

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра теоретической физики

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Отдельные вопросы

1. Распространение волновых пакетов
в диспергирующих средах;
2. Методы трансформационной оптики
и её применение в вычислительных схемах;
3. Эффект Фарадея для распространения волн
в гиротропных средах;
4. Рассеяние света
на малых резонансных частицах

Учебно-методическое пособие

С.С. Вергелес

МОСКВА
МФТИ
2016

Рецензенты

Кафедра общей физики-1 (отдел квантовой электроники)
Санкт-Петербургского государственного университета

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики
твёрдого тела и наносистем Национального исследовательского ядерного
университета «МИФИ» *А.И. Маймистов*

**Электродинамика сплошных сред. Отдельные вопро-
сы:** 1. Распространение волновых пакетов в диспергирующих
средах; 2. Методы трансформационной оптики и её применение
в вычислительных схемах; 3. Эффект Фарадея для распростра-
нения волн в гиротропных средах; 4. Рассеяние света на малых
резонансных частицах / сост. С.С. Вергелес. – М.: МФТИ, 2016.
– 38 с.

Учебно-методическое пособие посвящено отдельным темам в
электродинамике сплошных сред: распространение и эволюция
волновых пакетов в диспергирующих средах; методы трансфор-
мационной оптики и её применение в вычислительных схемах;
феноменология гиротропных сред и эффект Фарадея для рас-
пространения волн; оптическая теорема и рассеяние света на ма-
лых резонансных частицах.

Предназначено для студентов и преподавателей вузов, изуча-
ющих и интересующихся электродинамикой сплошных сред.

- © Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2016
© Вергелес С.С., 2016

Содержание

Введение	4
1. Распространение волновых пакетов	5
1.1. Монохроматическая волна в изотропной среде . . .	7
1.1.1. Распространяющаяся плоская монохроматическая волна	7
1.2. Распространение волнового пакета в среде с дисперсией	9
1.2.1. Выделение огибающей	9
1.2.2. Волновое уравнение на поле	10
1.2.3. Уравнение Шредингера на огибающую . . .	13
2. Магнитооптика	16
2.1. Феноменология	16
2.2. Эффект Фарадея	17
3. Трансформационная оптика	19
3.1. Трансформационная оптика в ортогональных криволинейных координатах	19
3.2. Идеально согласованный слой	22
3.3. Приложение: элементы дифференциальной геометрии	26
4. Рассеяние электромагнитных волн на частицах	29
4.1. Оптическая теорема	30
4.2. Рассеяние света на малых частицах	33
4.2.1. Резонансное рассеяние света	33
4.2.2. Взаимодействие частиц со светом в различных экспериментальных ситуациях	36
Литература	37

Электродинамика сплошных сред

Отдельные вопросы

Введение

Эти методические материалы появились в результате преподавания курса «Электродинамика конденсированных сред» на ФОПФ МФТИ в 2010-2015 гг.

Раздел 1 посвящён описанию эволюции волновых пакетов, распространяющихся в диспергирующей среде, в терминах уравнения Шредингера. Мы показываем, как совершается переход от волнового уравнения к уравнению Шредингера, если распределение электромагнитного поля во времени и пространстве соответствует волновому пакету. Предварительно в качестве справочного материала мы даём определения коэффициентов в разложении закона дисперсии, определяющих параметры распространения волновых пакетов.

Раздел 2 посвящён исследованию магнитооптических эффектов в простейшем случае эффекта Фарадея. Сначала из феноменологических соображений мы устанавливаем вид тензора диэлектрической проницаемости в изотропной среде с наложенным постоянным магнитным полем. После этого приводится вывод и анализ эффекта Фарадея – вращение поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся вдоль наложенного поля.

В разделе 3 обсуждается концепция трансформационной оптики. На примере сферически симметричной задачи строится слой, обеспечивающий «невидимость» находящегося внутри него тела. Далее рассматривается концепция идеально согласованного слоя (perfectly matched layer, PML). Такие слои используются в вычислительных схемах при моделировании задач электродинамики для достижения безотражательных граничных условий. В качестве удобства для читающих в приложении к этому разделу кратко приводится математический аппарат дифференциальной геометрии в необходимом для понимания основной части объёме.

Наконец, в разделе 4 рассмотрен вопрос о рассеянии электромагнитных волн на частицах малого размера. Сначала приводится вывод оптической теоремы для случая электромагнитных волн. Затем строится феноменология для описания рассеяния волн на частицах малого размера в случае, когда частота волны близка к резонансной частоте частицы. Например, таким резонансом может быть плазмонный резонанс на металлической частице или низший резонанс Ми на частице из оптически плотного прозрачного диэлектрика. В качестве анализа полученных результатов обсуждаются простейшие экспериментальные ситуации.

Мы полагаем, что данные методические материалы представляют интерес для использования в учебной работе как в МФТИ, так и в других университетах. Мы постарались привести аккуратное и полное изложение вышеперечисленных вопросов. В случае, когда мы видели необходимость ссылки на стандартные учебные пособия, мы указывали ссылку с точностью до параграфа или уравнения с тем, чтобы облегчить и ускорить усвоение материала. Автор выражает благодарность Парфеньеву Владимиру Михайловичу, Аникину Юрию Александровичу и Воробьёву Петру Евгеньевичу, которые также принимали участие в преподавании курса «Электродинамика конденсированных сред», за ценные советы и многочисленные обсуждения.

1. Распространение волновых пакетов

Эволюция электромагнитного поля в неограниченной однородной среде с линейным откликом описывается системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad (1)$$

где диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon}$ и магнитная восприимчивость $\hat{\mu}$ в общем случае являются тензорами второго ранга, действующими как нелокальные операторы во времени и пространстве: например,

$$D^i(t, \mathbf{r}) \equiv [\hat{\varepsilon} \mathbf{E}]^i = \int d^3 r' \int_{-\infty}^0 d\tau \varepsilon^{ik}(\tau, \mathbf{r}') E^k(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

В результате исключения магнитного поля получаем *волновое уравнение*

$$\left(\operatorname{rot} \hat{\mu}^{-1} \operatorname{rot} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \hat{\varepsilon} \right) \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Для того чтобы раскрыть математический смысл написанного уравнения, перепишем это уравнение в фурье-представлении. Электрическое поле в частотно-волновом представлении определяется согласно равенству

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} (d^3k) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} \exp\{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}\}, \quad (3)$$

где использована краткая запись $(d\omega) \equiv d\omega/2\pi$. Отметим, что в силу вещественности поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ выполняется соотношение $\mathbf{E}_{-\omega, -\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^*$. Уравнение (2) в фурье-представлении приобретает вид

$$\left(\epsilon_{ilj} \epsilon_{kmn} (\hat{\mu}^{-1}(\omega, \mathbf{k}))^{lm} k^n k^j - \varepsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_{\omega, \mathbf{k}}^k = 0, \quad (4)$$

где ϵ^{ikl} – символ Леви-Чивиты. Условие того, что уравнение (4) имеет нетривиальное решение, приводит к *дисперсионному уравнению*, устанавливающему зависимость частоты от волнового вектора и поляризации волны. Поляризацией волны называется соответствующее решение для \mathbf{E} , которое для линейной задачи определено с точностью до общего множителя. Каждому волновому вектору в общем случае соответствуют две поляризации. Фурье-образы диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k})$ и магнитной восприимчивости $\mu^{ik}(\omega, \mathbf{k})$ обладают всеми свойствами линейной восприимчивости. Антиэрмитова часть этих тензоров определяет скорость перехода электромагнитной энергии в тепловую вследствие диссипативных процессов. Эрмитова часть определяет скорость распространения волн в среде.

Отдельно мы будем интересоваться случаем, когда среда не магнитная, так что магнитная восприимчивость равна единице, $\hat{\mu} = 1$. Тогда (4) упрощается до уравнения

$$\left(k^2 \delta^{ik} - k^i k^k - \varepsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_{\omega, \mathbf{k}}^k = 0. \quad (5)$$

1.1. Монохроматическая волна в изотропной среде

Рассмотрим распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в изотропной среде. Для такой волны электромагнитное поле по определению зависит от времени и координат как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$.

В изотропной среде тензоры диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости пропорциональны единичному оператору, например, $\varepsilon^{ik}(\mathbf{k}, \omega) = \delta^{ik}\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$. Из уравнения (4) следует, что если диэлектрическая проницаемость отлична от нуля, $\varepsilon \neq 0$, то электрическое поле бездивергентно, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. В таком случае дисперсионное уравнение и уравнение на поляризацию упрощаются до вида

$$\mathbf{k}^2 - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (6)$$

В общем случае при действительной частоте волновой вектор волны оказывается комплексным. Разделим его действительную и мнимую части, представив волновой вектор волны в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \quad (7)$$

где \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' – действительные вектора. Теперь (6) можно переписать в виде двух действительных уравнений

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}[\varepsilon\mu], \quad 2\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Im}[\varepsilon\mu]. \quad (8)$$

1.1.1. Распространяющаяся плоская монохроматическая волна

Чаще всего под плоской волной подразумевают волну, в которой поле зависит только от одной координаты, так что $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$ в (8), в этом случае направление вектора \mathbf{k} есть направление распространения волны. Величина волнового вектора равна

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c}. \quad (9)$$

Можно ввести действительный единичный вектор \mathbf{n} , сонаправленный волновому вектору \mathbf{k} . Из уравнений Максвелла получаем, что связь между компонентами электрического и магнитного

поля задаётся равенствами

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = Z\mathbf{H}, \quad (\mathbf{n} + ik)[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (10)$$

где $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ называется *волновым импедансом*, а $\mathbf{n} + ik$ – комплексным показателем преломления, см. (11). Если ε и μ действительны, то это равенство справедливо не только для комплексных амплитуд, но и для самих действительных полей, см., например, рис. 1. Если среда немагнитная, $\mu = 1$, то волновой импеданс равен обратному комплексному коэффициенту преломления, $Z = (\mathbf{n} + ik)^{-1}$.

Показатели преломления и поглощения. Для описания распространения волн в среде вместо непосредственно ε и μ (которые, будучи комплексными, содержат в себе 4 действительных параметра) часто выбирают пару действительных параметров – *показатель преломления* n (*refractive index*, или *index of refraction*) и *показатель поглощения* k (*extinction coefficient*), которые определяются через формулу

$$\mathbf{n} + ik = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (11)$$

Полное комплексное число $\mathbf{n} + ik$ называется *комплексным показателем преломления* (*complex refractive index*). Особенно такая параметризация удобна, если известно, что среда немагнитная, т.е. $\mu = 1$. Тогда по n и k можно однозначно восстановить ε .

В частности, длина волны в среде λ и глубина проникновения δ (*penetration depth*) равны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \delta = \frac{1}{2k''} = \frac{\lambda_0}{4\pi k} = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{4\pi}, \quad (12)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ – длина волны в вакууме на данной частоте. При данном определении δ интенсивность волны, пропорциональная квадрату амплитуды поля, на расстоянии δ падает в e раз; обратная величина $\alpha = 1/\delta$ [см⁻¹] называется *коэффициентом поглощения* (*absorption (attenuation) coefficient*). Если $k \ll n$, то волна по мере распространения в среде успевает претерпеть много пространственных колебаний, прежде чем заметно ослабеть по интенсивности; в этом случае среда называется *прозрачной*.

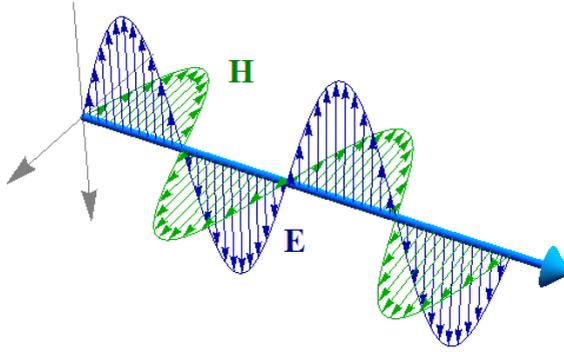


Рис. 1. Электромагнитное поле в линейно поляризованной плоской волне в случае прозрачной среды

1.2. Распространение волнового пакета в среде с дисперсией

Волновым пакетом называется такая волна, распределение поля в которой слабо отличается от распределения поля в монохроматической волне с некоторой частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 , которые связаны между собой законом дисперсии в среде:

$$\omega_0 = \omega_0(\mathbf{k}_0).$$

Для волнового пакета ω_0 называется *несущей частотой*, а \mathbf{k}_0 – *несущим волновым вектором*. Таким образом, динамика поля в волновом пакете в первом приближении такая же, как и динамика поля в монохроматической волне. Тем не менее обычно представляет интерес как раз отклонение от этой динамики, которое возникает из-за слабого отличия волнового пакета от плоской волны (его слабой немонахроматичности). При этом часто оказывается удобным рассматривать волновой пакет как единое целое, не раскладывая его заранее по плоским волнам.

1.2.1. Выделение огибающей

Рассмотрим волновой пакет и введём понятие огибающей. Почти монохроматичность означает, что характерное время изме-

нения *временной огибающей* $\tilde{\mathbf{E}}(t)$:

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \int_0^{+\infty} (d\omega) E_\omega e^{-i(\omega-\omega_0)t}, \quad (13)$$

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(t) e^{-i\omega_0 t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(t) e^{i\omega_0 t} = 2 \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(t) e^{-i\omega_0 t}],$$

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_{\omega-\omega_0}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}_{\omega+\omega_0}^*(\mathbf{r})$$

является большим по сравнению с периодом колебания поля $2\pi/\omega_0$. Как следует из определения, огибающая имеет только положительные фурье-гармоники в том смысле, что $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega < \omega_0} = 0$ (фурье-образ огибающей определяется аналогично (3)). Время изменения огибающей $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ оценивается как $1/\Delta\omega$, т.е. $\Delta\omega$ – характерная частота, на которой убывает $\tilde{\mathbf{E}}_\omega$; эта частота называется *спектральной шириной пакета*. Почти монохроматичность волнового пакета означает, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0.$$

Поскольку все волны в пакете распространяются почти в одну сторону, то временную огибающую можно обобщить до *пространственно-временной огибающей*. По аналогии с (13) представим фурье-компоненту электрического поля в виде

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0} + \Phi_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0}^*,$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} [e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r})],$$

где фурье-образ огибающей $\Phi_{\omega, \mathbf{k}}$ имеет один максимум при нулевых значениях волнового вектора и частоты и убывает на $k \sim \Delta k$, $\omega \sim \Delta\omega$. В силу нашего предположения о том, что все волны в волновом пакете распространяются почти в одну сторону, ширина по волновому вектору также должна быть малой, так что

$$\Delta k \ll k_0.$$

1.2.2. Волновое уравнение на поле

Для простоты изложения рассмотрим распространение плоского волнового пакета с фиксированной поляризацией. Тогда

электрическое поле $E(t, z)$ можно представить скалярной величиной, где z – координата вдоль направления распространения волнового пакета.

Волновое уравнение, учитывающее временную дисперсию среды, имеет вид

$$\partial_z^2 E = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') E(t - t') + f(t, z). \quad (14)$$

Для краткости записи мы приняли, что магнитная восприимчивость равна единице, $\mu = 1$, что в данном случае не ограничивает общности рассуждений. Сила f играет роль внешнего источника, возбуждающего волну; свободное электромагнитное поле соответствует $f = 0$. В частности, в силу f можно включить нелинейную по электрическому полю часть поляризации среды P^{NL} , положив таким образом $f = 4\pi \partial_t^2 P^{NL}/c^2$. В фурье-представлении уравнение (14) переписывается в виде

$$(k^2 - \beta^2(\omega)) E_{\omega, k} = -f_{\omega, k}, \quad (15)$$

где волновой вектор определяется дисперсионным соотношением

$$\beta^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Для определённости мы предполагаем, что волна распространяется вправо, так что следует выбирать решение $\text{Re } \beta > 0$.

Вследствие того, что спектральная ширина рассматриваемых импульсов мала, нам не нужно знать всю зависимость $\beta(\omega)$ волнового вектора от частоты, а необходимо знать только несколько первых производных на несущей частоте $\omega = \omega_0$. Приняты следующие обозначения для этих производных:

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Фазовая скорость. Фазовая скорость v_{ph} показывает, с какой скоростью движется гребень монохроматической волны:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega_0}{k_0} = nc, \quad k_0 = \beta(\omega_0), \quad (16)$$

где n – коэффициент преломления.

Групповая скорость. Если мы удержим в дисперсии $\beta(\omega)$ только первую производную по частоте, то $\beta(\omega)$ представляется в виде

$$\beta(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}, \quad (17)$$

где групповая скорость

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv \frac{1}{\beta_1}.$$

В англоязычной литературе также используется параметр *group index* n_g , который определяется как

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}, \quad v_g = \frac{c}{n_g}. \quad (18)$$

Из волнового уравнения следует, что неопределённости в волновом векторе Δk и $\Delta \omega$ связаны между собой через групповую скорость, так что верна оценка

$$\Delta \omega \sim v_g \Delta k.$$

Групповая скорость, как будет показано ниже, определяет скорость движения волнового пакета.

Вторая дисперсия. Параметр β_2 называется *дисперсией групповой скорости*, в англоязычной литературе – *group velocity dispersion*, *GVD*. Если на интересующей частоте он положителен, $\beta_2 > 0$, то говорят о нормальной дисперсии (*normal dispersion*). Если $\beta_2 < 0$, говорят об аномальной дисперсии (*anomalous dispersion*).

Часто вместо коэффициента β_2 пользуются другим коэффициентом

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}, \quad (19)$$

называемым коэффициентом хроматической дисперсией (*group delay parameter*). Как будет показано ниже, дисперсия групповой скорости определяет скорость расплывания волнового пакета.

1.2.3. Уравнение Шредингера на огибающую

Запишем волновое уравнение (15) в терминах огибающей Φ :

$$\left[(k_0 - i\partial_z)^2 - (\beta(\omega_0 + i\partial_t))^2 \right] \Phi(t, z) = -f_+, \quad (20)$$

где мы у силы f выделили огибающую f_+ :

$$f = 2 \operatorname{Re}[f_+(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)],$$

предполагая, что в Фурье-представлении $f_{\omega, k}$ имеет узкие максимумы там же, где и $E_{\omega, k}$. При получении уравнения (20) мы пользовались соотношениями типа

$$\begin{aligned} \partial_z e^{ik_0 z} \Phi(z) &= e^{ik_0 z} (ik_0 + \partial_z) \Phi(z), \\ \beta(i\partial_t) e^{-i\omega_0 t} \Phi(t) &= e^{-i\omega_0 t} \beta(\omega_0 + i\partial_t) \Phi(t), \\ \Phi(t - \tau) &= e^{-\tau \partial_t} \Phi(t). \end{aligned}$$

В силу узости спектральной ширины волнового пакета, производные по времени и координате в (20) следует воспринимать как малые поправки к ω_0 и k_0 соответственно, вследствие чего по этим производным возможно производить формальное разложение в ряд Тейлора.

Разложимся до первого порядка по этим поправкам и опустим внешний источник f как несущественный для текущих рассуждений. В результате получим уравнение

$$-2ik_0 \left(\partial_z + \frac{1}{v_g} \partial_t \right) \Phi(t, z) = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, если огибающая зависит от времени и координаты только через комбинацию $z - v_g t$, то есть $\Phi = \Phi(z - v_g t)$. Таким образом, в этом первом приближении мы установили, что волновой пакет движется с групповой скоростью v_g (17) ‘вправо’, то есть в сторону увеличения координаты z .

Тем не менее сделанное приближение не улавливает изменения формы огибающей со временем. Поэтому наша цель – переписать волновое уравнение (20) в таком виде, который был бы удобен для описания эволюции волнового пакета. Для этого от лабораторной системы координат $\{t, z\}$ имеет смысл перейти в

такую систему координат, у которой одной из координат является комбинация $z - v_g t$; так мы будем рассматривать волновые пакеты, двигающиеся вправо и исключим их равномерное движение с групповой скоростью v_g . Вторая координата может быть выбрана в виде суммы исходных координат z, t с произвольными коэффициентами, конкретный выбор которых зависит от физической постановки задачи. Мы рассмотрим два варианта такого выбора: *лабораторную запаздывающую систему координат* и *сопровождающую систему координат*.

Лабораторная запаздывающая система координат. Лабораторная запаздывающая система координат $\{z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}\}$ определяется согласно равенствам:

$$t_{\text{ret}} = t - z/v_g, \quad z_{\text{new}} = z.$$

Смысл введённых новых координат следующий. Мы фиксируем положение приёмника, иными словами, координату z_{new} . Время же мы начинаем отсчитывать не от абсолютного значения, а от момента, когда в точку расположения приёмника придёт импульс, распространяющийся со скоростью v_g и пущенный из начала координат в нулевой момент времени по абсолютноному его отсчёту. В итоге получаем, что форма волнового пакета определяется зависимостью огибающей от t_{ret} при фиксированном z_{new} , тогда как его эволюция происходит с ростом координаты z_{new} . Стоит также заметить, что при выводе уравнения типа (23), описывающего эволюцию волнового пакета, удобно записывать закон дисперсии в виде $\beta = \beta(\omega)$.

При такой замене переменных частные производные по z_{new} и t преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}.$$

Перепишем (20) в лабораторной запаздывающей системе координат, разложившись до второго порядка малости по ширине волнового пакета:

$$\left(-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} + k_0 \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 + \dots \right) \Phi = -f_+, \quad (21)$$

где многоточием обозначены вклады, пропорциональные перекрёстной производной по $z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}$ и второй производной по z_{new} .

Оценим характерные значения частных производных по координате и запаздывающему времени. Характерная величина производной по времени оценивается как

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \sim \Delta\omega \sim v_g \Delta k.$$

Переход от простого времени к запаздывающему приводит к тому, что в волновом уравнении на $\Phi_{\omega, k}$ исключается первая производная по времени t_{ret} , тогда как первая производная по координате z_{new} не исчезает. Вследствие этого оценкой для производной по координате является

$$v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} \sim \frac{1}{v_g} \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 \sim \frac{\Delta k}{k_0} v_g \Delta k \ll \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе отсчёта приобретает вид уравнения Шредингера с источником:

$$\left[-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right] \Phi = -\frac{1}{2k_0} f_+. \quad (23)$$

При получении (23) мы пренебрегли в (21) высшими поправками по ширине импульса в соответствии с оценкой (22) (эти поправки были уже скрыты многоточием). Мы также опустили индексы ‘new’ и ‘ret’ у эволюционной координаты и запаздывающего времени.

Сопровождающая (движущаяся) система координат. Сопровождающая система координат $\{t_{\text{new}}, z_{\text{rel}}\}$:

$$t_{\text{new}} = t, \quad z_{\text{rel}} = z - v_g t = -v_g t_{\text{ret}}$$

– является более интуитивно понятной: в этой системе координат мы наблюдаем изменение со временем пространственной структуры волнового пакета, двигаясь вместе с пакетом с групповой скоростью v_g . При использовании сопровождающей системы координат, наоборот, удобно записывать закон дисперсии в виде $\omega = \omega(\beta)$.

Вторые производные преобразуются по правилам

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{new}}} - v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}.$$

Продельвая ту же процедуру, что привела к (23), получаем уравнение

$$\left[-i\partial_t + \frac{v_g^3 \beta_2}{2} \partial_z^2 \right] \Psi = -\frac{v_g}{2k_0} f_+, \quad (24)$$

аналогичное уравнению (23). Как мы видим, в главном порядке по ширине пакета уравнения (23),(24) переходят друг в друга простыми заменами $v_g t_{\text{new}} \leftrightarrow z_{\text{new}}$ и $v_g t_{\text{ret}} \leftrightarrow -z_{\text{rel}}$.

2. Магнитооптика

Если на среду наложить внешнее поле, то, вообще говоря, её линейные отклики на дополнительные малые возмущения претерпят изменения. Эффекты, связанные с изменением диэлектрической проницаемости среды при наложении на неё постоянного магнитного поля, называют магнитооптическими эффектами. В монографии [3] подробно изложены экспериментальные сведения о магнитооптических эффектах в разных средах на состояние науки 20-летней давности.

2.1. Феноменология

Мы рассмотрим простейший случай, когда среда является изотропной в состоянии без магнитного поля; в этом случае тензор диэлектрической проницаемости среды пропорционален единичной матрице. После наложения внешнего постоянного магнитного поля изотропия оказывается нарушенной, поскольку в среде теперь есть выделенное направление – направление магнитного поля. Диэлектрическая проницаемость ε^{ij} в присутствии магнитного поля должна иметь следующую структуру:

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_t (\delta^{ij} - h^i h^j) + \varepsilon_l h^i h^j + i\chi_m \varepsilon^{ijk} \mathbf{N}^k, \quad (25)$$

где коэффициенты ε_t , ε_l и χ_m являются функциями квадрата магнитного поля \mathbf{N}^2 , а единичный вектор $h^i = \mathbf{N}^i / N$ направлен вдоль постоянного магнитного поля (таким образом, размерность χ_m отлична от размерностей $\varepsilon_{t,l}$). Вид (25) продиктован,

во-первых, тем, что ε^{ik} является тензором, в то время как магнитное поле \mathbf{H} является псевдовектором. Во-вторых, ограничение накладывает обобщённый принцип симметрии кинетических коэффициентов (см. [1, Ур. (101)])

$$\varepsilon^{ji}(-\mathbf{H}) = \varepsilon^{ij}(\mathbf{H}).$$

Отметим, что предположение о прозрачности среды на интересующих частотах, соответствующее условию отсутствия диссипации (см. [1, Ур. (96.5)])

$$\varepsilon^{*ji} = \varepsilon^{ij},$$

приводит к дополнительному требованию вещественности всех трёх величин ε_t , ε_l и χ_m .

Связь между вектором электрической индукции и электрическим полем задаётся равенством

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}_s \mathbf{E} + i[\mathbf{E} \times \mathbf{g}], \quad \varepsilon_s^{ij} = \varepsilon_t (\delta^{ij} - h^i h^j) + \varepsilon_l h^i h^j, \quad \mathbf{g} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (26)$$

где за $\hat{\varepsilon}_s$ обозначена симметричная часть тензора диэлектрической проницаемости (25), а псевдовектор \mathbf{g} называется *вектором гирации* (*gyration vector*). Величина χ_m называется *магнетоптической восприимчивостью* (*magneto-optical susceptibility*).

2.2. Эффект Фарадея

Продольный магнитооптический эффект Фарадея заключается в том, что линейно поляризованный свет, распространяющийся вдоль магнитного поля, испытывает вращение плоскости поляризации при прохождении через среду, обладавшую изотропией в отсутствие магнитного поля. Это означает, что две круговые поляризации света распространяются с разными фазовыми скоростями.

Найдём связь этих эффектов с константами ε_t и χ_m . Направим ось Oz декартовой системы координат по магнитному полю \mathbf{H}_0 . Для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, компонента электромагнитной индукции $D^z = 0$, поскольку всегда $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}) = 0$. В силу вида тензора диэлектрической проницаемости (25) электрическое поле волны также направлено нормально

к статическому полю \mathbf{H}_0 . Поэтому волновое уравнение (5) для нашего частного случая переписывается в виде

$$[(ck)^2 - \omega^2 \varepsilon_t] \delta^{\alpha\beta} - i\omega^2 \chi_m H_0 \epsilon^{\alpha\beta} E^\beta = 0, \quad (27)$$

где единичный антисимметричный тензор определён согласно равенствам $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$, $\epsilon^{xy} = 1$. Решением этого уравнения являются две круговые поляризации $E_{\omega\pm}$, распространяющиеся с волновыми векторами k_{\pm} :

$$\mathbf{E}_{\omega\pm} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_t \pm H_0 \chi_m}, \quad (28)$$

где для вектора поляризации приведены только xy -компоненты.

Если исходно (в точке $z = 0$) поляризация поля была линейной и направленной по оси Ox , то в ходе распространения волны её поляризация меняется согласно закону

$$\mathbf{E}_\omega(z) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ik_+z} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik_-z} \propto e^{ikz} \begin{pmatrix} \cos(\delta k \cdot z) \\ \sin(\delta k \cdot z) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где средний волновой вектор $k = (k_+ + k_-)/2$, а разность волновых векторов $\delta k = (k_+ - k_-)/2$. Таким образом, поляризация линейно поляризованного света действительно поворачивается в процессе прохождения через рассматриваемую среду.

При относительно слабом магнитном поле можно считать, что антисимметричная добавка в тензор диэлектрической проницаемости мала, $H_0 \chi_m \ll \varepsilon_t$, а сама величина ε_t слабо отличается от величины диэлектрической проницаемости ε_0 в отсутствие магнитного поля. Тогда обратный период поворота вектора поляризации даётся выражением

$$\delta k = \frac{\omega \chi_m H_0}{c 2\sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (30)$$

Если справедливо предположение, что при уменьшении магнитного поля магнетооптическая восприимчивость χ_m стремится к постоянному значению, то из (30) следует, что период поворота вектора поляризации волны обратно пропорционален магнитному полю.

3. Трансформационная оптика

Концепция трансформационной оптики состоит в том, чтобы неоднородному распределению в пространстве диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости поставить в соответствие задачу о распространении света в криволинейном пространстве, где, однако, среда обладает свойством вакуума, у которого отсутствует отклик на электромагнитное поле.

Пусть ξ^μ , где $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = \{1, 2, 3\}$ – некоторые криволинейные координаты. Индексами i, j, k, \dots по-прежнему будем обозначать декартовы координаты. В § 3.3 приведён краткий математический аппарат, касающийся криволинейных координат, вложенных в декартово пространство. Уравнения Максвелла, записанные в ковариантной форме, имеют вид

$$\mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu H_\lambda = \frac{1}{c}\partial_t\varepsilon^{\mu\nu}E_\nu, \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda}\nabla^\nu E^\lambda = -\frac{1}{c}\partial_t\mu_{\mu\nu}H^\nu, \quad (31)$$

где $\mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda}$ и $\mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda}$ – абсолютно антисимметричные контравариантный и ковариантный тензоры, которые в декартовых координатах равны символу Леви-Чивиты ϵ^{ijk} . Мы специально записали эти два уравнения Максвелла в разных формах, чтобы показать возможные варианты записи.

3.1. Трансформационная оптика в ортогональных криволинейных координатах

В ортогональных криволинейных координатах уравнения Максвелла (31) могут быть упрощены. Для того чтобы в дальнейшем применить концепцию трансформационной оптики, которая изменяет метрику координатной системы, следует использовать первую форму записи (31), поскольку в этом случае в уравнение явно не входит символ Кристоффеля, и таким образом зависимость уравнения от метрики объединяется с зависимостью от тензоров $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$. Предположим также, что тензоры $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ имеют диагональный вид в выбранных криволинейных координатах. Тогда уравнение Максвелла имеет вид

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu H_\lambda = \frac{1}{c}\frac{q_1q_2q_3}{q_\mu^2}\partial_t\varepsilon_\mu E_\mu, \quad (32)$$

где в правой части уравнения нет суммирования по μ , ε_μ – диагональный элемент матрицы диэлектрической проницаемости в ортонормированной системе координат

$$\varepsilon_\mu = \frac{\varepsilon_{\mu\mu}}{(q_\mu)^2},$$

а q_μ – коэффициенты Ламе.

В качестве примера возьмём сферически симметричную задачу, см. рис. 2. Нам хотелось бы, чтобы внутренняя область была недоступна для лучей, падающих на конструкцию снаружи; более того, чтобы проходящие лучи с точки зрения внешнего наблюдателя как бы не замечали всей этой конструкции. Эта цель достигается подбором специальных свойств слоя $a < r < b$.

Для описания поведения лучей в слое введём криволинейную систему координат $\{r', \theta, \varphi\}$, которая отличается от сферической системы координат $\{r, \theta, \varphi\}$ преобразованием

$$r' = \frac{r - a}{b - a}b, \quad a < r < b, \quad (33)$$

где $a > b$. Таким образом, те точки, которые заполняют всю внутренность сферы радиуса b в $\{r', \theta, \varphi\}$, соответствуют всего лишь слою $a < r < b$ в реальности. При $r > b$ системы координат совпадают. Поставленные нами требования к распространению волн будут выполняться, если будет реализована концепция *трансформационной оптики*: при правильных свойствах слоя $a < r < b$ уравнения Максвелла в координатах $\{r', \theta, \varphi\}$ должны записываться в виде, как если бы эта система координат была бы сферической (будем её называть воображаемой сферической системой координат). Тогда лучи будут идти примерно так, как показано на рис. 2.

Все величины, записанные для системы координат $\{r', \theta, \varphi\}$, будем снабжать штрихом; в частности, коэффициенты Ламе q'_μ равны

$$q'_r = \frac{b}{b - a}, \quad q'_\theta = r, \quad q'_\varphi = r \sin \theta \quad (34)$$

при $a < r < b$. Коэффициенты Ламе $q_\mu(r, \theta, \varphi)$ соответствуют сферической системе координат.

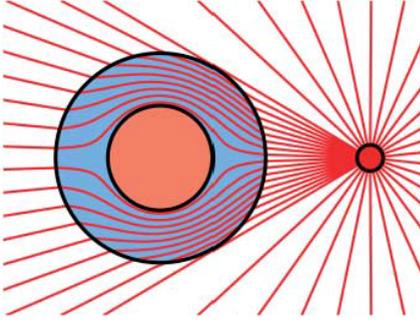


Рис. 2. Огибание лучами внутреннего пространства радиуса a , расположенного за сферическим слоем толщиной $b - a$. Рисунок взят из [5]

Формализуем концепцию трансформационной оптики для данного примера. Реальная точка (real point) – это точка с координатами $\{r, \theta, \varphi\}$ в сферической системе координат; воображаемая точка (imagined point) – это точка с координатами $\{r', \theta, \varphi\}$ в воображаемой сферической системе координат. Систему координат $\{r', \theta, \varphi\}$ мы сделаем воображаемой сферической, если припишем ей метрику сферической системы координат $q_\mu(r', \theta, \varphi)$.

Для реализации процедуры сначала надо записать уравнения Максвелла (32) в системе координат $\{r', \theta, \varphi\}$:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial'_\nu H_\lambda = \frac{1}{c} \partial_t \boxed{\frac{q'_1 q'_2 q'_3}{q_\mu'^2} \epsilon_\mu} E_\mu.$$

Из приведённых рассуждений вытекает, что это уравнение должно совпадать с уравнением Максвелла в пустоте, записанным в воображаемой сферической системе координат $\{r', \theta, \varphi\}$:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial'_\nu H_\lambda = \frac{1}{c} \partial_t \boxed{\frac{q_1 q_2 q_3}{q_\mu^2} \Big|_{\substack{\text{imagined} \\ \text{point } \{r', \theta, \varphi\}}} E_\mu.$$

Таким образом, обведённые в прямоугольники факторы должны

быть равны:

$$\left. \frac{q'_1 q'_2 q'_3}{q_\mu'^2} \varepsilon_\mu \right|_{\text{real point}} = \left. \frac{q_1 q_2 q_3}{q_\mu^2} \right|_{\text{imagined point}}. \quad (35)$$

Аналогичные равенства выписываются для уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \hat{\mu} \mathbf{H} / c$. При $r < b$ для ε_r и μ_r получаем выражение

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{1}{q_r'} \frac{r'^2}{r^2} = \frac{b}{b-a} \frac{(r-a)^2}{r^2}, \quad (36)$$

а для остальных компонент

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \mu_\theta = \mu_\varphi = q_r' = \frac{b}{b-a}. \quad (37)$$

При $r > b$ воображаемая система координат совпадает с реальной, и потому, как и требовалось, в этой области остаётся пустота, $\varepsilon = \mu = 1$.

3.2. Идеально согласованный слой

В задачах численного счёта по причине конечности расчётной памяти невозможно проводить моделирование распространения электромагнитного поля в неограниченном пространстве. Таким образом, в любом случае численное моделирование распространения электромагнитного поля производится в ограниченном объёме (как говорят, ячейке). При этом геометрические параметры ячейки выбираются из соображений баланса между физическим содержанием задачи и экономией расчётных ресурсов.

Для того чтобы уравнения Максвелла стали полностью определёнными, на границе ячейки требуется поставить граничные условия. В случае самых простых граничных условий – идеальный металл или идеальный магнитный проводник – электромагнитные волны отражаются от границы ячейки. С другой стороны, для большей части задач физическими граничными условиями является отсутствие волн, приходящих из бесконечности. Таким образом, геометрическая форма ячейки в конечном итоге искажает результаты численного эксперимента.

Как оказывается, можно поставить такие граничные условия, которые соответствуют отсутствию отражения от внутренней поверхности ячейки. Будем рассматривать распространяющуюся в вакууме монохроматическую волну с частотой ω и добиваться того, чтобы она не отражалась от поверхности некоторого материала, являющейся границей физической области ячейки.

Обратимся сначала к формулам Френеля. В случае нормального падения коэффициент отражения равен нулю, если волновые импедансы обеих сред равны между собой:

$$Z_i \equiv \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}} = \sqrt{\frac{\mu_t}{\varepsilon_t}} \equiv Z_t, \quad (38)$$

см. [4, Ур, (67.13)]. С другой стороны, если комплексный коэффициент преломления имеет мнимую часть, то прошедшая волна экспоненциально затухает вглубь материала. В соответствии с этими рассуждениями возьмём в качестве границы ячейки слой материала толщиной l с коэффициентами $\mu = \varepsilon$ и комплексным показателем преломления $n + ik$, так что глубина проникновения δ мала по сравнению с толщиной слоя l :

$$\delta = \frac{c}{2\omega k} \ll l,$$

см. (12). На задней границе слоя поставим граничные условия идеального металла. Тогда нормально падающая волна изнутри ячейки будет без отражения проходить в граничный слой, будучи ослабленной в $\exp(l/\delta) \gg 1$ раз – отражаться от задней границы слоя и затем ослабленной второй раз выходить обратно в объём ячейки. При достаточной толщине слоя выходящей обратной волной можно пренебречь, и, таким образом, для частного случая нормально падающих волн мы достигли полного отсутствия отражения.

Тем не менее, если угол падения волны на поверхность ненулевой, по-прежнему сохраняется ненулевое отражение, см. [4, Ур, (67.13)]. Для того чтобы выработать принцип построения свойств слоя, для ясности изложения переформулируем сначала случай нормального падения с точки зрения трансформационной оптики. Будем считать для примера, что распределение диэлектри-

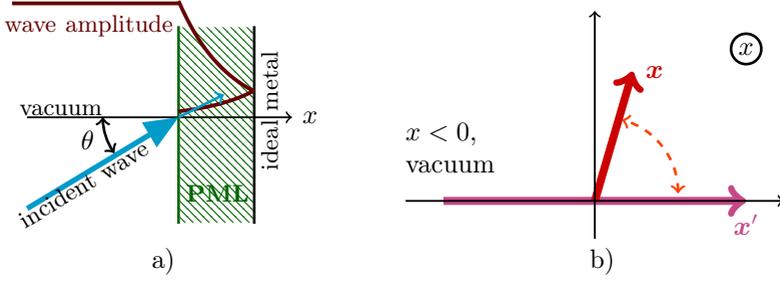


Рис. 3. а) волна, падающая на идеально согласованный слой (PML), за которым находится идеальный металл; б) комплексная плоскость координаты x

ческой проницаемости и магнитной восприимчивости имеет вид

$$\begin{aligned} \mu = \varepsilon = 1, \quad x < 0; \\ \mu = \varepsilon = e^{i\psi}, \quad 0 < \psi < \pi/2, \quad x > 0; \end{aligned} \quad (39)$$

тогда коэффициент поглощения $\alpha = 2k_0 \sin(\psi)$, где волновой вектор в пустоте $k_0 = \omega/c$. Теперь воспользуемся концепцией трансформационной оптики: перейдём в воображаемую систему координат, в которой зависимость (39) перешла в зависимость метрики от координат:

$$g_{xx} = 1, \quad x < 0, \quad g_{xx} = e^{2i\psi}, \quad x > 0,$$

а $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$, соответственно, равны единице во всём пространстве. Наконец, для области $x > 0$ сделаем поворот в комплексной плоскости x , а именно сделаем замену:

$$\begin{aligned} x = x', \quad x < 0 \\ x \rightarrow e^{-i\psi} x', \quad x > 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g_{x'x'} = 1 \quad \forall x', \quad (40)$$

см. рис. 3б. В результате распространение электромагнитной волны, приходящей из области $x < 0$, но далее распространяющейся вдоль контура x' , происходит в пустом пространстве, т.е. без отражения. В этом случае зависимость поля от координаты

описывается бегущей экспонентой $\exp(-k_0 x')$. Теперь для области $x' > 0$ совершим обратный поворот (40). Зависимость поля от координаты в реальном пространстве приобретает вид

$$\exp(ik_0 x), \quad x < 0, \quad \exp(i e^{i\psi} k_0 x), \quad x > 0, \quad (41)$$

как и должно быть (мы пренебрегли волной, отражённой от задней стенки слоя).

После этих рассуждений не сложно сказать, каковы должны быть свойства слоя, если мы рассматриваем касательное падение волны. Слой должен обладать анизотропными свойствами соответствующими одноосной симметрии относительно нормали к плоскости слоя, так что ненулевыми матричными элементами $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ являются

$$\epsilon_{xx} = \mu_{xx} = e^{-i\psi}, \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = e^{i\psi}. \quad (42)$$

Тогда зависимость поля от координаты x будет отличаться от (41) только заменой $k_0 \rightarrow k_x = k_0 \cos \theta$, где θ – угол падения волны. При этом в воображаемой системе координат коэффициенты Ламе $q_x = e^{i\psi}$, $q_y = q_z = 1$, так что уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_x E_y - \partial_y E_x &= e^{i\psi} i k_0 H_z, \\ \partial_y E_z - \partial_z E_y &= e^{-i\psi} i k_0 H_x, \end{aligned}$$

поэтому поворот в комплексной плоскости координаты x (40) справа от границы раздела теперь вовлекает и x -компоненты поля,

$$x \rightarrow e^{-i\psi} x', \quad E_x \rightarrow e^{i\psi} E_x, \quad H_x \rightarrow e^{i\psi} H_x.$$

В заключение вывода отметим, что к ψ можно выбрать комплексным, положив $\psi = \psi' + i\psi''$. Мнимый вклад ψ'' изменяет абсолютное значение коэффициента поглощения:

$$\alpha = 2k_0 \exp(-\psi'') \sin(\psi'), \quad (43)$$

что позволяет подстраивать толщину слоя из соображений удобства проведения численного счёта.

Построенный слой, реализующий безотражательные граничные условия, называют *идеально согласованным слоем* (*perfectly*

matched layer, PML). Отсутствие отражения от построенной анизотропной среды можно было бы получить и непосредственно из уравнений Максвелла, см., например, [8]. Однако использование идей трансформационной оптики, с одной стороны, технически упрощает эту задачу, а с другой стороны, позволяет выявить принцип построения такого слоя.

3.3. Приложение: элементы дифференциальной геометрии

Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство с декартовой системой координат r^i , $\{i, j, k, \dots\} = \{1, 2, 3\}$. Пусть также в этом пространстве определена некоторая криволинейная система координат ξ^μ , $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = \{1, 2, 3\}$. Техника дифференциальной геометрии позволяет обобщать запись векторных и тензорных равенств, сформулированных исходно чаще всего в декартовой системе координат, на криволинейные координаты.

Матрицы перехода для тензоров от декартовой к криволинейной системе координат и обратно:

$$\Lambda_i^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial r^i} \equiv \partial_i \xi^\mu, \quad \Lambda_\mu^i = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\mu} \equiv \partial_\mu r^i, \quad \Lambda_i^\mu \Lambda_\mu^k = \delta_{ik}. \quad (44)$$

Произвольные векторные поля v^i, w^i , записанные в декартовых координатах, переписываются в криволинейных координатах согласно правилу:

$$v^\mu = \Lambda_i^\mu v^i, \quad v_\mu = \Lambda_\mu^i v^i. \quad (45)$$

Таким образом, если в декартовых координатах вопрос, имеет ли векторный индекс верхнее и нижнее положение, не имеет значения, то для криволинейных координат верхнее v^μ и нижнее v_μ положение векторного индекса соответствует контравариантному и ковариантному векторным полям v . Вообще величины, преобразующиеся при переходе из одной криволинейной системы координат в другую согласно правилам (45), называются тензорами; например, тензором является произведение $v^\mu w^\nu$.

Скалярное произведение двух полей v^i и w^i в криволинейных координатах записывается в виде свёртки по нижнему и верхнему индексам:

$$v^i w^i = v_\mu w^\mu = v^\mu w_\mu.$$

Отметим, что операция суммирования по двум верхним или по двум нижним индексам в произвольном выражении, записанная в криволинейных координатах, не приводит к получению тензора, и потому в общем случае запрещена. В общем случае операция суммирования по паре верхний–нижний индексы называется *свёрткой* (*convolution*).

Метрический тензор (*metric tensor*)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^i, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}. \quad (46)$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ содержит полную информацию о соотношении малых приращений криволинейных координат с расстоянием, площадью и объёмом в декартовой системе координат. В частности, элемент объёма

$$d^3r = \sqrt{g} d^3\xi, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

Метрический тензор позволяет переводить контравариантное поле в ковариантное и обратно:

$$v_{\mu} = g_{\mu\nu} v^{\nu}, \quad v^{\mu} = g^{\mu\nu} v_{\nu}. \quad (47)$$

Градиент скалярного поля φ в криволинейных координатах вычисляется также, как и в декартовых:

$$\Lambda_{\nu}^i \partial_i \varphi \equiv \nabla_{\nu} \varphi = \partial_{\nu} \varphi \quad (48)$$

согласно (45). Поле $\partial_{\nu} \varphi$ является, таким образом, ковариантным полем. Аналогично, градиент $\partial_i v^k$ некоторого векторного поля v^k в его ковариантной записи в криволинейных координатах определяется согласно правилу

$$\Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^k \partial_i v^k \equiv \nabla_{\mu} v_{\nu} = \partial_{\mu} v_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} v_{\lambda}. \quad (49)$$

Таким образом, в отличие от случая скаляра (48), $\partial_{\mu} v_{\nu}$ не является ковариантным тензором второго ранга, тогда как $\nabla_{\mu} v_{\nu}$ является. Не является, соответственно, и тензором *символ Кристоффеля* (*Christoffel symbols*) $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$: при переходе из одной криволинейной системы координат в другую он не преобразуется согласно правилам (45); тем не менее поднятие и опускание индексов у символа Кристоффеля производится по тем же правилам (47). В случае, если в (49) градиент берётся не от вектора,

а от тензора ранга n (например, $v_\mu w_\nu$, ранг 2), то вместо одного слагаемого с символом Кристоффеля в (49) должно стоять, соответственно, n слагаемых. Градиент контравариантного поля имеет вид

$$\Lambda_\mu^i \Lambda_k^\nu \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda. \quad (50)$$

Приняты обозначения:

$$\nabla_\mu v_\nu = v_{\nu;\mu}, \quad \partial_\mu v_\nu = v_{\nu,\mu}, \quad \nabla^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad v_\nu{}^{;\mu} = g^{\mu\lambda} v_{\nu;\lambda},$$

∇_μ называется ковариантной производной в отличие от простой производной ∂_μ . Символы Кристоффеля могут быть вычислены согласно формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \Lambda_\lambda^i \partial_\mu \Lambda_\nu^i = \Lambda_\lambda^i \partial_\mu \partial_\nu r^i = \\ &= (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) / 2. \end{aligned}$$

Ковариантная производная коммутирует с метрическим и абсолютно антисимметричным (52) тензорами:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \nabla_\lambda, \quad \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda, \quad \nabla_\lambda \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} = \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda. \quad (51)$$

Эти равенства легко проверить, записав результат дифференцирования в декартовых координатах, где метрический и антисимметричный тензор постоянны в пространстве и равны соответственно δ^{ik} и ϵ^{ikl} .

Для того чтобы понять, как устроена операция взятия ротора в криволинейных координатах, будем отталкиваться от того, что в декартовых координатах $[\text{rot } \mathbf{v}]^i = \epsilon^{ikl} \partial_k v^l$, где ϵ^{ikl} – 3-мерный символ Леви-Чивита (*3-dimensional Levi-Civita symbol*). Поэтому определим сначала абсолютно антисимметричный тензор

$$\mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} = \Lambda_i^\mu \Lambda_j^\nu \Lambda_k^\lambda \epsilon^{ijk} = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{\sqrt{g}}, \quad \mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{g} \epsilon^{\mu\nu\lambda}. \quad (52)$$

В знаменателе стоит \sqrt{g} , поскольку при преобразовании из декартовых координат в криволинейный фактически вычисляется детерминант матрицы перехода, $\det \|\Lambda_i^\mu\| = 1/\sqrt{g}$, с точностью до знака. Поскольку $\text{rot } \mathbf{v}$ является вектором, то

$$[\text{rot } \mathbf{v}]^\mu = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu v_\lambda = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu v_\lambda. \quad (53)$$

Таким образом, в операции взятия ротора, записанной в терминах ковариантного вектора, не участвуют символы Кристоффеля в силу их симметрии по последней паре индексов. Тем не менее в выражении типа $[\text{rot } \mathbf{v}]_{\mu} = \mathfrak{E}_{\mu\nu\lambda} \nabla^{\nu} v^{\lambda}$ нельзя заменять ковариантную производную простой, поскольку дифференцируется контравариантное векторное поле \mathbf{v} .

Ортогональные криволинейные координаты. Ортогональные криволинейные координаты характеризуются тем, что метрический тензор имеет диагональный вид во всём пространстве:

$$g_{\mu\mu} = (q_{\mu})^2, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \quad (54)$$

где q_{μ} называются коэффициентами Ламе.

4. Рассеяние электромагнитных волн на частицах

Теория рассеяния в скалярном случае (когда поле скалярно, и потому волна не имеет различных поляризаций) подробно изложена в [6]. Векторная структура уравнений Максвелла приносит дополнительные особенности в процесс рассеяния. Кроме того, диссипация в сплошной среде нарушает законы сохранения энергии. Этим особенностям будет посвящено наше изложение.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, рассеивающуюся на некотором центре рассеяния. Для определённости будем полагать, что падающая волна распространяется в вакууме. Перейдём к комплексным амплитудам, введя огибающую $\tilde{\mathbf{E}}$ поля \mathbf{E} , см. (13). В дальнейшем знак ‘ \sim ’ для избежания громоздкости записи мы будем опускать. Падающее поле представим в виде $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_{\text{in},0} \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{r}]$. Усреднённый по периоду колебаний вектор Умова–Пойнтинга и, в частности, значение плотности потока в падающей волне равны

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad J = \frac{c|\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2}{2\pi}. \quad (55)$$

Полное сечение рассеяния σ (*сечение взаимодействия*) определяется как отношение суммы мощности I_s , рассеивающейся на

центре рассеяния, и мощности I_a , поглощающейся им, к плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{I_s}{J}, \quad \sigma_a = \frac{I_a}{J}. \quad (56)$$

Таким образом, мощность I есть мощность, отбираемая из падающей волны; σ_s называется *сечением рассеяния*, σ_a – *сечением поглощения*.

Мы рассматриваем трёхмерный случай. Вдалеке от рассеивающего центра электромагнитное поле представляет из себя совокупность плоской волны и сферических расходящихся волн:

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_{\text{in}}^i + \mathbf{E}_s^i \rightarrow \quad (57)$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_{\text{in},0}^i \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{r}] + \frac{f^{ij}\mathbf{E}_{\text{in},0}^j}{r} \exp[ikr],$$

где $|\mathbf{k}_{\text{in}}| = k$, а f^{ij} – амплитуда рассеяния; среди девяти пространственных матричных элементов амплитуды рассеяния есть только четыре независимых, поскольку у электромагнитных волн есть только две поляризации. Рассеянная центром рассеяния мощность I_s равна

$$I_s = J \int d\omega \frac{d\sigma_s}{d\omega}, \quad \frac{d\sigma_s}{d\omega} = r^2 \frac{(\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n})}{J}, \quad (58)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*],$$

где интегрирование производится по сферическим углам на сфере радиуса r , единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Мы ввели *дифференциальное сечение рассеяния* $d\sigma_s$, которое есть отношение мощности рассеянной волны, уходящей от рассеивателя в телесный угол $d\omega$, к плотности потока энергии падающей волны. Поглощаемая рассеивателем мощность равна

$$I_a = - \int r^2 d\omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]. \quad (59)$$

4.1. Оптическая теорема

Оптическая теорема связывает амплитуду рассеяния вперёд с полным сечением рассеяния, что может быть использовано для упрощения вычисления сечения рассеяния.

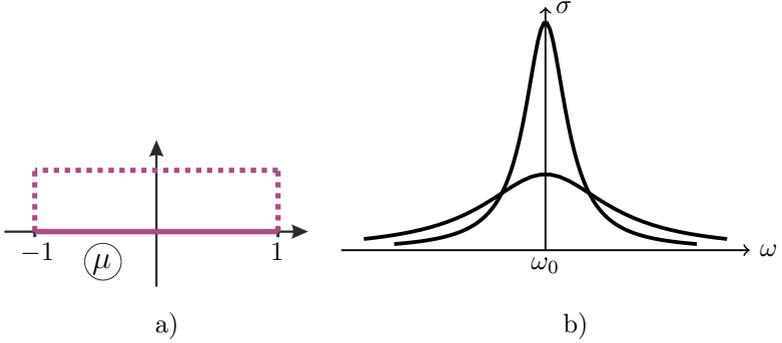


Рис. 4. а) контур интегрирования по переменной $\mu = \cos \theta$. Сплошной линией обозначен исходный контур, пунктирной – изменённый; б) зависимость резонансного вклада в сечение взаимодействия при разных (различающихся в 3 раза) добротностях резонанса. Интегралы под кривыми равны друг другу

Полный поток через поверхность большого радиуса r , нормированный на плотность падающего потока, по определению равен сечению поглощения, см. (59),(56). Преобразуем это выражение, используя разложение поля (57):

$$\sigma_a = -\sigma_s - \frac{c}{2\pi J} \operatorname{Re} \int r^2 d\omega ([\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{\text{in}}^*]) \mathbf{n},$$

где квадратичный вклад по полю падающей волны опущен, поскольку даёт нуль. Первое слагаемое в правой части соответствует излучению, производимому рассеивателем; второе слагаемое есть результат интерференции рассеянной волны с падающей. Теперь, используя равенства

$$\mathbf{H}_s = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_s], \quad \mathbf{H}_{\text{in}} = [\mathbf{n}_{\text{in}}, \mathbf{E}_{\text{in}}], \quad (60)$$

верные для плоских волн, см. (10), где $\mathbf{n}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{in}}/k$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \sigma_a = \\ &= -\frac{c}{2\pi J} \operatorname{Re} \int r \, d\omega \, f^{*ij} \left\{ E_{\text{in},0}^i E_{\text{in},0}^{*j} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}})) - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{E}_{\text{in},0} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E}_{\text{in},0}^* \cdot \mathbf{n}) \right\} \exp(i(\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{n} - k)r). \end{aligned} \quad (61)$$

В процессе выкладок мы раскрыли двойное векторное произведение и использовали то, что $\mathbf{E}_{\text{in},0} \perp \mathbf{n}_{\text{in}}$.

Для того чтобы взять интеграл по телесному углу в (61), перейдём к сферическим координатам $\{r, \theta, \varphi\}$, направив ось Oz по волновому вектору \mathbf{k}_{in} падающей волны, и введём переменную $\mu = \cos \theta$; тогда $\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{n} = kr\mu$. Интеграл в правой части (61) имеет вид и при $r \rightarrow \infty$ оценивается как

$$r \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr(\mu-1)} g(\mu) \rightarrow \frac{1}{ik} (g(1) - g(-1) \exp^{-2ikr}), \quad (62)$$

где $g(\mu)$ – функция, независящая от r . Оценка (62) оправдывается тем, что $g(\mu)$ предполагается аналитической функцией, не имеющей особенностей на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому мы можем деформировать контур интегрирования так, как показано на рис. 4а. При этом, в силу величины r , вклад в интеграл будут давать только боковые участки контура с длиной, обратно пропорциональной r . Таким образом, приходим к правой части (62).

Вклад в (62), соответствующий отражению назад, т.е. когда $\mu = -1$, равен нулю, поскольку $g(-1) = 0$ в случае (61). Действительно, первое слагаемое в фигурной скобке (61) равно нулю, поскольку $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}}) = \mu$, а второе слагаемое равно нулю, поскольку $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}_{\text{in},0}$ при $\mu = \pm 1$. Для оставшегося вклада интегрирование по углу φ даёт множитель 2π , поскольку интеграл определяется окрестностью направления $\theta = 0$. Поэтому (61) с учётом выражения для плотности падающего потока (55) сводится к

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [f^{ij}(0) e^{*i} e^j], \quad e^i = \frac{E_{\text{in},0}^i}{|\mathbf{E}_{\text{in},0}|}. \quad (63)$$

Равенство (63) составляет содержание *оптической теоремы*:

полное сечение рассеяния определяется мнимой частью амплитуды рассеяния вперёд.

4.2. Рассеяние света на малых частицах

Рассмотрим общие свойства рассеяния света частоты ω на частицах, размер a которых мал по сравнению с длиной волны света λ , так что $ka \ll 1$, где k – волновое число падающего света. В этом пределе основным механизмом взаимодействия частицы с электромагнитным полем является дипольное взаимодействие – и в отдельных случаях магнитодипольное взаимодействие.

Рассмотрим простейший случай, когда доминирующим является дипольное излучение, а поляризуемость (дипольная восприимчивость) α частицы изотропна, так что вектор дипольного момента и поле налетающей волны сонаправлены,

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

В терминах дипольной восприимчивости α оптическая теорема (63) для дипольно излучающего рассеивающего центра переписывается в виде

$$\sigma = 4\pi k \text{Im}[\alpha]. \quad (64)$$

Это равенство можно получить, если из выражения [2, Ур. (67.6)] для электрического поля колеблющегося диполя в волновой зоне извлечь амплитуду рассеяния (57), а затем подставить её в (63). Отметим, что рассмотрение [1, § 93] верно только в случае, когда сечение поглощения велико по сравнению с сечением рассеяния, $\sigma_a \gg \sigma_s$, в общем же случае верно соотношение (64).

Зная дипольную восприимчивость, можно также отдельно вычислить сечение рассеяния, воспользовавшись выражением [2, Ур. (67.8)] для интенсивности излучения гармонически колеблющегося дипольного момента:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{c} \frac{4\omega^4 |\mathbf{d}|^2}{|\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2 3c^3} = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4 |\alpha|^2}{c^4}. \quad (65)$$

4.2.1. Резонансное рассеяние света

Установим некоторые общие свойства рассеивания волн на резонансных частицах: будем интересоваться случаем, когда частота падающей волны близка к частоте ω_0 некоторого резонанса

частицы, который может быть возбуждён электрическим полем падающей волны. Пока величина отстройки $\delta\omega = \omega - \omega_0$ не велика, дипольная восприимчивость может быть представлена в виде

$$\alpha = Ba^3 - \frac{A\omega_0^2 a^3}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (66)$$

где A, B – некоторые действительные безразмерные константы порядка или меньше единицы, а a – радиус сферической частицы. Константа $\gamma > 0$ определяет ширину резонанса; для определённости мы предполагаем его хорошую добротность, так что $\gamma \ll \omega_0$. Структура знаменателя в (66) выбрана таким образом, чтобы обеспечить принцип причинности и действительность величины $\alpha(\tau)$ во временном представлении, см. [7, § 123]. Константа A должна быть положительной, $A > 0$, для того, чтобы обеспечить положительность мнимой части восприимчивости α . Величина B соответствует вкладу от всех прочих резонансов и может считаться константой, пока отстройка $\delta\omega$ мала по сравнению с расстоянием до другого ближайшего резонанса.

Сложение скоростей распада. Второе слагаемое в правой части (66) означает, что существует вклад в полный дипольный момент частицы, динамика которого удовлетворяет уравнению гармонических колебаний с затуханием:

$$\partial_t^2 \mathbf{d} + \omega_0^2 \mathbf{d} + \gamma \partial_t \mathbf{d} = A\omega_0^2 a^3 \mathbf{E}_{\text{in}}. \quad (67)$$

Из этого уравнения следует, что ширина резонанса есть то же самое, что скорость затухания свободных гармонических колебаний дипольного момента на резонансной частоте.

Существует по крайней мере два источника затухания амплитуды колебаний дипольного момента. Во-первых, энергия колебаний может излучаться путём дипольного излучения. Во-вторых, эта энергия может поглощаться внутри частицы, переходя в тепло. Поскольку эти два механизма диссипации являются независимыми, то скорости диссипации подчиняются закону сложения: полная скорость диссипации содержит два вклада:

$$\gamma = \gamma_{\text{loss}} + \gamma_{\text{rad}}.$$

Поглощение частицей энергии падающей волны соответствует части γ_{loss} и сечению поглощения σ_a ; величина этого поглощения определяется внутренними свойствами частицы. Переизлучение электромагнитной волны частицей не зависит от внутренних свойств частицы, оно даёт вклад γ_{rad} и соответствует сечению рассеяния σ_s .

Сечение рассеяния. Будем по-прежнему интересоваться окрестностью резонанса, когда отстройка по частоте от резонанса мала, $\delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$. В ситуации общего положения константы A, B имеют одинаковый порядок, поэтому вблизи резонанса первым слагаемым можно пренебречь, положив $B = 0$. Тогда дипольная восприимчивость может быть записана в более простом виде:

$$\alpha = -\frac{(A/2)\omega_0}{\delta\omega + i\gamma} a^3, \quad \omega > 0. \quad (68)$$

Вычислим вклад γ_{rad} в ширину резонанса, вызываемого рассеянием света. Для этого предположим, что частота падающей монохроматической волны совпадает с частотой резонанса частицы, $\omega = \omega_0$, а внутренние потери в частице отсутствуют, $\gamma_{\text{loss}} = 0$. В этом случае дипольная восприимчивость $\alpha = iA\omega_0 a^3 / 2\gamma_{\text{rad}}$, а полное сечение и сечение рассеяния совпадают, $\sigma = \sigma_s$. Вычисляя полное сечение двумя способами – через излучение (65) и через оптическую теорему (64), – находим, что полное сечение σ_{max} , дипольная восприимчивость и ширина γ_{rad} резонанса равны:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{3i}{2} \frac{1}{k^3}, \quad \gamma_{\text{rad}} = \frac{1}{3} A\omega_0 (ka)^3. \quad (69)$$

В частности, мы видим, что сечение рассеяния определяется длиной волны, а не размером частицы, и потому оказывается значительно больше её геометрического сечения πa^2 . Однако эта величина компенсируется узостью резонанса: добротность резонанса велика и пропорциональна кубу длины волны:

$$Q_{\text{max}} = \frac{3}{2A} \frac{1}{(ka)^3} \gg 1.$$

4.2.2. Взаимодействие частиц со светом в различных экспериментальных ситуациях

Теперь восстановим потери внутри частицы и исследуем параметры рассеяния и поглощения. Предположим, что мы рассматриваем рассеяние и прохождение световой волны через прозрачную среду, заполненную рассматриваемыми рассеивателями (с малой объёмной долей, так что взаимным влиянием частиц можно пренебречь).

Положим, как это часто бывает на практике, что внутренние потери доминируют, так что полная ширина резонанса $\gamma \gg \gamma_{\text{rad}}$. Учтём также возможную отстройку частоты падающей волны от резонанса, полагая $\delta\omega \neq 0$. Сечение взаимодействия (64) и сечение рассеяния (65) в условиях резонанса, когда $\delta\omega = 0$, равны

$$\sigma = \frac{\pi A \cdot ka \cdot \omega_0 \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}} \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}}, \quad (70)$$

$$\sigma_s = \frac{2\pi A^2 \cdot (ka)^4 \cdot \omega_0^2}{3((\delta\omega)^2 + \gamma^2)} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}}^2}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}},$$

то есть малы по сравнению с теоретически максимально возможным сечением рассеяния σ_{max} на резонансной частоте ω_0 .

Предположим, что рассеиваемая световая волна является монохроматической. В соответствии с нашими выводами, при увеличении внутренних потерь интенсивность прошедшей волны возрастает, см. рис. 4б, тогда как интенсивность рассеянной волны падает. Возрастание коэффициента прохождения при уменьшении добротности рассеивателей называют *эффектом просветления*.

Пусть теперь на частице рассеивается белый свет со спектральной шириной Δ , большой по сравнению с шириной резонанса, но малой по сравнению с расстоянием по частоте до соседнего резонанса. Усреднённое сечение взаимодействия равно

$$\sigma = \frac{1}{\Delta} \int \sigma(\delta\omega) d\delta\omega = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}}{\Delta} \sigma_{\text{max}}, \quad (71)$$

то есть не зависит от ширины резонанса. Сечение рассеяния

$$\sigma_s = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}^2}{\Delta \gamma} \sigma_{\text{max}}, \quad (72)$$

то есть уменьшается обратно пропорционально внутренним потерям. Таким образом, интенсивность прошедшего белого света не изменяется при увеличении потерь, см. рис. 4b, тогда как интенсивность рассеянного света уменьшается.

Литература

- [1] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [2] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [3] Zvezdin A. K. и Kotov V. A. Modern magneto-optics and magneto-optical materials. CRC Press, 1997.
- [4] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика: Учебное пособие для вузов. 3-е издание, стереотипное. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [5] Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields. Science 2006. № 312. P. 1780.
- [6] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том III. Квантовая механика (нерелятивистский случай). Издание четвёртое, исправленное. М.: Наука, 1989.
- [7] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика, часть 1. Издание 4-е. Наука-Физматлит, 1995.
- [8] Gedney S. D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices. Antennas and Propagation, IEEE Transactions 1996. № 44. P. 1630-1639.

Учебное издание

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Отдельные вопросы

1. Распространение волновых пакетов в диспергирующих средах;
2. Методы трансформационной оптики и её применение в вычислительных схемах;
3. Эффект Фарадея для распространения волн в гиротропных средах;
4. Рассеяние света на малых резонансных частицах

Учебно-методическое пособие

Составитель **Вергелес** Сергей Сергеевич

Редактор *Л.В. Себова*. Корректор *Н.Е. Кобзева*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 02.09.2016. Формат 60×84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 2,4. Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 120 экз. Заказ №17.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22. E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30. E-mail: polygraph@mipt.ru