (9.17), можно получить связь компонент контравариантного и ковариантного тензора одной и той же величины, см. общую формулу (9.13). Поскольку метрика диагональна и на диагонали стоит только ± 1 , то изменение матричных элементов при опускании или поднятии индекса должно сводиться только к изменению или сохранению знака этого элемента.

Для 4-вектора получаем:

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad \Leftrightarrow \quad \|A_\mu\| = \{\varphi, -\mathbf{A}\}.$$

Для компонент антисимметричного тензора второго ранга при опускании индекса меняет знак только радиальный вектор,

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \Leftrightarrow \quad \|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}).$$

Наконец, для симметричного тензора (9.37) с нижними индексами получаем, что знак меняют только пространственно-временные компоненты,

$$\|T_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} T^{00} & -\mathbf{S}^T \\ -\mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§10-1. Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство

Рассмотрим d -мерное евклидово пространство или пространство Минковского с системой координат r^i , $\{i, j, k, \dots\} = 1, \dots, d$, в которой метрический тензор имеет канонический вид – он имеет диагональный вид и его диагональные элементы равны ± 1 . Мы будем считать, что сначала идут 1, а потом -1 в порядке возрастания номера индекса; в таком случае мы будем обозначать метрический тензор

$$g_{ik} = \eta_{ik}. \quad (10.1)$$

Эту систему мы будем называть канонической прямолинейной системой координат.

Пусть также в этом пространстве определена некоторая криволинейная система координат ξ^μ , $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 1, \dots, d$. Техника дифференциальной геометрии позволяет обобщать запись векторных и тензорных равенств, сформулированных исходно чаще всего в канонической прямолинейной системе координат, на криволинейные координаты.

Криволинейная система координат в каждой точке задаёт базис с базисными векторами, являющимися касательными к координатным линиям этой системы координат. Матрицы перехода для тензоров от декартовой к криволинейной системе координат и обратно

$$\mathcal{D}_i^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial r^i} \equiv \partial_i \xi^\mu, \quad \mathcal{D}_\mu^i = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\mu} \equiv \partial_\mu r^i, \quad \mathcal{D}_i^\mu \mathcal{D}_\mu^k = \delta_{ik}. \quad (10.2)$$

Произвольные векторные поля $\mathbf{v} = \|v^i(\mathbf{r})\|$ и $\mathbf{w} = \|w^i(\mathbf{r})\|$, записанные в декартовых координатах, переписываются в криволинейных координатах согласно правилу

$$v^\mu(\xi) = \mathcal{D}_i^\mu v^i, \quad v_\mu(\xi) = \mathcal{D}_\mu^i v^i. \quad (10.3)$$

Для базиса $\partial_\mu r^i$ справедливы все рассуждения § 9-1. *Метрический тензор (metric tensor)*

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \mathcal{D}_\mu^i \eta_{ik} \mathcal{D}_\nu^k, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda, \quad (10.4)$$

так что скалярное произведение двух полей v^i и w^i в криволинейных координатах записывается в виде свёртки по нижнему и верхнему индексам:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \eta_{ik} v^i w^k = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu.$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ содержит полную информацию о соотношении малых приращений криволинейных

координат с расстоянием, площадью и объёмом в прямолинейной системе координат. В частности, элемент объёма

$$d\Omega \equiv d^d r = \sqrt{|g|} d^d \xi, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|,$$

а квадрат элемента длины

$$dl^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

Пусть есть две криволинейных системы координат – ξ^ν и ξ'^μ . Матрица перехода $\mathcal{D}'_\nu{}^\mu$ между этими системами координат равна

$$\mathcal{D}'_\nu{}^\mu = \mathcal{D}'_\nu{}^\mu \mathcal{D}_\mu^k = \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial \xi^\nu}, \quad \mathcal{D}'_{\nu\sigma} \mathcal{D}'_\mu{}^\sigma = \delta_\nu^\mu, \quad (10.5)$$

что обобщает равенства (10.2).

10-1.1 Ковариантная производная

Пусть нам дано некоторое тензорное поле. Оставаясь в прямолинейной системе координат, мы можем дифференцировать такое поле, при этом результат дифференцирования будет также являться тензором с рангом на 1 выше, см. Пункт 9-1.4. Выработаем правила дифференцирования тензоров в криволинейных координатах.

Градиент скалярного поля φ в криволинейных координатах вычисляется также, как и в декартовых:

$$\mathcal{D}_\nu^i \partial_i \varphi \equiv \nabla_\nu \varphi = \partial_\nu \varphi \quad (10.6)$$

согласно (10.3). Поле $\partial_\nu \varphi$ является, таким образом, ковариантным векторным полем.

Градиент $\partial_i v_k$ некоторого векторного поля v_k в его ковариантной записи в криволинейных координатах находится согласно более сложному правилу

$$\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^k \partial_i v_k \equiv \nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda. \quad (10.7)$$

В отличие от случая скаляра (10.6), $\partial_\mu v_\nu$ не является ковариантным тензором второго ранга, тогда как $\nabla_\mu v_\nu$ – является (по определению). Оператор ∇ называется *ковариантной производной* и не совпадает с простой производной ∂_μ . Не является, соответственно, и тензором *символ Кристоффеля (Christoffel symbols)* $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ (10.13): при переходе из одной криволинейной системы координат в другую он не преобразуется согласно правилам (10.3); тем не менее, по определению поднятие и опускание первого индекса у символа Кристоффеля производится по тем же правилам (9.13). В случае, если в (10.7) градиент берётся не от вектора, а от тензора ранга n

(например, $v_\mu w_\nu$, ранг 2), то вместо одного слагаемого с символом Кристоффеля в (10.7) должно стоять, соответственно, n слагаемых. Градиент контравариантного поля имеет вид

$$\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_k^\nu \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda, \quad (10.8)$$

что можно получить из требования, что ковариантная производная скаляра $\varphi = v^\lambda w_\lambda$ должна быть просто частной производной:

$$\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi = v^\lambda \nabla_\mu w_\lambda + w_\lambda \nabla_\mu v^\lambda.$$

Закон преобразования символов Кристоффеля при переходе из одной системы координат в другую (10.5) можно получить исходя из определения (10.8):

$$\begin{aligned} \nabla'_\nu v'^\mu &= \mathcal{D}'_\nu{}^\sigma \mathcal{D}'^\mu{}_\sigma \left(\partial_\sigma (\mathcal{D}'^\sigma{}_\lambda v'^\lambda) + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\tau} (\mathcal{D}'^\tau{}_\lambda v'^\lambda) \right) = \\ &= \partial'_\nu v'^\mu + (\mathcal{D}'^\mu{}_\sigma \partial'_\nu \mathcal{D}'^\sigma{}_\lambda + \mathcal{D}'^\mu{}_\sigma \mathcal{D}'^\sigma{}_\nu \mathcal{D}'^\tau{}_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\sigma\tau}). \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda} = \mathcal{D}'^\mu{}_\sigma \mathcal{D}'^\sigma{}_\nu \mathcal{D}'^\sigma{}_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\sigma\tau} + \mathcal{D}'^\mu{}_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{D}'^\sigma{}_\lambda}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial \xi'^\nu \partial \xi'^\lambda} \right), \quad (10.9)$$

т.е. символы Кристоффеля $\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda}$ действительно не являются тензором.

Для ковариантной и частной производной приняты стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v_\nu &= v_{\nu;\mu}, & \partial_\mu v_\nu &= v_{\nu,\mu}, \\ \nabla^\mu &= g^{\mu\nu} \nabla_\nu, & v_{;\mu}^\mu &= g^{\mu\lambda} v_{\nu;\lambda}. \end{aligned}$$

Отметим, что до этого момента нам не важны были конкретные свойства метрики, поэтому наши рассуждения носили общий характер.

10-1.1.1 Связь символов Кристоффеля с метрикой

Явное выражение для символов Кристоффеля можно получить, применив формулу (10.9) для перехода из декартовой системы координат в криволинейную. В декартовой системе координат символы Кристоффеля равны нулю, поэтому

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \mathcal{D}'^\mu{}_i \frac{\partial^2 r^i}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\lambda} = \mathcal{D}'^\mu{}_i \partial_\lambda \mathcal{D}'^i{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}. \quad (10.10)$$

Таким образом, символы Кристоффеля симметричны по нижней паре индексов для криволинейных координат, вложенных в прямолинейную систему координат.

Однако более универсальным является выражение символов Кристоффеля через метрику. Сначала отметим, что ковариантная производная коммутирует с метрическим тензором и абсолютно антисимметричным (10.23) тензорами,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \nabla_\lambda, & \nabla_\lambda g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \nabla_\lambda, \\ \nabla_\lambda \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} &= \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Эти равенства легко проверить, записав результат дифференцирования в декартовых координатах, где метрический и антисимметричный тензор постоянны в пространстве и равны соответственно δ^{ik} и ϵ^{ikl} .

Распишем явно условие (10.11) равенства нулю ковариантной производной метрики:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}, \quad \Gamma_{\nu\mu\lambda} \equiv g_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (10.12)$$

Теперь если это уравнение взять в комбинации индексов (для производной метрики) $\{\mu\nu\lambda\} - \{\mu\lambda\nu\} - \{\lambda\nu\mu\}$, то мы придём к искомому уравнению

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) / 2. \quad (10.13)$$

10-1.1.2 Вариации криволинейных координат

Предположим, что криволинейная система координат связана с материальной средой, и мы производим (дальнейшую) деформацию этой среды, то есть подвергаем некоторой вариации систему криволинейных координат $\xi: \xi(\mathbf{r}) \rightarrow \xi(\mathbf{r}) + \delta\xi(\mathbf{r})$. Это же самое изменение можно представить в виде движения лагранжевых маркеров,

$$r^i(\xi) \rightarrow r^i(\xi) + \delta r^i(\xi) = r^i(\xi) + v^i(\xi) \delta t$$

где δt – приращение (виртуального) времени, а \mathbf{v} – (виртуальная) скорость, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t$.

Параметризации вариации криволинейной системы координат через $\delta\xi(\mathbf{r})$ и $v^i(\xi) \delta t$ связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_\mu^i &= \frac{\partial \delta r^i}{\partial \xi^\mu} = \mathcal{D}_\mu^k \partial_k v^i \delta t, \\ \delta \mathcal{D}_k^\mu &= \frac{\partial \delta \xi^\mu}{\partial r^k} = -\mathcal{D}_k^\mu \partial_k v^i \delta t, \end{aligned}$$

где последнее равенство можно получить из требования сохранения тождества $\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_k^\mu = \delta_k^i$. Отсюда можно найти вариацию метрики

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^k (\partial_i v_k + \partial_k v_i) \delta t = (\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu) \delta t. \quad (10.14)$$

Вариация якобиана перехода

$$\delta g = M_g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 2g \operatorname{div} \mathbf{v} \delta t, \quad (10.15)$$

где $M_g^{\mu\nu}$ – матрица миноров матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, так что $g = M_g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} / d$, где d – размерность пространства.

10-1.2 Операции интегрирования и векторного дифференцирования

Для дальнейших выкладок нам будет полезны выражение для двух различных свёрток символа Кристоффеля

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} \sqrt{|g|}, \quad g^{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} (\sqrt{|g|} g^{\mu\sigma}). \quad (10.16)$$

Оба равенства могут быть выведены из (10.13) с использованием выражения для вариации детерминанта метрики в виде (10.15). При получении второго равенства для преобразования первых двух слагаемых в (10.13) надо использовать тождество $\partial_{\rho}(g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu}) = 0$.

Теперь можно вычислить выражения для дивергенции вектора и обобщения оператора Лапласа, действующего на скаляр. Первое равенство в (10.16) даёт

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} A^{\mu}), \quad (10.17)$$

$$\phi^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi)$$

Из уравнения (10.17) следует теорема Гаусса

$$\int_V d\Omega A^{\mu}_{;\mu} = \int_{\partial V} dS_{\mu} \sqrt{|g|} A^{\mu}. \quad (10.18)$$

где слева происходит интегрирование по некоторому d -мерному объёму V , а справа — по $(d-1)$ -мерной поверхности ∂V , окружающей этот объём; dS_{μ} есть ковариантная компонента вектора элемента площади поверхности.

В общем случае дивергенция тензора не является полной производной. Например, для симметричного тензора второго ранга $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

$$\nabla_{\nu} T^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} T^{\nu}_{\mu} \right)_{;\nu} - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu,\mu}. \quad (10.19)$$

В прямую сторону это равенство проверяется подстановкой непосредственного выражения для ковариантной производной, затем для одного слагаемого следует воспользоваться правилом для свёртки (10.16), а для другого выражением через метрику (10.13) для символов Кристоффеля.

Исключение из этого общего правила составляет антисимметричный тензор второго ранга: если $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$, то

$$\nabla_{\nu} F^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} F^{\nu\mu}). \quad (10.20)$$

Для проверки этого равенства надо воспользоваться также симметричностью символов Кристоффеля по последним индексам (10.10).

Наконец, установим возможность интегрирования по частям, если производится интегрирование скалярной

величины. Например, рассмотрим интеграл (7.28) предполагая, что подынтегральное выражение обращается в нуль на границе области интегрирования:

$$\begin{aligned} \int d\Omega T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta x_{\nu} &= \int d\Omega \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu} \delta x_{\nu}) - \int d\Omega \delta x_{\nu} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \\ &= - \int d\Omega \delta x_{\nu} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Сначала мы воспользовались правилом Лейбница для ковариантной производной произведения, затем мы воспользовались теоремой Гаусса (10.18) с учётом того, что интегрирование по границе равно нулю.

10-1.2.1 Антисимметричная производная и ротор в трёх-мерном пространстве

Пусть дано векторное ковариантное поле A_{μ} , то составляя антисимметричную комбинацию его производных, можно составить антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (10.22)$$

Таким образом, ковариантная производная в этом выражении может быть заменена на простую в силу симметрии символов Кристоффеля по последней паре индексов. Отметим, что для контравариантного поля такого сокращения не происходит.

В трёх-мерном пространстве операция (10.22) называется операцией взятия ротора. В векторных обозначениях вместо антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ используют аксиальный вектор, см. (9.30). Поэтому определение ротора использует полностью антисимметричный тензор, см. Пункт 9-1.3. Операции взятия ротора, записанной в терминах ковариантного вектора, не участвуют символы Кристоффеля,

$$[\text{rot } \mathbf{v}]^{\mu} = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \nabla_{\nu} v_{\lambda} = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} v_{\lambda} \quad (10.23)$$

10-1.3 Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство

Рассмотрим поверхность, которая задаётся уравнением $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, а на самой поверхности введены координаты ξ^{α} , $\{\alpha, \beta \dots\} = \{1, 2\}$. Совокупность $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ можно рассматривать как систему криволинейных координат, вложенную в трёх-мерное пространство. Эта система координат определена по крайней мере в некоторой окрестности поверхности $\Phi = 0$. Мы предполагаем, что локальные координаты $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ образуют правую тройку. Матрицу перехода из декартовой системы координат в криволинейную будем обозначать D_i^{μ} , см. (10.2). Для этих криволинейных координат может быть определена метрика $g_{\mu\nu}$, где $\{\mu, \nu, \dots\} = \{1, 2, \Phi\}$. Блок $g_{\alpha\beta}$ этой метрики является метрикой для криволинейных координат ξ^{α} на рассматриваемой поверхности. Удобно ввести обозначение

$$g_{\perp} = \det \|g_{\alpha\beta}\|. \quad (10.24)$$

Пусть ℓ – вектор нормали к поверхности, смотрящий из области ‘1’ в область ‘2’; предположим также, что в области ‘1’ $\Phi < 0$, а в области ‘2’, соответственно, $\Phi > 0$. Тогда имеем соотношение

$$\ell^i = \frac{\nabla_i \Phi}{|\text{grad } \Phi|} \equiv \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{D_k^\Phi D_k^\Phi}} = \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{g_\perp/g}},$$

где D_k^μ определено в (10.2).

На поверхности можно определить полностью антисимметричный тензор второго ранга

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g_\perp}}, \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta} = \sqrt{g_\perp} \epsilon^{\alpha\beta}$$

Введём на поверхности косоый градиент

$$\nabla_\alpha^* = \mathfrak{E}_\alpha^\beta \nabla_\beta. \quad (10.25)$$

Простой и косоый градиенты коммутируют с метрическим и антисимметричным тензорами,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha \mathfrak{E}^{\beta\gamma} = 0.$$

сравни с (10.11).

Тензор внешней кривизны

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \ell^i \partial_\beta D_\alpha^i = -D_\alpha^i \partial_\beta \ell^i. \quad (10.26)$$

Составленные из него два инварианта

$$K_m = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}, \quad K_G = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \mathfrak{E}^{\gamma\delta} K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} = \frac{\det \|K_{\alpha\beta}\|}{\det \|g_{\alpha\beta}\|} \quad (10.27)$$

называются, соответственно, средней и гауссовой кривизной. Если $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в точке, то $1/K_m = 1/R_1 + 1/R_2$, $K_G = 1/(R_1 R_2)$. Выбор знака в (10.26) соответствует тому, что для сферы с нормалью ℓ , направленной вовне сферы, средняя кривизна $K_m < 0$.

10-1.3.1 Запись в терминах единичной нормали

Будем рассматривать такие криволинейные координаты, для которых вектора D_μ^i , $\mu = \{1, 2, \Phi\}$ образуют правую ортонормированную тройку, по крайней мере локально в окрестности рассматриваемой точки. В этом случае тензора, определённые на поверхности, можно записывать в декартовых координатах; любая свёртка

таких тензоров с вектором нормали ℓ должна давать ноль. Введём проектор на плоскость $\Phi = \text{const}$ и касательный градиент вдоль неё

$$\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - \ell^i \ell^k = g_{\alpha\beta} D_i^\alpha D_k^\beta, \quad \partial_i^\perp = \delta_{ik}^\perp \partial_k.$$

Тензор кривизны

$$K_{ik} = -\partial_i^\perp \ell^k = -\partial_k^\perp \ell^i, \quad (10.28)$$

приведённый к диагональному виду, имеет на диагонали ненулевыми элементами $1/R_1$ и $1/R_2$, где $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в данной точке; собственно говоря, это можно считать определением главных кривизн. Направления на рассматриваемой поверхности, соответствующие главным кривизнам, ортогональны друг другу. Выбор знака в (10.28) тот же самый что и в (10.27): если в случае сферы нормаль направлена наружу, то радиусы кривизны $R_{1,2}$ отрицательны. В частности, средняя K_m и гауссова K_G кривизны равны

$$K_m = K_{ii} = -\partial_k^\perp \ell^k = -\text{div } \ell, \quad (10.29)$$

$$K_G = \det \|K_{ik} + \ell^i \ell^k\| = \frac{1}{2} ((\partial_i \ell_k)(\partial_k \ell_i) - (\partial_i \ell_i)^2).$$

Если мы имеем дело с движением среды, то скорость изменения метрики равна

$$\delta g^\perp = 2g^\perp \delta_{ik}^\perp \partial_i v^k \delta t, \quad (10.30)$$

сравни с (10.15).

10-1.3.2 Параметризация поверхности в декартовых координатах

Пусть теперь поверхность задана уравнением

$$z = h(x, y), \quad \Phi(x, y, z) = z - h(x, y),$$

где $h(x, y)$ – некоторая однозначная функция. Единичный вектор

$$\|\ell^i\| = \frac{\{-\partial_x h, -\partial_y h, 1\}}{\sqrt{g_\perp}}, \quad g_\perp = 1 + \partial_\alpha h \partial_\alpha h.$$

Средняя кривизна

$$K_m = -\partial_\alpha \ell^\alpha. \quad (10.31)$$

§10-2. Многообразия

10-2.1 Гладкие многообразия

Пусть \mathcal{X} — некоторое множество.

10-2.1.1 Карта

Картой в \mathcal{X} называется пара (U, h) , где $U \subset \mathcal{X}$ — подмножество, а

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

является отображением множества U в \mathbb{R}^n , биективно (взаимно однозначно) отображающее U на некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n . Подмножество $U \subset \mathcal{X}$ называют *носителем карты* (U, h) .

Пусть точка $p \in U$. Тогда, согласно определению, имеем взаимно однозначное соответствие

$$h : p \longleftarrow (x^1(p), \dots, x^n(p)) = h(p) \in \mathbb{R}^n.$$

Числовые функции $x^i(p)$, $i = \overline{1, n}$ на U называются *локальными координатами карты* (U, h) . При этом вместо (U, h) часто пишут $(U, x^1, \dots, x^n) = (U, x^i)$.

10-2.1.2 Атлас

Поставим себе задачу полностью пересчитать точки множества \mathcal{X} путём их отображения в пространство \mathbb{R}^n . С помощью одной карты эту задачу в общем случае решить невозможно. Но оказывается возможным сделать с помощью набора карт, называемым атласом. Наличие атласа предполагает, что носители некоторых карт перекрываются, а если объединить носители всех карт атласа, то получится всё множество \mathcal{X} .

Дадим необходимые определения. Две карты

$$(U_1, h_1) \equiv (U_1, x^i), \quad (U_2, h_2) \equiv (U_2, x^i)$$

в \mathcal{X} называются *согласованными*, если либо пересечение носителей этих карт $U = U_1 \cap U_2$ пусто, $U = \emptyset$, либо

- оба множества $h(U)$ и $k(U)$ открыты в \mathbb{R}^n ,
- отображение

$$(h_2|_U) \circ (h_1|_U)^{-1} : h_1(U) \longrightarrow h_2(U)$$

является диффеоморфизмом класса C^∞ (гладким биективным отображением).

Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется *атласом* на \mathcal{X} , если

- любые две карты этого множества согласованы;
- объединение носителей всех карт в атласе составляет полное множество \mathcal{X}

$$\cup_\alpha U_\alpha = \mathcal{X}$$

Два атласа A и A^* на \mathcal{X} называются эквивалентными, если их объединение $A \cup A^*$ является атласом (т.е. каждая карта любого из этих атласов согласована с каждой картой другого атласа).

10-2.1.3 Гладкое многообразие

Гладким многообразием называется пара (\mathcal{X}, A) , где \mathcal{X} — множество, A — произвольный атлас на \mathcal{X} . При этом гладкие многообразия (\mathcal{X}, A) и (\mathcal{Y}, A^*) являются одинаковыми тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и их атласы эквивалентны.

В дальнейшем мы рассматриваем только гладкие многообразия и будем их называть просто многообразиями.

Число n , равное размерности пространства \mathbb{R}^n , называется размерностью многообразия и обозначается

$$n = \dim \mathcal{X}.$$

10-2.1.4 Многообразие с краем

Обозначим через $\mathbb{R}_{(-)}^n$ полупространство пространства \mathbb{R}^n , состоящее из точек (x^1, \dots, x^n) , для которых $x^1 \leq 0$.

Гладкое n -мерное многообразие с краем — это множество \mathcal{X} с подмножеством \mathcal{Y} и атласом $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$, который удовлетворяет следующим условиям:

- Общее условие согласования: если $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ и $\{(U_\beta, h_\beta)\}$ — две карты в \mathcal{X} и пересечение их носителей не пусто, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longleftarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

есть гладкое биективное отображение

- Если подмножество U_α данного атласа содержит во внутренней части $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, то соответствующее отображение

$$h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$$

биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n ;

- В противном случае, когда носитель карты захватывает край \mathcal{Y} , отображение h_α биективно отображает подмножество U_α на некоторое открытое подмножество V_α пространства $\mathbb{R}_{(-)}^n$, причём множество $U_\alpha \cap \mathcal{Y}$ отображается на подмножество V_α , состоящее из всех точек, для которых $x^1 = 0$

$$h_\alpha : \begin{array}{ll} U_\alpha & \leftrightarrow V_\alpha \in \mathbb{R}_{(-)}^n \\ U_\alpha \cap \mathcal{Y} & \leftrightarrow V_\alpha \cap \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

где \mathbb{R}^{n-1} — подпространство \mathbb{R}^n , задаваемое условием $x^1 = 0$.

Многообразию \mathcal{U} называют *краем многообразия* \mathcal{X} и обозначают его $\partial\mathcal{X}$. Множество

$$\text{int } \mathcal{X} = \mathcal{X} \setminus \partial\mathcal{X},$$

называют внутренностью многообразия с краем \mathcal{X} .

Согласно данным определениям $\text{int } \mathcal{X}$ является многообразием. Легко также понять, что это многообразие без края, $\partial\partial\mathcal{X} = \emptyset$ (???)

Карты, для которых $U_\alpha \cap \partial\mathcal{X} = \emptyset$, называются *внутренними картами*, а в противном случае — *краевыми картами*.

Пусть (U, h) — краевая карта, а $V = U \cap \partial\mathcal{X}$ — пересечение носителя этой карты с краем многообразия. Карта $(V, h|_V)$ называется *высеченной на краю* $\partial\mathcal{X}$ картой (U, h) . Если $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ — атлас на многообразии \mathcal{X} , то совокупность высеченных на краю карт $\{(V_\alpha, h_\alpha|_{V_\alpha})\}$ образует атлас на многообразии $\partial\mathcal{X}$.

10-2.2 Касательное и кокасательное пространства

Пусть дано n -мерное многообразие \mathcal{X} , и p — некоторая точка этого многообразия. Обозначим $A(p)$ множество всех карт, носители которых содержат точку p .

10-2.2.1 Касательное пространство

Касательным вектором X к многообразию \mathcal{X} (или просто вектором многообразия \mathcal{X}) в точке p называется такое отображение

$$X : A(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (10.32)$$

что для произвольных карт

$$(U, x^i), (U', x'^k) \in A(p),$$

накрывающих точку p , вектора

$$X(U, x^i) = \|X^i\|, \quad X(U', x'^k) = \|X'^k\|$$

пространства \mathbb{R}^n связаны между собою следующим образом:

$$X'^k = \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \right)_p X^i. \quad (10.33)$$

Компоненты X^i вектора X называются *координатами вектора* в локальных координатах карты (U, h) .

Множество всех касательных векторов к многообразию \mathcal{X} в точке p называется *касательным пространством многообразия \mathcal{X} в точке p* (*tangent space*) и обозначается

$$T_p \mathcal{X}.$$

Касательное пространство в точке является линейным пространством над полем \mathbb{R} относительно линейных операций над векторами.

Обозначим базис в касательном пространстве $T_p \mathcal{X}$, порождённый картой (U, x^i)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p. \quad (10.34)$$

При преобразовании (10.32) базисный вектор (10.34) переходит в базисный вектор \mathbf{e}_i пространства \mathbb{R}^n . Пока что обозначение (10.34) следует считать не более чем обозначением, разумность которого будет раскрыта ниже. Связь между базисами, порождёнными двумя картами (U, x^i) и (U', x'^k) , вытекает из (10.33):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x'^k} \right)_p.$$

10-2.2.2 Векторное поле

Касательным векторным полем называется такое отображение

$$X : (A(p), p) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (10.35)$$

что для каждой точки p сужение X_p отображения X является касательным вектором к многообразию \mathcal{X} в точке p .

Множество всех касательных векторных полей образует линейное бесконечномерное пространство, если операции в этом линейном пространстве определить в согласии с уже определёнными линейными операциями для касательных векторов в точке.

Векторное поле называется *гладким*, если для каждой выбранной карты координаты вектора являются гладкими функциями координат на карте. Линейное пространство всех гладких векторных полей мы будем обозначать

$$T_0^1 \mathcal{X}.$$

10-2.2.3 Кокасательное пространство

Пространство, сопряжённое касательному пространству $T_p \mathcal{X}$ в точке p , называется *кокасательным пространством* и обозначается

$$T_p^* \mathcal{X}.$$

Базисные вектора в $T_p^* \mathcal{X}$, определяемые выбранной картой (U, x^i) , обозначаются

$$dx_p^i.$$

По определению имеем

$$dx_p^i \circ \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p = \delta_j^i.$$

Линейное пространство всех гладких кокасательных полей мы будем обозначать

$$T_1^0 \mathcal{X}.$$

10-2.2.4 Скалярные поля

Линейное пространство всех функций на многообразии \mathcal{X} естественно обозначить

$$F\mathcal{X} \equiv T_0^0\mathcal{X}; \quad f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in F\mathcal{X}.$$

Мы будем рассматривать только гладкие функции, т.е. такие, которые для любой карты (U, x^i) являются гладкими функциями $f(x)$.

10-2.2.5 Метрика

Метрикой $\|g_{ik}\|$ называется (выделенное) гладкое тензорное поле второго ранга из $T_2^0\mathcal{X}$, симметричное по своим индексам, $g_{ik} = g_{ki}$, с ненулевым детерминантом. Указанные свойства, как легко проверить, сохраняются во всех системах координат. Метрика ставит во взаимно однозначное соответствие вектору $\|X^i\|$ из касательного пространства $T_0^1\mathcal{X}$ вектор $\|X_i\|$ из кокасательного пространства $T_1^0\mathcal{X}$ по закону:

$$X_i = g_{ik}X^k. \quad (10.36)$$

Существует и единственно тензорное поле $\|g^{ik}\|$ из $T_0^2\mathcal{X}$, обратное метрике:

$$g^{ik}g_{km} = \delta_m^i. \quad (10.37)$$

Это свойство имеет место на всём многообразии \mathcal{X} , которое как легко проверить, не зависит от выбранной карты.

Далее для метрики годятся все рассуждения, проведённые в § 10-1. Отдельного комментария требует только (10.1): в общем случае не существует системы координат, для которой метрика принимала бы канонический вид η_{ik} в области конечного размера.

10-2.3 Произвольный базис для гладких векторных полей

Базис (10.34) называют координатным, поскольку он связан с координатами карты. Имеет смысл определить произвольный базис, который в общем случае не может быть представлен как результат перехода к новой системе координат на многообразии.

Пусть U — тривиализующая координатная окрестность в многообразии \mathcal{X} размерности n , т.е. такая окрестность, на которой существует базис векторных полей e_A ,

$$e_A = e_A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad A = 1, \dots, n, \quad \det \|e_A^i(x)\| \neq 0. \quad (10.38)$$

Это значит, что любой вектор $X \in T_0^1\mathcal{X}$ может быть разложен на U по базису e_A :

$$X|_U = X^A e_A|_U = X^A e_A^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (10.39)$$

Из последнего равенства вытекают следующие формулы пересчёта:

$$X^i = e_A^i X^A, \quad X^A = e_A^i X^i, \quad e_A^i e_B^j = \delta_B^A. \quad (10.40)$$

Если $\{X^i\}$ — компоненты вектора X в координатном базисе $\{\partial/\partial x^i\}$, то набор чисел $\{X^A\}$ интерпретируется как совокупность компонент этого вектора в базисе $\{e_A\}$.

Переход от одного базиса e_A к другому e'_A для контравариантных векторов осуществляется посредством матрицы перехода D'^B_A ,

$$X = X^A e_A = X'^B e'_B, \quad X'^B = D'^B_A X^A, \quad D'^B_A = e'_A^i e_i^B. \quad (10.41)$$

Для ковариантных векторов переход осуществляется с помощью обратной матрицы D^A_B .

10-2.3.1 Ортонормированный базис. Тетрада.

Ортонормированный базис, базисные вектора e_a которого мы нумеруем строчными первыми буквами латинского алфавита, удовлетворяет дополнительному условию

$$(e_a \cdot e_b) = \eta_{ab}, \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} e_a^i e_b^k = 0, \quad (10.42)$$

где η_{ab} — единичная метрика, см. (10.1).

Набор величин e_μ^a — матричных элементов матрицы перехода от координатного базиса к ортогональному базису называется *тетрадой* (*tetrad*), если размерность пространства равна четырём.

10-2.4 Ориентации на многообразии

Две согласованные карты

$$(U_1, h_1) \equiv (U_1, x^i), \quad (U_2, h_2) \equiv (U_2, x'^i)$$

в \mathcal{X} называются *положительно согласованными*, если либо пересечение носителей этих карт $U = U_1 \cap U_2$ пусто, $U = \emptyset$, либо базисы касательного пространства одноимённые, т.е. детерминант матрицы перехода положителен,

$$\left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \right| > 0.$$

Атлас, состоящий только из положительно согласованных карт, называется ориентирующим. Многообразие \mathcal{X} , на котором существует ориентирующий атлас, называется ориентируемым. Ориентируемое многообразие, на котором выбран ориентирующий атлас, называется ориентированным. Карты, принадлежащие ориентирующему атласу, называют положительно ориентированными.

На связном многообразии существует только две ориентации, которые называются противоположными.

Многообразие \mathcal{X} с краем называется ориентируемым, если ориентируема его внутренность $\text{int } \mathcal{X}$.

10-2.4.1 Ориентация края

Если две краевых карты положительно согласованы, то положительно согласованы и карты, высеченные на краю. **Действительно, ...**

10-2.5 Отображение многообразий

При определении понятия согласованности карт мы сталкивались с отображением образа одной карты на образ другой. Расширим рассматриваемый круг подобных отображений.

Пусть размерность многообразия \mathcal{X} равна n , а \mathcal{Y} — m . Отображение

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \quad (10.43)$$

называют гладким, если для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и её образа

$$q = f(p) \in \mathcal{Y},$$

любой пары карт (U, x^i) и (V, y^k) таких что $p \in U$ и $f(p) \in V$, соответствующие преобразования координат

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = \overline{1, m} \quad (10.44)$$

являются гладкими функциями. По аналогии с (10.33), отображение f в каждой точке $p, q = f(p)$ задаёт закон преобразования векторов из касательных пространств, только теперь эти пространства не совпадают. Пусть вектор $X \in T_p\mathcal{X}$, тогда *дифференциал* df *гладкого отображения* f ставит ему в соответствие вектор $Y \in T_q\mathcal{Y}$, компоненты которого равны

$$df_p: T_p\mathcal{X} \rightarrow T_q\mathcal{Y}, \quad (10.45)$$

$$Y = df_p(X), \quad \Leftrightarrow \quad Y^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)_p X^k.$$

Важен частный случай, когда многообразие \mathcal{Y} является числовой осью, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Тогда $f \in F\mathcal{X}$ есть числовая функция на многообразии \mathcal{X} , а касательное пространство $T_q\mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Поэтому результатом действия дифференциала преобразования-функции на вектор является число

$$df_p(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \right)_p X^k. \quad (10.46)$$

Если обратиться к формальным определениям записи базисных векторов для сопряжённого касательного пространства $T_p^*\mathcal{X}$ Пункта 10-2.2.3, то действие дифференциала $df(X)$ совпадает со свёрткой вектора X с ковектором $df_p \in T_p^*\mathcal{X}$,

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} \right)_p dx^k. \quad (10.47)$$

10-2.5.1 Подмногообразие

При тех же обозначениях рассмотрим обратное гладкое отображение

$$f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \quad (10.48)$$

Это отображение называется *погружением в точке* $p \in \mathcal{Y}$, если ранг дифференциала этого преобразования df_p равен $\dim \mathcal{Y}$ (что в принципе возможно, если размерность $\dim \mathcal{X}$ не меньше размерности $\dim \mathcal{Y}$):

$$\text{rank } df_p = \dim \mathcal{Y} \leq \dim \mathcal{X}.$$

Теперь пусть мы имеем дело с подмножеством, $\mathcal{Y} \in \mathcal{X}$, и f соответственно есть отображение вложения:

$$i: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad i(p) = p.$$

Если f является погружением во всех точках $p \in \mathcal{Y}$, то \mathcal{Y} называется *подмногообразием* многообразия \mathcal{X} .

10-2.6 Ковариантная производная

Линейное отображение

$$\nabla: T_0^1\mathcal{X} \rightarrow T_1^1\mathcal{X} \quad (10.49)$$

называется *ковариантным дифференцированием или связностью*, если оно удовлетворяет тождеству Лейбница, т.е. если для любой функции $f \in F\mathcal{X}$ и любого векторного поля $X \in T_0^1\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X. \quad (10.50)$$

Напомним, что дифференциал функции $df \in T_1^0\mathcal{X}$, и потому $df \otimes X \in T_1^1\mathcal{X}$. Тензорное поле ∇X типа (1, 1) называется *ковариантным дифференциалом* векторного поля X .

Положим в (10.50) $f = 1$, $X = (\partial/\partial x^j)$, и спроектируем это уравнение на (свернём с) $dx^i \otimes (\partial/\partial x^k)$. В результате получим

$$\left(dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \circ \nabla \frac{\partial}{\partial x^j} = dx^i \circ \nabla_k \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^i_{kj}, \quad (10.51)$$

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \nabla.$$

В (10.51) коэффициенты Γ^i_{kj} как раз осуществляют линейный закон, декларированный для отображения (10.49). Если теперь в качестве дифференцируемого вектора мы возьмём $X = X^j(\partial/\partial x^j)$, то по определению (10.49) мы получим

$$dx^i \circ \nabla_k(X) \equiv \nabla_k X^i = \partial_k X^i + \Gamma^i_{kj} X^j. \quad (10.52)$$

Закон преобразования символов Кристоффеля Γ^i_{kj} при переходе от одной системы координат к другой может быть получен точно так же, как он был получен для

криволинейных координат, вложенных в евклидово пространство, см. (10.8,10.9). Выпишем здесь его ещё раз

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} = D'_{\sigma}{}^{\mu} D'_{\nu}{}^{\rho} D'_{\lambda}{}^{\sigma} \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} + D'_{\sigma}{}^{\mu} \left(\partial_{\nu} D'_{\lambda}{}^{\sigma} = \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} \right). \quad (10.53)$$

В общем случае не существует карты (системы координат), в которой символы Кристоффеля равны нулю в наперёд заданной точке. Поэтому при данном определении ковариантной производной символы Кристоффеля не должны быть симметричны по двум последним индексам ν, λ , хотя второе слагаемое в правой части (10.53) и симметрично по этим индексам.

10-2.6.1 Ковариантная производная вдоль вектора

Обозначение (10.34) базисных векторов в касательном пространстве и закон преобразования этих базисных векторов при переходе от одной карты к другой оправдывается законом действия касательного вектора на функцию на многообразии \mathcal{X} .

По определению, действие касательного вектора X на функцию f в точке p определяется формулой

$$Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Данное определение не зависит от выбранной карты (U, x^i) . Его можно распространить и на ковариантную производную: ковариантная производная вдоль вектора

$$\nabla_X = X^k \nabla_k \quad (10.54)$$

может действовать на любой тензор согласно определению ковариантной производной.

10-2.6.2 Связность, согласованная с метрикой

Связность ∇ на метризованном многообразии \mathcal{X} называется *согласованной с метрикой* (или *метрической*), если для любых векторных полей $X, Y, Z \in T_0^1 \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$X(Y \cdot Z) \equiv X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y \cdot Z) = (\nabla_X Y) \cdot Z + Y \cdot (\nabla_X Z).$$

Из этого требования непосредственно получаем, что связность ∇ на многообразии \mathcal{X} тогда и только тогда

согласована с метрикой, когда ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0. \quad (10.55)$$

Это уравнение имело место и в случае плоского пространства, см. (10.12), однако здесь символ Кристоффеля в общем случае не симметричен по двум нижним индексам, поэтому равенство (10.13) в общем случае не выполнено.

10-2.6.3 Гармонические координаты

При решении задач в пределе слабого гравитационного поля удобно выбрать подкласс координат — *гармонические координаты* (*harmonic coordinates*).

Координаты называются гармоническими, если во всём пространстве-времени выполнено условие

$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \quad (10.56)$$

Это условие всегда достижимо. Пусть текущие координаты x^{μ} не удовлетворяют этому условию. Тогда перейдём к новым координатам x'^{μ} , которые будут удовлетворять условию (10.56). Согласно правилу преобразования символов Кристоффеля (10.9)

$$\Gamma^{\varsigma} = \frac{\partial x^{\varsigma}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\Gamma'^{\lambda} + g^{\sigma\varsigma} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\varsigma}} \right),$$

(производим переход из штрихованной в нештрихованную систему координат). Поскольку нами наложено условие $\Gamma'^{\lambda} = 0$, то

$$g^{\sigma\varsigma} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\varsigma}} - \Gamma^{\varsigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\varsigma}} = \square x'^{\lambda} = 0.$$

Таким образом, уравнение на новые координаты с учётом второго равенства (10.16) для Γ^{λ} в общем случае и выражения для оператора д'Аламбера (10.17) можно переписать в виде уравнения д'Аламбера с нулевой правой частью. Разумеется, x'^{λ} в этом уравнении подразумевается скалярной величиной. Если положить, что метрика в координатах x^{μ} стремится к метрике Минковского на далёких (вдалеке от тел) расстояниях, то уравнение д'Аламбера на координаты x'^{ν} всегда имеет решение, которое на далёких расстояниях превращается в тождественное преобразование, $x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$.

§10-3. Тензора кривизны и кручения, пространство Римана

Пусть дана кривая, координаты которой суть $x^\mu(s)$, где s пока некоторый параметр. Обозначим

$$X^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

касательный вектор к кривой. По определению, вектор $Y(s)$ параллельно перенесён вдоль кривой $x^\mu(s)$, если ограничение его ковариантной производной на касательное направление к кривой равно нулю,

$$\nabla_x Y \equiv X \cdot \nabla Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (10.57)$$

$$\frac{dx^\mu}{ds} \nabla_\mu Y^\lambda = \frac{dY^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} Y^\nu = 0.$$

Геодезическая линия (geodesic) — такая линия, что её касательный вектор можно восстановить параллельным переносом вдоль неё самой,

$$\nabla_x X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx^\mu}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0 \quad (10.58)$$

Это уравнение может быть переписано в виде уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (10.59)$$

Поэтому для того, чтобы задать геодезическую линию, достаточно указать одну её точку и касательный вектор в этой точке. После проведения интегрирования параметр s оказывается определённым с точностью до линейного преобразования (нелинейное преобразование приводит к тому, что из второй производной в (10.59) происходит некомпенсируемый вклад). Множество таких параметризаций называют *аффинными параметризациями*, а параметр s — *аффинным параметром*.

10-3.1 Геометрический смысл тензоров кривизны и кручения

В кривом пространстве некоторые математические факты, кажущиеся непреложными в евклидовом пространстве, перестают быть справедливыми. Для того, чтобы продемонстрировать это, рассмотрим замкнутый контур (петлю) $x^\mu(s)$, где $0 \leq s \leq 1$ — параметр вдоль контура. Поместим начало координат в начало контура, так что $x^\mu(0) = x^\mu(1) = 0$. Поскольку мы интересуемся локальными характеристиками пространства, то размер контура мы будем полагать стремящимся к нулю. Для определения размера контура заведём параметр ϵ , который, например, определяется как сумма максимальных по модулю изменений координат при прохождении контура с точностью до множителя не имеющего величины.

В дальнейших рассуждениях нам придётся определить ‘площадь’, натянутую на рассматриваемую петлю (параллелограмм):

$$\delta S^{\sigma\mu} = -\delta S^{\mu\sigma} = \oint x^\sigma dx^\mu. \quad (10.60)$$

Отметим, что в этих вычислениях и вектора x^σ и вектора dx^μ должны интерпретироваться как вектора в начале петли — предполагается, что они все перенесены в эту точку путём параллельного переноса (скажем, по лучам, прямым в координатной сетке), при этом в (10.57) символами Кристоффеля можно пренебречь в силу малого размера петли. Поясним геометрический смысл так определённой ‘площади’. Выберем, например, форму петли в виде параллелограмма,

$$x^\mu(t_v, t_w) = \epsilon(t_v v^\mu + t_w w^\mu), \quad 0 \leq t_v, t_w \leq 1,$$

где v и w — вектора, образующие параллелограмм; сначала контур идёт вдоль вектора v . Тогда ‘площадь’ $\delta S^{\sigma\mu} = \epsilon^2 (v^\sigma w^\mu - w^\sigma v^\mu)$.

Количественными характеристиками отличия кривого пространства от плоского евклидового являются тензор кривизны и тензор кручения. Сначала мы определим эти тензора и выпишем их связь со связностью. Затем обсудим их свойства.

10-3.1.1 Тензор кручения

Посмотрим на сам контур. Он состоит из малых перемещений dx^μ , которые можно интерпретировать как вектора в соответствующей точке x^μ , поскольку закон преобразования компонент dx^μ соответствует определению преобразования компонент вектора (10.33). Перенесём все вектора $dx^\mu(s)$ в начало координат, обозначив их $dx^\mu(s) + \delta dx^\mu(s)$, где

$$\delta dx^\mu(s) = \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\zeta} x^\sigma(s) dx^\zeta + (\mathcal{O}(\epsilon^2))^\mu_\zeta dx^\zeta$$

согласно (10.57); черта над символом Кристоффеля означает, что для обеспечения заданной точности его достаточно брать в начале петли, в точке $x^\mu = 0$. Для учёта главного порядка по ϵ путь переноса вектора не имеет значения, лишь бы его длина имела порядок ϵ ; поэтому проще всего считать, что вектора dx^μ перенесены по лучам, прямым в координатной сетке.

Посчитаем сумму этих перенесённых векторов. Если бы речь шла о плоском пространстве, то мы получили бы ноль, поскольку путь $x^\mu(s)$ замкнут. Хотя в криволинейном пространстве, разумеется, по-прежнему интеграл

$$\oint dx^\mu = 0,$$

поскольку путь замкнут, однако для поправок $\delta dx^\mu(s)$ в общем случае это уже не так. В главном порядке по ϵ сумма перенесённых в начало координат векторов равна

$$\oint \delta dx^\mu = \Gamma_{\sigma\zeta}^\mu \oint x^\sigma dx^\zeta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \approx \frac{1}{2} T_{\sigma\zeta}^\mu \delta S^{\sigma\zeta},$$

$$T_{\sigma\zeta}^\mu = -T_{\zeta\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\zeta}^\mu - \Gamma_{\zeta\sigma}^\mu. \quad (10.61)$$

Тензор $T_{\mu\nu}^\lambda$ называется *тензором кручения* (*torsion tensor*). То, что это действительно тензор, можно убедиться и из закона преобразования символов Кристоффеля (10.53): в результате антисимметризации (10.61) по нижним индексам из закона преобразования (10.53) выпадает второе слагаемое, не вписывавшееся в закон преобразования тензоров.

По физическим соображениям в теории гравитации интерес представляют пространства, в которых тензор кручения отсутствует, т.е. равен нулю. Такие пространства называются *римановыми пространствами*, в них символы Кристоффеля имеют симметрию и могут быть выражены через производные метрики

$$\Gamma_{\sigma\zeta}^\lambda = \Gamma_{\zeta\sigma}^\lambda, \quad \Gamma_{\lambda\sigma\zeta} = (g_{\lambda\sigma,\zeta} + g_{\lambda\zeta,\sigma} - g_{\sigma\zeta,\lambda})/2. \quad (10.62)$$

Последняя формула получается из симметрии символов Кристоффеля и требования согласованности связности с метрикой, см. уже проделанный вывод (10.13) для криволинейных координат, вложенных в евклидово пространство.

В дальнейшем мы рассматриваем только римановы пространства, если особо не оговорено противное. Все результаты Пунктов 10-1.1 и 10-1.2 остаются в силе для пространства Римана, поскольку при получении этих результатов не использовалось условие обращения в ноль тензора Римана, который определён в следующем пункте.

10-3.1.2 Тензор кривизны

Если произвольный вектор Y подвергнуть параллельному переносу вдоль замкнутого контура, то в общем случае он не перейдёт сам в себя, как это было бы в евклидовом пространстве. Он окажется равным некоторому другому вектору $Y(s=1)$. Поскольку эти вектора относятся к одной точке, то их возможно сравнивать; нас интересует разность $\delta Y = Y(1) - Y(0)$. Согласно (10.57)

$$Y^\lambda(s) = Y^\lambda - \int_0^s \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\tilde{s}) Y^\nu(\tilde{s}) dx^\mu, \quad dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} d\tilde{s}$$

поэтому

$$\delta Y^\lambda = Y^\lambda(1) - Y^\lambda = - \oint \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) Y^\nu(x) dx^\mu. \quad (10.63)$$

Будем решать (10.63) методом последовательных приближений:

$$\delta Y'^\lambda = - \left(\bar{\Gamma}_{\zeta\nu}^\lambda \bar{Y}^\nu \int dx^\zeta = \bar{\Gamma}_{\zeta\nu}^\lambda \bar{Y}^\nu x^\zeta \right) -$$

$$- \left(\bar{\Gamma}_{\sigma\nu}^\lambda \bar{\Gamma}_{\zeta\mu}^\nu + \partial_\sigma \bar{\Gamma}_{\zeta\mu}^\lambda \right) \bar{Y}^\mu \int x^\sigma dx^\zeta + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

где черта в правой части означает значение в начале петли. В результате интегрирования по контуру вклад от первой строчки даст нуль, и мы приходим к

$$\delta Y^\lambda \approx - \frac{1}{2} R_{\mu\sigma\zeta}^\lambda Y^\mu \delta S^{\sigma\zeta}, \quad (10.64)$$

$$R_{\mu\sigma\zeta}^\lambda = \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\zeta\mu}^\nu - \Gamma_{\zeta\nu}^\lambda \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + \partial_\sigma \Gamma_{\zeta\mu}^\lambda - \partial_\zeta \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda.$$

Тензор $R_{\mu\sigma\zeta}^\lambda$ называется *тензором кривизны*. Для переноса ковариантного вектора аналогичным способом можно получить, что

$$\delta Y_\lambda = \frac{1}{2} R_{\lambda\sigma\zeta}^\mu Y_\mu \delta S^{\sigma\zeta}. \quad (10.65)$$

Написанные выше формулы этого Пункта верны в том числе и в случае ненулевого кручения. Легко проверить используя (10.64,10.65), что перенос по замкнутому контуру скалярного произведения двух векторов не приводит к изменению его значения,

$$\delta(X^\mu Y_\mu) = Y_\mu \delta X^\mu + X^\mu \delta Y_\mu = 0,$$

как и должно быть.

Ограничимся теперь Римановыми пространствами. В выражении для тензора Римана бывает полезным выделить явно вторые производные от метрики, используя (10.13):

$$R_{\mu\nu\sigma\zeta} = g_{\lambda\rho} (\Gamma_{\mu\zeta}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\zeta}^\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\zeta}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\zeta} - \frac{\partial^2 g_{\nu\zeta}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\zeta} \right). \quad (10.66)$$

10-3.2 Нормальные координаты Римана. Геодезические координаты.

Пусть в окрестности точки p заданы некоторые координаты y^μ . Построим такие координаты x^μ , для которых значение связности в точке p (для простоты мы примем, что в этой точке $x^\mu = 0$) равно нулю.

Рассмотрим всевозможные геодезические, выходящие из точки p . Касательный вектор к геодезической обозначим X . Новые координаты x введём согласно соотношению

$$x^\mu(y^\mu(s)) = s X^\mu, \quad X^\mu = \left. \frac{dy^\mu(s)}{ds} \right|_{s=0}, \quad s(p) = 0, \quad (10.67)$$

где s — аффинный параметр вдоль геодезической. Неоднозначность определения аффинного параметра не делает неоднозначным определение координат x^μ . Действительно, произведение sX^μ остаётся неизменным при линейном преобразовании параметра s .

Перейдём в новые координаты x . В этих координатах на каждой геодезической касательный вектор X^ν не изменяет свои компоненты по мере движения вдоль неё в силу определения (10.67). Поэтому

$$\Gamma^\mu_{\sigma\zeta}(sX) X^\sigma X^\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\mu_{\sigma\zeta}(p) = 0 \quad (10.68)$$

вследствие уравнения на геодезическую (10.59). Тогда, по непрерывности, это уравнение верно в точке p для всех векторов X . Это означает, что в точке p связность равна нулю, поскольку как квадратичная форма (кручение равно нулю) она обращается в нуль на всех векторах. Таким образом, цель достигнута.

Установим дополнительную симметрию, которой удовлетворяют производные коэффициентов связности в начале нормальных координат. Продифференцируем уравнение на геодезическую (10.59), в нашем случае имеющее вид (10.68), ещё раз по s и положим $s = 0$. В результате получим, что для любого вектора X

$$\Gamma^\mu_{\sigma\zeta,\nu} X^\sigma X^\zeta X^\nu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^\mu_{\sigma\zeta,\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu,\zeta} + \Gamma^\mu_{\zeta\nu,\sigma} = 0. \quad (10.69)$$

В нормальных координатах удобно проводить вычисления, поскольку обращение в нуль связности значительно сокращает их объём. В частности, с использованием этого вычислительного приёма в Пункте 10-3.3 получены свойства тензора Римана.

10-3.2.1 Метрика в окрестности начала нормальных координат Римана

Посмотрим ещё, как метрика и связность в координатах x^μ зависят от отклонения от точки p . Равенство нулю связности в начале координат означает равенство нулю в этой точке первых производных метрики, см. (10.55). Поэтому первые члены ряда Тейлора для метрического тензора имеют вид

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\sigma\zeta}x^\sigma x^\zeta + \dots \quad (10.70a)$$

Выразим вторую производную $g_{\mu\nu,\sigma\zeta}$ через тензор Римана. Используя (10.68,10.69) и выражение (10.64) тензора Римана через коэффициенты связности, сводящееся к

$$R^\mu_{\sigma\nu\zeta} = \Gamma^\mu_{\zeta\sigma,\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\zeta}, \quad (10.70b)$$

в точке $x = 0$, получим сначала выражение для производной символа Кристоффеля

$$\Gamma^\mu_{\sigma\zeta,\nu} = -\frac{1}{3}(R^\mu_{\sigma\zeta\nu} + R^\mu_{\zeta\sigma\nu}). \quad (10.70c)$$

Теперь, продифференцировав условие равенства нулю ковариантной производной метрики (10.55) по координате и использовав уже полученное (10.70c), приходим

к

$$g_{\mu\nu,\sigma\zeta} = -\frac{1}{3}(R_{\mu\sigma\nu\zeta} + R_{\mu\zeta\nu\sigma}). \quad (10.70d)$$

Два остальных вклада сократились, поскольку тензор Римана антисимметричен по первым двум индексам, см. ниже (10.71). В результате получаем

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\zeta}x^\sigma x^\zeta + \mathcal{O}(x^3) \quad (10.70e)$$

Если тензор Римана равен нулю во всём пространстве, то такое пространство плоское. ...

10-3.2.2 Геодезические координаты

Рашевский, §91

10-3.3 Свойства тензора кривизны

Из определения следует, что тензор Римана антисимметричен по последним двум индексам. Остальные симметрии тензора Римана легче всего установить в нормальных координатах Римана, см. Пункт 10-3.2 и (10.66). Будучи записанным в виде $R_{\lambda\rho\sigma\zeta}$, он антисимметричен и по первой паре индексов. Кроме того, поскольку для риманова пространства связность симметрична по последним двум индексам, то тензор Римана симметричен относительно перестановок первой и последней пар индексов. Собирая всё вместе, получаем:

$$R_{\mu\nu\sigma\zeta} = -R_{\mu\nu\zeta\sigma} = -R_{\nu\mu\zeta\sigma}, \quad (10.71)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\zeta} = R_{\sigma\zeta\mu\nu} \quad (\text{Riemann sp.}).$$

Далее, для риманова пространства сумма циклических перестановок индексов по трём из четырёх индексов тензора Римана даёт ноль,

$$R_{\sigma[\mu\nu\lambda]} \equiv R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0 \quad (\text{Riemann sp.}). \quad (10.72)$$

что можно получить подстановкой того же (10.70b): это называют первым или алгебраическим тождеством Бианки (*first Bianchi identity or algebraic Bianchi identity*). Наконец, имеют место тождества Бианки (*second Bianchi identity or differential Bianchi identity*), которые в пространстве Римана принимают вид

$$R^\sigma_{\zeta[\mu\nu;\lambda]} = 0. \quad (\text{Riemann sp.}) \quad (10.73)$$

Для доказательства выберем нормальные координаты Римана, в начале которых ковариантная производная заменяется на простую, поскольку равна нулю связность. Учтя это удаётся экономно доказать (10.73) непосредственной подстановкой (10.66).

Из тензора Римана можно построить линейный по нему тензор второго ранга $R_{\mu\nu}$ (единственный с точностью до постоянного коэффициента), называемый *тензором Риччи (Ricci curvature tensor)*

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\nu\mu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu} \\ &= \Gamma^\sigma_{\sigma\tau}\Gamma^\tau_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\tau}\Gamma^\tau_{\sigma\mu} + \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}. \end{aligned} \quad (10.74)$$

Тензор Риччи симметричен. Далее, можно построить скаляр R , называемый *скалярной кривизной*

$$R = R^\mu{}_\mu = R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} \quad (10.75)$$

Если в дифференциальном тождестве Бианки (10.73) провести свёртку по парам индексов с номерами 1-3 и 2-4, то приходим к соотношению

$$R^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{2} \partial_\mu R. \quad (10.76)$$

Для Риманова пространства формулу (10.65) можно переписать в дифференциальном виде

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\sigma \equiv A_{\sigma;\mu\nu} - A_{\sigma;\nu\mu} = -R^s{}_{\sigma\mu\nu} A_s. \quad (10.77)$$

Для доказательства удобно выбрать нормальные координаты, так что в выражении (10.77) останутся только производные от связности, и затем воспользоваться равенством (10.64).

10-3.3.1 Вариация связности и тензора Римана по метрике

При использовании принципа наименьшего действия для вывода уравнения Эйнштейна приходится находить вариацию символов Кристоффеля и тензора Римана по метрике. Выполним здесь эту техническую работу.

В выражении для ковариантной производной контравариантного (10.8) произведём варьирование по метрике левой и правой частей равенства. Вариация метрики задаётся ковариантным тензорным полем $\delta g_{\mu\nu}$; предполагается, что варьирование по метрике оставляет неизменными значения компонент контравариантных векторов. Поэтому равенство вариаций левой и правой частей выражения для ковариантной производной вектора (10.8) принимает вид

$$\delta(\nabla_\mu v^\nu) = \delta\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} v^\lambda.$$

Это по-прежнему тензорное равенство, из чего можно заключить, что вариация символов Кристоффеля $\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$ является тензором, тогда как сам символ Кристоффеля таковым не является. Полученное утверждение можно проверить и непосредственно, убедившись в равенстве

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} &= \delta(g^{\lambda\sigma} \Gamma_{\sigma\mu\nu}) = \\ &= \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} (\delta g_{\sigma\mu;\nu} + \delta g_{\sigma\nu;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}) \end{aligned}$$

используя (10.13). В выписанном выражении ковариантная производная вычисляется при невозмущённой метрике.

Вариация тензора Римана обязана быть также тензором. Выразим её через вариацию символов Кристоффеля, используя выражение (10.64) для тензора кривизны:

$$\begin{aligned} \delta R^\lambda{}_{\mu\sigma\zeta} &= \quad (10.78) \\ &= \partial_\sigma \delta\Gamma^\lambda{}_{\zeta\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\nu{}_{\zeta\mu} - \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} \delta\Gamma^\lambda{}_{\zeta\nu} - \boxed{\Gamma^\nu{}_{\sigma\zeta} \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}} - \\ &\quad - \partial_\zeta \delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\zeta\nu} \delta\Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} + \Gamma^\nu{}_{\zeta\mu} \delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \boxed{\Gamma^\nu{}_{\zeta\sigma} \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}} = \\ &= (\delta\Gamma^\lambda{}_{\zeta\mu})_{;\sigma} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu})_{;\zeta}. \end{aligned}$$

В процессе выкладок мы дополнили обе строчки взаимно сокращающимися слагаемыми (помещёнными в прямоугольники) так, чтобы в каждой строчке стояла ковариантная производная вариации символов Кристоффеля. Теперь можно записать вариацию тензора Риччи (10.74):

$$\delta R_{\mu\zeta} = \delta R^\lambda{}_{\mu\lambda\zeta} = (\delta\Gamma^\lambda{}_{\zeta\mu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu})_{;\zeta}. \quad (10.79)$$

§10-4. Дифференциальные формы

В § были определено гладкое многообразие, на нём были определены гладкие векторные поля, а также введена ковариантная производная через связность; связность мы сделали согласованной с метрикой. Из проведённого рассмотрения вытекает, что, с одной стороны, невозможно непосредственно сравнивать вектора в точках, разнесённых на конечное расстояние. С другой стороны, бесконечно малое перемещение dx^μ по-прежнему является вектором в точке, из которой производится это перемещение. Аналогично, тензором ранга 2 является элемент двумерной поверхности $dS^{\mu\nu}$, натянутой на бесконечно малый замкнутый контур.

Бесконечно малые элементы длины, площади, объёма и т.д. естественно появляются во многих вычислениях

и фиксация этих объектов позволяет установить геометрический смысл аналитических выражений. Индексы (обозначим их $\{\sigma, \zeta\}$) связности $\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$, тензора кривизны $R^\mu{}_{\nu\sigma\zeta}$ и тензора кручения $T^\mu{}_{\sigma\zeta}$, сворачивающиеся с элементами перемещения и площади, имеют потому особый геометрический смысл. Кроме того, интегрирование по контуру (10.60) согласно известной из математического анализа теореме Стокса должно быть эквивалентно интегралу по площади, натянутой на этот контур, от соответствующей производной подинтегрального выражения. Желательно использовать такую технику записи, которая бы позволяла это делать почти автоматически.

Техника дифференциальных форм как раз разработана для адекватного обращения с бесконечно малыми

элементами пространства разных размерностей.

Для трёхмерного пространства в вычислениях элемента площади и пространства участвует антисимметричный символ Леви-Чивиты. Вообще, антисимметризация всегда возникает при необходимости определения элемента пространства, натянутого на заданные вектора. Пусть имеется r индексов i_1, \dots, i_r . Определим знак перестановки этих индексов

$$\epsilon_\sigma = \pm 1, \quad (10.80)$$

где $\sigma = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)\}$ – произвольная перестановка индексов i_1, \dots, i_r ; если она чётная, то ϵ_σ положительно, если нечётна, то, соответственно, ϵ_σ отрицательно.

Тензорное поле типа $(r, 0)$ называется *кососимметричным*, если перестановка любых его двух индексов ведёт к изменению знака матричного элемента при сохранении его абсолютного значения,

$$\omega_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_r)} = \epsilon_\sigma \omega_{i_1\dots i_r}$$

10-4.1 Определение понятия формы

Кососимметричное тензорное поле типа $(r, 0)$ называется дифференциальной формой степени r , если определено его действие на r контравариантных векторов X_k , где индекс $k = \overline{0, r}$, следующим образом. Обозначим

$$X_{[[1 X_2 \dots X_r]]} = \sum_\sigma \epsilon_\sigma X_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r)}. \quad (10.81)$$

Эту запись можно пояснить, выписав матричный элемент построенного кососимметричного поля типа $(0, r)$ в виде детерминанта:

$$(X_{[[1 \dots X_r]])}^{i_1 \dots i_r} \equiv X_{[[1 \dots X_r]]}^{i_1 \dots i_r} = \begin{vmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_1^{i_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_r^{i_1} & \dots & X_r^{i_r} \end{vmatrix}$$

(справа подразумевается взятие детерминанта). Действие дифференциальной формы по определению задаётся соотношением

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_r) &= \omega_{i_1 \dots i_r} X_{[[1 X_2 \dots X_r]]}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \quad (10.82) \\ &= r! \omega_{i_1 \dots i_r} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_r^{i_r}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в первом выражении, как обычно, производится суммирование по всем индексам i_k , поэтому во втором выражении появился фактор $r!$. Для пояснения общего определения скажем, что в случае смешанного произведения в трёх-мерном пространстве, см. Пункт 9-2.2.2, следует положить

$$\omega_{ijk} = \frac{1}{d!} \epsilon_{ijk}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (10.83)$$

где $d = 3$ – размерность пространства.

Все дифференциальные формы степени $r \geq 0$ образуют линейное пространство, обозначаемое $\Omega^r \mathcal{X}$. По определению, пространство гладких функций на многообразии назовём пространством форм нулевой размерности, $\Omega^0 \mathcal{X} = F\mathcal{X}$. Далее, очевидна биекция пространства 1-форм и касательного ко-пространства, $\Omega^1 \mathcal{X} = T_1 \mathcal{X}$. Подчеркнём, что с точки зрения преобразования тензоров, пространство $\Omega^r \mathcal{X}$ является подпространством пространства $T_r \mathcal{X}$. Заметим также, что $\Omega^r \mathcal{X} = 0$ для любых $r > n$.

10-4.1.1 Внешнее умножение дифференциальных форм

Например, пусть есть вектор и элемент площади в трёх-мерном пространстве. Как определить элемент объёма, натянутый на этим два элемента? Решение этого технического вопроса достигается через определение внешнего умножения форм.

Внешнее произведение базисных 1-форм dx^i определяется как

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_\sigma \epsilon_\sigma dx^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(i_r)} \quad (10.84)$$

В частности, это означает, что действие r -формы как контравариантного тензора ранга r на тензорном произведении r контравариантных векторов X_i есть

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r})(X_1 \otimes \dots \otimes X_r) = X_{[[1 \dots X_r]]}^{i_1 \dots i_r}.$$

Например, если в трёх-мерном пространстве есть два вектора X, Y , то

$$(dx^1 \wedge dx^2)(X \otimes Y) = X^1 Y^2 - Y^1 X^2, \quad (10.85)$$

т.е. это 3-я компонента векторного произведения $[X \times Y]$, см. Пункт 9-2.2.1.

Пусть есть произвольные r -форма и s -форма. Обобщим определение внешнего произведения (10.84) для 1-форм так, чтобы выполнялся закон ассоциативности. Тогда внешнее произведение для r - и s -форм даётся равенствами

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= \omega_{i_1 \dots i_r} \theta_{i_{r+1} \dots i_{r+s}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}} = \\ &= (\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r+s}} \quad (10.86) \end{aligned}$$

где матричный элемент получившейся $(r+s)$ -формы равен

$$(\omega \wedge \theta)_{i_1 \dots i_{r+s}} = \quad (10.87)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_\sigma \epsilon_\sigma \omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)} \theta_{\sigma(i_{r+1}) \dots \sigma(i_{r+s})} = \\ &= \frac{r!s!}{(r+s)!} \sum_{\sigma'} \epsilon_{\sigma'} \omega_{\sigma'(i_1) \dots \sigma'(i_r)} \theta_{\sigma'(i_{r+1}) \dots \sigma'(i_{r+s})}. \end{aligned}$$

Во втором представлении множество всех перестановок разбито на группы. В каждой группе все перестановки могут быть получены из одной путём перестановок внутри первых r и/или последних s индексов. Таким

образом, в каждой группе имеется $r!s!$ одинаковых слагаемых, что мы учли в множителе перед знаком суммы. Через суммирование по σ' мы обозначили суммирование по подмножеству всех перестановок, содержащему только по одному представителю из каждой группы.

В результате получаем, что в рамках данных определений

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{r+s}) &= \\ &= \sum_{\sigma'} \epsilon_{\sigma'} \omega(X_{\sigma'(1)}, \dots, X_{\sigma'(r)}) \theta(X_{\sigma'(r+1)}, \dots, X_{\sigma'(r+s)}) \end{aligned} \quad (10.88)$$

Множитель-факториал, стоящий во втором представлении (10.82), сокращается с факториалами, стоящими множителями в (10.87).

Приведем свойства внешнего умножения:

1) Для r -формы ω и s -формы θ имеет место свойство кососимметричности:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega. \quad (10.89)$$

2) Свойство билинейности (формы θ и ϕ одного порядка):

$$\omega \wedge (\theta + \phi) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \phi. \quad (10.90)$$

3) Свойство ассоциативности:

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \phi = \omega \wedge (\theta \wedge \phi) = \omega \wedge \theta \wedge \phi.$$

Для пояснения определения внешнего умножения посмотрим, чему равен результат действия внешнего произведения 2-формы и 1-формы сначала в общей форме: если

$$\omega = \omega_{ik} dx^i \wedge dx^k, \quad \theta = \theta_i dx^i,$$

и X, Y, Z – вектора, то

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \theta)(X, Y, Z) &= \\ &= \omega(X, Y)\theta(Z) + \omega(Y, Z)\theta(X) + \omega(Z, X)\theta(Y). \end{aligned}$$

Возьмём тривиальный пример – внешнее произведение 2-формы (10.85) (т.е. ненулевыми являются $\omega_{12} = -\omega_{21} = 1$) и 1-формы $\theta = dx^3$ в трёх-мерном пространстве. Тогда $\omega \wedge \theta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, а результат действия этой формы на тройку векторов X, Y, Z есть смешанное произведение этих векторов, см. Пункт 9-2.2.2. Матричные элементы формы $\omega \wedge \theta$ равны (10.83): знаменатель $d!$ в (10.83) появляется за счёт знаменателя $(r+s)!$ в (10.87).

10-4.1.2 Перенос формы гладким отображением

Предположим, например, что r -форма ω исчисляет элементы r -размерности на многообразии \mathcal{X} размерности

n . Многообразие \mathcal{Y} является подмногообразием размерности $m \geq r$ многообразия \mathcal{X} , $m < n$. Каким образом форма ω исчисляет элементы r -размерности на многообразии \mathcal{Y} ?

В общем случае надо говорить о гладком отображении многообразия \mathcal{Y} в \mathcal{X} , соотношения размерностей этих многообразий произвольны. Дадим определение переноса формы гладким отображением многообразий.

Пусть $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ – произвольное гладкое отображение, и r -форма ω определена на многообразии \mathcal{X} . Для каждой точки $p \in \mathcal{Y}$ определим r -форму $f^*\omega$ на многообразии \mathcal{Y} ,

$$\forall f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \Rightarrow \quad \exists f^*: \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{Y}, \quad (10.91)$$

действие которой на векторах Y_1, \dots, Y_r из касательного пространства $T_p \mathcal{Y}$ в точке p есть

$$(f^*\omega)(Y_1, \dots, Y_r) = \omega(df_p(Y_1), \dots, df_p(Y_r)). \quad (10.92)$$

где действие дифференциала гладкого отображения df_p на векторе определено в (10.45) (там поменяны местами буквы, соответствующие множествам \mathcal{Y} и \mathcal{X}). В другом виде это определение можно переписать так:

$$f^*\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad dx^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right)_p dy^k,$$

т.е. теперь n форм dx^i не являются в общем случае линейно независимыми, а являются линейной комбинацией форм dy^k . Построенное отображение форм линейно и перестановочно с внешним умножением:

$$f^*(\theta \wedge \omega) = f^*\theta \wedge f^*\omega$$

для любых форм θ и ω на \mathcal{X} .

Для произвольного подмногообразия \mathcal{Y} многообразия \mathcal{X} и отвечающего ему вложения $i: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ отображение

$$i^*: \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{Y}$$

является *отображением ограничения*, переводящим форму ω на \mathcal{X} в форму $\omega|_{\mathcal{Y}}$ на \mathcal{Y} , для которой

$$(\omega|_{\mathcal{Y}})_p(X_1, \dots, X_r) = \omega_p(X_1, \dots, X_r)$$

в любой точке $p \in \mathcal{Y}$ и для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in T_p \mathcal{Y}$ (где, естественно, пространство $T_p \mathcal{Y}$ рассматривается как подпространство пространства $T_p \mathcal{X}$).

10-4.2 Внешнее дифференцирование форм

Построим отображение d

$$d: \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^{r+1} \mathcal{X}, \quad (10.93)$$

переводящее r -форму в $(r+1)$ -форму и называемое *внешним дифференцированием формы*. Внешнее дифференцирование должно обладать следующими свойствами:

- 1) Отображение d линейно.
- 2) Отображение d является антидифференцированием, т.е. для форм θ и ω имеет место равенство

$$d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega,$$

где r – степень формы θ .

- 3) Для любого гладкого отображения $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ и любой формы ω на \mathcal{Y} имеет место равенство

$$df^* \omega = f^* d\omega.$$

- 4) Для каждой функции $f \in \Omega^0 \mathcal{X}$ форма df является ее дифференциалом:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

- 5) Если $\omega = d\theta$, то $d\omega = 0$.

Ниже мы показываем, что по этим аксиомам действительно возможно построить отображение и оно является единственным.

Начнём с того, что если f и g являются функциями на многообразии \mathcal{X} , то дифференциал их произведения, как и должно быть, равен

$$d(fg) = g df + f dg.$$

Теперь, пусть дана r -форма ω , которую мы для наглядности запишем в виде

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Покажем, что её внешний дифференциал следует вычислять по правилу

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (10.94)$$

Проверим, что это правило для двух разных карт U и U' даёт один и тот же результат, т.е. что форма $d(\omega|_U)$, построенная в координатах карты U и затем пересчитанная в координаты карты U' , совпадает с формой $d(\omega|_{U'})$, построенной непосредственно в координатах карты U' . Действительно, поскольку форма является тензором ранга r , то

$$\omega_{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial x'^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x'^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \omega'_{k_1 \dots k_r}, \quad \mathcal{D}_i^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}. \quad (10.95)$$

Подставим это выражение в правую часть (10.94). Дифференцирование множителей \mathcal{D}_i^k по x^{i_0} не даст вклада в (10.94), поскольку результат будет симметричным по индексам $\{i, i_0\}$, сворачиваясь с антисимметричной по этим индексам формой $dx^{i_0} \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^{i_0}$. Поэтому в (10.95) надо дифференцировать только множитель

ω' . Наконец, надо воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и пересчётом 1-форм

$$\frac{\partial \omega'_{k_1 \dots k_r}}{\partial x^{i_0}} = \frac{\partial \omega'_{k_1 \dots k_r}}{\partial x'^{k_0}} \frac{\partial x'^{k_0}}{\partial x^{i_0}}, \quad dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i,$$

в результате чего мы придём к тому, что процедура (10.94) выполненная на картах U и U' даёт одну и ту же $(r+1)$ -форму. Итак, декларированное отображение (10.93) построено, см. (10.94).

Формально также доказывается перестановочность операций переноса формы гладким отображением и внешнего дифференцирования. Отметим, что в процессе доказательства можно воспользоваться тем, что согласно аксиоматике и выработанному правилу (10.94) двойной внешний дифференциал функции равен нулю:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad dd f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} dx^k \wedge dx^i = 0$$

Форма dx^i есть дифференциал функции x^i , поэтому второй дифференциал от неё равен нулю. Аналогичным способом доказывается, что двойной внешний дифференциал от любой формы равен нулю.

Кососимметричность внешнего дифференцирования доказывается непосредственно.

10-4.3 Интегрирование дифференциальных форм

Пусть размерность многообразия \mathcal{X} равна n и на нём задана некоторая n -форма ω . Определим интеграл от формы по многообразию. Сначала рассмотрим простейший случай, когда внутренность многообразия $\text{int } \mathcal{X}$ может быть покрыта одной картой $(\text{int } \mathcal{X}, x^k)$, и образ внутренности многообразия в пространстве \mathbb{R}^n есть открытое множество G . Интеграл от формы есть

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \int_G \omega(x) dx^1 \dots dx^n. \quad (10.96)$$

Проверим определение на независимость от выбора карты. Пусть $(\text{int } \mathcal{X}, x'^i)$ – другая карта. Тогда, с одной стороны, единичная форма стоящая в левой части (10.96) при переходе из одной системы координат в другую пересчитывается согласно

$$\omega(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (J \omega(x')) dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n,$$

$$J = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right|,$$

где J – якобиан перехода. С другой стороны переход в интегрировании в правой части (10.96) от одних координат в другим приводит к появлению абсолютного значения $|J|$ якобиана перехода в качестве множителя. Таким образом, интеграл от формы не изменяется при переходе между одноимёнными картами и изменяет знак, если карты разноимённые.

Теперь распространим определение интеграла от формы на такие многообразия, внутренность которых не может быть покрыта полностью одной картой. Такое многообразие разобьём на подмногообразия \mathcal{X}_α , объединение которых даёт исходное многообразие и внутренности которых не пересекаются:

$$\mathcal{X} = \cup \mathcal{X}_\alpha, \quad \text{int } \mathcal{X}_\alpha \cap \text{int } \mathcal{X}_\beta = 0 \quad \text{if } \alpha \neq \beta. \quad (10.97)$$

Тогда по определению

$$\int_{\mathcal{X}} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{X}_\alpha} \omega. \quad (10.98)$$

10-4.3.1 Теорема Стокса

Пусть теперь ω — $(n-1)$ -мерная форма на n -мерном многообразии \mathcal{X} с краем. Тогда имеет место теорема Стокса

$$\int_{\mathcal{X}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{X}} \omega. \quad (10.99)$$

Проведём доказательство теоремы Стокса для многообразия, для которого можно выбрать атлас, карты которого образуют замкнутый шар в \mathbb{R}^n .

Для того, чтобы провести интегрирование форма $d\omega$ по многообразию \mathcal{X} , надо выбрать систему одинаково ориентированных карт, которая бы с одной стороны полностью покрывала многообразие \mathcal{X} в смысле (10.97). А с другой стороны эта система карт должна содержать краевые карты, которые в совокупности полностью покрывали бы край многообразия \mathcal{X} опять таки в том же смысле (10.97). Эту задачу для нашего многообразия можно выполнить минимум с помощью двух карт (плюс одной вспомогательной, которая устанавливает взаимную положительную ориентацию этих двух карт).

В качестве носителя вспомогательной карты возьмём всё многообразие \mathcal{X} с такими координатами x^i , в которых край многообразия задаётся равенством

$$\rho^2 + (x^1)^2 = 1, \quad \rho^2 = (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2.$$

В координатном базисе этой карты $(n-1)$ -форма в общем случае задаётся выражением

$$\omega = \sum_k \omega_k(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\times}{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где перечёркивание означает, что соответствующий множитель отсутствует. Поскольку равенство (10.99) аддитивно а выбор координат произволен, то (10.99) достаточно доказать только для одного слагаемого, скажем для $\omega_1(x)$, положив

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(x) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \text{then } d\omega &= \frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x^1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

В соответствии с этим выбором в качестве носителей двух карт U_+ и U_- возьмём полушария $x^1 > 0$ и $x^1 < 0$ с координатами y_+^i и y_-^i

$$\begin{aligned} (y_+^1, y_+^2, y_+^3, \dots, y_+^n) &= (x^1 - q, x^2, x^3, \dots, x^n), \\ (y_-^1, y_-^2, y_-^3, \dots, y_-^n) &= (-x^1 - q, -x^2, x^3, \dots, x^n). \end{aligned}$$

где $q(\rho) = \sqrt{1 - \rho^2}$. В таком случае все три карты имеют одну и ту же ориентацию. Край в картах U_{\pm} задаётся уравнениями $y_{\pm}^1 = 0$, а внутренность многообразия $\text{int } \mathcal{X}$ соответствует областям $y_{\pm}^1 < 0$. Таким образом, две построенные карты соответствуют определению краевой карты данном в Пункте 10-2.1.4. Множества U_{\pm} двух карт высекают на краю многообразия \mathcal{X} подмножества V_{\pm} с координатами

$$i^{\pm} : V_{\pm} \rightarrow U_0 : (y_{\pm}^2, y_{\pm}^3, \dots, y_{\pm}^n) = (\pm x^2, x^3, \dots, x^n).$$

Здесь i^{\pm} означают отображения (одно из них тождественное), которые надо отождествить с отображением f в (10.91). Этим отображениям соответствуют отображения форм с U_0 на V_{\pm} :

$$i^{*\pm} : \Omega^{n-1} U_0 \rightarrow \Omega^{n-1} V_{\pm} : \omega_{\pm}^{\pm} = \pm \omega_1,$$

Теперь всё готово для доказательства теоремы Стокса (10.99). Взяв левую часть, произведём интегрирование формы $d\omega$ по многообразию \mathcal{X} в координатах карты (U_0, x^i) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} d\omega &= \int_{|x^2| < q} \frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 \dots dx^n = \quad (10.100) \\ &= \int_{x^1=q} \omega_1 dx^2 \dots dx^n - \int_{x^1=-q} \omega_1 dx^2 \dots dx^n. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что интегрирование по x^1 происходит от полной производной. Теперь вычислим правую часть (10.99). Согласно найденной форме ω , перенесённой на края V_{\pm} , интеграл по краю равен

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{X}} \omega &= \int \omega_1^+ dy_+^2 \dots dy_+^n + \int \omega_1^- dy_-^2 \dots dy_-^n = \\ &= \int_{x^1=q} \omega_1 dx^2 \dots dx^n - \int_{x^1=-q} \omega_1 dx^2 \dots dx^n, \end{aligned}$$

что равно результату вычисления (10.100) левой части формулы Стокса (10.99).

§10-5. Запись уравнений дифференциальной геометрии через дифференциальные формы

10-5.1 Формы в произвольном базисе

Мы будем одновременно работать в двух базисах — координатном базисе и произвольном базисе e_B^σ (см. Пункт 10-2.3) для разных индексов, имеющих разные геометрические смыслы. В координатном базисе мы будем исчислять формы. В произвольном базисе e_B^σ мы будем исчислять тензора.

Форма смещения ω^B — это объект из $\Omega^1\mathcal{X}$, являющийся кроме этого контравариантным вектором в базисе e_B^σ

$$\omega^B \equiv e_\nu^B dx^\nu, \quad (10.101)$$

Согласно (10.53), в произвольном базисе ковариантное дифференцирование записывается не с помощью символов Кристоффеля, а с помощью величин

$$\omega_{A\nu}^B = e_\sigma^B e_A^\sigma \Gamma_{\nu\zeta}^\sigma + e_\sigma^B \partial_\nu e_A^\sigma. \quad (10.102)$$

Здесь два индекса, относящиеся к векторам, записаны в произвольном базисе, а оставшийся индекс соответствующий дифференцированию — в координатном базисе. Эти величины, записанные в виде форм

$$\omega_A^B \equiv \omega_{A\nu}^B dx^\nu, \quad (10.103)$$

называются *формой связности*. Таким образом, форма связности — это объект из $\Omega^1\mathcal{X}$, имеющий кроме этого один верхний и один нижний тензорные индексы в базисе e_B^σ , но не являющийся тензором. Обратим внимание на то, что порядок индексов A, ν слева у формы связности ω поменян по сравнению с порядком индексов ν, ζ справа у символа Кристоффеля Γ . Форма связности переписывает (10.52) в виде

$$\begin{aligned} \nabla Y^A &\equiv dx^\mu e_\nu^A \nabla_\mu Y^\nu = dx^\mu (\partial_\mu Y^A + \omega_{B\mu}^A Y^B) \\ &= dY^A + \omega_B^A Y^B. \end{aligned} \quad (10.104)$$

Преобразование форм связности при замене базиса $e_B^\sigma \rightarrow e_B^{\prime\sigma}$

$$\omega_B^{\prime A} = D_C^A D_{\prime B}^C \omega_D^C + D_D^A dD_{\prime B}^D, \quad D_{\prime B}^D = e_\sigma^D e_B^{\prime\sigma} \quad (10.105)$$

следует из (10.102). Однако если мы изменяем координатную сетку, сменяя координаты x^μ на координаты $x^{\prime\mu}$, но сохраняем прежним базис e_B , то форма связности изменяется как ковариантный вектор (как и, разумеется, форма смещения):

$$\omega_{A\nu}^{\prime B} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} \omega_{A\mu}^B, \quad e_\nu^{\prime B} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} e_\mu^B. \quad (10.106)$$

В правилах (10.105, 10.106) отражается геометрический смысл разделения индексов по координатному и произвольному базисам.

Отметим, что есть возможность перейти к произвольному базису для всех индексов, разложив все формы по формам смещения. В таком случае, например, форма связности

$$\omega_A^{\prime B} = \omega_{AC}^{\prime B} \omega^C, \quad \omega_{AC}^{\prime B} = e_C^\mu \omega_{A\mu}^B.$$

Интервал в терминах форм смещения записывается в виде

$$ds^2 = g_{AB} \omega^A \omega^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{AB} = g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu. \quad (10.107)$$

Подчеркнём, что в этом выражении не производится операции внешнего умножения, и, таким образом, это выражение является не более чем формой записи.

10-5.1.1 Ортонормированный базис

Пусть базис e_a^ν является ортонормированным, т.е.

$$g^{\nu\mu} e_\nu^a e_\mu^b = \eta^{ab} \Leftrightarrow g_{\nu\mu} e_a^\nu e_b^\mu = \eta_{ab}.$$

В случае ортонормированного базиса векторные индексы будем обозначать малыми буквами из начала латинского алфавита — $\{a, b, c, \dots\}$. Напомним, что ортонормированный базис был определён в Пункте 10-2.3.1.

Используя то, что по определению $e_\lambda^a e_b^\lambda = \delta_b^a$, перепишем связь между формой связности и символами Кристоффеля (10.102) в терминах e_λ^a (которые, напомним, называются тетрадами в случае если пространство 4-х мерное). В результате получим соотношение

$$\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0. \quad (10.108)$$

которое называется для 4-х мерного пространства *тетрадным постулатом* (*tetrad postulate*). Отметим, что тетрадный постулат не является специфическим для ортонормированного базиса, он верен для любого базиса.

Для ортонормированного базиса специфическую форму принимает условие согласованности связности с метрикой (10.55): в терминах формы смещения этим условием является антисимметричность формы связности,

$$\nabla \eta_{ab} = -\omega_{ab} - \omega_{ba} = 0, \quad \omega_{ab} = \eta_{ac} \omega_b^c. \quad (10.109)$$

10-5.2 Структурные уравнения Картана

Уравнения, выражающие тензора кривизны и кручения через связность и записанные в терминах произвольного базиса, называются структурными уравнениями Картана.

Повторим вычисления Пункта 10-3.1.2, приводящие к определению тензора кривизны, в терминах дифференциальных форм. Приращение вектора при его параллельном переносе вдоль замкнутой петли (10.63) с

учётom записи ковариантной производной вектора в терминах формы связности (10.104) равно

$$\delta Y^A = \int_{\partial\sigma} dY^A = - \int_{\partial\sigma} \omega_B^A Y^B. \quad (10.110)$$

Здесь интегрирование 1-формы проводится вдоль замкнутого контура (1-мерного многообразия). Мы обозначили его как $\partial\sigma$, имея ввиду, что этот замкнутый контур является границей некоторой 2-мерной поверхности σ (2-мерного многообразия), натянутой на этот контур. Поскольку размер петли мал (порядка ϵ), нам достаточно вычислить Y^B в первом порядке по ϵ

$$\begin{aligned} \delta Y^A &= \int_{\partial\sigma} \omega_B^A Y^B = - \int_{\partial\sigma} d(\omega_B^A Y^B) \approx \\ &\approx - \int_{\sigma} (\overline{d\omega_B^A} \bar{Y}^B - \bar{\omega}_B^A \wedge \overline{dY^B}) = \\ &= -\bar{Y}^B \int_{\sigma} (\overline{d\omega_B^A} + \bar{\omega}_C^A \wedge \bar{\omega}_B^C) \equiv -\frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{R}_B^A \bar{Y}^B, \end{aligned}$$

(сравни с (10.64)), где черта над величиной означает, что эта величина берётся в начале петли, а тензор кривизны определён как 2-форма

$$R_B^A = 2(d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C). \quad (10.111)$$

Теперь получим тензор кручения. Выражение (10.61) для приращения координаты вдоль петли, перенесённого в начало координат, с учётом связи между формами связности и символами Кристоффеля (10.102) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \oint \delta dx^\mu &\approx \oint \bar{\Gamma}^\mu_{\sigma\zeta} x^\sigma dx^\zeta = \\ &= \bar{e}_B^\mu \oint (\overline{\partial_\sigma e_\zeta^B} + \bar{e}_\zeta^A \bar{\omega}_{A\sigma}^B) x^\sigma dx^\zeta. \end{aligned}$$

В этом подынтегральном выражении от координаты зависит только собственно сама координата. Учтя это, воспользуемся теоремой Стокса

$$\begin{aligned} \bar{e}_B^\mu \int_{\partial\sigma} \delta dx^\mu &= \int_{\sigma} (\overline{\partial_\sigma e_\zeta^B} + \bar{e}_\zeta^A \bar{\omega}_{A\sigma}^B) dx^\sigma \wedge dx^\zeta = \\ &= \int_{\sigma} (\overline{d\omega_B^B} + \bar{\omega}_A^B \wedge \bar{\omega}^A) \equiv \frac{1}{2} \int_{\sigma} \bar{T}^B, \end{aligned}$$

где тензор кручения

$$T^B = 2(d\omega^B + \omega_A^B \wedge \omega^A). \quad (10.112)$$

Совокупность уравнений (10.111,10.112) называется структурными уравнениями Картана. Если перейти от координатного базиса к произвольному для всех индексов, то *структурные уравнения Картана* (*Cartan's structural equations*) можно переписать в виде

$$2(d\omega^B + \omega_A^B \wedge \omega^A) = T_{AC}^B \omega^A \wedge \omega^C, \quad (10.113)$$

$$2(d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C) = R_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D.$$

10-5.2.1 Определение кривизны по метрике

Приведём здесь метод определения тензора кривизны в ортонормированном базисе (см. Пункт 10-5.1.1) по известному метрическому тензору в координатном базисе и известному тензору кручения, если он ненулевой.

Первым шагом найдём формы связности. Пусть

$$d\omega^a = C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c, \quad C_{abc} = -C_{acb}.$$

Коэффициенты C_{abc} вычисляются непосредственно внешним дифференцированием формы смещения. Из первого структурного уравнения Картана (10.113) следует, что

$$\frac{1}{2}(\omega_{abc} - \omega_{acb}) = C_{abc} - \frac{T_{abc}}{2}.$$

Найдём линейную комбинацию этих уравнений в последовательности индексов $\{abc + bca - cab\}$. При преобразовании левой части пользуемся тем, что в ортонормированном базисе форма смещения антисимметрична, $\omega_{abc} = -\omega_{bac}$, см. (10.109). Получаем:

$$\omega_{abc} = C_{abc} - C_{bac} - C_{cab} + \frac{T_{abc} - T_{bac} - T_{cab}}{2}.$$

Теперь вторым шагом по найденным формам смещения ω_{bc}^a при помощи второго структурного уравнения Картана (10.113) прямолинейными вычислениями можно найти тензор кривизны.

10-5.3 Нормальные координаты Римана

В Пункте 10-3.2 были введены нормальные координаты Римана. Оказывается, что конструкция нормальных координат может быть естественным образом дополнена конструкцией ортонормированного базиса с новыми, согласованными с ним нормальными координатами. В этом пункте мы переписываем вычисления для нормальных координат в терминах дифференциальных форм в этом ОНБ.

10-5.3.1 Построение ОНБ для нормальных координат

Построим ортонормированный базис в окрестности точки p путём параллельного переноса ОНБ-репера e_μ^a из точки p вдоль геодезических, проходящих через точку p . Построенный базис действительно является ортонормированным, поскольку при параллельном переносе скалярное произведение векторов не изменяется.

Установим дополнительное свойство построенного базиса. На геодезической с касательной X^μ в точке $x^\mu = sX^\mu$ выполняется равенство

$$X^\mu (\partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) = 0, \quad X^\mu \omega_{b\mu}^a(x) = 0, \quad (10.114)$$

второй приведённый вариант записи которого следует из тетрадного постулата (10.108). С учётом определения нормальных координат (10.68), из первого равенства следует цепочка равенств

$$0 = X^\mu X^\nu \partial_\mu e_\nu^a = X^\mu \partial_\mu (X^\nu e_\nu^a) \Rightarrow \quad (10.115)$$

$$x^\nu e_\nu^a(x) = x^\nu e_\nu^a(0) \equiv x^a.$$

Последнее равенство в вычислениях показывает, что является рациональным переход от координат x^μ к координатам x^a , согласованным с введённым ОНБ. Для различия прямой e_ν^a и обратной e_ν^a матриц перехода от координатного базиса к ОНБ мы будем сохранять запись с индексами μ , считая однако, что на самом деле мы имеем дело с координатной системой x^a .

10-5.3.2 Раздувание бесконечно малой окрестности начала нормальных координат в конечную область

Определим зависимость форм смещения, связности и метрического тензора в малой окрестности начала нормальных координат.

Путь 1-мерное многообразие \mathcal{I} есть единичный отрезок $0 \leq t \leq 1$. Определим многообразие $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{I}$. Смысл этого построения состоит в мультиплицировании многообразия \mathcal{X} число раз, равное количеству значений (континууму) параметра t ; набором координат на многообразии \mathcal{Y} сделаем совокупность $\{x^\mu, t\}$. В соответствии со смыслом построения мы полагаем, что метрика и связность переносятся тривиально с n -мерного многообразия \mathcal{X} на $(n+1)$ -мерное многообразие \mathcal{Y} . Во-первых, чистые μ -компоненты этих величин на \mathcal{Y} в точке $\{x^\mu, t\}$ равны их компонентам на \mathcal{X} в соответствующей точке x^μ . Во-вторых, единственной ненулевой t -компонентой является $g_{tt} = 1$ (важно только, что она постоянная), а все остальные t -компоненты метрики и связности равны нулю. В таком случае у тензора Римана на \mathcal{Y} ненулевыми будут только чистые μ -компоненты, равные соответствующим компонентам тензора Римана в точке x^μ .

Определим локально-гладкое отображение многообразий

$$f : \mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}$$

согласно правилу $tx^\mu = \bar{x}^\mu$, где $\{x^\mu, t\}$ — координаты на \mathcal{Y} , а \bar{x}^μ — координаты на \mathcal{X} . Это отображение порождает отображение форм

$$f^* : \Omega^r \mathcal{X} \rightarrow \Omega^r \mathcal{Y}$$

см. Пункт 10-4.1.2. Таким образом, если на \mathcal{X} есть 1-формы смещения ω^a и связности $\omega_{b\mu}^a$, то результатом отображения f^* будут 1-формы на \mathcal{Y}

$$\omega^a = e_\mu^a dx^\mu \equiv x^a dt + \bar{\omega}^a, \quad e_\mu^a(\bar{x}) t dx^\mu \equiv \bar{\omega}^a$$

$$\omega_{b\mu}^a = \omega_{b\mu}^a dx^\mu = \omega_{b\mu}^a(\bar{x}) t dx^\mu \equiv \bar{\omega}_{b\mu}^a,$$

где было учтено определение координатной системы x^a , а также то, что $\omega_{b\mu}^a x^\mu = 0$ по построению ОНБ, см. (10.114). Запись выбрана так, что дифференциал d действует как на t так и на x^μ , тогда как дифференциал \bar{d} действует только на координаты x^μ . При $t = 1$ форма $\bar{\omega}^a$ равна форме смещения на \mathcal{X} $\omega^a(x)$, а форма $\bar{\omega}_{b\mu}^a$ равна форме связности на \mathcal{X} $\omega_{b\mu}^a(x)$. При $t = 0$ формы $\bar{\omega}^a$ и $\bar{\omega}_{b\mu}^a$ равны нулю.

Следующим шагом мы должны вычислить внешние дифференциалы форм смещения и связности:

$$d\omega^a = dt \wedge \left(\frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} - dx^a \right) + d\bar{\omega}^a,$$

$$d\omega_{b\mu}^a = dt \wedge \frac{\partial \bar{\omega}_{b\mu}^a}{\partial t} + d\bar{\omega}_{b\mu}^a.$$

Найдем уравнения на коэффициенты при вкладах в уравнениях Картана (10.113), содержащих dt :

$$\frac{\partial \bar{\omega}^a}{\partial t} = dx^a + \bar{\omega}_b^a x^b, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_{b\mu}^a}{\partial t} = R_{b\mu cd}^a(\bar{x}) x^c \bar{\omega}^d, \quad (10.116)$$

$$\bar{\omega}^a|_{t=0} = 0, \quad \bar{\omega}_{b\mu}^a|_{t=0} = 0.$$

Мы также выписали начальные условия.

Эти уравнения можно решать методом последовательных приближений. При первой итерации для формы связности и первых двух итерациях для формы смещения следует брать значение тензора Римана в начале координат. В результате получаем:

$$\bar{\omega}^a \approx t dx^a + \frac{t^3}{6} R_{b\mu cd}^a x^b x^c dx^d, \quad \bar{\omega}_{b\mu}^a \approx \frac{t^2}{2} R_{b\mu cd}^a x^c dx^d \quad (10.117)$$

Если в этих уравнениях положить $t = 1$, то мы получим формы смещения и связности на \mathcal{X} . Теперь возможно записать метрический тензор в координатном базисе:

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \approx \left(\eta_{ab} - \frac{1}{3} R_{acbd} x^c x^d \right) dx^a dx^b, \quad (10.118)$$

сравни с (10.70e).

§10-6. Свойства криволинейных пространств

10-6.1 Геометрия пространств с постоянной кривизной

Рассмотрим сферу радиуса a в пространстве Евклида размерности $n + 1$, такую сферу мы будем обозначать как S^n . Сфера задаётся уравнением

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} (x^\mu)^2 = a^2. \quad (10.119)$$

Наша цель — изучить геометрию пространства S^n : определить координатную систему, найти формы смещения и связности, найти тензор кривизны. Нас отдельно интересуют два случая. Первый — сфера S^2 , что соответствует двумерной поверхности в трёх-мерном пространстве. Второй — $n = 3$, что может служить моделью для трёх-мерного пространства в космологических моделях.

Параметризуем сферу S^3 углами χ, θ, ϕ ; координата 4-х мерного пространства, в которое погружена сфера, определяются через углы как

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\ \sin \chi \cos \theta \\ \cos \chi \end{pmatrix},$$

для единственности определения углов положим им пределы $0 \leq \chi, \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Метрика на сфере есть

$$ds^2 = a^2 \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (10.120)$$

Если рассматривается сфера S^2 , то надо положить $\chi = \pi/2$. Единичная метрика является Евклидовой, $\eta_{ab} = \delta_{ab}$.

Метрика $g_{\mu\nu}$ является диагональной. Введём ОНБ e_a^μ , базисные вектора которого сонаправлены базисным векторам координатной системы. В таком случае формы смещения оказываются равными

$$\omega^\chi = a d\chi, \quad \omega^\theta = a \sin \chi d\theta, \quad \omega^\phi = a \sin \chi \sin \theta d\phi. \quad (10.121)$$

Для нахождения форм связности надо пользоваться условием их анти-симметрии (10.109) и первым структурным уравнением Картана (10.113) с нулевым тензором кручения. В результате получаем, что ненулевыми матричными элементами являются

$$\begin{aligned} \omega^\theta_\chi &= \cos \chi d\theta &= a^{-1} \cot \chi \omega^\theta, \\ \omega^\phi_\chi &= \cos \chi \sin \theta d\phi &= a^{-1} \cot \chi \omega^\phi, \\ \omega^\phi_\theta &= \cos \theta d\phi &= a^{-1} \csc \chi \cot \theta \omega^\phi. \end{aligned} \quad (10.122)$$

Если мы имеем дело со сферой S^2 , то надо оставить только последнюю строчку. В силу симметрии сферы,

тензор Римана должен быть изотропен и трансляционно инвариантен, что фиксирует его вид с точностью до постоянного множителя K ,

$$R_{abcd} = K (\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}), \quad K = \frac{R}{6} = \frac{1}{a^2}, \quad (10.123)$$

где R — скалярная кривизна. Симметрия по индексам выбрана так, чтобы удовлетворить всем симметриям тензора Римана. Для нахождения константы K мы нашли какую-либо компоненту тензора Римана с помощью второго структурного уравнения Картана (10.113): например,

$$\begin{aligned} 2R^\theta_{\phi\theta\phi} \omega^\theta \wedge \omega^\phi &= 2(d\omega^\theta_\phi + \omega^\theta_\chi \wedge \omega^\chi_\phi) = \\ &= 2 \sin^2 \chi \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \frac{2}{a^2} \omega^\theta \wedge \omega^\phi. \end{aligned} \quad (10.124)$$

Если речь идёт о сфере S^2 , то в первом равенстве работает только первое слагаемое $d\omega^\theta_\phi$, а $\sin \chi = 1$; при этом скалярная кривизна $R = 2/a^2$.

10-6.1.1 Нормальные координаты

Зададимся обратным вопросом: пусть нам известно, что n -мерное пространство изотропно, однородно, имеет локально евклидову метрику и его кривизна постоянна. Можно ли что-то сказать о его глобальной форме?

Если мы выберем ОНБ базис на этом пространстве, то наложенные требования фиксируют тензор кривизна в виде (10.123). Оказывается, что если кривизна положительна, $K = 1/a^2 > 0$, то мы с необходимостью получаем метрику соответствующую сфере S^n радиуса a . Если же кривизна отрицательна, $K = -1/a^2 < 0$, то пространство оказывается в общем случае неограниченным.

Приступим к нахождению метрики во всём пространстве. Это мы будем делать через построение нормальных координат Римана по схеме Пункта 10-5.3. Зададим нормальные координаты Римана x^a и введём связанный с ними ОНБ. Метрика в этом ОНБ имеет евклидову сигнатуру; поэтому здесь мы не делаем различия между верхними и нижними индексами. Поскольку тензор Римана известен во всём пространстве, то уравнения на формы смещения и связности (10.116) могут быть решены во всём пространстве. Продифференцируем по t второе уравнение в (10.116) и исключим форму смещения используя первое уравнение. В результате получим

$$\partial_t^2 \bar{\omega}_{ab} = K(x_a \bar{\omega}_b - x_b \bar{\omega}_a) + K(x_a dx_b - x_b dx_a), \quad (10.125)$$

где $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_{ab} x_b$. Свернув это уравнение с x_b , получим

замкнутое уравнение на $\bar{\omega}_a$:

$$(\partial_t^2 \delta_{ab} + x^2 K P_{ab}) \bar{\omega}_b = -x^2 K P_{ab} dx_b, \quad x^2 = x_b x_b$$

$$P_{ab} = \delta_{ab} - \frac{x_a x_b}{x^2}, \quad \bar{\omega}_a|_{t=0} = \partial_t \bar{\omega}_a|_{t=0} = 0.$$

Решением этого уравнения зависит от знака кривизны.

10-6.1.2 Пространство с положительной кривизной. Сфера.

Предположим сначала, что кривизна положительна, $K = 1/a^2$. Тогда решением для $\bar{\omega}_a$ является

$$\bar{\omega}_a = (\cos(tx/a) - 1) P_{ab} dx_b$$

Сначала подставим это решение в первое уравнение (10.116) на форму смещения, а после результат подставим во второе уравнение на форму связности. В результате получим

$$\bar{\omega}_a = \frac{a \sin(tx/a)}{x} P_{ab} dx_b + \frac{tx_a x_b}{x^2} dx_b, \quad (10.126)$$

$$\bar{\omega}_{ab} = \frac{1 - \cos(tx/a)}{x^2} (x_a dx_b - x_b dx_a)$$

Полагая $t = 1$, получаем формы смещения ω_a и связности ω_{ab} . Теперь можно найти метрику в координатном базисе

$$ds^2 = \omega_a \omega_a = \quad (10.127)$$

§10-7. Криволинейные ортогональные координаты

В этом параграфе мы рассматриваем ортогональные криволинейные координаты, погружённые в трёхмерное евклидово пространство. Обозначим криволинейный координаты ξ^a . Единичные базисные вектора обозначим e_a^i , они обладают условиями ортогональности

$$e_a^i e_b^i = \delta_{ab}, \quad e_a^i e_a^k = \delta^{ik}. \quad (10.128)$$

Метрику g_{ab} , которая диагональна для ортогональных криволинейных координат, представим через коэффициенты Ламе h_a , которые удобны при переходе от частных производных по декартовым координатам к част-

ным производным по криволинейным координатам:

$$dl^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b = \sum_a (h_a d\xi^a)^2, \quad e_a^i \partial_i = \frac{1}{h_a} \partial_a \quad (10.129)$$

Форма связности

$$\omega_{abc} = e_c^k e_a^i \partial_k e_b^i = \frac{1}{h_c} e_a^i \partial_c e_b^i = -\omega_{bac} \quad (10.130)$$

определяет градиент векторных полей:

$$\nabla_a v_b = \frac{1}{h_a} \partial_a v_b + \omega_{bca} v_c \quad (10.131)$$

Часть V ЗАДАЧИ

Глава 11 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§11-1. Математика

• **Задача 1:** Пусть $V^{ik} = \epsilon_{ikl}V^l$. Покажите, что векторное произведение $[v \times V]$ есть то же самое, что

результат действия на вектор v антисимметричной матрицы \hat{V} , $[v \times V] = \hat{V}v$.

§11-2. Преобразование Лоренца, уравнение непрерывности

Инерциальные системы отсчёта

• **Задача 1:** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта одно событие произошло в момент времени 0, и в точке $\{0, 0, 0\}$, а другое событие произошло в момент времени 10 сек и в точке $\{10^{10}_M, 0, 0\}$. С какой скоростью должна двигаться вторая система отсчёта относительно исходной, чтобы в этой новой системе отсчёта эти два события были одновременными? Какое расстояние будет разделять события в новой системе координат?

• **Задача 2:** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта одно событие произошло в момент времени 0, и в точке $\{0, 0, 0\}$, а другое событие произошло в момент времени 100 сек и в точке $\{10^{10}_M, 0, 0\}$. С какой скоростью должна двигаться вторая система отсчёта относительно исходной, чтобы в этой новой системе отсчёта эти два события произошли в одной точке пространства? Какое время будет разделять это события в новой системе координат?

• **Задача 3:** Частица двигалась равномерно и прямолинейно время T со скоростью v . Какое время в процессе её этого движения набегало на её собственных часах?

• **Задача 4:** Найдите матрицу $\|g^{\mu\nu}\|$ (матричные элементы), обратную матрице метрического тензора $\|g_{\mu\nu}\|$.

• **Задача 5:** Может ли квадрат интервала $(\Delta s)^2$, разделяющий два события, быть отрицательным? Если да, приведите пример — то есть пример координат таких двух событий.

• **Задача 6:** В системе отсчёта, которая движется

со скоростью V вдоль Ox лабораторной системы координат, движется частица со скоростью u вдоль этой же оси Ox . С какой скоростью движется частица в лабораторной системе координат? Получить ответ сначала в терминах быстроты, для которой закон сложения скоростей есть просто арифметический закон сложения.

• **Задача 7:** Две частицы движутся друг на встречу другу со скоростями $c/2$, где c — скорость света. С какой скоростью вторая частица приближается к первой в системе координат, где первая частица покоится?

• **Задача 8:** Две частицы движутся в ортогональных направлениях со скоростями $c/2$, где c — скорость света. С какой скоростью вторая частица приближается к первой в системе координат, где первая частица покоится?

Уравнение непрерывности.

• **Задача 9:** Распределение плотности одномерной непрерывной среды

$$\rho(t, x) = \rho_0 + \frac{\rho_1 x}{a} \exp\left(-\frac{x^2 + (v_0 t)^2}{a^2}\right),$$

где параметры распределения $\rho_0 > \rho_1$. Найдите распределение плотности потока $j(t, x)$ и скорости движения $v(t, x)$ полагая, что на далёких расстояниях поток отсутствует, $j \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Нарисуйте профили полученных полей в пределе $\rho_1 \ll \rho_0$ для срезов $t = 0$ и $x = 0$.

• **Задача 10:** Электрический заряд может двигаться вдоль прямой. Известно, что плотность электрического тока вдоль прямой равна $J \exp(-(x - vt)^2/a^2)$, где J, v, a — некоторые константы. Известно также, что в

далёком прошлом погонная плотность заряда в каждой фиксированной точке прямой была равна нулю. Найдите погонную плотность электрического заряда как функцию времени и координат. Постройте график зависимости плотности от координаты в нулевой момент времени и в момент времени $t = 3a/v$. Считая среду однокомпонентной, запишите связь между полностью заряда, плотностью тока и локальной скоростью движения зарядов; найдите скорость движения зарядов.

• **Задача 11:** По кольцу электро нейтрального провода радиуса a , покоящемуся в лабораторной систе-

ме координат K , течёт ток I . Погонная плотность свободных электронов, участвующих в перемещении заряда по проводу, равна ρ . Рассмотрим систему координат K' , движущуюся со скоростью v , лежащей в плоскости кольца провода. Считая, что все свободные электроны в элементе провода движутся с одной и той же скоростью, найти распределение погонной плотности нескомпенсированного заряда $\delta\rho'$ вдоль провода, которая будет наблюдаться в движущейся системе координат K' . Рассмотреть предельный случай $v \gg u$, где u — скорость движения электронов в лабораторной системе координат.

§11-3. Разные задачи

• **Задача 1:** Нерелятивистская заряженная частица совершает колебания в одномерном потенциальном поле $U(x)$ с периодом T_0 . В некоторый момент включается модулированное по амплитуде быстропеременное электрическое поле $E(x) \cos(\omega t)$, $\omega \gg 1/T_0$. Произвести усреднение по быстрым осцилляциям электри-

ческого поля и получить уравнение, которое описывало бы усреднённое медленное движение частицы (ведущего центра) в результирующем поле. Оценить пределы применимости описания на основе усреднённого уравнения. Получить закон движения частицы для случая $U_0 = -\kappa x^2/2$, $E(x) = \alpha x$.

§11-4. Столкновение и распад частиц

• **Задача 1:** Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз, т.е. $E = \alpha E_{th}$, E — энергия протонов, а E_{th} — их пороговая энергия. Однако из-за неполадок один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$.

• **Задача 2:** π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Найти минимальный угол θ_{min} разлёта γ -квантов в системе отсчёта, в которой скорость π^0 -мезона равна v .

• **Задача 3:** Распад π -мезонов происходит на нейтрино и на μ -мезон (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса μ -мезона ≈ 105 МэВ, нейтрино следует считать безмассовой частицей). В системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит статистически изотропно. В лабораторной системе координат π -мезон движется с энергией 6 ГэВ в Ox -направлении.

Определить энергетический спектр, максимальную и среднюю энергии и угловое распределение вылетающих нейтрино в лабораторной системе координат.

• **Задача 4:** Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью V . Найти закон от-

ражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

• **Задача 5:** Зеркало движется поступательно под углом $\pi/4$ к собственной поверхности со скоростью V . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

• **Задача 6:** Доказать, что законами сохранения энергии и импульса запрещена аннигиляция пары электрон — позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ -кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов. Доказать также, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно.

• **Задача 7:** Покоящаяся частица массы M , находящаяся в возбуждённом состоянии, испускает γ -квант, после чего её масса покоя становится равной m . Чему равна кинетическая энергия частицы после испускания кванта?

§11-5. Электростатика

• **Задача 1:** Используя выражение для Максвелловского тензора напряжений, посчитайте силу, действующую на обкладку конденсатора (расстояние между пластинами d , площадь пластин S , заряд пластин Q)

• **Задача 2:** Рассмотрите функции углов, являющиеся произведениями компонент единичного вектора:

$$n_i, n_i n_k, n_i n_k n_l, n_i n_k n_l n_n, n_i n_k n_l n_n n_j.$$

Проведите усреднение этих функций по единичной сфере $n_i n_i = 1$; это есть способ выделения гармоник $l = 0$. Используя линейные комбинации первых трёх функций, составьте функции, пропорциональные сферическим гармоникам порядков $l = 1, 2, 3$; делать это надо из соображения, что при каждом фиксированном l тензор соответствующего ранга должен быть симметричным по всем индексам и давать нуль при свёртке по паре индексов. Убедитесь, что результат совпадает с табличным Olver и др., 2010.

Дипольный момент • **Задача 3:** Однородно поляризованный шар массы M и радиуса a помещён в однородное электрическое поле \mathbf{E} . Дипольный момент шара равен \mathbf{d} , в начальный момент времени шар был неподвижен, а вектор \mathbf{d} составлял малый угол φ_0 с вектором \mathbf{E} . Определить дальнейшее движение шара.

• **Задача 4:** Тело массы m , обладающее фиксированным во времени дипольным моментом, может без трения двигаться не вращаясь вдоль прямого стержня. Дипольный момент тела равен d , он направлен поперёк стержня. На расстоянии L от стержня, большом по сравнению с размерами тела, помещён точечный заряд Q . Как должен быть ориентирован дипольный момент, чтобы при небольшом отклонении положения тела от максимального сближения с зарядом оно совершало малые колебания. Чему равен период этих колебаний?

• **Задача 5:** Электрическое поле в системе зарядов имеет распределение $\mathbf{E} = (3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d})re^{-4r/a}$, где \mathbf{d} — постоянный вектор, a — константа и $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Найдите распределение заряда в системе; изобразите его на рисунке. Чему равен полный заряд системы?

Квадрупольный момент • **Задача 6:** Два отрицательных заряда $-q$ расположена на концах отрезка длиной a , а в центре этого отрезка находится заряд $2q$. Найдите электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$ от неё.

• **Задача 7:** Положительный заряд $+Q$ распределён равномерно по длинному цилиндру длиной L и диаметром $2a$, $L \gg a$, а компенсирующий его отрицательный заряд $-Q$ находится в центре цилиндра. Найдите электростатический потенциал этой системы зарядов

на расстояниях $r \gg L$ от неё. Нарисуйте силовые линии электрического поля в плоскости, содержащей ось цилиндра.

• **Задача 8:** Четыре точечных заряда Q расположены в вершинах квадрата со стороной a . В центре этого квадрата расположен компенсирующий заряд $-4Q$. Найдите поле этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$. Нарисуйте распределение электрического поля в плоскости, содержащей компенсирующий заряд и перпендикулярной плоскости, в которой расположены все заряды.

• **Задача 9:** Дан равномерно заряженный эллипсоид с полным зарядом Q и полуосями a, b и c , в центре эллипсоида помещён компенсирующий точечный заряд $-Q$.

• Найдите квадрупольный момент такой системы зарядов.

• Найти электростатический потенциал на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд $-Q$. Как с удалением от системы убывает потенциал и электрическое поле?

• Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости Oxy в случае, когда $2c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$.

• Как изменится электростатический потенциал на далёких расстояниях, если компенсирующий точечный заряд сместить вдоль первой полуоси a на поверхность эллипсоида?

• **Задача 10:** Металлический шар радиуса a разрезали пополам и половинки разнесли на расстояние, малое по сравнению с его радиусом. После этого с одной половины на другую перенесли заряд такой, что разница потенциалов между половинами стала равна $2\varphi_0$. Определите дипольный момент системы.

Сферически-симметричный электро-нейтральный атом

• **Задача 11:** Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следующую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, $a \sim 10^{-8}$ см — борковский радиус, а первое и второе слагаемые соответствуют ядру и электрону. Найдите электростатический потенциал такой системы. Проверьте полученный результат, отдельно рассмотрев асимптотики $r \ll a$, на которой

электрическое поле должно определяться в основном ядром, и $r \gg a$, на которой система должна выглядеть как почти электро нейтральная. Найдите электростатическую энергию взаимодействия электронного облака с ядром.

• **Задача 12:** Найти поправку к этой энергии, положив ядро равномерно заряженным шаром радиуса $r_{\text{я}} \sim 10^{-13}$ см.

Двумерная решётка зарядов • **Задача 13:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 J_0(r_{\perp}/a)/(1 + r_{\perp}^2/L^2)$, где $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $J_0(\zeta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Параметры распределения $L = 1$ м, $a = 1$ мм. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указания:

- i) Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в плоскости Oxy , оставив координату z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля
- ii) на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $(1 + r_{\perp}^2/L^2)^{-1}$ в распределении поверхностного заряда.
- iii) функция Бесселя удовлетворяет уравнению $(\partial_x^2 + \partial_y^2)J_0(r_{\perp}/a) = -a^{-2}J_0(r_{\perp}/a)$
- iv)

$$\int d\zeta \frac{\zeta J_0(\zeta)}{1 + (\zeta/\zeta_0)^2} = \zeta_0^2 K_0(\zeta_0) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta_0^{3/2} \exp(-\zeta_0).$$

при $\zeta_0 \gg 1$.

• **Задача 14:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(x/a) \cos(y/a)/(1 + x^2/L^2)/(1 + y^2/L^2)$. Параметры распределения $L = 1$ м, $a = 1$ мм. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указания:

- i) Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в плоскости Oxy , оставив координату z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля
- ii) на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $((1 + x^2/L^2)(1 + y^2/L^2))^{-1}$ в распределении поверхностного заряда.

• **Задача 15:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(x/a)/(1 + x^2/L^2)/(1 + y^2/L^2)$. Параметры распределения $L = 1$ м, $a = 1$ мм. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указание:

- i) Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в направлении Ox , оставив координаты y, z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля
- ii) на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $1/(1 + x^2/L^2)$ в распределении поверхностного заряда.

§11-6. Магнитостатика

• **Задача 1:** Используя выражения для Максвелловского тензора напряжений, найдите поверхностную силу, действующую на обмотку катушки индуктивности. Длина катушки L , её радиус a , количество витков N , сила тока I .

11-6.0.1 Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь со стороны внешнего магнитного поля

Сила Лоренца \mathbf{F} , действующая на диполь, возникает только если магнитное поле имеет неоднородность в пространстве. Действительно, вклад в силу \mathbf{F} , происходящий от однородной части магнитного поля, равен

нулю, поскольку интеграл по пространству от плотности тока \mathbf{j} для статической системы токов равен нулю. Тогда учтём в магнитном поле изменение в пространстве в главном приближении, положив

$$\mathbf{B}^l(\mathbf{r}) = \mathbf{B}^l + r^m \partial_m \mathbf{B}^l + \dots,$$

где в правой части равенства магнитное поле \mathbf{B}^l и его градиент $\partial_m \mathbf{B}^l$ должны браться в точке, находящейся внутри системы токов, от этой же точки должен отсчитываться радиус-вектор \mathbf{r} . Теперь получаем для компонент полной силы Лоренца (3.48), действующей на всю

систему

$$\begin{aligned} F^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]^i = \epsilon^{ikl} \partial_m B^l \int d^3\mathbf{r} \frac{j^k r^m}{c} = \\ &= \partial_i (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) B^i, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где мы воспользовались выкладками уравнения (6.34), уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а затем равенством

$$0 = [\boldsymbol{\mu} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] = \operatorname{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

основывающемся на уравнении Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Видно соответствие между выражениями для сил, действующих на магнитный и электрический диполи, см. (11.1) и (6.25).

Момент сил \mathbf{K} , действующий на магнитный диполь, происходит от однородной части магнитного поля,

$$\begin{aligned} K^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]]^i = B^k \int d^3\mathbf{r} \frac{r^k j^i}{c} = \\ &= \epsilon_{kil} \mu^l B^k = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}]^i. \end{aligned} \quad (11.2)$$

§11-7. Электромагнитные волны

• **Задача 1:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel O_x$. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, V, 0\}$. Найдите магнитное поле волны в системе K' .

Решение: Согласно (4.56), электромагнитное поле бегущей линейно поляризованной монохроматической волны представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k_\mu x^\mu + \varphi_0.$$

Фаза φ является релятивистским инвариантом, а действительные вектора \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 преобразуются по закону (4.6). Таким образом, в новой системе координат

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k'_\mu x'^\mu + \varphi_0.$$

Из условия задачи следует, что $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{V}$. Поэтому

$$B_0^y = B_0^z = E_0^x, \quad B_0^x = \gamma \frac{V}{c} E_0^x, \quad (11.3)$$

где мы воспользовались (4.53). Волновой вектор в системе K' согласно (4.67) имеет компоненты

$$\mathbf{k}' = \{0, -\gamma V k/c, k\}.$$

Как и должно быть, $\mathbf{k}' \perp \mathbf{B}'_0$. Таким образом, определив \mathbf{B}'_0 и \mathbf{k}' , мы полностью определили поле \mathbf{B}' . В новой

Раскрывая двойное векторное произведение мы воспользовались тем, что одно из них равно нулю вследствие антисимметричности тензора μ^{ik} (6.34).

11-6.1 Постоянные электрическое и магнитное поля

• **Задача 2:** Вдоль прямого длинного равномерно заряженного провода с погонной плотностью заряда ρ течёт ток I . Найти систему координат K' , в которой есть только магнитное или только электрическое поле. При каком соотношении ρ и I это сделать невозможно? Найдите поле в системе координат K' (в случаях, когда она существует).

• **Задача 3:** По плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда ρ , течёт однородный поверхностный ток \mathbf{i} . Найти систему координат K' , в которой есть только магнитное или только электрическое поле. При каком соотношении ρ и $|\mathbf{i}|$ это сделать невозможно? Найдите поле в системе координат K' (в случаях, когда она существует).

системе координат волна по-прежнему линейно поляризована.

• **Задача 2:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel O_x$. Постройте тензор энергии-импульса для такой волны, усреднённый по периоду колебаний. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, 0, V\}$. Запишите преобразование, связанное с переходом между системами отсчёта $K \rightarrow K'$, для поля волны и для тензора энергии-импульса, и покажите, что они дают соответствующие друг другу результаты.

Решение: Согласно (4.55, 4.59), тензор энергии-импульса плоской волны равен

$$T^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi k^2} k^\mu k^\nu = \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В движущейся системе координат

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]/c) = \gamma(1 - V/c)\mathbf{E}$$

согласно (4.6) и (4.53). Волновой вектор не изменяет своего направления в системе K' , поскольку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}$. Его абсолютное значение в K'

$$k' = \gamma(1 - V/c)k.$$

Если применить преобразование Лоренца непосредственно к тензору энергии-импульса,

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda'^{\mu}_{\sigma} \Lambda'^{\nu}_{\zeta} T^{\sigma\zeta} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi k^2} \Lambda'^{\mu}_{\sigma} k^{\sigma} \Lambda'^{\nu}_{\zeta} k^{\zeta}, \quad (11.4)$$

то пользуемся преобразованием для волнового вектора; тогда получаем, что в новой системе координат тензор энергии-импульса приобретает множитель $\gamma^2(1 - V/c)^2$. Если применять преобразование к электрическому полю и через него выражать $T^{\mu\nu}$, то, как и должно быть, получаем тот же самый фактор.

• **Задача 3:** Определите тензор энергии-импульса для стоячей линейно-поляризованной монохроматической электромагнитной волны (мгновенное значение и значение, усреднённое по периоду осцилляций). Предполагая, что стоячая волна ограничена плоскими зеркалами, найдите силу, с которой расталкиваются зеркала. Амплитуда колебаний электрического поля в волне равна E_0 .

Указание: Убедитесь, что давление может быть вычислено как сумма T^{zz} -компонент тензора энергии импульса двух бегущих волн (4.59) от и к поверхности зеркала с амплитудами $E_0/2$, где z — направление по нормали к зеркалу.

• **Задача 4:** Рассмотрите распространение гауссового аксиально симметричного линейно поляризованного монохроматического пучка (частота ω , направление распространения вдоль оси Oz). Гауссов пучок имеет плоский фронт на выходе испускающего его устройства, так что при $z = 0$ характеризуется поперечным профилем амплитуды волны $\exp(-\rho^2/2\sigma_0)$ с действительным σ_0 , где ρ — квадрат поперечной координаты. Сечение пучка велико по сравнению с квадратом длины волны, то есть величина $\sigma_0 \gg \lambda^2$.

Решение: Напишем уравнение на какую-либо компоненту поля. Например, выберем A^x -компоненту, подразумевая поперечную калибровку. Параметризуем компоненту в виде $A^x = \exp(-i\omega t + ikz)f$, где известно, что огибающая

$$f(x, y, z = 0) = f_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 = \rho^2}{2\sigma_0}\right).$$

Волновое уравнение

$$\square A^x \approx e^{-i\omega t + ikz} (-2ik\partial_z + \Delta^\perp)f = 0.$$

Вклад, пропорциональный второй производной ∂_z^2 был опущен, поскольку, как это будет видно ниже, являет-

ся малым по параметру $1/k\sqrt{\sigma}$. Решение получившегося двумерного уравнения Шредингера (в котором роль времени играет координата z) является

$$f = f_0 \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma}\right), \quad \sigma = \sigma_0 - iz/k.$$

Отметим, что на расстояниях $z \gg k\sigma_0$ комплексный параметр σ пропорционален z . Это соответствует тому, что на таких, далёких, расстояниях, пучок становится сферическим, в котором амплитуда волны убывает обратно пропорционально расстоянию.

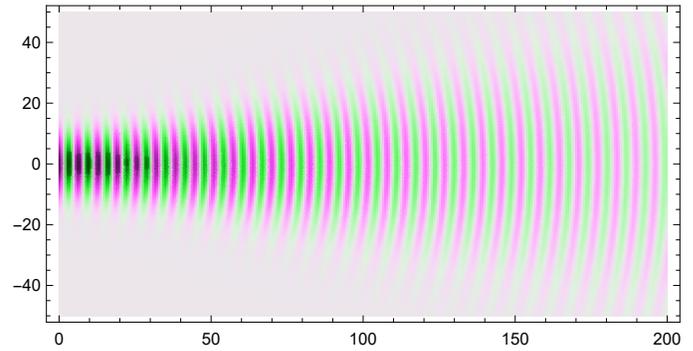


Рис. 11.1 Параметры пучка $k = 1$, $\sigma_0 = 49$. Зелёный и малиновый цвета соответствуют отрицательным и положительным значениям электрического поля.

Для того, чтобы найти ширину пучка, надо проследить профиль квадрата модуля амплитуды, определяющий величину потока энергии:

$$|f|^2 = \frac{f_0}{1 + z^2/(k^2\sigma_0^2)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma_0 + z^2/k^2\sigma_0}\right).$$

Поперечный радиус пучка $\Delta\rho$ естественно определить как расстояние до оси, на котором интенсивность падает в e раз. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \sqrt{\sigma_0 + \frac{z^2}{k^2\sigma_0}} \rightarrow \frac{z}{k\sqrt{\sigma_0}}, \quad z \gg k\sigma_0, \\ \delta\phi \rightarrow \frac{\Delta\rho}{z} &= \frac{1}{k\sqrt{\sigma_0}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma_0}}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Угол $\delta\phi$ есть угол расширения пучка на расстояниях $z \gg k\sigma_0$.

§11-8. Излучение электромагнитных волн

• **Задача 1:** Показать, что в волновой зоне при Лоренцевой калибровке потенциалов скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})$.

11-8.1 Дипольное и квадрупольное излучения

• **Задача 2:** Заряд q движется с постоянной скоростью v вдоль окружности радиуса a . Чему равна интенсивность излучения I ? Введите подходящую систему координат и опишите поляризацию сферической волны, уходящей на бесконечность от заряда.

• **Задача 3:** Простейшая модель излучения нейтронных звёзд (пульсаров) — это модель наклонного ротора: шар, имеющий магнитный момент μ , вращается в вакууме с угловой скоростью ω вокруг оси, составляющей угол φ с направлением μ . Вычислить угловое распределение $dI/d\Omega$ и полную интенсивность I излучения, усреднённые по времени.

• **Задача 4:** Два электрических диполя колеблются вдоль линий по гармоническому закону с одинаковой частотой ω , но сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти магнитное поле \mathbf{B} в волновой зоне, угловое распределение $(dI/d\Omega)$ и полную интенсивность I излучения.

• **Задача 5:** Два одноименных заряда $(e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0)$ испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 \neq e_2/m_2$.

11-8.1.1 Магнито-дипольное излучение

• **Задача 6:** Однородно заряженный шарик, имеющий массу m и заряд q , вращается с угловой скоростью $\omega \ll c/a$, где a — его радиус. Шарик находится в однородном магнитном поле. Ось вращения составляет угол ϑ с направлением магнитного поля. Найдите угловую диаграмму интенсивности излучения. Определите поляризацию волны, уходящей в направлении вдоль магнитного поля. Определите полную интенсивность излучения.

• **Задача 7:** Нерелятивистский электрон пролетает между обкладок конденсатора, параллельно его обкладкам и через его центр. Заряд на обкладках конденсатора настолько мал, что траектория электрона является почти прямой линией. Радиус круглых обкладок

конденсатора R , скорость электрона v . Найдите излученную электроном энергию.

Решение:

11-8.1.2 Квадрупольное излучение

• **Задача 8:** Два одноименных заряда $(e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0)$ испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$.

• **Задача 9:** Два одинаковых заряда q совершают одинаковые гармонические колебания вдоль некоторого направления (одинаковые амплитуда a , частота ω и положение равновесия), но смещённые по фазе на пол периода. Движение зарядов нерелятивистское. Найдите интенсивность излучения такой системы.

• **Задача 10:** Определить частоту ω_r света, рассеянного движущимся зарядом со скоростью v , в зависимости от направления рассеяния. Волновой вектор рассеивающейся световой волны равен \mathbf{k} . Считать, что в системе отсчёта, где электрон покоится, энергия квантов света (фотонов) мала по сравнению с его массой покоя.

• **Задача 11:** Электрический диполь с амплитудой момента p_0 и частотой ω находится на расстоянии a от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор p_0 параллелен плоскости). Найти электромагнитное поле E, H на расстояниях $r \gg \lambda$ и угловое распределение излучения $dI/d\Omega$.

11-8.1.3 Запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта

• **Задача 12:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам), при этом её ускорение меняется линейно по лабораторным часам, будучи равным нулю в начале процесса торможения. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

• **Задача 13:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам), при этом её ускорение меняется линейно по лабораторным часам, будучи равным нулю в конце процесса торможения. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

• **Задача 14:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от

скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам $-\tau < t_r < 0$, t_r — момент испускания сигнала), при этом её скорость меняется по закону $v = -v_0 \sin(\pi t_r / (2\tau))$. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

11-8.2 Когерентное излучение

• **Задача 15:** Магнитный $\boldsymbol{\mu}$ и электрический диполь \boldsymbol{d} прикреплены к точечному объекту и колеблются с частотой ω , $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \cos(\omega t)$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Чему равна сила (её среднее по периоду колебаний значение), необходимая для удержания в покое этого объекта? Сначала найдите ответ с точностью до численного множителя путём установления его симметрии и размерности. Затем путём точного исследования задачи установите неизвестный численный коэффициент. Проведите численный расчёт, если полная мощность излучения равна 1 ГВт (мощность генерации одного атомного реактора), направление диполей ортогональны $\boldsymbol{\mu}_0 \perp \boldsymbol{d}_0$, $\mu_0 = d_0$ и нет задержки фазы, $\varphi = 0$.

Если $\varphi = 0$, такой источник излучения называется *элементарным излучателем Гюйгенса (Huygens' radiation source)*.

Решение: Из соображений симметрии следует, что средняя по времени сила

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle \propto \frac{\omega^4}{c^4} [\boldsymbol{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0],$$

где множитель мы подобрали из соображений размерности. Действительно, поскольку $\boldsymbol{\mu}$ — аксиальный вектор, а \boldsymbol{d} — полярный, то \boldsymbol{F} является полярным вектором, как и должно быть.

Для того, чтобы найти численный коэффициент и множитель, зависящий от фазы, приступим к вычислениям. Посчитаем, какой импульс уносится в единицу времени производимой системой диполей излучением. За время dt образуется сферический слой излучения толщиной $dr = c dt$ (и радиусом r). Импульс этой порции излучения $d\boldsymbol{P}$ есть интеграл по слою от пространственной плотности импульса \vec{p} , см. (3.19). Плотность импульса пропорциональна плотности потока энергии \boldsymbol{S} , см. (3.20). Таким образом, сила \boldsymbol{F} , которую надо прикладывать к излучающей системе, равна

$$\boldsymbol{F}(t - r/c) = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = r^2 dr \int d\omega \frac{\boldsymbol{S}}{c^2}.$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла. Полное электромагнитное поле является суперпозицией вкладов от электрического и магнитного диполя, например $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_d + \boldsymbol{E}_\mu$. Для вычисления силы \boldsymbol{F} в векторе Умова-Пойнтинга \boldsymbol{S} (4.32b) надо оставить только интерференционные члены, поскольку чисто электро-дипольное или магнито-дипольное излучение не сообщает излучающей системе

импульс:

$$\boldsymbol{S} \rightarrow \frac{c([\boldsymbol{E}_d \times \boldsymbol{B}_\mu] + [\boldsymbol{E}_\mu \times \boldsymbol{B}_d])}{4\pi},$$

Для полей имеем, выделяя в (6.50,6.51) и (6.61) части, соответствующие уходящим волнам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{[\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{d}}]]}{c^2 r} + \frac{[\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r}, \\ \boldsymbol{B} &= -\frac{[\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{d}}]}{c^2 r} + \frac{[\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r}. \end{aligned}$$

В результате получаем, что мгновенное значение силы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \frac{2}{c^4} \int \frac{d\omega}{4\pi} [[\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{d}}] \times [\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]] = \\ &= \frac{2\omega^4}{3c^4} [\boldsymbol{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

(два ненулевых интерференционных вклада в вектор Умова-Пойнтинга после использования преобразований векторной алгебры оказываются равными друг другу). Сила, усреднённая по времени, равна

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = \frac{\omega^4}{3c^4} [\boldsymbol{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos \varphi. \quad (11.6)$$

Вставить рисунок с угловой зависимостью интенсивности излучения в единицу телесного угла

• **Задача 16:** Электродипольный и магнито-дипольный моменты некоторой ограниченной системы зарядов изменяются со временем по закону $p(t) = p_0 \exp(-t^2/\tau^2)$, $\mu(t) = \mu_0 \exp(-t^2/\tau^2)$, где p_0 , μ_0 , τ — постоянные величины. Вычислить спектральную плотность излучения $dI_\omega/d\omega$.

11-8.3 Торможение излучением

• **Задача 17:** Нерелятивистский электрон движется по окружности в постоянном однородном магнитном поле \boldsymbol{B} . Найти закон изменения его кинетической энергии во времени $\mathcal{E}(t)$, учтя производимое электроном излучение. Найти траекторию электрона.

• **Задача 18:** Если считать, что процесс аннигиляции электрона и позитрона запрещён, то можно рассмотреть позитроний — связанное состояние электрона и позитрона. Рассмотрим классическое движение этих частиц и пусть частицы движутся по круговым орбитам. Опишите дальнейшее движение частиц с учётом производимого системой излучения.

• **Задача 19:** Нерелятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного

точечного заряда Ze по круговой орбите. Найти уравнение траектории частицы с учётом производимого ею излучения.

• **Задача 20:** Заряд, связанный в гармоническом потенциале, отклонён от положения равновесия на расстояние a и зафиксирован в этом положении. В некоторый момент заряд отпускают. Определите спектр излучения заряда к моменту, когда он уже практически остановился (амплитуда колебаний стала мала по сравнению с исходной). Масса заряда m , частота собственных колебаний ω_0 .

• **Задача 21:** Система движущихся зарядов представляет собой гармонически колеблющийся точечный диполь. Пользуясь соображениями симметрии и размерности, определите с точностью до числового коэффициента момент сил в единицу времени, который уносит с собой излучение, производимое диполем.

• **Задача 22:** Диполь $\mathbf{d} \parallel Oz$ колеблется с частотой ω , так что $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$. На расстоянии $L \gg \lambda$ в направлении оси Oz (где λ – соответствующая длина волны излучения) находится другой диполь \mathbf{p} , колебания которого описываются уравнением $\partial_t^2 \mathbf{p} + \omega^2 \mathbf{p} = (e^2/m)\mathbf{E}$, где e и m – эффективные заряд и масса диполя, а \mathbf{E} – полное поле в точке положения диполя. Найдите амплитуду и фазу колебаний второго диполя. Указание: разделите внешнее поле \mathbf{E} в уравнении движения второго диполя на поле первого диполя и поле самого второго диполя; действие последнего даёт силу радиационного трения.

Решение: Условие $L \gg \lambda$ означает, что второй диполь находится в волновой зоне первого излучающего диполя. С другой стороны, поле уходящих волн в направлении Oz равно нулю. Это означает, что в (6.50) следует удерживать среднее слагаемое, которое было бы подавлено по сравнению с последним, если бы диполь \mathbf{p} находился не на оси Oz . Итак, поле диполя \mathbf{d} в месте положения диполя \mathbf{p} есть

$$\mathbf{E}_d = \frac{2\dot{\mathbf{d}}}{cL^2}$$

Таким образом, уравнение колебаний второго диполя есть

$$\ddot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_d + \frac{e}{m} \mathbf{F}_{\text{Лф}} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{d}}}{mcL^2} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{p}}.$$

В правой части мы учли, что на диполь \mathbf{p} действует не только поле диполя \mathbf{d} , но и произведённое им самим поле, действие которого приводит к появлению лоренцевской силы трения, см. (6.97). Представим \mathbf{d} и \mathbf{p} в виде комплексных амплитуд,

$$\mathbf{d} = \text{Re}(\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{p} = \text{Re}(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$$

Тогда уравнение на комплексную амплитуду \mathbf{p}

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2ie^2\omega^3}{3mc^3}\right) \mathbf{p}_0 = -\frac{2ie^2\omega}{mcL^2} \mathbf{d}_0.$$

В частности, если собственная частота второго диполя совпадает с частотой первого диполя, $\omega_0 = \omega$, то

$$\mathbf{p} = \frac{3c^2}{\omega^2 L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) \quad (11.7)$$

11-8.4 Излучение релятивистских частиц

• **Задача 23:** Для релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле, найдите закон изменения его энергии и радиуса его орбиты со временем за счёт потерь на излучение. Направление движения электрона перпендикулярно магнитному полю.

• **Задача 24:** Две ультра-релятивистские частицы с противоположными электрическими зарядами пролетают мимо друг друга на прицельном расстоянии $\rho \gg r_0$ (r_0 – классический радиус электрона), так что их траектории движения мало отличаются от прямых. Оценить время (в лабораторной системе координат и в системе координат одной из частиц), на котором одна частица на другую действует посредством кулоновской силы существенно (то есть порядка пиковой силы). Оцените полную излучённую частицами энергию.

Решение: По условию в главном приближении частицы движутся равномерно и прямолинейно. Поэтому для определения электрического поля, действующего со стороны одной частицы на другую, надо пользоваться выражением (4.79). Выберем декартову систему координат с осью Ox , направленной по движению частиц. Траектории частиц лежат в плоскости Oxy . Траектории частиц $\{x_1(t), y_1(t)\}$ и $\{x_2(t), y_2(t)\}$ суть

$$x_1 = vt, \quad y_1 = -\rho/2, \quad x_2 = -vt, \quad y_2 = \rho/2.$$

В терминах (4.79)

$$\mathbf{r} - \mathbf{z}(t) = \{2vt, \rho, 0\}, \quad \sin^2 \theta_t = \frac{\rho^2}{4v^2 t^2 + \rho^2},$$

поэтому

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)| \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t} \approx \frac{1}{\gamma} \sqrt{4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2},$$

где мы воспользовались тем, что $v^2/c^2 = 1 - 1/\gamma^2$ и пренебрегли малыми по $1/\gamma$ поправками. Теперь можно записать полное выражение (4.80) для электромагнитного поля, действующего со стороны частицы №1 на частицу №2

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{2vt, \rho, 0\},$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{0, 0, \rho v/c\},$$

мы добавили выражение (4.80) для определения магнитного поля. Из этих выражений следует, что время

действия δt электромагнитного поля в лабораторной системе координат оценивается как

$$\delta t \sim \frac{\rho}{2\gamma c}.$$

В системе отсчёта K' , движущейся со скоростью $-v$ (почти сопровождающей частицу №2), γ -фактор для частицы №1 равен

$$\gamma' = \gamma^2(1 + v^2/c^2) \approx 2\gamma^2,$$

что можно получить, например, возведя матрицу лоренцевского буста (2.23) в квадрат. Выражения для координат частиц и электрического поля, действующего со стороны частицы №1 на частицу №2, переписываются в аналогичном виде

$$x_1 = v't', \quad y'_1 = -\rho/2, \quad x'_2 = 0, \quad y_2 = \rho/2,$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma' e}{(\gamma'^2 c^2 t'^2 + \rho^2)^{3/2}} \{v't', \rho, 0\},$$

Таким образом, время действия поля частицы №2 на частицу №1 оценивается, соответственно, как

$$\delta t' \sim \frac{\rho}{\gamma' c} \sim \frac{\delta t}{\gamma}.$$

Теперь оценим энергию, излучённую второй частицей. Интенсивность производства энергии излучения W одна и та же во всех системах отсчёта, см. (6.95). Её проще найти в системе K' , где частица №2 всегда остаётся нерелятивистской:

$$W = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3} = \frac{2e^4 (E'^y)^2}{3c^3 m^2}$$

где мы учли только y -компоненту ускорения $a'^y = eE'^y/m$, поскольку x -компонента электрического поля относительно мала как $1/\gamma'$: действительно, в выражении для \mathbf{E}' вследствие знаменателя $c|t'| \lesssim \rho/\gamma'$, при больших по модулю значениях t' знаменатель делает полное электрическое поле малым. Пиковые значения электрического поля и мощности равны

$$E'_{\max} = \frac{\gamma' e}{\rho^2}, \quad W_{\max} = \frac{2e^6 \gamma'^2}{3c^3 \rho^4} = \frac{8e^6 \gamma^4}{3c^3 \rho^4}.$$

В итоге получаем, что оценкой для полной излучённой энергии обоими частицами в лабораторной системе координат является

$$E_{\text{rad}} \sim W_{\max} \delta t \sim \frac{\gamma^3}{(mc^2)^2} \left(\frac{e^2}{\rho}\right)^3. \quad (11.8)$$

Проверим то, что частица №2 в системе K' в самом деле остаётся нерелятивистской. Действительно, скорость частицы №2 после действия со стороны частицы №1 — т.е. интеграл от y -компоненты ускорения — оценивается как

$$\frac{1}{c} \int dt' a'^y \sim \frac{\delta t' e E'_{\max}}{mc} \sim \frac{e^2}{\rho mc^2} = \frac{r_0}{\rho} \ll 1.$$

Кроме того, за время пролёта частицы №1 частица №2 сместится на расстояние, малое по сравнению с исходным прицельным расстоянием ρ . Действительно, отношение смещения к прицельному расстоянию

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{(\delta t')^2 a'^y}{\rho} \sim \frac{1}{\gamma'} \frac{r_0}{\rho} \ll 1. \quad (11.9)$$

Глава 12

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§12-1. Движение частицы в однородном поле

• **Задача 1:** Описать движение частицы, имеющей массу m и заряд e , в однородном магнитном поле \mathbf{B} .

• **Задача 2:** Описать движение частицы, имеющей массу m и заряд e , в однородном электрическом поле \mathbf{E} .

Скрещенные поля Если электрическое и магнитное поля ортогональны друг другу, так что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, то такие поля называются *скрещенными*.

Второй (псевдо)-инвариант электромагнитного поля (4.10) для скрещенных полей равен нулю, $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Это означает, что существует система координат (назовём её K'), в которой одно из полей обращается в нуль. Из уравнений преобразования электромагнитного поля (4.6) можно усмотреть, что эта система должна двигаться в направлении Oy . Какое именно поле равно нулю в этой системе отсчёта, определяет знак первого интеграла электромагнитного поля (4.10) $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$. В указанной специальной системе координат исчезает то поле, которое меньше по амплитуде в лабораторной системе координат. В этих двух случаях частица испытывает движения разного типа, поэтому два случая следует разбирать отдельно.

Выберем декартову систему отсчёта, в которой магнитное поле направлено вдоль третьей оси, $\mathbf{B} \parallel Oz$, а электрическое поле направлено вдоль первой оси, $\mathbf{E} \parallel Ox$; будем считать, что \mathbf{B} и \mathbf{E} — z и x -компоненты магнитного и электрического полей соответственно.

12-1.1 Дрейф частицы в скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях

• **Задача 3:** Описать движение частицы, имеющей массу m и заряд e , в однородных скрещенных магнитном \mathbf{B} и электрическом \mathbf{E} полях, когда $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Магнитное поле сильнее электрического, так что $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$.

12-1.1.1 Дополнительные задачи

• **Задача 4:** Частица массы m и заряда e движется в параллельных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях; электрическое поле слабое, так что $E \ll B$. Ось

координат Oz направим вдоль этих полей. Начальная скорость частицы лежит в плоскости Oxy и по модулю равна v_0 . Найти дальнейшее движение частицы. В частности определить, как часто на малых и больших временах проекция скорости частицы на плоскость Oxy восстанавливает своё направление, а сама частица совершает (незамкнутые) обороты.

Указания:

- i) Записать уравнение движения по оси Oz и уравнение на изменение полной кинетической энергии частицы: при этом уравнение движения записать через проекции импульса p^z и p^\perp на ось Oz и на плоскость Oxy соответственно (через них выразить и γ -фактор). Начальную скорость считать произвольной, не обязательно малой по сравнению со скоростью света. В результате, в частности, станет известной зависимость γ -фактора от времени.
- ii) Записать уравнение движения частицы в плоскости Oxy , представив проекцию её скорости на плоскости Oxy в виде $\mathbf{v}^\perp = v^\perp \mathbf{e}^\perp$, где \mathbf{e}^\perp — единичный вектор. Направление этого вектора описывается углом φ между \mathbf{e}^\perp и осью Oz . Изменение этого угла на 2π соответствует одному обороту. Запишите уравнение на динамику угла φ и исследуйте его решение на малых и больших временах.

• **Задача 5:** Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем — так, что изменение поля за период движения частицы мало по сравнению с самим значением поля. Доказать, что величина v_\perp^2/B остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом), где v_\perp есть проекция скорости частицы на плоскость нормальную к полю. Показать, что адиабатический инвариант пропорционален величине магнитного диполя, создаваемого движением частицы по окружности; связать вектор магнитного диполя с магнитным полем. Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения B_1 до B_2 . Указание: можно применить либо общую теорию адиабатических инвариантов, либо

- Определить изменение энергии частицы за один оборот — это работа, совершаемая вихревым электрическим полем.

- Составить конечно-разностное уравнение с шагом в один период, его интеграл является искомым адиабатическим инвариантом.

12-1.2 Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле

- **Задача 6:** Частица, имеющая заряд e и массу m , движется в заданном слабо неоднородном магнитном поле \mathbf{V} . Найти траекторию частицы.

Литература: Кузнецов и Смилга (2001).

Рассмотрим заряженную частицу, двигающуюся в неоднородном магнитном поле \mathbf{V} . Заряд частицы e , её масса m . Обозначим проекцию скорости \mathbf{v} частицы на магнитную силовую линию через v_{\parallel} , а проекцию скорости частицы на плоскость, нормальную к силовой линии $-\mathbf{v}_{\perp}$:

$$v_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{V}}{V}.$$

Мы будем называть магнитное поле слабонеоднородным для частицы, если ларморовский радиус ξ её вращения в магнитном поле много меньше чем характерный пространственный масштаб, на котором изменяется магнитное поле:

$$\xi = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \ll R \sim \frac{V}{|\text{grad } V|}, \quad \omega_B = \frac{eV}{mc}.$$

Разделение на медленное и быстрое движения

Обозначим через $\mathbf{r}(t)$ траекторию частицы. В общем случае траектория частицы в слабо неоднородном магнитном поле представляет из себя изогнутую спираль. Выделим медленное движение частицы $\mathbf{R}(t)$, траектория которого соответствует оси этой спирали:

$$\mathbf{R}(t) = \langle \mathbf{r}(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt' \mathbf{r}(t+t'),$$

Усреднение $\langle \dots \rangle_T$ производится по времени T , большому по сравнению с периодом обращения частицы $2\pi/\omega_B$ вокруг линий магнитного поля, но малому по сравнению со временем, за которое частица переходит в область существенно другим магнитным полем, то есть на расстоянии порядка R .

Быстрое движение, представляющее из себя вращение вокруг силовой линии магнитного поля, описывает неусреднённая часть $\xi(t)$ радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\xi(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t).$$

Скорость движения ведущего центра мы будем обозначать $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$. Магнитное поле в актуальной точке положения частицы отличается от магнитного поля в точке

положения ведущего центра, поскольку магнитное поле слабо неоднородно. Относительная величина этого отличия имеет первый порядок по ξ/R ,

$$\delta \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}(\mathbf{R}) \approx (\xi \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{R})$$

Далее мы подразумеваем, что магнитное поле берётся в точке \mathbf{R} , так что $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{R})$.

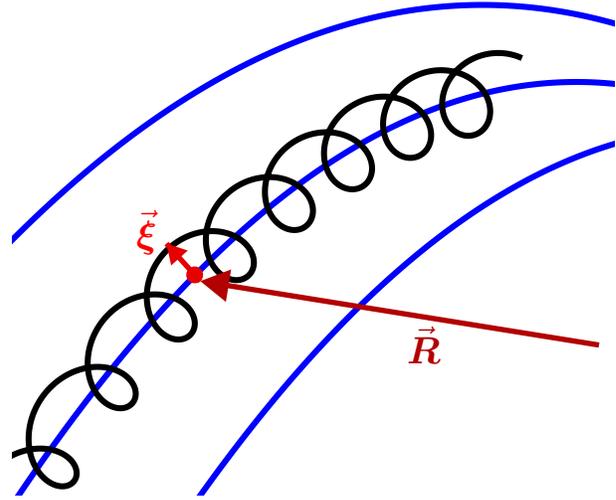


Рис. 12.1 Траектория частицы в слабо неоднородном магнитном поле.

Уравнение движения частицы

$$\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\xi}) \times (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V})], \quad (12.1)$$

усреднённое по периоду быстрого вращения, приводит к уравнению

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V} \times \mathbf{V}] + \frac{e}{mc} \langle [\dot{\xi} \times \delta \mathbf{V}] \rangle.$$

Второе слагаемое в правой части есть сила действия магнитного поля на магнитный диполь μ , создающийся быстрым вращением заряженной частицы, см. (11.1). Поэтому окончательное уравнение на ведущий центр принимает вид

$$m \ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{V}] + (\mu \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (12.2)$$

Быстрое движение Если это уравнение вычтуть из исходного (12.1), и удержать только первый порядок по ξ , то мы получим уравнение на быстрое вращение частицы вокруг магнитной силовой линии,

$$\ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [\dot{\xi} \times \mathbf{V}]. \quad (12.3)$$

Уравнение (12.3) описывает быстрое вращение частицы вокруг магнитной линии, поэтому $\xi \perp \mathbf{V}$. В главном приближении по малому параметру ξ/R скорость

вращения определяется поперечной компонентой скорости движения частицы. Таким образом,

$$v_{\perp} = -\omega_B \xi, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{ev_{\perp}\xi}{2c} \mathbf{b} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \mathbf{b}. \quad (12.4)$$

Мы ввели цилиндрическую систему координат, ось z которой сонаправлена магнитному полю; в этой системе координат v_{\perp} – азимутальная компонента скорости, которая может принимать в т.ч. и отрицательные значения.

Движение ведущего центра. Нулевое приближение. В нулевом приближении в правой части уравнения (12.2) на движение ведущего центра надо удержать только первое слагаемое (поскольку второе относительно мало как $(\xi/R)^2$), получив

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel}, \quad \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_{\parallel} \times \mathbf{B}]. \quad (12.5)$$

Если мы допустим, что в \mathbf{V}_{\parallel} есть компонента, направления поперёк магнитного поля, то в $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ мы получим вклад, по амплитуде сравнимый с $\ddot{\xi}$. Однако суть разделения на быстрые и медленные переменные состоит в том, что ускорение ведущего центра $|\dot{\mathbf{V}}|$ должно быть много меньше ускорения самой частицы $|\dot{\mathbf{v}}|$. Для того, чтобы ускорение ведущего центра было мало, его скорость движения должна быть направлена в нулевом приближении вдоль силовой линии магнитного поля,

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0, \quad \mathbf{V}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{b}. \quad (12.6)$$

Из (12.5) следует, что при этом ускорение ведущего центра формально равно нулю. На самом деле оно не ноль, но его невозможно учесть в уравнении движения, записанном в нулевом приближении, поскольку его точность не позволяет этого сделать. Действительно, ускорение, которое испытывает ведущий центр, равно:

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{d}{dt}(v_{\parallel} \mathbf{b}) = v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \mathbf{b}. \quad (12.7)$$

Мы учли как то, что по мере смещения ведущего центра изменяется направление магнитного поля \mathbf{b} , так и то, проекция скорости v_{\parallel} может меняться со временем. Как и должно быть, ускорение ведущего центра мало по сравнению с ускорением самой частицы

$$|\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}| \sim \frac{v^2}{R} \sim \frac{\xi}{R} |\ddot{\xi}|,$$

поскольку, в том числе, d/dt оценивается как v/R , то есть как обратное время смещения частицы на расстояние порядка R .

Движение ведущего центра. Первое приближение Для того, чтобы получить уравнение движения ведущего центра в первом порядке по неоднородности

магнитного поля, представим действительные скорость и ускорение ведущего центра в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_d \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{V}}_d.$$

По смыслу, \mathbf{V}_d должна быть направлена поперёк магнитного поля, поскольку продольная компонента скорости уже включена в \mathbf{V}_{\parallel} . Вклад в ускорение $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ (12.7), вычисленный в нулевом приближении, в первом приближении ещё пока не является скомпенсированным в уравнении движения ведущего центра. Поэтому в первом приближении уравнение на движение ведущего центра имеет вид

$$m\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{e}{c} [\mathbf{V}_d \times \mathbf{B}]. \quad (12.8)$$

По той же логике, по которой на предыдущем шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0$, на этом шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_d \approx 0$.

Движение ведущего центра вдоль линии магнитного поля. Адиабатический инвариант Спроектируем уравнение движения ведущего центра (12.8) на направление магнитного поля. В результате получим:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) B = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} (\mathbf{b} \cdot \nabla) B. \quad (12.9)$$

где мы воспользовались (12.4).

Покажем, что уравнение движения (12.9) предполагает сохранение некоторой величины, называемой адиабатическим инвариантом. Это уравнение можно переписать в видах

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dB}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(v_{\perp}^2)}{v_{\perp}^2} = \frac{dB}{B},$$

второй из которых можно получить, воспользовавшись законом сохранения кинетической энергии

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = \text{const},$$

В интегральном виде это означает, что адиабатическим инвариантом является абсолютная величина магнитного момента (12.4), создаваемого быстрым движением частицы:

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \quad \text{или} \quad |\boldsymbol{\mu}| = \text{const}. \quad (12.10)$$

Движение ведущего центра поперёк линии магнитного поля. Скорость дрейфа. Спроектируем уравнение движения ведущего центра (12.8) на плоскость, нормальную к силовой линии, путём векторного умножения на единичный вектор \mathbf{b} . В результате найдём скорость

$$\mathbf{V}_d = \frac{1}{\omega_B} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \quad (12.11)$$

являющуюся проекцией скорости ведущего центра на плоскость, нормальную к магнитному полю; эту скорость называют *скоростью дрейфа*. Скорость дрейфа \mathbf{V}_d направлена нормально как направлению кривизны линии, так и самому магнитному полю. Для частиц противоположного заряда эта скорость направлена в противоположном направлении.

12-1.2.1 Дополнительные задачи

• **Задача 7:** Частица находится в магнитном поле прямого провода бесконечной длины. Сила тока по проводу равна I , в начальный момент времени частица имеет скорость v , перпендикулярную проводу и направленную под углом $\pi/4$ к направлению от провода, и находится на расстоянии R от провода. Кроме того, вдоль провода приложено слабое однородное электрическое поле E . Описать дальнейшее движение частицы, если радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с R (в частности, определить скорость дрейфа). Какие величины сохраняются в процессе движения частицы? Излучением пренебречь.

• **Задача 8:** Две соосные одинаковые катушки

находятся на расстоянии L друг от друга, направление магнитного потока в них сонаправленное. По катушкам течёт ток I , погонная плотность намотки равна ρ . Радиус катушек R мал по сравнению с L , а их длина велика по сравнению с L . Кроме того, вдоль оси катушек приложено слабое однородное электрическое поле E . Частица начинает двигаться от положения по середине между катушками на их оси, причём скорость частицы составляет угол $\pi/2(1 - \epsilon)$ с осью, где $\epsilon \ll 1$. Радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с L . Описать дальнейшее движение частицы. Указание: магнитное поле в области посередине между катушками приблизьте квадратичной зависимостью в направлении оси катушек.

12-1.3 Движение в неоднородных полях

• **Задача 9:** Постоянный ток I течёт по прямому бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса a . С поверхности провода срывается электрон, его начальная скорость v_0 направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние R , на которое электрон удалится от оси провода.

§12-2. Движение магнитных моментов и спинов в электромагнитном поле

• **Задача 1:** Однородно заряженный шар (сделанный из однородного же материала) радиуса a , массы M и полным зарядом Q вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, где абсолютное значение вектора $\boldsymbol{\omega}$ есть скорость вращения, а направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ — направление оси, вокруг которой происходит вращение. Шар помещён в однородное магнитное поле \mathbf{B} . Найдите дальнейшее движение шара. *Указание:*

- Найдите коэффициент пропорциональности между угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ и магнитным моментом шара $\boldsymbol{\mu}$
- Найдите коэффициент пропорциональности между угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ и механическим моментом шара \mathbf{L}
- Напишите уравнение на эволюцию механического момента шара, найдите его решение.

• **Задача 2:** Однородно заряженный шарик радиуса a пролетает параллельно обкладкам плоского конденсатора через его центр. На влёте в конденсатор шарик вращается вокруг оси, нормальной к обкладкам конденсатора, с угловой скоростью ω (так что $a\omega \ll c$). Шарик преодолевает путь $2R$ между обкладок, после чего покидает конденсатор. Электрическое поле внутри конденсатора равно E . Скорость шарика v сравнима со скоростью света, его масса — m , полный заряд — q . Найдите

изменение ориентации оси вращения шарика после пролёта через конденсатор (в системе движущейся вместе с шариком).

Решение: Перейдём в систему координат, связанную сдвигающимся шариком. Найдём сначала связь между моментом импульса \mathbf{L} и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ шарика. Согласно (4.35) и (6.34)

$$\mathbf{L} = \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \rho_m \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}],$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] = \frac{\rho}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{\rho}{2c\rho_m} \mathbf{L}$$

где \mathbf{v} — локальная скорость элемента шарика. Таким образом, уравнение на движение механического момента шарика есть

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt'} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'] = \frac{\rho}{2c\rho_m} [\mathbf{L} \times \mathbf{B}']$$

где штрихи подчёркивают ещё раз, что соответствующие величины берутся в сопровождающей шарик системе координат.

Магнитное поле в движущейся системе координат вычисляется по формулам преобразования электромагнитного поля (4.6):

$$\mathbf{B}' = -\frac{\gamma}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}],$$

где \mathbf{E} – электрическое поле внутри конденсатора. Таким образом, магнитное поле \mathbf{B}' направлено параллельно обкладкам конденсатора и нормально к направлению движения шарика. Поэтому угловая скорость поворота оси вращения шарика

$$\Omega = \frac{\rho B'}{2c\rho_m}.$$

Время действия t' этого магнитного поля равно

$$t' = \frac{2R}{\gamma V}$$

где γ -фактор появился вследствие лоренцевского сокращения длины, см. (2.26).

В результате получаем, что в собственной системе координат ось вращения шарика повернулась на угол

$$\vartheta = \frac{\rho}{2c\rho_m} B' t' = \frac{\rho R E}{c^2 \rho_m} = \frac{q E R}{m c^2}, \quad (12.12)$$

где q – полный заряд шарика, а m – его масса.

• **Задача 3:** По бесконечно длинному проводу течёт ток I . Найдите i) угол, на который отклонится траектория нейтрона, пролетающего мимо провода на прицельном расстоянии ρ . Исходно нейтрон двигался в плоскости, ортогональной проводу; его магнитный момент лежал в той же плоскости и был ортогонален направлению движения. Считайте, что искомый угол отклонения траектории мал, как мал и угол отклонения магнитного момента в результате пролёта мимо провода. Магнитный момент нейтрона равен $\mu_n = -0.96 e\hbar/m_p c = -9.6 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс, где $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г – масса нейтрона, элементарный заряд $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ Фр, знак минус означает, что магнитный

момент антинаправлен механическому моменту, величина последнего $\hbar/2$. Найдите также ii) условие того, что найденный угол мал, iii) условие того, что угол отклонения магнитного момента также мал. Напишите численные ограничения на скорость нейтрона v полагая, что по проводу течёт ток $I = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ statA}$, а прицельное расстояние $\rho = 1 \text{ см}$.

• **Задача 4:** По бесконечно длинному проводу течёт ток I . Найдите i) угол, на который отклонится траектория нейтрона, пролетающего мимо провода на прицельном расстоянии ρ . Исходно нейтрон двигался в плоскости, ортогональной проводу; его магнитный момент лежал в той же плоскости и был ортогонален направлению движения. Считайте, что искомый угол отклонения траектории мал. Известно, что угловая скорость прецессии магнитного момента нейтрона на расстояниях $\sim \rho$ велика по сравнению с обратным временем пролёта нейтрона на этих расстояниях. В таком случае эффекты квантования приводят к тому, что магнитный момент нейтрона адиабатически отслеживает направление поля, оставаясь направленным на всей траектории либо по полю, либо против поля. Магнитный момент нейтрона равен $\mu_n = -0.96 e\hbar/m_p c = -9.6 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс, где $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г – масса нейтрона, элементарный заряд $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ Фр, знак минус означает, что магнитный момент антинаправлен механическому моменту, величина последнего $\hbar/2$. Найдите также ii) условие того, что найденный угол мал, iii) условие того, что скорость прецессии магнитного поля достаточно велика, чтобы выполнялось условие адиабатичности изменения магнитного поля. Напишите численные ограничения на скорость нейтрона v полагая, что по проводу течёт ток $I = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ statA}$, а прицельное расстояние $\rho = 1 \text{ см}$.

Глава 13

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§13-1. Вариационные задачи

13-1.1 Лагранжиан вращающегося тела в гравитационном поле

В Пункте 7-8.3 была рассмотрена динамика момента количества движения движущейся точечной слабо релятивистской частицы. Обще-ковариантное уравнение параллельного переноса спина вдоль геодезической (7.1) было рассмотрено в пределе малых скоростей и слабого гравитационного поля. В результате было установлено, что момент импульса частицы прецессирует согласно уравнению (7.123).

Предположим теперь, что мы имеем дело с протяжённым телом. Наша цель сейчас — получить прецессию (7.123) исходя не из уравнения (7.1), а из уравнения движения свободной частицы (7.2). Напомним, что именно постулирование уравнения параллельного переноса спина (7.1) наложило ограничение на отсутствие тензора кручения. Поскольку теперь мы всегда работаем в этом предположении, то использование уравнения свободной частицы (7.2) должно нас привести обратно к (7.1).

Предположим, что рассматриваемое тело составлено из многих точечных частиц. У тела есть скорость движения центра масс $\mathbf{R}(t)$ и вращение, так что положение каждой точки тела есть сумма $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}$, а её скорость $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$. Все скорости нерелятивистские, поэтому лагранжиан каждой частицы

$$L = -mc^2 \sqrt{g_{00}} \sqrt{1 + \frac{2}{c} \frac{g_{0k} v^k}{g_{00}} - \frac{1}{c^2} \frac{g_{ik} v^i v^k}{g_{00}}}$$

может быть разложен до нужного порядка:

$$L = -mc^2 + \left(1 - \frac{3\phi}{c^2}\right) \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \phi + mc(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \quad (13.1)$$

Мы воспользовались выражениями (7.55, 7.58) для метрики в пределе слабого гравитационного поля. Заметим, что если исключить потенциал ϕ стоящий перед \mathbf{v}^2 , то это выражение с точностью до переобозначений совпадает с нерелятивистским пределом для лагранжиана заряженной частицы в электромагнитном поле (3.36).

Лагранжиан можно разбить на вклад L_R , описывающий движение центра масс и на вклад L_L , линейный по скорости точки тела \mathbf{u} относительно центра масс (квад-

ратичный вклад по \mathbf{u} мы опускаем как малый):

$$L_L = \sum_a \left((\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_a) + \left(1 - \frac{3\phi}{c^2}\right) m(\mathbf{V} \cdot \mathbf{u}_a) \right),$$

где сумма по a означает суммирование по всем составляющим тело частицам. Теперь следует учесть зависимость от координат потенциалов ϕ и \mathbf{g} , в противном случае после суммирования по частицам (и при необходимости усреднения по времени) получим нуль. Аналогичная процедура проведена в (6.38) для магнитного диполя в слабо неоднородном в пространстве и постоянном во времени магнитном поле. Прodelывая ту же процедуру, в соответствии с определением получаем (4.35)

$$\begin{aligned} L_L &= \frac{1}{2c^2} (\mathbf{L} \cdot \text{rot}(c\mathbf{g} - 3\phi\mathbf{V})) = \\ &= \frac{3}{2c^2} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{V} \cdot \text{grad} \phi) + \frac{1}{2c} (\mathbf{L} \cdot \text{rot} \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (13.2)$$

То, что вклады (13.2) в лагранжиан действительно можно трактовать как потенциальную энергию механического момента, показывается также как и в случае с энергией магнитного диполя в магнитном поле, см. Пункт 6-2.3.

13-1.2 Вариационный принцип для движения частицы

Сначала заметим, что возможно несколько переформулировать вариационный принцип (3.1), положив, что параметр s исходно не является естественным параметром (собственным временем) для частицы, см. (2.31). Назовём тогда этот параметр \mathcal{s} . Теперь вариационный принцип выглядит как

$$S = -mc \int d\mathcal{s} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\mathcal{s}} \quad (13.3)$$

в котором вариация производится по четырём функциям $x^\nu(\mathcal{s})$. Принцип минимума действия приводит к уравнению на геодезическую, в которой аффинный параметр может быть произвольным.

Однако принцип наименьшего действия в форме (13.3) ещё не позволяет произвести обобщение на безмассовые частицы. Рассматривать наравне с массивными частицами также и безмассовые частицы с $m = 0$

позволяет вариационный принцип с действием

$$S = -\frac{1}{2} \int ds \left(\frac{1}{\eta} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \eta (mc)^2 \right) \quad (13.4)$$

В этом действии к координатам частицы $x^\mu(s)$ добавляется ещё одна независимая лагранжева переменная — “лагранжев множитель” $\eta(s)$. Варьирование по η приводит к условию

$$\eta = \frac{1}{mc} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}.$$

После подстановки η (13.4) действие приобретает исходный вид (13.3), что показывает эквивалентность вариационных задач (13.3,13.4).

13-1.3 Вариация действия

При построении вариации поля мы будем придерживаться логики, описанной в Пункте 1-3.1.1. Такой выбор вариации приведёт к тому, что построенный нами тензор энергии-импульса окажется симметричным.

Представим себе, что мы произвели слабую нелинейную вариацию координатной сетки, новая координатная сетка x'^ν связана со старой x^ν как

$$x'^\nu(x) = x^\nu + \delta x^\nu(x) \quad (13.5)$$

где параметр вариации $\delta x^\nu = \delta x^\nu(x)$ (в Пункте 1-3.1.1 деформировалась только временная ось). Согласно правилам дифференциальной геометрии, поле $A_\mu(x)$ в новой системе координат окажется равным

$$A'_\mu(x'(x)) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \delta x^\nu A_\nu.$$

Вариацию поля $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ выберем в виде

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= A'_\mu(x) - A_\mu(x) = \\ &= -\delta x^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \delta x^\nu A_\nu = \\ &= -\delta x^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu (\delta x^\nu A_\nu). \end{aligned} \quad (13.6)$$

Соответственно вышеизложенной логике, мировые линии частиц также увлекутся деформированной координатной сеткой. Поэтому вариацию траекторий частиц выберем в виде

$$x^\nu(s) \rightarrow x^\nu(s) + \delta x^\nu(x(s)), \quad (13.7)$$

то есть вариация траектории $\delta x^\mu(s)$ есть значение параметра вариации $\delta x^\mu(x)$ в точке $x = x(s)$.

Перейдём к варьированию действия

$$S = S_m + S_{\text{int}} + S_f$$

всей системы. При вариации действия свободного поля (4.11) следует учесть, что второе слагаемое в последнем

выражении для вариации 4-потенциала (13.6) представляет градиент, и потому является калибровочным преобразованием и не изменяет действие. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta S_f &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega F^{\tau\mu} \left(\partial_\tau \delta A_\mu \rightarrow -\partial_\tau (\delta x^\nu F_{\nu\mu}) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \delta x^\nu \left(\partial_\tau (F_{\nu\mu} F^{\tau\mu}) - F^{\tau\mu} \partial_\tau F_{\nu\mu} \right) = \\ &= \int d\Omega \delta x^\nu \partial_\tau \left(-\frac{F^{\tau\mu} F_{\nu\mu}}{4\pi c} - \delta_\nu^\tau \mathcal{L}_f \right). \end{aligned} \quad (13.8)$$

В процессе выкладок мы произвели интегрирование по частям, предположив, что вариация обращается в нуль на бесконечности. Затем мы воспользовались тем, что тензор электромагнитного поля антисимметричен, см. (3.44), а \mathcal{L}_f есть плотность лагранжиана электромагнитного поля (4.11)

Относительно не сложно показать, что вариация части действия S_{int} (3.35) действительно равна нулю. Для этого надо посчитать два вклада в вариацию: от вариации поля, и от вариации траекторий частиц. Последняя найдена в (3.42), а первую можно найти, проделав выкладки аналогичные проделанным в (13.8). В результате два вклада в точности сокращают друг друга.

Вариация части действия свободных частиц найдена в (3.17), поскольку мы выбрали ту же самую вариацию координаты (13.7).

13-1.4 Тензор энергии-импульса материи в гравитационном поле

Поля и траектории частиц изменятся так, как это рассматривалось в Пункте 13-1.3. Действительно, выражение для новой координаты y^μ соответствует варьированной мировой линии частицы (13.7). Что касается поля 4-потенциала A , то выражение для его вариации также совпадает с использованной ранее (13.6):

$$\delta A_\mu = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} - \delta_\mu^\nu \right) A_\nu(x) + A_\mu(x - \delta x) - A(x) = \\ &= -\partial_\mu \delta x^\nu A_\nu - \delta x^\nu \partial_\nu A_\mu = -\delta x^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu (\delta x^\nu A_\nu), \end{aligned}$$

где поле $A'_\mu(y)$ — поле в новых координатах. В (13.9) сравнивается поле A'_μ , записанное в новых координатах, но в точке $x = y(x) - \delta x$, и поле A'_μ в старых координатах, взятое в точке x .

Вариация, проведённая в (13.8), имеет своим результатом то же выражение, однако по пути все производную ∂_τ надо заменить на ковариантную производную. Кроме того, при преобразовании второго слагаемого во второй строчке (13.8) надо воспользоваться выражением для коммутатора ковариантных производных вектора

(10.77) и тождеством Бианки (10.72):

$$\begin{aligned} F^{\tau\mu}\nabla_{\tau}F_{\nu\mu} &= F^{\tau\mu}(A_{\mu;\nu\tau} - (A_{\mu;\nu\tau} + A_{\tau;\mu\nu} + A_{\nu;\tau\mu})) = \\ &= F^{\tau\mu}(\nabla_{\nu}\nabla_{\tau}A_{\mu} + \frac{1}{2}R^{\varsigma}_{[\tau\mu\nu]}A_{\varsigma}) = \frac{1}{2}F^{\tau\mu}\nabla_{\nu}F_{\tau\mu} = \\ &= \frac{1}{4}\partial_{\nu}(F^{\tau\mu}F_{\tau\mu}). \end{aligned}$$

§13-2. Движение в центрально-симметричном потенциале

Для описания движения частицы в сферически-симметричном потенциале удобно выбрать систему координат $\{r, \vartheta, \varphi\}$, содержащую радиальную координату r и два сферических угла $\{\vartheta, \varphi\}$.

Если в начальный момент времени частица и её скорость находились в плоскости $\vartheta = \pi/2$, то так будет всегда и в последующем для центрально-симметричной задачи. Уравнение Гамильтона-Якоби (7.5) допускает разделение переменных при описании движения частицы в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Действие имеет вид

$$S = -Et + L\varphi + S_r(r). \quad (13.10)$$

E является полной энергией частицы, L — её моментом импульса.

13-2.1 Нерелятивистское финитное движение в кулоновом потенциале

Рассмотрим частицу, которая движется в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Лагранжиан нерелятивистской частицы в координатах $\{r, \varphi\}$ в кулоновом притягивающем потенциале есть

$$L = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} - U(r), \quad U(r) = -\frac{(-\alpha)m}{r}, \quad (13.11)$$

где $\alpha < 0$. В случае гравитационного взаимодействия $\alpha = -mc^2r_g/2 = -Gm_gm$, где $r_g = 2Gm_g/c^2$ — гравитационный радиус тяготеющего центра, а m — масса частицы. В случае электростатического взаимодействия $\alpha = Qq$, где Q — заряд притягивающего центра, а q — заряд движущейся частицы. Канонически сопряжённые импульсы равны

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = L,$$

где момент импульса L является сохраняющейся величиной, поскольку лагранжиан явно не зависит от угла φ . Сохранению углового момента может быть дана простая геометрическая интерпретация, которая была непосредственно установлена Иоганном Кеплером (*второй закон Кеплера, second law of Kepler*): в единицу времени радиус-вектор движущегося тела проведённый из центра притяжения заметает одну и ту же площадь,

Разумеется, также была использована антисимметричность тензора электромагнитного поля.

см. Рис. 13.1. Действительно, за малое время dt радиус-вектор заметает площадь $dS = rv_{\perp}dt/2$, где v_{\perp} — проекция скорости на направление, ортогональное радиус-вектору. Но момент импульса $L = mrv_{\perp}$, поэтому заметённая площадь равна

$$dS = \frac{L}{2m}dt. \quad (13.12)$$

Гамильтониан равен

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2} - \frac{m|\alpha|}{r}. \quad (13.13)$$

Гамильтониан явно не зависит от времени и угловой координаты φ , поэтому решение уравнения Гамильтона-Якоби (1.12) возможно найти методом разделения переменных. В соответствии с методом, действие представим в виде прямой суммы (13.10):

$$S(t, r, \varphi) = -E_{\text{nr}}t + L\varphi + S_r(r).$$

Тогда само уравнение Гамильтона-Якоби (1.12) вследствие конкретного вида гамильтониана (13.13) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 = 2m(E_{\text{nr}} - U_{\text{eff}}), \quad U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{(-\alpha)m}{r}. \quad (13.14)$$

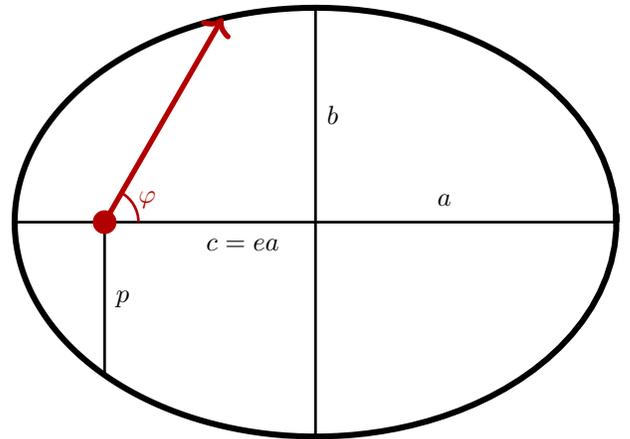


Рис. 13.1 Эллиптическая орбита

Для того, чтобы траектория была финитной, надо чтобы нерелятивистская энергия частицы E_{nr} была отрицательной. Действительно, разность $2m(E_{\text{nr}} - U_{\text{eff}})$ всегда должна оставаться неотрицательной, поскольку она равна квадрату радиально импульса p_r^2 . С другой стороны, эффективная потенциальная энергия U_{eff} , оставаясь всегда отрицательной при $r > L^2/2m|\alpha|$, достигает минимума $-m\alpha^2/2L^2$ на удвоенном расстоянии и стремится к нулю на далёких расстояниях. Таким образом, если $E_{\text{nr}} < 0$, то расстояние до притягивающего центра может изменяться в пределах $r_{\text{min}} < r < r_{\text{max}}$.

Для того, чтобы установить траекторию частицы, запишем радиальную часть действия

$$S_r = \pm \sqrt{2m|E_{\text{nr}}|} \int_{\tilde{r}}^r \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} \sqrt{(r_{\text{max}} - \tilde{r})(\tilde{r} - r_{\text{min}})}$$

где $r_{\text{max}} > r_{\text{min}}$ являются точками обращения в ноль разницы $E_{\text{nr}} - U_{\text{eff}}$, см. уравнение Гамильтона-Якоби (13.14).

Траектория частицы в координатах $\{r, \varphi\}$ описывается уравнением $\partial S/\partial L = 0$, из которого следует

$$d\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial S_r}{\partial L} dr = \pm \frac{\sqrt{r_{\text{max}} r_{\text{min}}}}{\sqrt{(r_{\text{max}} - r)(r - r_{\text{min}})}} \frac{dr}{r}. \quad (13.15)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$d\varphi = \pm \frac{p dr}{r \sqrt{(e^2 - 1)r^2 + 2pr - p^2}},$$

$$p = \frac{2r_{\text{max}} r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}, \quad e = \frac{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}},$$

которое является уравнением эллипса

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (13.16)$$

с одним из его фокусов помещённым в начало координат. Стандартными обозначениями для параметров эллипса являются: $a > b$ — полуоси эллипса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — половина межфокусного расстояния, $e = c/a < 1$ — эксцентриситет (*eccentricity*), $p = b^2/a$ — фокальный параметр. В этих обозначениях $r_{\text{max}} = a + c$, $r_{\text{min}} = a - c$. Параметры эллипса связаны с интегралами движения тела

$$a = \frac{|\alpha|}{2|E_{\text{nr}}|}, \quad b = \frac{L/m}{\sqrt{2|E_{\text{nr}}|/m}}. \quad (13.17)$$

Из условия $a \geq b$ следует, что $(L/m)^2 \leq \alpha^2/(2|E_{\text{nr}}|/m)$, т.е. минимально возможное значение нерелятивистской энергии E_{nr} равно минимуму эффективной потенциальной для $U_{\text{eff}}(r)$ и соответствует вращению по круговой орбите. Утверждение о том, что тело в гравитационном потенциале движется по эллипсу, составляет *первый закон Кеплера*.

Период обращения T можно получить воспользовавшись вторым законом Кеплера: полная площадь орбиты

равна $LT/2m$. С другой стороны поскольку орбита — эллипс, то её площадь равна πab . В результате приходим к тому, что период обращения

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{|\alpha|}} a^{3/2} = \frac{\pi|\alpha|}{\sqrt{2}(|E_{\text{nr}}|/m)^{3/2}}. \quad (13.18)$$

Таким образом, отношение квадратов периодов обращения двух планет вокруг одного и того же тяготеющего центра относится как куб больших полуосей их орбит. Это утверждение составляет *третий закон Кеплера*.

13-2.2 Движение релятивистской частицы в кулоновом потенциале

Рассмотрим теперь релятивистскую частицу, которая движется в потенциале. Эта задача является, например, классическим вариантом задачи о движении электрона в поле ядра, когда энергия связи сравнима с массой покоя электрона. Лагранжиан заряда имеет вид (3.36)

$$L = -mc \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} - U(r),$$

который переходит в нерелятивистский предел (13.11) при малых скоростях. Радиальный импульс и сохраняющийся момент импульса равны

$$p_r = \gamma m \dot{r}, \quad L = \gamma m r^2 \dot{\varphi}.$$

Записав действие в виде (13.10), приходим к тому, что уравнение Гамильтона-Якоби для заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле (3.40), может быть переписано в том же виде (13.14), но с изменёнными параметрами:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = 2m \left(E'_{\text{nr}} + \frac{(-\alpha')}{r} - \frac{L'^2}{2mr^2} \right), \quad (13.19)$$

$$E'_{\text{nr}} = \frac{E^2 - mc^2}{2mc^2}, \quad L'^2 = L^2 - \frac{\alpha^2}{c^2}, \quad \alpha' = \frac{E\alpha}{mc^2}.$$

Траектория частицы в $\{r, \varphi\}$ -координатах по-прежнему определяется уравнением $\partial S/\partial L = 0$, которое переписывается в виде

$$\frac{\partial L}{\partial L'} d\varphi + \frac{\partial}{\partial L'} \frac{\partial S_r}{\partial r} dr = 0. \quad (13.20)$$

вместо (13.15). Поэтому вместо (13.16) приходим к

$$\frac{p'}{r} = e' + \cos \left(\sqrt{1 - \alpha'^2/(L'c)^2} \varphi \right), \quad (13.21)$$

где параметры

$$p' = \frac{L^2 c^2 - \alpha^2}{(-\alpha)E}, \quad e' = \frac{c \sqrt{(LE)^2 - m^2 c^2 (L^2 c^2 - \alpha^2)}}{(-\alpha)E}.$$

Уравнение (13.21) означает, что траектория не является замкнутой. Если частица слабо релятивистская,

то за один оборот (оборотом теперь мы назовём часть траектории, пройдя которую, частица возвращается в состояние с теми же значениями радиальной координаты r и её скорости изменения \dot{r}) частица смещается на угол

$$\delta\varphi = 2\pi \left(\frac{\partial L'}{\partial L} - 1 \right) \approx \pi \frac{\alpha^2}{L^2 c^2} \sim \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.22)$$

Последнее равенство приближённо и верно в слабoreлятивистском пределе, а оценка сделана для орбиты близкой к круговой.

13-2.3 Движение массивной частицы в гравитационном потенциале

Для исследования движения (слабо) релятивистской частицы в гравитационном потенциале запишем уравнение Гамильтона-Якоби (7.5) в метрике Шварцшильда (7.66). Используя представление действия в виде (13.10), получаем

$$(\partial_r S_r)^2 = \frac{E^2}{c^2(1-r_g/r)^2} - \frac{m^2 c^2}{(1-r_g/r)} - \frac{L^2}{r^2(1-r_g/r)}. \quad (13.23)$$

Напомним, что интегралы движения

$$E = cp_0 = mc^2 g_{00} \frac{dt}{d\tau} = (1-r_g/r) mc^2 \frac{dt}{d\tau},$$

$$L = -p_\varphi = -g_{\varphi\varphi} \Big|_{\theta=\pi/2} m \frac{d\varphi}{d\tau} = mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

13-2.3.1 Релятивистские поправки к медленному движению

Если релятивистские эффекты выступают в качестве поправок, то это означает, что мы по-прежнему имеем дело с (почти) нерелятивистским движением тела:

$$\frac{r_g}{r} \sim \frac{E_{\text{nr}}}{mc^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{mcr_g}{L} \sim \frac{r_g}{r} \frac{c}{v} \sim \frac{v}{c} \ll 1,$$

оценки сделаны для почти круговой орбиты. Влияние слабых релятивистских эффектов, как и в случае релятивистской частицы в потенциале Кулона, эффективно приводит к перенормировке момента импульса в уравнении радиального движения. В результате радиальные колебания и обращение по углу оказываются слабо рассинхронизованными, так что оси эллиптической орбиты тела за каждый оборот смещаются на угол $\delta\varphi$.

В правой части уравнения (13.23) следует произвести разложение по малому параметру r_g/r . При этом главные члены, соответствующие чисто нерелятивистскому движению по замкнутой эллиптической орбите, имеют порядок $(mv)^2$. Среди поправок, относительно малых как $(v/c)^2$, есть в том числе и вклад $-r_g L^2/r^3$. Он не может быть учтён аналитически непосредственно. Для его исключения надо произвести замену радиальной координаты, близкую к тождественной:

$$r = r' + r_g/2, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} dr &= dr', \\ r(r - r_g) &\rightarrow r'^2, \end{aligned}$$

так что знаменатель в последнем слагаемом в (13.23) становится равным просто r'^2 . Заметим, что произведённая замена соответствует, в частности, замене (7.67) в пределе $r \gg r_g$. Далее штрих над r мы опускаем. После подсчёта всех поправок, относительно малых как $(v/c)^2$, получаем (13.23)

$$(\partial_r S_r)^2 \approx 2m \left(E'_{\text{nr}} + \frac{Gm'_g m}{r} - \frac{L'^2}{2mr'^2} \right), \quad (13.24)$$

$$L'^2 = L^2 - \frac{3}{2}(r_g mc)^2,$$

$$m'_g = m_g \left(1 + \frac{2E_{\text{nr}}}{mc^2} \right), \quad E'_{\text{nr}} = E_{\text{nr}} \left(1 + \frac{E_{\text{nr}}}{2mc^2} \right),$$

сравни с (13.19). По определению $E_{\text{nr}} = E - mc^2$, также как была определена кинетическая энергия (3.10).

Уравнение (13.24) надо сравнить с (13.14) В итоге согласно (13.15) получаем, что за один оборот

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\partial L'}{\partial L} = 2\pi + \delta\varphi, \quad \delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \frac{(mcr_g)^2}{L^2} \quad (13.25)$$

Этот ответ (13.25) в полтора раза больше значения (13.22), которое получается, если в рамках специальной теории относительности потенциал считать чисто кулоновским.

13-2.4 Дополнительные задачи

• **Задача 1:** Найдите круговые орбиты в поле тяжести чёрной дыры (зависимость радиуса от периода обращения по мировому времени и по собственному времени).

§13-3. Линзирование и микролинзирование

Гравитирующее тело, искажая ход световых лучей проходящих рядом с ним, искажает тем самым изоб-

ражение, когда находится между наблюдателем 'O' и объектом наблюдения 'S'. (7.121)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Christoffel symbols, 108
- g-фактор, 39
- Huygens' radiation source, 138
- rapidity, 16
- Баргмана-Мишеля-Телегди уравнение, 39
- Био-Савара-Лапласа закон, 61
- Гильберта
 - действие, 81
- Гладкое векторное поле, 113
- Гюйгенса
 - элементарный излучатель, 138
- Доплера эффект, 43
- Кристоффеля символ, 108
- Кронекера символ, 101
- Кулона
 - закон, 56
 - калибровка, 31
- Лармора
 - теорема, 63
- Лиенара-Вихерта потенциалы, 43
- Лоренца
 - калибровка, 31
 - преобразование, 14
 - сила, 29
- Максвелла
 - уравнения
 - первая пара, 32
- Минковского
 - метрика, 15
 - пространство, 15
- Паули гамильтониан, 29
- Паули-Любанского псевдовектор, 38
- Эйнштейна
 - соглашение, 101
 - уравнение, 80
 - формула для массы покоя, 23
- абerrация света, 43
- ананоль, 70
- быстрота, 16
- вектор
 - аксиальный, 105
- волна
 - длина, 41
 - частота, 41
 - циклическая, 41
- волновой вектор, 41
- волновой луч, 50
- гиромангнитное отношение, 62
- гравитационная постоянная, 78
- гравитационное поле
 - псевдо-тензор энергии-импульса, 82
- интервал, 12
- калибровочное преобразование, 31
- ковариантная запись уравнений движения, 23
- координаты
 - гармонические, 116
- момент
 - дипольный, 57
 - квадрупольный, 58
 - магнитодипольный, 61
 - тороидальный, 70
- оператор д'Аламбера, 34
- оптическая теорема, 55
- сечение
 - взаимодействия, 54
 - поглощения, 54
 - рассеяния, 54
 - дифференциальное, 54
- тензор
 - кососимметричный, 120
 - кручения, 117
- тетрада, 114
 - тетрадный постулат, 125
- тёмная энергия, 98
- уравнение
 - волновое, 34
 - непрерывности, 20
- форма
 - связности, 124
 - смещения, 124
- электромагнитное поле
 - инварианты, 32
 - тензор, 29
- энергия
 - элетростатическая, 58
 - энергия покоя, 23

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература по электродинамике

- Балдин, А.М., В.И. Гольданский и И.Л. Розенталь (1959). Кинематика ядерных реакций. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы.
- Джексон, Дж. (1965). Классическая электродинамика. М.: Мир.
- Ландау, Л. Д. и Е. М. Лифшиц (1988). Теоретическая физика, том II. Теория поля. М: Наука.
- Мешков, И.Н. и Б.В. Чириков (1987). Электромагнитное поле. Часть I. Электричество и магнетизм. Новосибирск: Наука.
- Топтыгин, И. Н. (2002). Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория. Москва-Ижевск: РХД.
- (2005). Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: РХД.
- Угаров, Владимир Александрович (1977). Специальная теория относительности. Наука.

Основная литература по теории гравитации

- Wald, Robert M (2010). General relativity. University of Chicago press.
- Берков, А.В. и И.Ю. Кобзарев (1989). Теория тяготения Эйнштейна. Общие принципы и экспериментальные следствия. МИФИ.
- (1990). Приложения теории тяготения Эйнштейна к астрофизике и космологии (учебное пособие). МИФИ.
- Вайнберг, С. (1975). Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. Москва: Мир.
- Вергелес, С. Н. (2017). Лекции по общей теории относительности. МФТИ.
- Долгов, А.Д., Я.Б. Зельдович и М.В. Сажин (1988). Космология ранней Вселенной. Москва: Изд-во Моск. ун-та.
- Ландау, Л. Д. и Е. М. Лифшиц (1988). Теоретическая физика, том II. Теория поля. М: Наука.
- Хриплович, И.Б. (2009). Общая теория относительности. Второе издание, дополненное. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика.

Дополнительная литература по электродинамике

- Dubovik, V.M. и V.V. Tugushev (1990). Toroid moments in electrodynamics and solid-state physics. англ. в: Physics reports 187.4, с. 145–202.
- Radescu Jr, E. и Georgeta Vaman (2012). Cartesian multipole expansions and tensorial identities. в: Progress In Electromagnetics Research B 36, с. 89–111.
- Клепиков, Н. П. (1985). Силы торможения излучением и излучение заряженных частиц. в: Успехи физических наук 146.2, с. 317–339.
- Кузнецов, В.П. и В.П. Смилга (2001). Движение заряженной частицы в слабо-неоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: учебно-методическое пособие. М.: МФТИ.
- Окунь, Лев Борисович (2008). Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. «Не смеётся ли Господь Бог»? в: Успехи физических наук 178.5, с. 541–555.
- Тернов, И. М. и В. А. Бордовицын (1980). О современной интерпретации классической теории спина Я. И. Френкеля. в: Успехи физических наук 132.3.

Дополнительная литература по гравитации

- Blau, Matthias (2016). Lecture Notes on General Relativity.

McGaugh, Stacy S, Federico Lelli и James M Schombert (2016). Radial acceleration relation in rotationally supported galaxies. в: Physical Review Letters 117.20, с. 201101.

Дополнительная литература, не касающаяся непосредственно классической электродинамики

Olver, Frank W.J. и др. (2010). NIST Handbook of Mathematical Functions. в:
Вергелес, С. Н. (2008). Лекции по квантовой электродинамике. М.: ФИЗМАТЛИТ.
Пескин, М. и Д. Шредер (2001). Введение в квантовую теорию поля. РХД.
Фейнман, Р. и А. Хибс (1968). Квантовая механика и интегралы по траекториям. Москва: Мир.
Флюгге, З. (1974). Задачи по квантовой механике, том 2. М.: Мир.

Оригинальные работы

Einstein, Albert (1916). Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. в:
Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 1111-1116.
Frieman, Joshua A, Michael S Turner и Dragan Huterer (2008). Dark energy and the accelerating universe. в:
Annu. Rev. Astron. Astrophys. 46, с. 385–432.
Leclerc, Michel (2006). Canonical and gravitational stress-energy tensors. в: International Journal of Modern Physics D
15.07, с. 959–989.
Lehmkuhl, Dennis (2011). Mass–Energy–Momentum: Only there Because of Spacetime? в:
The British journal for the philosophy of science 62.3, с. 453–488.
Radinschi, I и др. (2015). Energy distribution of a regular black hole solution in Einstein-nonlinear electrodynamics. в:
Advances in Mathematical Physics 2015.

Оглавление

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1		
Лагранжев и Гамильтонов формализмы		3
1-1	Формализм Лагранжа: одна степень свободы.....	3
1-2	Формализм Гамильтона: одна степень свободы.....	4
1-2.1	Скобки Пуассона	4
1-2.2	Каноническое преобразование	4
1-2.3	Переменные уничтожения и рождения a и a^*	4
1-2.4	Действие в формализме Гамильтона	5
1-2.5	Уравнение Гамильтона-Якоби	5
1-3	Законы сохранения.....	6
1-3.1	Теорема Нётер	6

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 2		
Четырёх-мерное пространство-время		9
2-1	Постулаты релятивистской механики.....	9
2-1.1	Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории.	9
2-1.2	Постулаты специальной теории относительности	10
2-1.3	Принцип минимума действия	11
2-1.4	Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией	11
2-2	Инерциальные системы координат.....	12
2-2.1	Инерциальные декартовы системы координат	12
2-2.2	Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта	12
2-3	Преобразование Лоренца.....	14
2-3.1	Количество параметров преобразования Лоренца	15
2-3.2	Интервал в пространстве Минковского	15
2-4	Преобразование Лоренца: лоренцевский буст.....	16
2-4.1	Скорость движения и быстрота	16
2-4.2	Поворот в пространстве	17
2-5	Неравномерное движение материальной точки.....	18
2-5.1	Мировая линия частицы	18
2-5.2	Собственное время	18
2-5.3	Сложение скоростей.	19
2-6	Описание движения частиц в терминах непрерывной среды.....	20
2-6.1	Четырёх-мерный ток	20
2-6.2	Связь потока с траекториями частиц.	22
2-6.3	Распределение частиц по скоростям	22

Глава 3		
Движение частиц в электромагнитном поле, взаимодействие частиц		24

3-1	Действие и уравнения движения для свободной частицы	24
3-1.1	Вариация мировой линии и действия	24
3-1.2	Энергия и импульс частицы	24
3-1.3	Безмассовые частицы	25
3-2	Распад и столкновения частиц	26
3-2.1	Распад частицы	26
3-2.2	Столкновение частиц	26
3-3	Совокупность частиц как непрерывная среда, тензор энергии-импульса	27
3-3.1	Законы сохранения	27
3-3.2	Тензор энергии-импульса пылевидной материи	28
3-3.3	Тензор энергии-импульса идеального газа	29
3-4	Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	30
3-4.1	Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан	30
3-4.2	Уравнения движения	31
3-4.3	Тензор электромагнитного поля	31
3-4.4	Уравнения движения в трёхмерной форме	31

Глава 4

Электромагнитное поле и его возбуждение зарядами 33

4-1	Свойства электромагнитного поля	33
4-1.1	Калибровочная инвариантность	33
4-1.2	Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля	34
4-1.3	Первая пара уравнений Максвелла	34
4-1.4	Релятивистские инварианты электромагнитного поля	34
4-2	Уравнения движения электромагнитного поля	35
4-2.1	Действие свободного электромагнитного поля	35
4-2.2	Вторая пара уравнений Максвелла	35
4-2.3	Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы	35
4-3	Тензор энергии-импульса	37
4-3.1	Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса	37
4-3.2	Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	38
4-3.3	Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля	39
4-4	Момент импульса	39
4-4.1	Внутренний орбитальный момент и собственный спин частиц	40
4-4.2	Уравнение движения спина в однородном поле	41
4-5	Электромагнитные волны	42
4-5.1	Плоская электромагнитная волна	42
4-5.2	Плоская монохроматическая электромагнитная волна	43
4-5.3	Эффект Доплера и абберация света	45
4-6	Поле движущегося точечного заряда	45
4-6.1	Потенциалы Лиенара-Вихерта	45
4-6.2	Электрическое и магнитное поля	46
4-6.3	Поле равномерно движущегося заряда	47
4-7	Симметрии в классической электродинамике	48

Глава 5

Распространение электромагнитных волн 50

5-1	Функции Грина волнового уравнения	50
5-1.1	Запаздывающая функция Грина	50
5-1.2	Опережающая и другие функции Грина	52
5-1.3	Тензорная функция Грина	52
5-1.4	Двумерное электрическое поле	52

5-2	Геометрическая оптика	53
5-2.1	Монохроматическая волна	53
5-3	Параметризация поля в случае сферической геометрии	54
5-3.1	Свойства функций Бесселя	54
5-3.2	Параметризация векторного поля	55
5-3.3	Электромагнитное поле	55
5-4	Распространение электромагнитных волн	56
5-4.1	Расходящаяся сферическая волна	56
5-5	Рассеяние электромагнитных волн на частицах	57
5-5.1	Оптическая теорема	57

Глава 6

Слабо релятивистские эффекты

59

6-1	Поле неподвижных зарядов и их взаимодействие с внешним постоянным электрическим полем	59
6-1.1	Закон Кулона	59
6-1.2	Поле системы статических зарядов	59
6-1.3	Электростатическая энергия	61
6-1.4	Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле	62
6-1.5	Сила и момент сил, действующих на диполь	62
6-2	Поле постоянных токов и их взаимодействие с внешним постоянным магнитным полем	63
6-2.1	Закон Био-Савара-Лапласа	64
6-2.2	Магнито-дипольный момент	64
6-2.3	Потенциальная энергия системы токов в магнитном поле	64
6-2.4	Теорема Лармора	65
6-3	Дипольное и квадрупольное излучение	66
6-3.1	Поле электрического диполя	67
6-3.2	Магнито-дипольный и квадрупольный вклады	68
6-3.3	Поле излучения как асимптотика на больших расстояниях	69
6-4	Мультипольное излучение	70
6-4.1	Магнито-мультипольное разложение в статике	70
6-4.2	Поле системы нестационарных токов	71
6-4.3	Излучение магнитного типа	72
6-4.4	Излучение электрического типа	73
6-5	Торможение излучением	74
6-5.1	Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн	74
6-5.2	Торможение излучением	75

Часть III**ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ**

Глава 7

Теория гравитации

77

7-1	Свободные тела в гравитационном поле	77
7-1.1	Постулаты общей теории относительности	77
7-1.2	Движение свободной частицы в гравитационном поле	78
7-1.3	Промежутки времени и расстояния	79
7-1.4	Ньютоновский предел	79
7-2	Электромагнитное поле. Тензор энергии-импульса материи	80
7-2.1	Действие для электромагнитного поля	80
7-2.2	Тензор энергии-импульса материи	81
7-3	Уравнение Эйнштейна	82

7-3.1	Действие Гильберта	83
7-3.2	Закон сохранения энергии-импульса	84
7-4	Слабое гравитационное поле	85
7-4.1	Линейное приближение для гравитационного поля	85
7-4.2	Стационарное гравитационное поле	85
7-5	Центрально-симметричное гравитационное поле	86
7-5.1	Решение уравнений Эйнштейна вне тела. Метрика Шварцшильда.	87
7-5.2	Координаты Крускала	89
7-6	Коллапс пылевидной сферы	90
7-6.1	Синхронная система отсчёта	90
7-6.2	Однородное распределение плотности	92
7-7	Гравитационные волны	92
7-7.1	Плоская гравитационная волна	92
7-7.2	Излучение гравитационных волн	93
7-8	Движение частиц в гравитационном поле	95
7-8.1	Неоднородное течение времени в статическом гравитационном поле	95
7-8.2	Отклонение и задержка луча в слабом гравитационном поле	95
7-8.3	Динамика углового момента вращающихся тел (спинов)	96

Глава 8

Элементы космологии

97

8-1	Модели Фридмана расширяющейся Вселенной.	97
8-1.1	Метрика Фридмана	97
8-1.2	Движение частиц в метрике Фридмана	99
8-1.3	Динамические уравнения на расширение Вселенной	99

Часть IV**APPENDIX**

Глава 9

Элементы тензорного анализа

103

9-1	Тензорное исчисление.	103
9-1.1	Контравариантные и ковариантные вектора	103
9-1.2	Метрика	104
9-1.3	Полностью антисимметричный псевдотензор	105
9-1.4	Тензорные поля	106
9-2	Евклидово пространство.	106
9-2.1	Скалярное произведение векторов	106
9-2.2	Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве	106
9-3	Пространство Минковского	108
9-3.1	Антисимметричный тензор второго ранга	108
9-3.2	Операции поднятия и опускания индексов	109

Глава 10

Дифференциальная геометрия

110

10-1	Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство.	110
10-1.1	Ковариантная производная	110
10-1.2	Операции интегрирования и векторного дифференцирования	112
10-1.3	Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство	112

10-2	Многообразия.....	114
10-2.1	Гладкие многообразия	114
10-2.2	Касательное и кокасательное пространства	115
10-2.3	Произвольный базис для гладких векторных полей	116
10-2.4	Ориентации на многообразии	116
10-2.5	Отображение многообразий	117
10-2.6	Ковариантная производная	117
10-3	Тензора кривизны и кручения, пространство Римана.....	119
10-3.1	Геометрический смысл тензоров кривизны и кручения	119
10-3.2	Нормальные координаты Римана. Геодезические координаты.	120
10-3.3	Свойства тензора кривизны	121
10-4	Дифференциальные формы.....	122
10-4.1	Определение понятия формы	123
10-4.2	Внешнее дифференцирование форм	124
10-4.3	Интегрирование дифференциальных форм	125
10-5	Запись уравнений дифференциальной геометрии через дифференциальные формы.....	127
10-5.1	Формы в произвольном базисе	127
10-5.2	Структурные уравнения Картана	127
10-5.3	Нормальные координаты Римана	128
10-6	Свойства криволинейных пространств.....	130
10-6.1	Геометрия пространств с постоянной кривизной	130
10-7	Криволинейные ортогональные координаты.....	131

Часть V

ЗАДАЧИ

Глава 11

Разные задачи

11-1	Математика.....	133
11-2	Преобразование Лоренца, уравнение непрерывности.....	133
11-3	Разные задачи.....	134
11-4	Столкновение и распад частиц.....	134
11-5	Электростатика.....	135
11-6	Магнитостатика.....	136
11-6.1	Постоянные электрическое и магнитное поля	137
11-7	Электромагнитные волны.....	137
11-8	Излучение электромагнитных волн.....	139
11-8.1	Дипольное и квадрупольное излучения	139
11-8.2	Когерентное излучение	140
11-8.3	Торможение излучением	140
11-8.4	Излучение релятивистских частиц	141

Глава 12

Движение частиц в электромагнитном поле

12-1	Движение частицы в однородном поле.....	143
12-1.1	Дрейф частицы в скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях	143
12-1.2	Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле	144
12-1.3	Движение в неоднородных полях	146
12-2	Движение магнитных моментов и спинов в электромагнитном поле.....	146

Глава 13	
Движение частиц в гравитационном поле	148
13-1 Вариационные задачи	148
13-1.1 Лагранжиан вращающегося тела в гравитационном поле	148
13-1.2 Вариационный принцип для движения частицы	148
13-1.3 Вариация действия	149
13-1.4 Тензор энергии-импульса материи в гравитационном поле	149
13-2 Движение в центрально-симметричном потенциале	150
13-2.1 Нерелятивистское финитное движение в кулоновом потенциале	150
13-2.2 Движение релятивистской частицы в кулоновом потенциале	151
13-2.3 Движение массивной частицы в гравитационном потенциале	152
13-2.4 Дополнительные задачи	152
13-3 Линзирование и микролинзирование	153

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	154
-----------------------------	-----

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	155
--------------------------	-----

Основная литература по электродинамике	155
Основная литература по теории гравитации	155
Дополнительная литература по электродинамике	155
Дополнительная литература по гравитации	155
Дополнительная литература, не касающаяся непосредственно классической электродинамики	156
Оригинальные работы	156

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КАФЕДРЫ ПТФ ФОПФ МФТИ	163
--	-----

Задачи на семинар “криволинейные координаты”	163
Задачи на семинар “Римановы пространства”	163
Задачи на семинар “Гравитационное излучение”	163
Задачи на зачёт	164

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КАФЕДРЫ ПТФ ФОПФ МФТИ

Задачи на семинар “криволинейные координаты”

• **Задача 1:** Найдите метрический тензор в форме $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ для вращающейся системы координат в пространстве Минковского $\{t, x, y, z\}$:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\varphi - \omega t) \\ y' &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\varphi - \omega t) \\ z' &= z. \end{aligned}$$

где $\{x, y\} = \sqrt{x^2 + y^2} \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$, а ω — фиксированный параметр.

• **Задача 2:** Докажите выражения (10.17) для дивергенции и лапласиана, записанных в криволинейных координатах.

• **Задача 3:** Найдите метрический тензор для сферической системы координат. Запишите операции взятия дивергенции и ротора в терминах контравариантных компонент векторов. В тех же терминах сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса.

• **Задача 4:** Найдите метрический тензор для цилиндрической системы координат. Запишите операции взятия дивергенции и ротора в терминах контравариантных компонент векторов. В тех же терминах сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса.

• **Задача 5:** Покажите, что если $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, то его дивергенция может быть представлена в виде полной производной делённой на $\sqrt{|g|}$, см. (10.20). Покажите также, что выполняется равенство

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda}.$$

Задачи на семинар “Римановы пространства”

• **Задача 1:** Докажите равенство (10.77)

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\sigma \equiv A_{\sigma;\mu\nu} - A_{\sigma;\nu\mu} = -R^\sigma{}_{\mu\nu} A_\sigma.$$

для коммутатора ковариантных производных ковариантного вектора. Получите аналогичное равенство для

контравариантного вектора.

• **Задача 2:** Какая симметрия тензора кривизны следует из тождества $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) g_{\sigma\gamma} = 0$?

• **Задача 3:** Пользуясь общими симметричными свойствами тензора кривизны, установите, что в двумерном пространстве он полностью определяется скалярной кривизной. Покажите, что если двумерное пространство является вложенным в трёхмерное евклидово пространство, то тензор кривизны полностью определяется гауссовой кривизной поверхности.

• **Задача 4:** Пользуясь общими симметричными свойствами тензора кривизны, установите, что в трёхмерном пространстве он полностью определяется тензором Риччи. Покажите, что тождество Бианки не накладывает независимых ограничений на тензор кривизны.

• **Задача 5:** Посчитайте количество независимых компонент в тензоре кривизны для 4-х мерного пространства.

• **Задача 6:** Общей формулой для количества независимых компонент тензора кривизны в d -мерном пространстве является $d^2(d^2 - 1)/12$. Докажите это соотношение.

Задачи на семинар “Гравитационное излучение”

• **Задача 1:** Предположим, что два тела с массой Солнца вращаются по круговой орбите вокруг друга, расстояние между ними равно одной астрономической единице. Учитывая потери энергии этих двух тел на гравитационное излучение, опишите как будет меняться со временем расстояние между ними.

• **Задача 2:** Принцип регистрации гравитационной волны. Расстояние между точками определяется через трёхмерный тензор (7.8). Пусть пока гравитационная волна не пришла, пространство можно было считать абсолютно плоским, и обе точки двигаются по близким геодезическим, находясь в покое друг относительно друга: их разделял вектор \mathbf{r} . Найдите изменение расстояния между точками в результате действия слабой гравитационной волны. Указание: удобно принять поперечную калибровку для гравитационной волны.

• **Задача 3:** Пусть электромагнитная монохроматическая волна распространяется вдоль оси Oz имея линейную поляризацию электрического поля вдоль оси

Ox , $\mathbf{E} = E_w \cos(kz - \omega t)$; кроме того, в этой области пространства имеется также постоянное однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$. Найти уравнение на гравитационную волну, которая будет возбуждаться интерференцией электромагнитной волны и постоянного маг-

нитного поля.

• **Задача 4:** Найти обратное влияние гравитационной волны (её считать слабой) на электромагнитную волну.

Задачи на зачёт

• **Задача 1:** Покажите, что если A_μ – векторное поле, то величина $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ является тензором, даже если присутствует ненулевой тензор кручения. Чему соответствует операция построения тензора $F_{\mu\nu}$ по заданному векторному полю A_μ в терминах дифференциальных форм? Если A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, то что из себя представляет система уравнений $ddA = 0$, где $A = A_\mu dx^\mu$?

• **Задача 2:** Покажите, что полная энергия чёрной дыры равна $E = r_g c^4 / (2G)$, где r_g – радиус Шварцшильда этой чёрной дыры.

• **Задача 3:** Напишите тензор энергии-импульса чёрного излучения. Из уравнений Эйнштейна получите зависимость температуры (плотности энергии) чёрного излучения от масштаба Вселенной. Сравните результат с термодинамическим рассмотрением и с красным смещением частоты распространяющегося фотона по мере расширения Вселенной. На каком возрасте Вселенной чёрное излучение должно играть ведущую роль в динамике расширения Вселенной? Как в этом режиме масштаб Вселенной зависит от времени?

• **Задача 4:** Найдите отклонение светового луча в центрально симметричном поле. Задачу решите в сферических координатах (как это делается для массивной частицы находящейся на финитной траектории).

• **Задача 5:** Какова должна быть частота обращения Земли вокруг своей оси, чтобы прецессия гироскопа, движущегося по около-земной орбите определялась вращением Земли по порядку величины в той же степени, что и градиентом гравитационного потенциала, а ?

• **Задача 6:** Пусть в цилиндрических координатах $\{\rho, \varphi, z\}$ поверхность тора задаётся уравнением $z^2 + (\rho - 2R)^2 = R^2$. Метрика на этом торе определяется евклидовой метрикой 3-х мерного пространства, в которое вложен тор. Найдите (внутренний) тензор кривизны в ортогональном базисе. Если, например, считать, что тор образован мыльной плёнкой обладающей поверхностным натяжением σ , то разница давлений на разных сторонах плёнки определяется средней кривизной $1/K_m = 1/R_1 + 1/R_2$, где $R_{1,2}$ – радиусы кривизны поверхности тора. Как связан тензор внутренней кривизны с радиусами кривизны $R_{1,2}$?

• **Задача 7:** Найдите сечение захвата чёрной дырой ультрарелятивистских частиц.

Найдите первую поправку по $1/\gamma \ll 1$.

• **Задача 8:** Найдите круговые орбиты в поле тяжести чёрной дыры (зависимость радиуса от периода обращения по мировому времени и по собственному времени).

• **Задача 9:** Стоящая на поверхности невращающейся планеты пушка стреляет часами ровно вверх. В момент вылета выпущенные из пушки часы были синхронизованы с часами, оставшимися на поверхности планеты. Скорость выпущенных часов такова, что они в процессе свободного движения возвращаются (падают) обратно на планету. На которых часах набежавшее время будет больше после того, как выпущенные часы вернутся на планету? Как этот ответ согласуется с известным из СТО парадоксом близнецов?